Jianting's Lecture Review Notes

# 离散数学
# Discrete Mathematics

2020 Fall

Instructor：王国亮

Textbook：课堂讲义

Review for Discrete Mathematics

---

Jianting Feng

19th November 2020

BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY

## Abstract

# Contents

# Chapter 1

# 计数 Enumerate

## 1.1 集合分拆与重集

**Definition 1.1.1** (集合分拆)**.** 集合分拆是指将集合 $[n] \triangleq \{1, 2, \cdots, n\}$ 中的元素分为数个不同的非空集合 $B_1, B_2, \cdots, B_r$，并且保证每个元素一定要在某个 $B_i$ 中，这样的 $B_i$ 被称为 *blocks*。

**Definition 1.1.2** (第二类斯特林数（The Stirling number of the second kind）)**.** 第二类斯特林数 $S(n, k)$ 是将集合 $[n]$ 分拆为 $k$ 个不同的非空的 *blocks* 的方法总数。$[n]$ 的 *matching* 是指每个 *block* 包含最多两个元素。

**Proposition 1.1.1.** 对于任意 $n, k \geq 1$,

$$S(n,k) = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n$$

## 1.2 整数分拆与组合（partitons and compositions）

**Definition 1.2.1.** 正整数 $n$ 的一个分拆是指一列正整数 $\lambda$，常记做

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r) \vdash n,$$

满足

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_r \geq 1 \ \textit{and} \ \sum_{i=1}^{r} \lambda_i = n.$$

令 $p(0) = 1$ 且 $p(n)$ 是 $n \geq 1$ 的分拆总数，这样的 $p(n)$ 被称为分拆函数（*partition function*）。

**Definition 1.2.2.** 一个 $n$ 的 *composition* 是一列非负整数 $\mu$ 记为

$$\mu = (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_r) \models n,$$

满足

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i = n$$

| n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| p(n) | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 7 | 11 | 15 | 22 | 30 | 42 | 56 | 77 | 101 | 135 | 176 | 231 |

**Table 1.1**
**分拆函数 $p(n)$ 的值**

**Definition 1.2.3.** 对于任意一个分拆 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r \vdash n$，我们可以画一个左对齐的图，一共有 $r$ 行，每一行都有 $\lambda_i$ 个点（*dots*）。这样的图被称为 $\lambda$ 的 *Ferrers diagram*。如果用方格（*squares*）代替点，则得到的图被称为 *Young diagram*。相应的分拆 $\lambda$ 被称作该图的 *shape*，记做 $sh\lambda$。将 *Young diagram* 沿其主对角线翻转（*flip*）得到的新的 *Young diagram* 被称作原 *Young diagram* 的共轭（*conjugate*）。一个分拆是自共轭（*self-conjugate*）的当且仅当它的共轭等于自身。*Young diagram* 的 *Durfee square* 是指该图内部中最大的正方形（*square*）。

**Proposition 1.2.1.** 将正整数 $n$ 分拆为 $m$ 份的分拆的数量等于将 $n$ 分拆为若干份，每一份最大为 $m$ 的分拆数。

*Proof.* 考虑 Young diagram 的共轭即可。 □

**Proposition 1.2.2.** $n$ 的自共轭的分拆总数等于将 $n$ 分拆为若干个不同的奇数的分拆数。

**Definition 1.2.4.** *Euler* 函数是指

$$\phi(q) = \prod_{n \geq 1} (1 - q^n)$$

**Corollary 1.2.0.1.** 欧拉函数的倒数 $1/\phi(q)$ 是分拆函数 $p(n)$ 的生成函数，即

$$\sum_{n \geq 0} p(n) q^n = \frac{1}{\phi(q)}$$

**Theorem 1.2.1.** 将一个整数 $n$ 分拆为每一部分都是奇数的分拆数等于将其分拆为不同部分的分拆数。

*Proof.* 考虑代数证明，令 $a_n$ 为将 $n$ 分拆为奇数部分的分拆数，$b_n$ 为将 $n$ 分拆为不同部分的分拆数。则有

$$\sum_{n \geq 0} b_n q^n = \prod_{n \geq 1} (1 + q^n) = \prod \frac{1 - q^{2n}}{1 - q^n} = \prod_{n \text{ odd}} \frac{1}{1 - q^n} = \sum_{n \geq 0} a_n q^n$$

提取 $q^n$ 的系数即可。 □

**Theorem 1.2.2** (五角数定理（Pentagonal number theorem）)**.**

$$\begin{aligned}\phi(q) = \prod_{n \geq 1} (1 - q^n) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n q^{\frac{3n^2 - n}{2}} \\ &= 1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - q^{12} - q^{15} + \cdots.\end{aligned}$$

## 1.3 置换与词

**Definition 1.3.1.** 置换（*permutation*）是一个集合到自己的双射。集合 $[n]$ 上的置换常被记做 $\mathfrak{S}_n$。对合（*involution*）是每个 *cycle* 至多为 2 的置换（满足 $\pi^2=\pi$）。一个错排（*derangement*）是指没有不动点的置换 $\pi\in\mathfrak{S}_n$，即对于任意 $i\in[n]$，我们都有 $\pi(i)\neq i$。一个置换 $\pi=\pi_1\cdots\pi_n$ 反转（*reversal*）是 $\pi_n\pi_{n-1}\cdots\pi_1$。置换 $\pi$ 的补是 $\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n$ 其中 $\sigma_i=n+1-\pi_i$。词（*word*）是在一个重集上的置换，形如 $w_1w_2\cdots w_n$ 其中 $w_i$ 允许有重复。

令 $\pi\in\mathfrak{S}_n$，$c_i$ 为 $\pi$ 中长度为 $i$ 的 cycle 的数量，则 $\pi$ 中的 cycle 的总数为

$$c(\pi)=c_1+c_2+\cdots+c_n$$

我们将整数分拆 $1^{c_1}2^{c_2}\cdots n^{c_n}$ 为 $\pi$ 的 type，则有

$$c_1+2c_2+\cdots+nc_n=n$$

**Example 1.3.1.** 置换 $\pi=(125)(34)$ 的 *type* 是

$$1^02^13^14^05^0\vdash 5$$

**Proposition 1.3.1.** 对于置换 $\sigma\in\mathfrak{S}_n$，我们称它是 $\pi$ 的共轭，如果存在 $\tau\in\mathfrak{S}_n$ 满足

$$\sigma=\tau^{-1}\pi\tau$$

两个 $\mathfrak{S}_n$ 中的置换彼此共轭当且仅当它们有相同的 *type*。

**Proposition 1.3.2.** 在 $\pi\in\mathfrak{S}_n$ 中 *type* 为 $c=1^{c_1}2^{c_2}\cdots n^{c_n}$ 的置换总数为 $\frac{n!}{z_c}$，其中

$$z_c=1^{c_1}c_1!2^{c_2}c_2!\cdots n^{c_n}c_n!$$

**Definition 1.3.2.**

$$s(n,k)=(-1)^{n-k}c(n,k)$$

为第一类斯特林数（*Stirling numbers of the first knd*），其中 $c(n,k)$ 是 $\mathfrak{S}_n$ 中有 $k$ 个 *cycle* 的置换数量，被称为无符号的第一类斯特林数（*signless Stirling number of the first kind*）。

**Definition 1.3.3** (置换统计量（Permutation statistics）)**.** 设 $\pi=\pi_1\pi_2\cdots\pi_n\in\mathfrak{S}_n$.

1. $\pi$ 的 *descent* 是满足如下条件的 $i$ 的个数，$i\in[n-1]$ 满足

$$\pi_i>\pi_{i+1}$$

   $\pi$ 的 *ascent* 是是满足如下条件的 $i$ 的个数，$i\in[n-1]$ 满足

$$\pi_i<\pi_{i+1}$$

   *major index* $maj(\pi)$ 是 $\pi$ 的所有的 *descent* 的和，*i.e.*，

$$maj(\pi)=\sum_{\pi_i>\pi_{i+1}} i$$

*2.* $\pi$ 的 *inversion* 是满足如下条件的 *pair* 的个数，$\pi_i, \pi_j$ 满足

$$i < j \quad and \quad \pi_i > \pi_j$$

*3.* $\pi$ 的 *excedance* 是是满足如下条件的 $i$ 的个数，$i \in [n]$ 满足 $\pi > i$

*4.* $\pi$ 的 *peak* 是数 $i \in \{2, 3, \cdots, n-1\}$ 满足

$$\pi_{i-1} < \pi_i \quad and \quad \pi_i > \pi_{i+1.}$$

$\pi$ 的 *valley* 是数 $i \in \{2, 3, \cdots, n-1\}$ 满足

$$\pi_{i-1} > \pi_i \quad and \quad \pi_i < \pi_{i+1.}$$

*5.* $\pi$ 的 *left-to-right maxima* 是数 $\pi_i$ 的集合满足对于任意 $j < i$

$$\pi_i > \pi_j$$

同样我们可以定义 *left-to-right minima*，*right-to-left maxima*，*right-to-left minima*

**Example 1.3.2.** $\pi = 25431 \in \mathfrak{S}_5$ 的 *descent set* 为 $\{2, 3, 4\}$，*ascent set* 为 $\{1\}$，*inversion set* 是 $\{(5, 4), (5, 3), (5, 1), (4, 3), (4, 1), (3, 1), (2, 1)\}$，*excedance set* 为 $\{1, 2, 3\}$，因此

$$des(\pi) = 3, maj(\pi) = 9, asc(\pi) = 1, inv(\pi) = 7, exc(\pi) = 3$$

*left-to-right maxima* 为 $\{2, 5\}$，*left-to-right minima* 为 $\{2\ 1\}$,*right-to-left maxima* 为 $\{1, 3, 4, 5\}$，*right-to-left minima* 为 $\{1\}$。

**Definition 1.3.4.** 第 $n$ 个欧拉多项式（*Eulerian polynomial*）为

$$A_n(x) = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} x^{1+des(\pi)} = \sum_{k=1}^{n} A(n, k) x^k$$

系数为

$$A(n, k) = |\{\pi \in \mathfrak{S}_n : des(\pi) = k - 1\}|$$

被称为欧拉数（*Eulerian number*）。

**Note 1.3.1.** 事实上，$A(n, k)$ 为长为 $n$ 的置换中 *descent* 为 *k-1* 的置换的个数。

**Definition 1.3.5.** 任意一个和 *descent numbers* 同分布的统计量被称为 *Eulerian statistic.* 任何一个和 *inversion numbers* 同分布的统计量被称为 *Mahonian statistic.*

**Definition 1.3.6.** 设 $L = (a_0, a_1, \cdots, a_n)$ 是一列正数。我们称 $L$ 是 *unimodal* 的如果存在一个指标 $1 \leq k \leq n$ 满足

$$a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_k \geq a_{k+1} \geq \cdots \geq a_n,$$

我们称 $L$ 是 *log-concave* 的如果对于所有 $k$ 都有

$$a_{k-1} a_{k+1} \leq a_k^2$$

$L$ 是 *real-rooted* 的如果多项式 $\sum\limits_{j=0}^{n} a_j x_j$ 的根都是实根。

**Example 1.3.3.** $\binom{n}{k}$ 是 *unimodal*，*log-concave* 且 *real-rooted* 的。

**Theorem 1.3.1.** 设 $L = (a_0, a_1, \cdots, a_n)$ 是一列正数，则我们有如下的结论

1. 如果 $L$ 是 *real-rooted* 的，则 $L$ 是 *log-concave*；
2. 如果 $L$ 是 *log-concave* 的，则 $L$ 是 *unimodal*；
3. 如果 $L$ 是 *real-rooted* 的，则它有一个或两个最大值。

**Theorem 1.3.2.** 欧拉数序列 $\{A(n,k)\}_k$ 是 *real-rooted, i.e.,Eulerian* 多项式的所有零点都是实数。

Chapter 2

# 组合数与组合恒等式 Combinatorial numbers and identities

## 2.1 二项式系数

Chapter 3

# 数论 Number Theory

# Chapter 4

# 图论 Graph Theory

## 4.1 基本定义与概念

**Definition 4.1.1** (图)**.** 一个图 *(graph)* 是一个二元有序对 $(V, E)$, 其中 $V$ 是所有顶点 (*vertices*) 的集合, $E$ 是所有边 *edges* 的集合。一条边 $(u, v)$ 常被写作 $uv$。$V(G)$ 和 $E(G)$ 分别为图 $G$ 的顶点和边的集合。一个图 $G$ 的阶 (*order*) 是图的顶点个数 (*cardinality*) $|V(G)|$。对于 $v \in V(G)$, 如果存在 $uv \in E(G)$, 我们称 $u$ 和 $v$ 是邻接 (*adjacent*) 的, 否则称为非邻接 (*nonadjacent*) 的。顶点 $v$ 的邻居 (*neighborhood*), 被记做 $N_G(v)$ 是所有与 $v$ 邻接的顶点的集合。

**Definition 4.1.2** (简单图)**.** 一个简单图是一个既没有重边 (*multiple edge*) 也没有环 (*loop*) 的图。

**Definition 4.1.3** (补图)**.** 给定一个简单图 $G = (V, E)$, 它的补图 (*complement*) 的定义为简单图

$$\bar{G} = (V, \bar{E}),$$

其中 $\bar{E} = V^2 \backslash E$。意思是 $\bar{G}$ 中的点之间有边相连当且仅当在 $G$ 里面他们没有边相连。我们构建补图时可先构建完全图 $K_{|V(G)|}$, 再删除 $G$ 中出现过的边即可。

**Definition 4.1.4** (团)**.** 团 (*clique*) 是 $G$ 中的一组满足两两之间有边连接的顶点的集合。图 $G$ 的团数 (*clique number*) 是指图 $G$ 中最大的团的阶数。

**Definition 4.1.5** (独立集)**.** 图 $G$ 独立集 (*independent set*) 或稳定集 (*stable set*) 是一族两点之间互不相连的定点的集合。$G$ 的独立数 (*independent number*), 记为 $\alpha(G)$, 是 $G$ 中最大的独立集的阶数 (*order*)。

**Definition 4.1.6** (孤立点)**.** 一个顶点被称为孤立点当且仅当它没有邻居, *i.e.*

$$N_G(v) = \emptyset$$

**Definition 4.1.7** (邻接矩阵与关联矩阵)**.** 图 $G$ 是一个顶点和边分别为

$$V = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\} \text{ 和} E = \{e_1, e_2, \cdots, e_m\}$$

图 $G$ 的邻接矩阵（*adjacency matrix*）是指矩阵 $(a_{ij})_{n\times n}$，其中 $a_{ij}$ 是顶点 $v_i$ 和 $v_j$ 间的边数(简单图中只能为 *0* 或 *1*)。图 $G$ 的关联矩阵（*incidence matrix*）是指矩阵 $(b_{ij})_{n\times m}$，其中

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, \text{如果顶点 } v_i \text{ 与边 } e_j \text{ 相连} \\ 0, \text{其他情况} \end{cases}$$

一个图的谱（*spectrum*）是指邻接矩阵的所有特征值的集合。

**Definition 4.1.8** (度数)**.** 图 $G$ 的一个顶点 $v$ 的度数（*degree*）是与 $v$ 连接的边的数量，常被记做 $deg_G(v)$。度序列（*degree sequence*）是指一个由所有顶点的度从大到小排列而成的序列。一个图被称为正则的（*regular*）如果所有顶点的度相同。一个图被称为 $k$-正则（*k-regular*）如果它的所有顶点的度数都相同且为 $k$。一个图被称为 *cubic* 的如果它是 *3*-正则的。图 $G$ 的最大与最小度被分别记为 $\Delta(G)$ 与 $\delta(G)$。如果一个顶点的度为 1 则它被称为叶（*leaf*）。一个连接叶的边被称为叶边（*leaf edge*）。

**Note 4.1.1.** 一个环（*loop*）对度的贡献为 2。

**Theorem 4.1.1** (握手引理（the Handshaking Lemma）)**.** 对于任何有限图 $G = (V, E)$，我们有

$$\sum_{v\in V} deg\ v = 2|E|$$

**Note 4.1.2.** 很自然的能看出图 $G$ 中一定有偶数个度数为奇数的顶点。

**Theorem 4.1.2.** 一个非降的非负整数序列 $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n$ 成为一个度序列的充分必要条件为 $\sum\limits_{i=1}^{n} d_i$ 是偶数。

**Definition 4.1.9.** 设 $G = (V, E)$ 是一个简单图。$G$ 的子图（*subgraph*）是图 $(V', E')$，其中 $E' \subseteq E$，$V' \subseteq V$，并且 $V'$ 包含 $E'$ 中所有边的端点。生成子图（*spanning subgraph*）也称作 $G$ 的一个因子（*factor*），是一个子图并且包含原图 $G$ 的所有端点。$G$ 有 $k$-因子（*k-factor*）是指一个每个顶点的度都为 $k$ 的生成子图。图 $G$ 的分解（*factorization*）是指将一个图的所有边都分拆为因子（*factors*）。诱导子图（*induced subgraph*）是子图 $(V', G')$，如果 $V'$ 中的顶点在 $G$ 中相连，则他们一定在 $G'$ 中相连。一个顶点集 $U \subseteq V$ 的邻居（*neighborhood*）定义为 $U$ 中所有顶点的邻居的并，即

$$N_G(U) = \bigcup_{v\in U} N_G(v)$$

**Definition 4.1.10.** 一个 *walk* 是一个边（*edges*）的序列。*walk* 的长度是指它所含的边的个数。一个 *walk* 是闭合的（*closed*）当且仅当它的起始点和终点相同。一个 *trail* 是一个 *walk* 且不经过重复的边。一个 *path* 是一个 *trail* 且不经过重复的顶点。两个顶点的距离被定义为两个顶点间最短的 *path* 的长度。一张图的直径（*diameter*）是最短距离的最大值。图的 *Eulerian path* 是一

个 *trail* 而且访问过所有边，一个 *Eulerian circuit* 是一条到访过所有边的 *trail*。一个图被称为 *Eulerian* 如果它包含一个 *Eulerian* 回路。*Hamiltonian path* 是一个生成子图（到访所有顶点）。

**Definition 4.1.11.** 一个 *k-cycle* 是简单图 $G$ 中的闭合 $walk v_1 v_2 \cdots v_k v_1$ 并且不经过重复的边，进一步，一个 *k-cycle* 同构与 $C_k$。一个图被称为 *acyclic* 如果它不包含 *cycle*，这样的图被称为森林（*forest*）。图的围长（*girth*）是指图中最短的圈常，*circumference* 是指图中最长的圈的长度。一个图是 *Hamiltonian* 的当且仅当它的 *circumference* 等于它的度数（*order*）。

**Definition 4.1.12.** 一个图被称为连通的（*connected*）如果每一对顶点之间都有一条 *path*，否则被称为不连通的（*disconnected*）。一个连通分支（*connected component*）是指图 $G$ 中最大的连通子图，一个奇分支（*odd component*）是一个阶为奇数的分支，否则称为偶分支。

**Definition 4.1.13.** 对于 $k \in \mathbb{Z}^+$，一个图被称为 *k-connected* 的如果去除任意 $k-1$ 个顶点后该图都是连通的。图 $G$ 连通度（*connectivity*），记做 $\kappa(G)$ 是最大的 $k$ 使得图 $G$ 是 *k-connected*。

**Theorem 4.1.3.** 一个简单图 $G$ 是连通的如果

$$\delta(G) \geq \frac{|V(G)|}{2}.$$

**Definition 4.1.14.** 令 $k \geq 2$。一个 $k$ 部图（*k-partite*）是指图 $G = (V, E)$ 满足它可以被分解为 $k$ 个非空稳定集（*stable sets*）（内部不连通）。一个图被称为多部图（*multipartite*）如果 $k \geq 2$。一个 2-*partite* 图也被称为 *bipartite* 图。它的顶点集可被分解为

$$V = V_1 \sqcup V_2$$

**Theorem 4.1.4.** 任意的连通二部图的分解是惟一的。

**Theorem 4.1.5.** 一个有限连通图是欧拉图当且仅当所有顶点的度数都是偶数。

**Definition 4.1.15.** 如下是一些常见图的例子

1. 空图（*empty graph*）是指图 $(V, E)$ 满足 $V = E = \emptyset$
2. $n$ 阶完全图（*complete graph*），记做 $K_n$ 是指有 $n$ 个顶点且任意两个顶点都相邻的图。
3. 完全 $k$-部图（*complete k-partite graph*），记做 $K_{n_1,n_2,\cdots,n_K} = (V, E)$ 是指简单图其顶点被分为了非空集合 $V_1, V_2, \cdots, V_k$，其中 $k \geq 2$ 且 $|V_i| = n_i$ 对于任意 $i$ 成立且满足
4. $$E = \bigcup_{i \neq j} (V_i \times V_j).$$

   意思是任意两个不属于同一部分的顶点都有边相连。

   完全多部图是指完全 $k$-部图且 $k \geq 2$。一个完全二部图形为 $K_{n_1,n_2}$。*Turan* 图是一个完全 $k$-部图 $K_{n_1,n_2,\cdots,n_K}$ 且满足

   $$|n_i - n_j| \leq 1$$

   对于任意 $i$ 和 $j$ 都成立。

5. $n$ 阶 *path graph*，记做 $P_n$，是指一个简单图 $(V, E)$，其中

$$V = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\} \text{ 并且}$$
$$E = \{v_1v_2, v_2v_3, \cdots, v_{n-1}v_n\}$$

6. $n$ 阶 *cycle graph*，记做 $C_n$，是指简单图 $(V, E)$，其中

$$V = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\} \text{ 并且}$$
$$E = \{v_1v_2, v_2v_3, \cdots, v_{n-1}v_n, v_nv_1\}$$

   $C_3, C_4, C_5, C_6$ 分别被称为 *triangle, rectangle, pentagon* 和 *hexagon*。

7. 树（*tree*）是一个不含 *cycle* 的连通图。星（*star*）是一个形如 $K_1, n$ 的图，其中 $k \geq 2$。*claw* 是 *star* $K_1, 3$，*caterpillar* 是一个树且满足它们所有顶点距离中心 *path* 的距离小于 1，*lobster* 是一个树且满足它们所有顶点距离中心 *path* 的距离小于 2。

8. 一个 $n$ 阶（$n \geq 4$）轮图（*wheel graph*），记做 $W_n$，是一个简单图 $(V, E)$ 满足

$$V = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\} \text{ 并且}$$
$$E = \{v_0v_i : 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{v_1v_2, v_2v_3, \cdots, v_{n-1}v_n, v_nv_1\}.$$

9. 一个通过 $n$ 阶完全图 $K_n$ 删去一个顶点的图常被记做 $K_n - e$。钻石（*diamond graph*）是指图 $K_4 - e$

10. *Petersen graph* 是指简单图 $G = (V, E)$ 满足

$$V = \binom{[5]}{2} \text{ 和} E = \{uv \in V^2 : u \cap v = \emptyset\}$$

    它有 10 个顶点 15 条边。

11. 超立方图（*hypercube graph*），记做