

Simulaciones en acústica de auditorios con modelos de lattice-Boltzmann

John Alejandro Rojas Bermúdez

Departamento de física
Universidad Nacional de Colombia

Trabajo de grado, presentado como requisito para optar por el título de físico,
dirigido por:

Jose Daniel Muñoz Castaño

Noviembre 2016

Dedicado a mis padres y mi hermana, que con su gran apoyo y paciencia hicieron esto posible. ...

Declaration

I hereby declare that except where specific reference is made to the work of others, the contents of this dissertation are original and have not been submitted in whole or in part for consideration for any other degree or qualification in this, or any other university. This dissertation is my own work and contains nothing which is the outcome of work done in collaboration with others, except as specified in the text and Acknowledgements. This dissertation contains fewer than 65,000 words including appendices, bibliography, footnotes, tables and equations and has fewer than 150 figures.

John Alejandro Rojas Bermúdez

Noviembre 2016

Acknowledgements

And I would like to acknowledge ...

Abstract

En este trabajo se realiza una modelación numérica de recintos acústicos por medio del modelo de lattice-Boltzmann. Para ello se miden dos características importantes en la acústica de auditorios: la absorción y el tiempo de reverberación. Esto es importante ya que por medio de la medición del tiempo de reverberación es posible determinar la calidad de la acústica dentro de un recinto. A diferencia de otros trabajos en donde el tiempo de reverberación se mide usando otros métodos de simulación, en este trabajo se usa un modelo de lattice-Boltzmann. Para lograrlo se simula un montaje típico para la medición de la absorción de un material, y usando esto se calcula el tiempo de reverberación para una geometría simple. Los resultados aquí obtenidos concuerdan con la descripción teórica para la medición del tiempo de reverberación, por lo que se consigue comprobar la idoneidad de los modelos de lattice-Boltzmann en la acústica de auditorios.

Abstract

In this work a numerical modelling of acoustic enclosures is made using the lattice-Boltzmann model. For this, two important characteristics of the acoustics of auditoriums are measured: absorption and reverberation time. This is important because by measuring the reverberation time it is possible to determine the quality of acoustics within an enclosure. Unlike other works where reverberation time is measured using other simulation methods, a lattice-Boltzmann model is used in this work. In order to achieve this, a typical montage for the simulation of absorption is implemented numerically, and using this the reverberation time is calculated for a simple geometry. The results obtained here agree with the theoretical description for the measurement of the reverberation time, so that the suitability of the lattice-Boltzmann models in auditorium acoustics is verified.

Table of contents

List of figures	xv
List of tables	xvii
1 Introducción	1
2 Ondas de sonido	3
2.1 Elasticidad	3
2.2 Ondas en un medio elástico	6
2.3 Velocidad del sonido	8
2.4 Reflexión de ondas	10
2.5 Energía absorbida	13
2.6 Reverberación en un recinto cerrado	15
3 Lattice-Boltzmann para ondas	21
3.1 Planteamiento del modelo	21
3.2 Expansión de Chapman-Enskog	24
3.3 Condiciones de frontera	28
4 Simulación del coeficiente de absorción de una superficie	31
4.1 Montaje de la simulación	31
4.2 Procedimiento	32
4.3 Resultados	33
5 Simulación del tiempo de reverberación en un recinto cerrado	35
5.1 Montaje de la simulación	35
5.2 Procedimiento	36
5.3 Resultados	37

6	Otros resultados	43
6.1	Simulación de una galería de susurros	43
6.2	Simulación de un recinto elíptico	46
7	Conclusiones	49
	Referencias	51
	Appendix A How to install L^AT_EX	53
	Appendix B Installing the CUED class file	57

List of figures

2.1	Una barra de longitud L se estira una distancia ΔL debido a una fuerza F aplicada en sus extremos.	3
2.2	Las presiones deforman el elemento de volumen.	6
2.3	Para medir la absorción se usa un tubo de longitud L donde en $x = 0$ (azul) se coloca una fuente de sonido y en $x = L$ (café) se coloca una pared absorbente.	10
2.4	Patrón de ondas estacionarias dentro del tubo. Imagen tomada del artículo <i>Standing wave ratio</i> de la Wikipedia en inglés.	11
2.5	Ondas longitudinales generadas por los cambios de presión dentro del tubo. Imagen tomada de la página http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/Sound/tralon.html	11
2.6	Gráfica de la presión dentro del tubo.	13
2.7	Cuarto cerrado donde una de las superficies tiene una absorción distinta a la del resto de las paredes.	16
2.8	El elemento de volumen dV aporta εdV de energía al elemento de superficie ΔS	16
3.1	Modelo D2Q5 (izquierda) y modelo D3Q7 (derecha) para la simulación de ondas en dos y tres dimensiones respectivamente.	22
3.2	Los valores de f_i de cada celda se invierten en la frontera.	28
3.3	El valor de f_i cambia de dirección y de magnitud en la frontera.	29
4.1	Arreglo de 2000 celdas en donde la celda azul es una fuente sinusoidal de ondas, y la celda café es una celda absorbente.	32
4.2	Perfil de presión dentro del arreglo para los instantes iniciales de la simulación.	33
4.3	Relación entre la absorción y la constante de rebote k del modelo de lattice-Boltzmann.	34
5.1	Se usa una malla cúbica de $50 \times 50 \times 50$ celdas.	35
5.2	La presión para cada uno de los planos considerados una vez han transcurrido 6000 pasos de tiempo.	37

5.3	Comportamiento del cuadrado de la energía para una sola celda dentro del cubo.	38
5.4	Comportamiento del cuadrado de la energía para el promedio de todas las celdas de los planos en consideración.	39
5.5	Logaritmo de P^2 con respecto al tiempo.	39
5.6	Comportamiento del tiempo de reverberación en función de la longitud de onda.	41
6.1	En una galería de susurros si una persona habla en uno de sus extremos, lo que dice puede oírse con claridad en el otro extremo.	44
6.2	Uno de los modos normales de las ondas de presión dentro de un recinto cilíndrico.	45
6.3	Simulación de las ondas dentro de una semi-esfera con el modelo de lattice-Boltzmann.	45
6.4	Se muestran varios cuadros dentro de la simulación, en donde se puede ver como una perturbación producida en uno de los focos de la elipse rebota por las paredes hasta converger en el otro foco.	46

List of tables

Chapter 1

Introducción

El sonido es uno de las vías de comunicación mas importantes para el ser humano, su medio principal para comunicar ideas y emociones y fundamento de la música. Asistir a una sala de conciertos, a un discurso o a una conferencia llega a ser una experiencia grata solamente si el sonido llega de manera adecuada al que lo escucha. La calidad del sonido en un recinto está determinada por su forma y tamaño y por las propiedades absorbentes de los materiales que se usan en su construcción. La simulación numérica de la acústica de auditorios permite estudiar las propiedades sonoras de un recinto y así garantizar que dichas propiedades sean las indicadas para su uso. Por ejemplo en una sala de conciertos los tiempos de reverberación deben ser altos para que la intensidad del sonido se refuerce, mientras que en una sala de conferencias se deben tener tiempos cortos para mejorar la calidad de habla. Las simulaciones acústicas que se hacen en la actualidad usan principalmente un modelo de trazado de rayos, empleado principalmente para determinar si los tiempos de las primeras reflexiones refuerzan la intensidad del sonido, al llegar dentro de los primeros 40 milisegundos, o si son la fuente de ecos y otros efectos indeseados, cuando llegan después. Sin embargo, esta aproximación al problema deja de lado el comportamiento ondulatorio de las ondas de sonido, y por lo tanto es incapaz de reproducir el efecto de obstáculos angostos o rejillas de difracción acústicas.

Los modelos de lattice-Boltzmann son una alternativa para la simulación numérica de campos que evolucionan en el tiempo. En ellos, el espacio se divide en celdas y el tiempo avanza a pasos discretos. Cada celda contiene un conjunto de vectores velocidad que pueden transportar sus contenidos hacia las celdas vecinas. En cada celda, se define un conjunto de variables llamadas funciones de distribución, usualmente una por cada vector velocidad, con las que se calculan los campos macroscópicos que se van a simular. La evolución consiste en calcular estos campos, determinar con ellos un valor de equilibrio para cada una de las funciones de distribución y hacer que los valores actuales relajen hacia dichos valores de equilibrio durante un tiempo fijo. Los nuevos valores así calculados son transportados

entonces a las celdas vecinas, viajando con el vector velocidad al cual están asociados. Como todos los pasos de la evolución se realizan con informaciones que están dentro de la misma celda, los modelos de autómatas celulares son excelentes para ser implementados en sistemas de procesamiento paralelo, como tarjetas gráficas. Su empleo ha sido muy exitoso en la simulación masiva de fluidos, difusión, campos electromagnéticos y ondas.

La simulación de ondas acústicas con modelos de lattice-Boltzmann para ondas es un campo de trabajo muy reciente. Los trabajos previos realizados en la materia se han centrado principalmente en mostrar que es posible construir modelos de lattice Boltzmann que reproducen la ecuación de ondas y permiten reproducir su propagación y su reflexión en fronteras [11, 12]. La absorción de las ondas [13, 14] y la interacción de las ondas con fronteras estáticas [15] se ha realizado solamente usando modelos más complejos, diseñados para reproducir la ecuación de Navier-Stokes. Sin embargo, hay pocos trabajos que traten el tema de la reverberación con modelos de lattice-Boltzmann. Los trabajos mas comunes estudian el tiempo de reverberación usando otros métodos de simulación, o por medio de algún software comercial [16][17][18][19]. Por esta razón, en este trabajo se hace énfasis en el estudio de la reverberación usando un modelo de lattice-Boltzmann como una manera de probar su efectividad frente a otros métodos más establecidos.

En este trabajo se realiza una modelación numerica de recintos acústicos por medio del modelo de lattice-Boltzmann para ondas escalares. Este modelo reproduce la ecuación de onda y puede simular, por lo tanto, la propagación de las ondas de presión en el aire. El trabajo consiste en simular dos características muy importantes en la acústica de auditorios: la absorción y el tiempo de reverberación dentro de un recinto cerrado. Para la absorción se implementa numéricamente un experimento que permita medir el coeficiente de absorción para una superficie, mientras que para la reverberación se simula el tiempo que le toma a la energía acústica decaer una determinada cantidad dentro de un recinto cúbico. Adicionalmente, se realizan modelan dos situaciones que ilustran el poder del método: el funcionamiento de una galería de susurros y la propagación de las ondas en un recinto elíptico.

En el capítulo 2 se hace una descripción teórica de la elasticidad de un material así como la propagación de ondas sonoras en un medio elástico. También se proporciona una descripción teórica de la absorción y del tiempo de reverberación. En el capítulo 3 se describe el modelo de lattice-Boltzmann usado en este trabajo. En el capítulo 4 se describe en detalle el montaje usado en el cálculo del coeficiente de absorción. De igual manera, en el capítulo 5 se describe el montaje que permite calcular el tiempo de reverberación en un recinto cerrado. Por último, en el capítulo 6 se utiliza el modelo de lattice-Boltzmann para hacer dos simulaciones demostrativas: la simulación de una galería de susurros y el comportamiento de las ondas en un recinto elíptico.

Chapter 2

Ondas de sonido

En este capítulo se explora la teoría detrás de las ondas de sonido, donde partiendo de un modelo para la elasticidad en sólidos y fluidos se llega a una ecuación de onda describiendo el cambio en la presión del aire. También se estudia la relación de las propiedades elásticas de un fluido con la velocidad de desplazamiento de las ondas. Por último, se desarrolla la teoría detrás de la absorción de sonido de un material y se hace uso de esta para estudiar el comportamiento de la reverberación en un recinto cerrado.

2.1 Elasticidad

Antes de analizar la descripción matemática de las ondas de sonido en el aire es pertinente definir unos conceptos relacionados con la elasticidad en sólidos y fluidos. Un medio elástico no es más que un objeto que sufre deformaciones cuando una fuerza externa actúa sobre él. En este caso se consideran medios homogéneos e isotrópos, donde sus propiedades físicas no dependen ni de la posición ni de la orientación escogida.

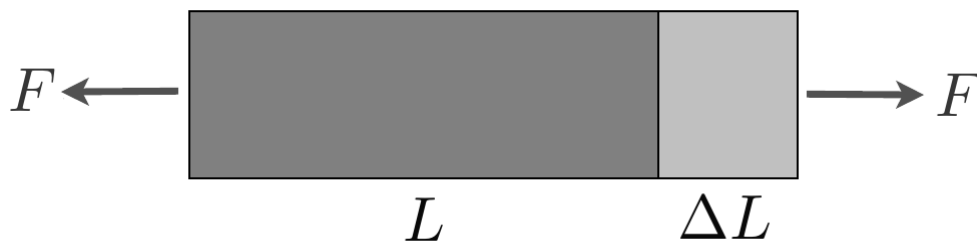


Fig. 2.1 Una barra de longitud L se estira una distancia ΔL debido a una fuerza F aplicada en sus extremos.

En el caso más simple se considera una vara de longitud L con sección transversal de área S constante [1][2]. Cuando la vara es sometida a una fuerza F_x actuando en cada uno de sus extremos, esta se deforma una longitud ΔL (figura 2.1). Se define la “tensión” como la fuerza que actúa en los extremos de la vara normalizada sobre su área transversal, de la forma

$$\sigma_{xx} \equiv \frac{F_x}{S}.$$

Por otro lado, la “deformación” que sufre la vara se define como el cambio de longitud que esta sufre dividido por su longitud total,

$$\epsilon_{xx} \equiv \frac{\Delta L}{L}.$$

Se asume que el estiramiento que sufre la vara en un punto arbitrario x es proporcional a la deformación, de manera que el estiramiento en un punto $x + \Delta x$ es

$$\begin{aligned} x &\implies \xi_x = \frac{\Delta L}{L}x \\ x + \Delta x &\implies \xi_{x+\Delta x} = \frac{\Delta L}{L}(x + \Delta x), \end{aligned}$$

donde ξ es el estiramiento de la vara en un punto arbitrario. Por tanto, se puede demostrar que la deformación se puede expresar en función de la derivada del estiramiento,

$$\epsilon_{xx} = \frac{\Delta \xi}{\Delta x} \rightarrow \frac{\partial \xi}{\partial x}.$$

Ahora se asume que la fuerza que produce el estiramiento obedece a la ley de Hooke, de manera que se puede relacionar la deformación con la fuerza a través de una constante de proporcionalidad de la forma

$$\sigma_{xx} = Y \epsilon_{xx},$$

donde Y es conocido como el módulo de Young. Si ahora generalizamos estos conceptos para que apliquen en los tres ejes coordenados, se tiene que la deformación se puede expresar como la derivada del estiramiento en cada uno de estos ejes de la forma

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad \epsilon_{yy} = \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad \epsilon_{zz} = \frac{\partial \zeta}{\partial z}.$$

De esta manera se puede definir una deformación volumétrica, la cual no tiene que ir ligada necesariamente a un cambio de forma. Esta deformación se define como

$$\theta \equiv \frac{\Delta V}{V}.$$

Con esta definición podemos considerar como es la deformación aplicada a un elemento cúbico de volumen $\Delta x \Delta y \Delta z$, donde el cambio de tamaño de ese elemento está dado por

$$\begin{aligned}\Delta x &\rightarrow \Delta x + \frac{\partial \xi}{\partial x} \Delta x \\ \Delta y &\rightarrow \Delta y + \frac{\partial \eta}{\partial y} \Delta y \\ \Delta z &\rightarrow \Delta z + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \Delta z,\end{aligned}$$

de manera que la deformación queda expresada como

$$\theta = \frac{\left(\Delta x + \frac{\partial \xi}{\partial x} \Delta x\right) \left(\Delta y + \frac{\partial \eta}{\partial y} \Delta y\right) \left(\Delta z + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \Delta z\right)}{\Delta x \Delta y \Delta z}.$$

Teniendo en cuenta la definición de la deformación y asumiendo que estas son muy pequeñas, de manera que los productos entre ellas se puedan despreciar, se tiene

$$\theta = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}.$$

Por tanto, se puede definir un vector desplazamiento de la manera

$$\mathbf{R} = \xi \hat{\mathbf{i}} + \eta \hat{\mathbf{j}} + \zeta \hat{\mathbf{k}}, \quad (2.1)$$

y de esta forma se puede ver que la deformación queda expresada como la divergencia del desplazamiento

$$\theta = \nabla \cdot \mathbf{R}.$$

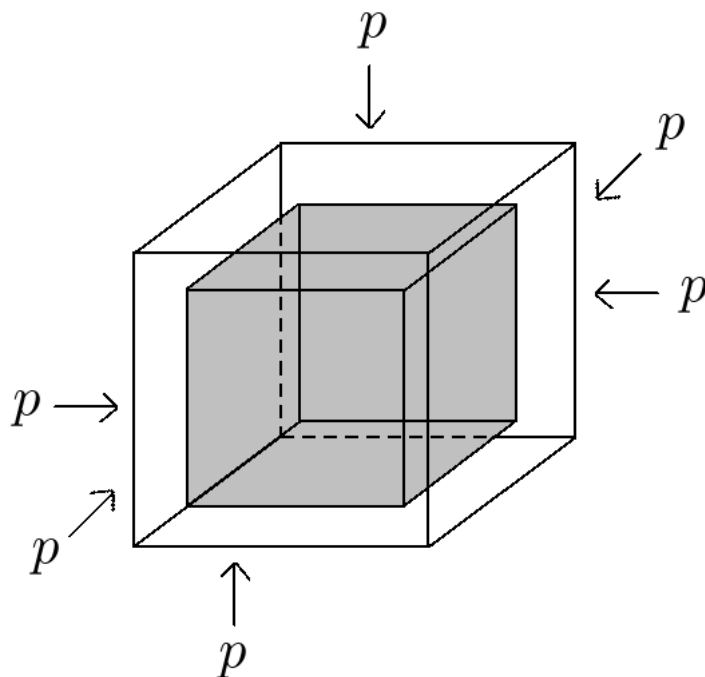


Fig. 2.2 Las presiones deforman el elemento de volumen.

Ahora podemos expresar la ley de Hooke haciendo uso de esta deformación volumétrica (figura 2.2), de manera que se tiene

$$p = -B\theta = -B\nabla \cdot \mathbf{R}, \quad (2.2)$$

donde B es la constante de proporcionalidad conocida como el módulo de compresibilidad (“Bulk modulus” en inglés), mientras que la fuerza por unidad de masa en este caso se expresa como una presión.

2.2 Ondas en un medio elástico

En este trabajo se examinan las ondas de sonido en el caso de un fluido con viscosidad despreciable, lo cual resulta ser una buena aproximación para el caso del aire. En este caso se supone que la única fuente de tensión en el fluido es producto de la presión, y también se supone que todas las fuerzas siempre son normales a cualquier superficie dentro del fluido. Para esta deducción, en vez de usar la presión absoluta P se usa una presión que es relativa a la presión de equilibrio del fluido (la cual se tiene en ausencia de movimiento) de la forma

$$p(\mathbf{r}, t) = P(\mathbf{r}, t) - P_0(\mathbf{r}, t),$$

donde P_0 es la presión de equilibrio y p es la presión relativa. Ahora se asume que se tiene una superficie arbitraria dentro del fluido donde sólo actúan fuerzas normales [3][4]. En ese caso un elemento de fuerza dentro del fluido se puede escribir de la forma

$$d\mathbf{F}_n = -pd\mathbf{S} = -p\hat{n}dS,$$

donde la presión p actúa como una constante de proporcionalidad entre el elemento de fuerza y el elemento de área $d\mathbf{S}$. El signo menos aparece porque el elemento de área apunta hacia afuera de la superficie, mientras que la presión se define como actuando hacia adentro del volumen. Si se integra el elemento de fuerza sobre toda la superficie, se obtiene la fuerza total que actúa sobre el volumen en consideración, es decir,

$$\mathbf{F} = \oint_S d\mathbf{F}_n = - \oint_S p\hat{n}dS,$$

donde se puede reemplazar la fuerza total \mathbf{F} por una fuerza por unidad de volumen

$$\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{F}}{dV}.$$

Por tanto, la integral se puede expresar como

$$\int_V \mathbf{f}dV = - \oint_S p\hat{n}dS.$$

Ahora se usa una versión del teorema de la divergencia para campos escalares, por lo que la integral de superficie de la presión se puede expresar como una integral de volumen actuando en el gradiente de la presión, quedando la anterior ecuación expresada como

$$\int_V \mathbf{f}dV = - \int_V \nabla p dV,$$

donde los integrandos deben satisfacer la igualdad, por lo que finalmente se llega a que la fuerza externa se puede expresar como el gradiente de la presión:

$$\mathbf{f} = -\nabla p. \quad (2.3)$$

Ahora queremos obtener la dinámica del sistema. Para ello consideramos como se mueve un elemento de volumen $\Delta x \Delta y \Delta z$. En este caso la masa del elemento es $\rho_0 \Delta x \Delta y \Delta z$, donde ρ_0 es la densidad, mientras que la aceleración viene dada por la segunda derivada del desplazamiento (2.1). Por tanto, por medio de la segunda ley de Newton se puede ver que la

fuerza $\Delta \mathbf{F}$ que actúa sobre el elemento de volumen es

$$\Delta \mathbf{F} = \rho_0 \Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial t^2},$$

donde usando la relación (2.3), la segunda ley de newton queda expresada como

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{F} &= -\nabla p \Delta x \Delta y \Delta z = \rho_0 \Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial t^2} \\ -\nabla p &= \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

Ahora queremos dejar expresada la ecuación anterior en términos de la presión y no del desplazamiento. Para ello se aplica la divergencia y se usa la ecuación (2.2), de manera que se obtiene una ecuación de onda

$$\begin{aligned} \nabla^2 p &= \frac{\rho_0}{B} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \\ \nabla^2 p &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}, \end{aligned}$$

donde c es la velocidad de la onda definida como $c = (B/\rho_0)^{1/2}$.

2.3 Velocidad del sonido

Para determinar como la ecuación (2.2) se relaciona con la velocidad del sonido en el aire, vemos que si expresamos la presión relativa de esta ecuación como un delta de presión, podemos reescribir la ecuación como

$$\begin{aligned} \Delta P &= -B \frac{\Delta V}{V} \\ B &= -V \frac{\Delta P}{\Delta V}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Ahora supongamos que la generación de sonido en el aire en un proceso isotérmico [5][6], en cuyo caso si derivamos la ecuación de los gases ideales con respecto al volumen se tiene

$$\frac{dP}{dV} = -\frac{Nk_B T}{V^2},$$

donde haciendo uso de (2.4) y de la ley de los gases ideales se tiene que el modulo de compresibilidad es igual a la presión de equilibrio,

$$B = P_0. \quad (2.5)$$

Por otro lado, la ley de los gases ideales se puede expresar en términos de la densidad introduciendo la masa atómica dentro de la ecuación

$$\begin{aligned} P_0 &= \frac{Nm_0k_BT}{Vm_0} = \rho_0 \frac{k_BT}{m_0} \\ \frac{P_0}{\rho_0} &= \frac{k_BT}{m_0}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

De esta manera, reemplazando (2.5) en la expresión para la velocidad del sonido obtenida anteriormente se tiene que esta se puede expresar como

$$c = \left(\frac{B}{\rho_0} \right)^{1/2} = \left(\frac{P_0}{\rho_0} \right)^{1/2},$$

donde usando (2.6) se tiene

$$c = \sqrt{\frac{k_BT}{m_0}}.$$

Con esta ecuación podemos hacer un estimado de la velocidad del sonido en el aire asumiendo una composición de 80% nitrógeno y 20% oxígeno, $m_0 = 0.8m_{N_2} + 0.2m_{O_2}$. También se asume una temperatura ambiente de 300 Kelvin. De esta manera se tiene

$$c_{\text{isotérmico}} = 294 \text{ m/s}.$$

Esta velocidad es algo más baja que el valor aceptado. La corrección a esta velocidad la encontró Laplace al darse cuenta de que los cambios de presión en el aire son muy rápidos como para considerar el proceso isotérmico. En cambio, si asumimos que el proceso es adiabático podemos llegar a un resultado más preciso. En este caso, partimos de la ecuación del balance de energía

$$dE = dQ - PdV.$$

En un gas diatómico la energía se expresa como

$$E = \frac{5}{2}Nk_BT.$$

Haciendo uso de estas dos ecuaciones e integrando se llega a la siguiente relación entre el volumen y la temperatura,

$$T_2^{5/2}V_2 = T_1^{5/2}V_1 = \text{cte.}$$

La ecuación anterior se puede escribir de una forma mas familiar como

$$PV^\gamma = \text{cte,}$$

donde a γ se le conoce como el índice politrópico, el cual tiene un valor de $\gamma = 7/5 = 1.4$ en este caso. Haciendo uso de esta nueva expresión para la presión, podemos seguir el procedimiento anterior para hallar la velocidad del sonido en el caso adiabático, la cual arroja un valor de

$$c_{\text{adiabático}} = \sqrt{\gamma \frac{k_B T}{m}} = \sqrt{\gamma} (c_{\text{isotérmico}}) = 348 \text{ m/s.}$$

Este nuevo valor concuerda mucho mejor con la velocidad real del sonido que el obtenido con la aproximación isotérmica.

2.4 Reflexión de ondas

Una manera clásica de medir la absorción de ondas de sonido en un laboratorio es por medio de un tubo en el que en uno de sus extremos se coloca una fuente de sonido y en el otro se coloca una pared absorbente [7]. También se sitúa un micrófono dentro del tubo de manera que se puedan medir los cambios de presión en función del tiempo. Dentro del tubo se generan ondas de presión, y midiendo la manera en que esta presión cambia dentro de este es posible medir la absorción del material de la pared.

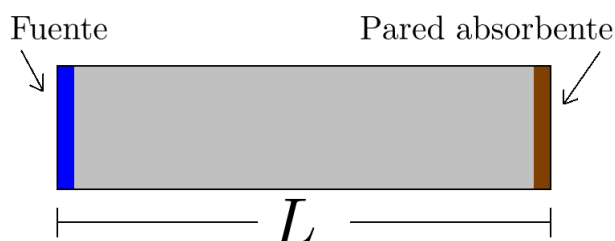


Fig. 2.3 Para medir la absorción se usa un tubo de longitud L donde en $x = 0$ (azul) se coloca una fuente de sonido y en $x = L$ (café) se coloca una pared absorbente.

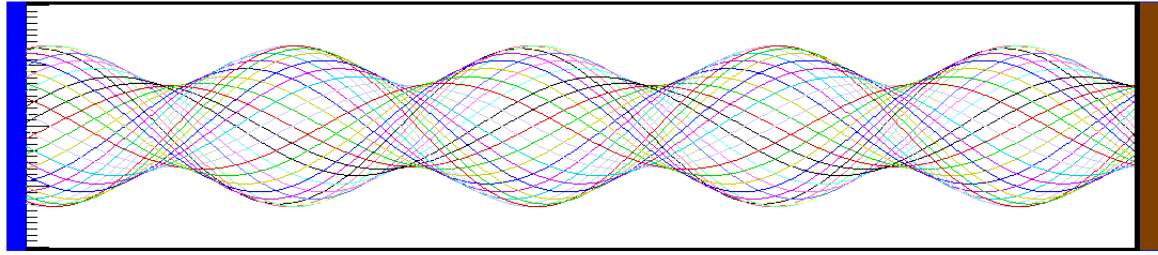


Fig. 2.4 Patrón de ondas estacionarias dentro del tubo. Imagen tomada del artículo *Standing wave ratio* de la Wikipedia en inglés.

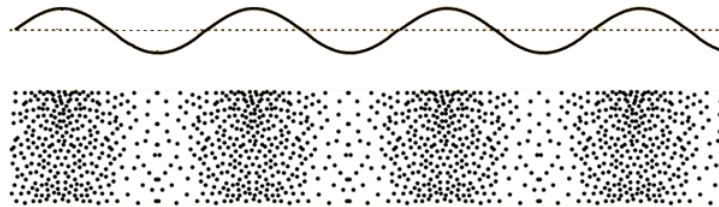


Fig. 2.5 Ondas longitudinales generadas por los cambios de presión dentro del tubo. Imagen tomada de la página <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/Sound/tralon.html>.

Suponemos un tubo de longitud L colocado a lo largo del eje x (figura 2.3)[8]. En $x = 0$ se coloca una fuente sinusoidal de sonido (azul) y en $x = L$ se coloca una pared absorbente (café). La expresión para la presión dentro del tubo es

$$\mathbf{p} = \mathbf{A}e^{i(\omega t - kx)} + \mathbf{B}e^{i(\omega t + kx)},$$

donde especificando la posición en términos de $(L - x)$ se tiene

$$\mathbf{p} = \mathbf{A}e^{i(\omega t + k(L-x))} + \mathbf{B}e^{i(\omega t - k(L-x))}. \quad (2.7)$$

Esta presión genera un patrón de ondas estacionarias como se puede ver en la figura 2.4, donde los cambios de presión en el aire generan la propagación de ondas longitudinales (figura 2.5). La impedancia mecánica se define como el cociente entre la fuerza y la velocidad,

$$Z_{mx} = \frac{\mathbf{F}}{\mathbf{u}},$$

donde usando la ecuación de Euler ($\rho_0 \partial_t \mathbf{u} = -\partial_x p$), la velocidad se expresa como

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= -\frac{1}{\rho_0} \int \frac{\partial p}{\partial x} dt \\ &= \frac{1}{\rho_0 c} \left[\mathbf{A} e^{i(\omega t + k(L-x))} - \mathbf{B} e^{i(\omega t - k(L-x))} \right].\end{aligned}$$

En el caso de la fuerza, ésta no es más que la presión multiplicada por el área de la sección transversal

$$\mathbf{F} = pS,$$

por tanto, la impedancia se expresa como

$$\begin{aligned}Z_{mx} &= \frac{pS}{\mathbf{u}} \\ &= \rho_0 c S \frac{\mathbf{A} e^{i(k(L-x))} + \mathbf{B} e^{-i(k(L-x))}}{\mathbf{A} e^{i(k(L-x))} - \mathbf{B} e^{-i(k(L-x))}}.\end{aligned}$$

Si calculamos la impedancia para $x = L$ se tiene

$$Z_{mL} = \rho_0 c S \frac{\mathbf{A} + \mathbf{B}}{\mathbf{A} - \mathbf{B}}. \quad (2.8)$$

Si ahora escribimos

$$\mathbf{A} = A, \quad \mathbf{B} = B e^{i\theta}, \quad (2.9)$$

reemplazando esto en (2.8) podemos escribir la impedancia como

$$\frac{Z_{mL}}{\rho_0 c S} = \frac{1 + (B/A) e^{i\theta}}{1 - (B/A) e^{i\theta}}.$$

Por tanto, si conocemos el cociente B/A y el ángulo θ podemos calcular la impedancia.

Si ahora queremos obtener la expresión para la presión dentro del tubo, simplemente reemplazamos (2.9) en (2.7), donde se obtiene

$$p = \left((A+B)^2 \cos^2[k(L-x) - \theta/2] + (A-B)^2 \sin^2[k(L-x) - \theta/2] \right)^{1/2}.$$

En la figura 2.6 se observa una gráfica de la presión. El máximo de presión se da en el punto $p_{max} = A + B$, mientras que el mínimo se tiene en $p_{min} = A - B$. El ángulo de desfase θ puede ser obtenido midiendo la distancia desde el punto $x = L$ hasta el primer máximo, de manera que se tiene $\theta = kx_{max}$.

Para encontrar una manera práctica de medir B/A definimos una cantidad conocida como el *standing wave ratio*

$$SWR = \frac{p_{max}}{p_{min}} = \frac{A+B}{A-B},$$

el cual se puede reescribir como

$$\frac{B}{A} = \frac{SWR - 1}{SWR + 1}. \quad (2.10)$$

De esta manera, para determinar la impedancia dentro del tubo solo hace falta medir el coeficiente entre el máximo y mínimo de presión SWR , y por medio de la ecuación anterior se puede obtener el cociente B/A .

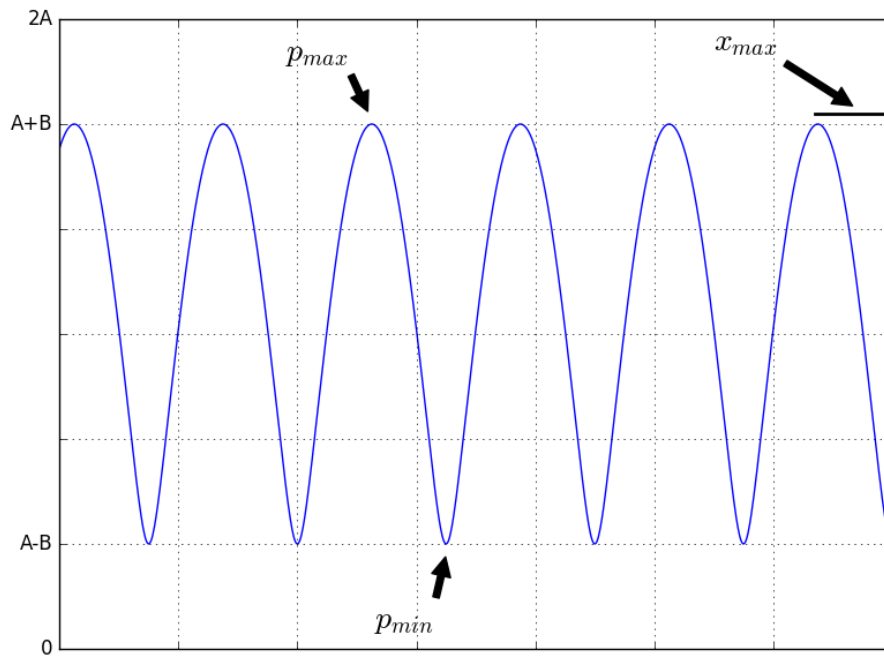


Fig. 2.6 Gráfica de la presión dentro del tubo.

2.5 Energía absorbida

Una manera de estudiar la absorción de las ondas de sonido cuando se encuentran con una pared absorbente es observar el comportamiento de una onda cuando se experimenta un cambio de medio [1]. Supongamos que tenemos una cuerda moviéndose a lo largo del eje x . A la izquierda de $x = 0$ la cuerda tiene una densidad λ_1 y a la derecha una densidad λ_2 . Las condiciones de frontera de la cuerda son la continuidad del desplazamiento así como de su

velocidad en el punto en el que se produce el cambio de densidad:

$$y(x=0)_{\text{izquierda}} = y(x=0)_{\text{derecha}}$$

$$\frac{dy}{dx}(x=0)_{\text{izquierda}} = \frac{dy}{dx}(x=0)_{\text{derecha}}.$$

Si se supone una solución exponencial para la ecuación de onda de manera que se cumplan las condiciones de frontera, se debe tener una expresión para la onda incidente, una para la onda reflejada y otra para la transmitida de la siguiente manera

$$\begin{aligned} y_i &= A_1 e^{i(k_1 x - \omega t)} && \text{Onda incidente} \\ y_r &= \hat{B}_1 e^{i(-k_1 x - \omega t)} && \text{Onda reflejada} \\ y_t &= \hat{A}_2 e^{i(k_2 x - \omega t)} && \text{Onda transmitida,} \end{aligned}$$

en donde \hat{B}_1 y \hat{A}_2 en general son complejos. En todos los casos la frecuencia es la misma. Las ondas incidente y reflejada tienen el mismo vector de onda pero se desplazan en direcciones contrarias, mientras que en la onda transmitida el vector de onda cambia. Cuando se aplican las condiciones de frontera se obtienen las expresiones

$$\begin{aligned} A_1 + \hat{B}_1 &= \hat{A}_2 \\ k_1 A_1 - k_1 \hat{B}_1 &= k_2 \hat{A}_2, \end{aligned}$$

donde las constantes \hat{B}_1 y \hat{A}_2 se pueden expresar en términos de la amplitud de la onda incidente A_1 . De esta manera, podemos expresar estas relaciones más fácilmente en término de las razones \hat{B}_1/A_1 y \hat{A}_2/A_1 de la forma

$$\begin{aligned} \hat{R} &\equiv \frac{\hat{B}_1}{A_1} = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \\ \hat{T} &\equiv \frac{\hat{A}_2}{A_1} = \frac{2k_1}{k_1 + k_2}, \end{aligned}$$

donde se han definido \hat{R} y \hat{T} como el coeficiente de reflexión y coeficiente de transmisión respectivamente. Si se usa (2.9), el coeficiente de reflexión se puede escribir como

$$\hat{R} = \frac{B}{A} e^{i\theta}. \quad (2.11)$$

Por otro lado, se sabe que la potencia de una onda es proporcional a su amplitud,

$$P = \frac{1}{2} \lambda_0 c \omega^2 A^2.$$

Esto nos permite definir un nuevo coeficiente de reflexión que describa la potencia reflejada. En este caso, usando (2.11) se puede escribir la razón entre la potencia reflejada y la potencia incidente

$$R = \hat{R}^2 = \frac{B^2}{A^2}.$$

Para conservar la energía, la potencia reflejada debe ser igual a la potencia transmitida, de manera que se tiene que

$$T = 1 - R,$$

donde se define un coeficiente de transmisión T , o lo que es lo mismo, un coeficiente de absorción. De esta manera, usando (2.10) se puede calcular la transmisión mediante la medición de SWR , donde se puede ver fácilmente que la absorción queda expresada en términos de esta cantidad como

$$T = 1 - R = 1 - \frac{B^2}{A^2} = 1 - \left(\frac{SWR - 1}{SWR + 1} \right)^2. \quad (2.12)$$

De esta manera, el objetivo de la siguiente sección es plantear una simulación de prueba que nos permita encontrar una relación entre T y la constante de rebote del modelo de lattice-Boltzmann k , de tal manera que podamos incorporar paredes absorbentes en el modelo.

2.6 Reverberación en un recinto cerrado

A finales del siglo XIX, Wallace Sabine introdujo una relación empírica que relaciona el tiempo de reverberación de un recinto cerrado, su volumen y la absorción de sus paredes [8]. Esta relación es conocida como la ecuación de Sabine:

$$T \propto \frac{V}{A}. \quad (2.13)$$

En esta ecuación el tiempo de reverberación es proporcional al cociente entre el volumen y la absorción de las paredes del recinto. Si se tiene una habitación con una ventana como la de la figura 2.7, esta tendría una absorción diferente a la de las paredes.

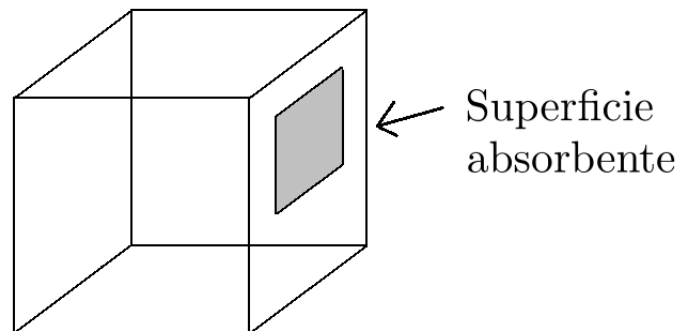


Fig. 2.7 Cuarto cerrado donde una de las superficies tiene una absorción distinta a la del resto de las paredes.

La reverberación es una de las medidas más importantes en acústica de recintos. Esta es definida como el tiempo que le toma a la energía acústica en un determinado recinto decaer una determinada cantidad. Supongamos que en una habitación cerrada se enciende una fuente de sonido por un determinado tiempo. Debido a que las paredes son absorbentes la energía acústica dentro de la habitación continuará aumentando hasta alcanzar un valor de equilibrio (típicamente un valor más grande que si se hubiera colocado la fuente al aire libre). Una vez en equilibrio, se asume que la densidad de energía es aproximadamente uniforme a lo largo del recinto. Posteriormente, la fuente de sonido se apaga y la densidad de energía acústica empieza a disminuir. El tiempo de reverberación entonces se define como el tiempo que le toma a la densidad de energía disminuir una determinada cantidad. Típicamente se escoge un valor de 60 decibelios para esta disminución.

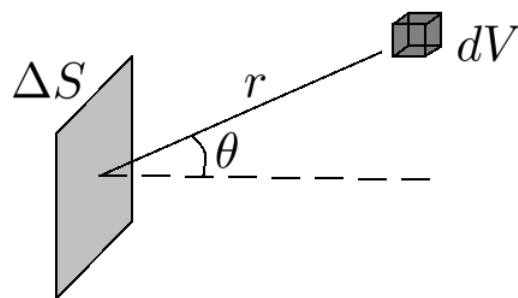


Fig. 2.8 El elemento de volumen dV aporta εdV de energía al elemento de superficie ΔS .

Para justificar matemáticamente la ecuación de Sabine supongamos que en un cuarto cerrado se enciende una fuente de sonido el tiempo suficiente como para que la energía acústica sea uniforme, excepto cerca de la fuente de sonido. Supongamos que tenemos un elemento de superficie ΔS de una de las paredes y un elemento de volumen cualquiera dV (figura 2.8) dentro del cubo. La densidad de energía en cualquier punto de la habitación es ε ,

por lo tanto, la energía del elemento de volumen es ϵdV . Si el elemento de volumen está a una distancia r del elemento de superficie y a un ángulo θ de su normal, entonces la fracción de energía contenida en el elemento de volumen que finalmente llega hasta la superficie es

$$\frac{\Delta S \cos \theta}{4\pi r^2} \epsilon dV.$$

Ahora suponemos que el elemento de volumen hace parte de medio cascarón esférico centrado en ΔS . Si integramos la expresión anterior sobre esta media esfera obtenemos la cantidad de energía aportada por ese cascarón al elemento ΔS , es decir,

$$\begin{aligned} \Delta E &= \frac{\Delta S}{4\pi r^2} \epsilon r^2 \Delta r \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi \\ &= \frac{\epsilon \Delta S \Delta r}{4}, \end{aligned}$$

donde Δr es el grosor del cascarón esférico. De esta manera, la energía que llega a ΔS en un tiempo Δt es

$$\frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{\epsilon \Delta S \Delta r}{4\Delta t} = \frac{\epsilon c \Delta S}{4},$$

donde $c = \Delta r / \Delta t$. Si el elemento ΔS absorbe una parte de la potencia que le llega, esta se puede cuantificar multiplicando la expresión anterior por una constante,

$$\frac{\Delta E}{\Delta t} \text{ absorbida} = \alpha \frac{\epsilon c \Delta S}{4},$$

donde α es el coeficiente de absorción, el cual cuantifica cuanto de la potencia que llega a la superficie es absorbida por esta. El resultado anterior da cuenta de la potencia para un solo elemento de superficie de los muchos que conforman el recinto cerrado en cuestión. Si queremos obtener la potencia absorbida de todas las paredes del cuarto, se tiene que sumar sobre cada uno de los elementos de superficie de la siguiente forma

$$\Pi_{\text{absorbida}} = \alpha_1 \frac{\epsilon c \Delta S_1}{4} + \alpha_2 \frac{\epsilon c \Delta S_2}{4} + \dots + \alpha_n \frac{\epsilon c \Delta S_n}{4},$$

donde denotamos la potencia con el símbolo Π . En esta ecuación cada elemento ΔS tiene su propio coeficiente de absorción, por tanto, podemos agrupar la expresión correspondiente a la suma de los productos de la absorción con el área de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{absorbida}} &= \frac{\epsilon c}{4} (\alpha_1 \Delta S_1 + \alpha_2 \Delta S_2 + \dots + \alpha_n \Delta S_n) \\ &= \frac{A \epsilon c}{4}. \end{aligned}$$

La absorción producida por todos los elementos de superficie se cuantifica por medio de la cantidad A , la cual aparece en la ecuación de Sabine (2.13). Ahora consideremos que existe una fuente externa de potencia dentro del recinto cerrado. De esta manera es posible construir una ecuación diferencial que de cuenta del cambio de la energía acústica con respecto al tiempo:

$$\begin{aligned}\Pi(t) &= \Pi_{\text{entrada}} - \Pi_{\text{absorbida}} \\ V \frac{d\varepsilon}{dt} &= \Pi_{\text{entrada}} - \frac{A\varepsilon c}{4} \\ V \frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{A\varepsilon c}{4} &= \Pi_{\text{entrada}}.\end{aligned}$$

Con esta ecuación diferencial se puede conocer el comportamiento de la energía dentro del cuarto. Para saber como se comporta la energía cuando se enciende una fuente de sonido en el tiempo $t = 0$, se resuelve la ecuación con la condición inicial $\varepsilon(t = 0) = 0$, con lo cual se tiene que la energía en función del tiempo es

$$\varepsilon(t) = \frac{4\Pi}{Ac} \left(1 - e^{-t/\tau_E}\right),$$

donde $\tau_E = \frac{4V}{Ac}$. Para simplificar se ha denotado la potencia de entrada simplemente como Π . De la ecuación anterior es fácil ver que después de que ha transcurrido mucho tiempo la energía dentro del recinto se estabiliza en un valor $\frac{4\Pi}{Ac}$. Ahora miremos que es lo que pasa cuando se apaga la fuente de sonido después de que la energía se ha estabilizado. En ese caso resolvemos la ecuación con la condición inicial $\varepsilon(t = 0) = \varepsilon_0$ y haciendo $\Pi = 0$, de manera que se tiene

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 e^{-t/\tau_E}. \quad (2.14)$$

De este modo vemos que la energía dentro del recinto decae exponencialmente a partir de un valor inicial.

Como dijimos antes, el tiempo de reverberación se define como el tiempo que transcurre para que la energía acústica dentro de un cuarto disminuya 60 decibelios, lo cual queda expresado de la forma

$$60 = 10 \log_{10} \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0 e^{-t/\tau_E}} \right),$$

donde despejando para el tiempo finalmente se obtiene la expresión para el tiempo de reverberación:

$$t = 6 \ln(10) \tau_E \approx 13.82 \tau_E. \quad (2.15)$$

Si tomamos el caso del aire donde c es aproximadamente 343 m/s, se obtiene que el tiempo de reverberación es

$$t = 0.161 \frac{V}{A},$$

lo cual coincide con la ecuación de Sabine planteada antes. De esta manera, conociendo la velocidad del sonido en un medio es posible obtener el tiempo de reverberación, lo cual haremos nuevamente cuando simulemos un recinto cúbico con el modelo de lattice-Boltzmann y comparemos el tiempo de reverberación medido allí con el que se obtiene haciendo uso de la ecuación de Sabine.

Chapter 3

Lattice-Boltzmann para ondas

El modelo de lattice-Boltzmann es un método numérico relativamente nuevo para la solución de ecuaciones diferenciales que describe el comportamiento de fluidos principalmente. Este modelo surgió en 1988 donde fue inicialmente planteado por McNamara y Zanetti como una manera de mejorar los modelos de lattice gas que habían surgido en ese entonces [9]. Este modelo surge como una alternativa a los modelos de diferencias finitas y elementos finitos donde presenta varias ventajas, como la posibilidad de trabajar con geometrías arbitrarias de una manera directa y lo fácilmente paralelizable que resulta el modelo, de manera que es posible implementarlo con una alta eficiencia en GPU's o en computadores con procesadores de varios núcleos. En este trabajo se plantea un modelo de lattice-Boltzmann para la solución de la ecuación de onda en tres dimensiones de manera que se pueda simular el comportamiento de ondas sonoras.

3.1 Planteamiento del modelo

En el modelo de lattice-Boltzmann el espacio de simulación se discretiza en pequeñas celdas, de manera que se crea un enmallado. Cada celda puede tener Q número de partículas y a cada una de ellas se le asigna alguna de las Q posibles velocidades. La forma de estas velocidades depende de la ecuación diferencial en particular que se quiera simular. Para el caso de ondas en dos dimensiones se suele usar un modelo D2Q5 como se muestra al lado izquierdo de la figura 3.1.

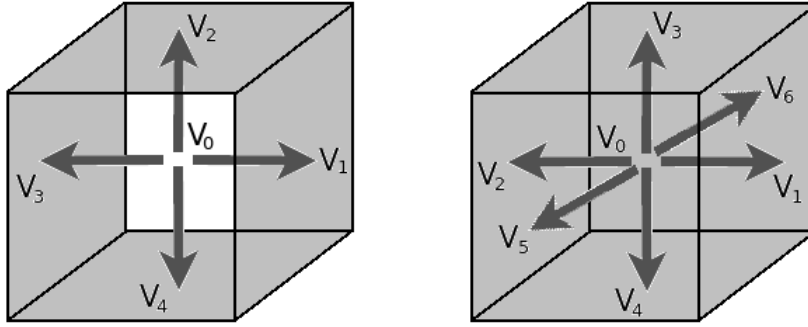


Fig. 3.1 Modelo D2Q5 (izquierda) y modelo D3Q7 (derecha) para la simulación de ondas en dos y tres dimensiones respectivamente.

El modelo se llama D2Q5 porque se trata un modelo bidimensional ($D = 2$) en el que hay $Q = 5$ partículas por celda. En este caso cada partícula puede tener una de cinco velocidades distintas dadas por: $\mathbf{v}_0 = (0, 0)$, $\mathbf{v}_1 = (1, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (0, 1)$, $\mathbf{v}_3 = (-1, 0)$, $\mathbf{v}_4 = (0, -1)$. En el caso de este trabajo se usa un modelo D3Q7 de tres dimensiones que no es mas que una extensión del modelo D2Q5, tal como se ve al lado derecho de la figura 3.1.

En este caso, al modelo D2Q5 se le agregan dos velocidades mas en un tercer eje (entrando y saliendo de la página). Además, por conveniencia se cambia la nomenclatura de las otras velocidades, de manera que estos vectores quedan de la forma $\mathbf{v}_0 = (0, 0, 0)$, $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (-1, 0, 0)$, $\mathbf{v}_3 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{v}_4 = (0, -1, 0)$, $\mathbf{v}_5 = (0, 0, 1)$, $\mathbf{v}_6 = (0, 0, -1)$.

Cada una de las siete posibles partículas dentro de un nodo está representada por una cantidad real f_i entre 0 y 1, con $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$. De manera que cada nodo tiene siete valores f_i y cada uno de estos valores tiene asociada una velocidad \mathbf{v}_i . Una vez definidos estos conceptos, el funcionamiento del modelo se basa en los siguiente pasos:

1. Partiendo de unos valores ya establecidos de f_i para cada uno de las celdas, se calculan las cantidades macroscópicas p y $p\mathbf{u}$. Dependiendo de la ecuación que se esté simulando estas cantidades pueden significar cosas distintas, pero para el caso de las ondas de presión que queremos simular estas cantidades son la la presión p y la velocidad \mathbf{u} . Estas cantidades se calculan de la forma

$$p(\mathbf{x}, t) = \sum_i f_i(\mathbf{x}, t) \quad \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = p(\mathbf{x}, t)\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_i \mathbf{v}_i f_i(\mathbf{x}, t).$$

2. En este paso se hace uso de la función de equilibrio. Esta función, junto con la forma de la malla determinan que clase de ecuación diferencial estamos resolviendo. En nuestro caso vamos a escoger una función de equilibrio que reproduzca una ecuación

de onda, pero si se escogiera otra función se podrían simular las ecuaciones de Navier-Stokes en el caso de fluidos o incluso las ecuaciones de Maxwell en el caso de las ondas electromagnéticas. Para encontrar la función de equilibrio adecuada para una determinada ecuación diferencial se hace uso de una expansión de Chapman-Enskog (sección 3.2). En nuestro caso, la función de equilibrio que reproduce el comportamiento de la ecuación de onda en tres dimensiones es

$$f_i^{(\text{eq})} = \begin{cases} 4w_i(c^2 p + (\mathbf{v}_i \cdot p\mathbf{u})) & \text{si } i = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ p(1 - 3c^2) & \text{si } i = 0, \end{cases} \quad (3.1)$$

donde c representa la velocidad de propagación de las ondas y los valores w_i son constantes dadas por

$$w_0 = \frac{1}{4} \quad w_{1,2,3,4,5,6} = \frac{1}{8}.$$

De esta manera, con las cantidades macroscópicas obtenidas en el paso 1 es posible calcular la función de equilibrio para $i = 0 \dots 6$.

3. Una vez obtenida la función de equilibrio se calcula la ecuación de evolución

$$f_i(\mathbf{x} + \mathbf{v}, t + 1) - f_i(\mathbf{x}, t) = \Omega_i(\mathbf{x}, t).$$

Con esta ecuación se calculan los nuevos valores $f_i(\mathbf{x} + \mathbf{v}, t + 1)$ a partir de los antiguos valores $f_i(\mathbf{x}, t)$ y del operador de colisión Ω_i . Este operador puede tomar varias formas, pero el mas usado es el operador de colisión BGK dado por

$$\Omega_i = -\frac{1}{\tau} \left(f_i - f_i^{(\text{eq})} \right).$$

De esta manera la ecuación de evolución se puede expresar de la forma

$$f_i(\mathbf{x} + \mathbf{v}, t + 1) - f_i(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{\tau} \left(f_i - f_i^{(\text{eq})} \right), \quad (3.2)$$

donde τ es una constante conocida como el tiempo de relajación. Esta ecuación actúa en dos pasos. Primero se calcula la cantidad

$$f_i(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{\tau} \left(f_i - f_i^{(\text{eq})} \right)$$

para cada una de las celdas. A este proceso se le conoce como colisión. Después se actualizan los valores de f_i en dirección de cada una de las velocidades. Es decir, si tomamos como ejemplo el punto $\mathbf{x} = (5, 5, 5)$ en el tiempo $t = 0$, el valor de la colisión para f_1 se le asigna al punto $\mathbf{x} = (6, 5, 5)$ en el tiempo $t = 2$, el valor de f_2 se le asigna al punto $\mathbf{x} = (4, 5, 5)$ y así sucesivamente. A este proceso se le conoce como advección.

Una vez completados estos tres pasos el proceso se repite. Como se puede ver, en un paso de tiempo cada celda se actualiza independientemente del resto, lo que hace que la paralelización del algoritmo sea directa. Por otro lado, en el primer paso asumimos que ya conocíamos los valores de f_i , pero la primera vez que se ejecuta la simulación no es claro cuales escoger. En este caso se establecen unas condiciones iniciales fijando unos valores para p y \mathbf{p} y a partir de ellos se hace $f_i = f_i^{(\text{eq})}$ usando estos valores iniciales.

3.2 Expansión de Chapman-Enskog

Para deducir la ecuación de onda a partir del modelo de lattice-Boltzmann se expande en series de Taylor el lado izquierdo de la ecuación de evolución

$$f_i(\mathbf{x} + \delta t \mathbf{v}_i, t + \delta t) - f_i(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{\tau} (f_i - f_i^{(\text{eq})}). \quad (3.3)$$

La expansión en series de Taylor de una función de varias variables está dada por

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + (x_\alpha - x_{0\alpha}) \partial_\alpha f(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{2!} (x_\alpha - x_{0\alpha})(x_\beta - x_{0\beta}) \partial_{\alpha\beta}^2 f(\mathbf{x}_0) + \dots,$$

en donde se usa el convenio de suma de Einstein sobre los índices repetidos. Si se introduce el término $\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ en la expansión, ésta queda expresada como

$$f(\mathbf{x}_0 + \Delta \mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \Delta x_\alpha \partial_\alpha f(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{2!} \Delta x_\alpha \Delta x_\beta \partial_{\alpha\beta}^2 f(\mathbf{x}_0) + \dots$$

Esta forma es más conveniente, ya que en la ecuación de evolución podemos hacer la correspondencia $\mathbf{x}_0 = (\mathbf{x}, t)$, $\Delta \mathbf{x} = (\delta t \mathbf{v}_i, \delta t)$.

Primero se expande hasta segundo orden el primer término del lado izquierdo de la ecuación de evolución:

$$\begin{aligned}
 f_i(\mathbf{x} + \delta t \mathbf{v}_i, t + \delta t) &\approx f_i(\mathbf{x}, t) + \delta t \partial_t f_i(\mathbf{x}, t) + \delta t v_{i\alpha} \partial_\alpha f_i(\mathbf{x}, t) + \\
 &\quad \frac{1}{2} \left[(\delta t^2 \partial_{tt} + 2\delta t^2 v_{ix} \partial_{tx}^2 + 2\delta t^2 v_{iy} \partial_{ty}^2 + 2\delta t^2 v_{iz} \partial_{tz}^2) + \right. \\
 &\quad \left. (\delta t^2 v_{ix}^2 \partial_{xx}^2 + \delta t^2 v_{iy}^2 \partial_{yy}^2 + \delta t^2 v_{iz}^2 \partial_{zz}^2 + \right. \\
 &\quad \left. 2\delta t^2 v_{ix} v_{iy} \partial_{xy}^2 + 2\delta t^2 v_{ix} v_{iz} \partial_{xz}^2 + 2\delta t^2 v_{iy} v_{iz} \partial_{yz}^2) \right] f_i(\mathbf{x}, t) \\
 &= f_i(\mathbf{x}, t) + \delta t [\partial_t + \mathbf{v}_i \cdot \nabla] f_i(\mathbf{x}, t) + \\
 &\quad \frac{\delta t^2}{2} [\partial_{tt} + 2\partial_t(\mathbf{v}_i \cdot \nabla) + (\mathbf{v}_i \cdot \nabla)^2] f_i(\mathbf{x}, t) \\
 &= f_i(\mathbf{x}, t) + \delta t [\partial_t + \mathbf{v}_i \cdot \nabla] f_i(\mathbf{x}, t) + \\
 &\quad \frac{\delta t^2}{2} [\partial_t + \mathbf{v}_i \cdot \nabla]^2 f_i(\mathbf{x}, t).
 \end{aligned}$$

Donde sumándole el segundo término se tiene

$$f_i(\mathbf{x} + \delta t \mathbf{v}_i, t + \delta t) - f_i(\mathbf{x}, t) = \delta t [\partial_t + \mathbf{v}_i \cdot \nabla] f_i(\mathbf{x}, t) + \frac{\delta t^2}{2} [\partial_t + \mathbf{v}_i \cdot \nabla]^2 f_i(\mathbf{x}, t). \quad (3.4)$$

Ahora se hace una expansión perturbativa a la regla de evolución de la forma

$$\begin{aligned}
 \partial_t &= \varepsilon \partial_{t_1} + \varepsilon^2 \partial_{t_2} \\
 \partial_{\mathbf{x}} &= \varepsilon \partial_{\mathbf{x}_1} \\
 f_i &= f_i^{(0)} + \varepsilon f_i^{(1)} + \varepsilon^2 f_i^{(2)},
 \end{aligned}$$

de manera que reemplazando esta expansión y la ecuación (3.4) en (3.3) se tiene

$$\begin{aligned}
 &\delta t [\varepsilon \partial_{t_1} + \varepsilon^2 \partial_{t_2} + \varepsilon \mathbf{v}_i \cdot \nabla] (f_i^{(0)} + \varepsilon f_i^{(1)} + \varepsilon^2 f_i^{(2)}) \\
 &+ \frac{\delta t^2}{2} [\varepsilon \partial_{t_1} + \varepsilon^2 \partial_{t_2} + \varepsilon \mathbf{v}_i \cdot \nabla]^2 (f_i^{(0)} + \varepsilon f_i^{(1)} + \varepsilon^2 f_i^{(2)}) \\
 &= \frac{1}{\tau} \left[f_i^{(0)} + \varepsilon f_i^{(1)} + \varepsilon^2 f_i^{(2)} - f_i^{(eq)} \right].
 \end{aligned}$$

Esta ecuación se agrupa por sus respectivos órdenes (ε^0 , ε^1 , ε^2), de manera que se tiene

$$\begin{aligned} & \varepsilon \delta t [\partial_{t_1} + \mathbf{v}_i \cdot \nabla] f_i^{(0)} + \varepsilon^2 \delta t \mathbf{v}_i \cdot \nabla f_i^{(1)} \\ & + \varepsilon^2 \delta t \partial_{t_1} f_i^{(1)} + \varepsilon^2 \delta t \partial_{t_2} f_i^{(0)} + \varepsilon^2 \frac{\delta t^2}{2} (\partial_{t_1} + \mathbf{v}_i \cdot \nabla)^2 f_i^{(0)} \\ & = -\frac{1}{\tau} \left[\left(f_i^{(0)} - f_i^{eq} \right) + \varepsilon f_i^{(1)} + \varepsilon^2 f_i^{(2)} \right]. \end{aligned}$$

Por tanto, si se igualan los órdenes se tiene

$$\begin{aligned} \text{Orden 0:} & \quad f_i^{(0)} = f_i^{(eq)} \\ \text{Orden 1:} & \quad -\frac{1}{\tau} f_i^{(1)} = \delta t [\partial_{t_1} + \mathbf{v}_i \cdot \nabla] f_i^{(0)} \\ \text{Orden 2:} & \quad -\frac{1}{\tau} f_i^{(2)} = \delta t [\partial_{t_1} + \mathbf{v}_i \cdot \nabla] f_i^{(1)} \\ & \quad + \frac{\delta t^2}{2} [\partial_{t_1} + \mathbf{v}_i \cdot \nabla]^2 f_i^{(0)} + \delta t \partial_{t_2} f_i^{(0)}. \end{aligned}$$

Si se reemplaza la igualdad del orden 1 en la del orden 2 se tiene

$$\text{Orden 2:} \quad -\frac{1}{\tau} f_i^{(2)} = \delta t \left(1 - \frac{1}{2\tau} \right) [\partial_{t_1} + \mathbf{v}_i \cdot \nabla] f_i^{(1)} + \delta t \partial_{t_2} f_i^{(0)}.$$

Para poder recuperar la ecuación de onda se debe tener un tiempo de relajación $\tau = 1/2$. De esta manera, el orden 2 queda de la siguiente forma:

$$\text{Orden 2:} \quad -\frac{1}{\tau} f_i^{(2)} = \delta t \partial_{t_2} f_i^{(0)}.$$

Para recuperar los operadores diferenciales, la igualdad del orden 1 se multiplica por ε y la del orden 2 se multiplica por ε^2 . Después de esto se suman los resultados:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\tau \delta t} \left(\varepsilon f_i^{(1)} + \varepsilon^2 f_i^{(2)} \right) &= (\varepsilon \partial_{t_1} + \varepsilon^2 \partial_{t_2}) f_i^{(0)} + (\varepsilon \nabla_1) \cdot (\mathbf{v}_i f_i^{(0)}) \\ &= \partial_t f_i^{(0)} + \nabla \cdot (\mathbf{v}_i f_i^{(0)}). \end{aligned}$$

Ahora se suma sobre todos los i para obtener las cantidades macroscópicas. De esta manera, tomando el límite cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ se llega a

$$0 = \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}, \quad (3.5)$$

que no es mas que una ecuación de continuidad. En esta ecuación se ha usado el hecho de que

$$p = \sum_i f_i^{(0)} = \sum_i f_i^{eq} \quad (3.6)$$

$$\mathbf{J} = \sum_i \mathbf{v}_i f_i^{(0)} = \sum_i \mathbf{v}_i f_i^{eq}. \quad (3.7)$$

Si se suma de nuevo sobre los i pero esta vez multiplicando por la velocidad \mathbf{v}_i , se obtiene

$$0 = \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} + \nabla \cdot \Pi^{(0)}, \quad (3.8)$$

donde igualmente se usa el hecho de que

$$\Pi^{(0)} = \sum_i \mathbf{v}_i \otimes \mathbf{v}_i f_i^{(0)} = \sum_i \mathbf{v}_i \otimes \mathbf{v}_i f_i^{eq}. \quad (3.9)$$

De manera que multiplicando sucesivamente por \mathbf{v}_i se pueden obtener un conjunto infinito de ecuaciones de conservación. Para obtener la ecuación de onda se escoge el siguiente valor para el tensor $\Pi^{(0)}$:

$$\Pi^{(0)} = \begin{pmatrix} c^2 p & 0 \\ 0 & c^2 p \end{pmatrix}.$$

Por tanto, usando esta matriz en (3.8) se tiene

$$0 = \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} + c^2 \nabla p.$$

Si se reemplaza esta ecuación en la derivada con respecto al tiempo de (3.5) se obtiene la ecuación de onda

$$c^2 \nabla^2 = \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}.$$

El último paso que falta consiste en escoger la distribución de equilibrio adecuada que satisfaga (3.6), (3.7) y (3.9). Esta ecuación de equilibrio no es mas que la ecuación (3.1) que enunciamos en la sección anterior:

$$f_i^{(eq)} = \begin{cases} 4w_i(c^2 p + (\mathbf{v}_i \cdot p \mathbf{u})) & \text{si } i = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ p(1 - 3c^2) & \text{si } i = 0, \end{cases}$$

3.3 Condiciones de frontera

Para simular como se comportan las ondas cuando se encuentran con una pared es necesario cambiar el paso de la colisión para ciertas celdas. Estas celdas actúan como las paredes de un recinto. Como se vio antes, en el paso de colisión se calcula la cantidad

$$f_i(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{\tau} \left(f_i - f_i^{(\text{eq})} \right),$$

pero en el caso de los nodos que actúa como pared lo que se hace es invertir los valores de f_i (figura 3.2) de la siguiente manera

$$\begin{array}{lll} f_1(\mathbf{x}, t) = f_2(\mathbf{x}, t) & f_3(\mathbf{x}, t) = f_4(\mathbf{x}, t) & f_5(\mathbf{x}, t) = f_6(\mathbf{x}, t) \\ f_2(\mathbf{x}, t) = f_1(\mathbf{x}, t) & f_4(\mathbf{x}, t) = f_3(\mathbf{x}, t) & f_6(\mathbf{x}, t) = f_5(\mathbf{x}, t). \end{array}$$

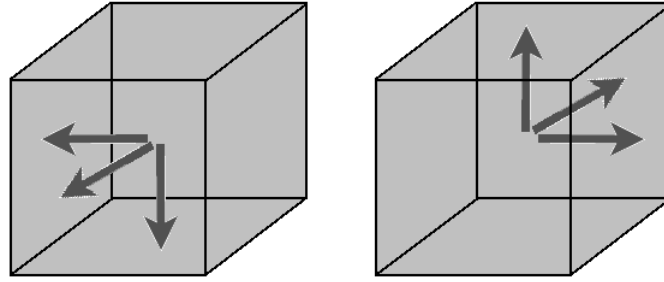


Fig. 3.2 Los valores de f_i de cada celda se invierten en la frontera.

De esta forma se puede simular el rebote de la onda en una pared. Sin embargo esto no es suficiente, ya que también se desea que el rebote de la onda no sea perfecto, sino que la celda actúe como si parte de la onda se absorbiera en el choque. Para esto hacemos exactamente la misma reflexión anterior pero esta vez por medio de una constante k , de tal forma que la colisión queda así:

$$\begin{array}{lll} f_1(\mathbf{x}, t) = kf_2(\mathbf{x}, t) & f_3(\mathbf{x}, t) = kf_4(\mathbf{x}, t) & f_5(\mathbf{x}, t) = kf_6(\mathbf{x}, t) \\ f_2(\mathbf{x}, t) = kf_1(\mathbf{x}, t) & f_4(\mathbf{x}, t) = kf_3(\mathbf{x}, t) & f_6(\mathbf{x}, t) = kf_5(\mathbf{x}, t). \end{array}$$

En la figura 3.3 se puede ver como el vector que apunta hacia abajo sufre un cambio de dirección y de amplitud cuando choca contra una frontera.

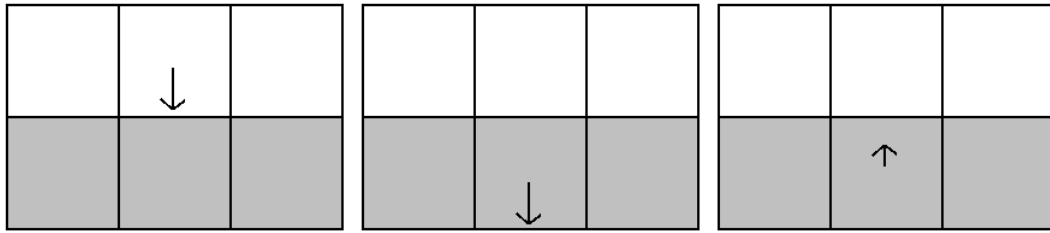


Fig. 3.3 El valor de f_i cambia de dirección y de magnitud en la frontera.

Esta constante de rebote k cuantifica que tanto de la cantidad f_i se refleja cuando la onda se encuentra con una pared. Sin embargo, no es clara la relación de esta constante con la pérdida de energía de la onda producto de la absorción. En el siguiente capítulo se desarrolla la teoría necesaria para encontrar esta relación.

Por otro lado, además de tener unas celdas especiales que actúen como paredes, también es necesario contar con celdas que se comporten como fuentes de sonido. En ese caso, en el paso 1 del método de lattice-Boltzmann se usa una función arbitraria para calcular la presión en las celdas designadas para ser fuentes. Este valor para la presión no se modifica en el paso de colisión. Por ejemplo, se puede especificar que una determinada celda tenga una presión de la forma $p = A \cos(\omega t)$, donde A es alguna amplitud que nosotros definimos, ω es alguna frecuencia, y t es el paso de tiempo de la simulación.

Chapter 4

Simulación del coeficiente de absorción de una superficie

En el capítulo anterior se vio como es posible implementar la absorción de las ondas en el modelo de lattice-Boltzmann. Sin embargo, no queda clara su relación con la física del problema, en particular, aún no se sabe como esa constante de reflexión se relaciona con la energía que una superficie absorbe cuando una onda de sonido la golpea. En la siguiente sección se desarrolla una simulación que nos proporciona una forma de relacionar la constante de rebote k con la física del problema.

4.1 Montaje de la simulación

En los capítulos 1.4 y 1.5 se describió un montaje experimental para encontrar el coeficiente de absorción de algún material. En esta sección se implementa una simulación usando el modelo de lattice-Boltzmann desarrollado en el capítulo anterior que nos permita encontrar la relación entre el coeficiente de absorción T y la constante de rebote k .

Para representar el tubo descrito en la figura 2.3 se usan una serie de celdas en un arreglo unidimensional (figura 4.1), en donde la celda inicial (azul) actúa como la fuente de sonido y la celda final (café) actúa como la pared absorbente. Vale la pena aclarar que aunque el arreglo en sí es unidimensional, el modelo de lattice-Boltzmann utilizado sigue siendo tridimensional (D3Q7).

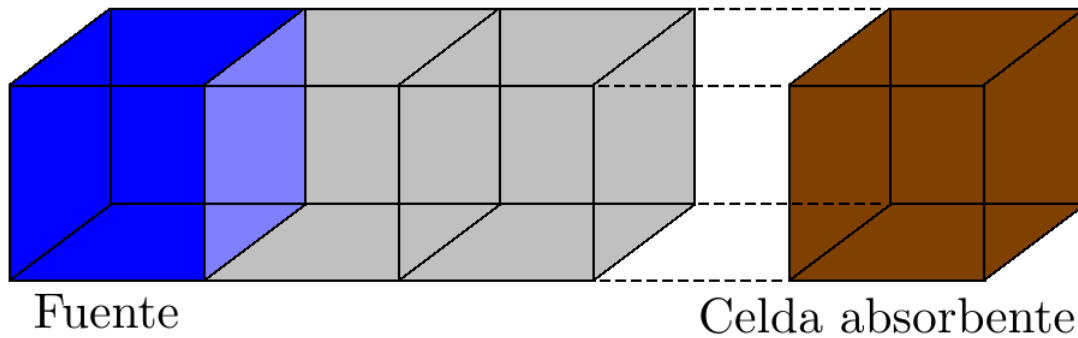


Fig. 4.1 Arreglo de 2000 celdas en donde la celda azul es una fuente sinusoidal de ondas, y la celda café es una celda absorbente.

En concreto, el arreglo utilizado en esta simulación tiene las siguientes características:

- El espacio de simulación es un arreglo unidimensional conformado por 2000 celdas.
- La longitud de onda usada es de $\lambda = 1000$ celdas.
- La velocidad de las ondas es de $c = 0.5$ celdas por paso de tiempo.
- La casilla inicial de color azul es una fuente de ondas de la forma $p = A \sin(2\pi ct/\lambda)$, donde $A = 1$ y t es el paso de tiempo de la simulación.
- La celda final de color café es una frontera en donde la constante k del modelo varía desde 0.0 hasta 1.0 en pasos de 0.05.

4.2 Procedimiento

El procedimiento para hacer la medición del coeficiente de absorción es el siguiente:

- Se establece un valor para la constante k de 0.
- La simulación se ejecuta por 100000 pasos de tiempo de manera que las ondas dentro del arreglo tengan tiempo de estabilizarse.
- La simulación se ejecuta por 10000 pasos de tiempo adicionales, durante los cuales se registra el mínimo y el máximo de presión para cada celda.
- Se hace un promedio entre las presiones máximas y mínimas: $p = (p_{\max} - p_{\min})/2$. Con este procedimiento se obtiene la gráfica de la figura 2.6. El máximo de esta gráfica corresponde al valor $A + B$, mientras que el mínimo corresponde al valor $A - B$.

- Por medio de (2.12) se calcula el valor del coeficiente de absorción para $k = 0$.
- El procedimiento se repite para $k = 0.05, 0.10, 0.15, \dots, 1.00$. Esto nos permite obtener una curva que relacione T con k .

4.3 Resultados

En la figura 4.2 se ven los primeros pasos de tiempo de la simulación, en donde la onda que se origina en la fuente se desplaza hacia la derecha hasta encontrarse con la pared absorbente.

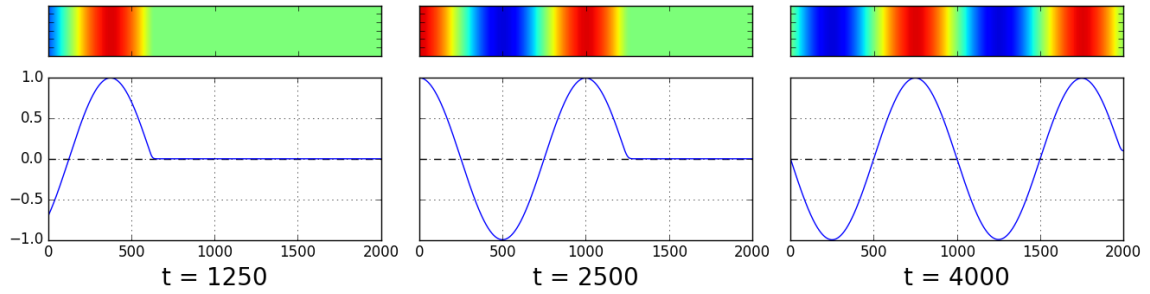


Fig. 4.2 Perfil de presión dentro del arreglo para los instantes iniciales de la simulación.

Después de que la simulación se estabiliza se calcula el valor del coeficiente de absorción para cada valor de k . La figura 4.3 muestra la relación que existe entre T y k . La curva muestra un comportamiento aproximadamente lineal. Cuando se no se tiene absorción ($T = 0$), la constante de rebote es $k \approx 1$. Esto es de esperarse, puesto que en un escenario de no absorción el rebote en la frontera no debe tener pérdidas. Por otro lado, cuando $k = 0$ se tiene un coeficiente de absorción de $T = 0.9$. La intuición nos dice que este valor debería ser igual a 1, sin embargo se obtiene un valor bastante cercano. Si se ajusta linealmente la curva obtenemos la ecuación

$$k = -1.11T + 1.03. \quad (4.1)$$

Esta expresión nos permite obtener el valor de k para un coeficiente de absorción dado, de manera que se pueda incorporar dentro del modelo de lattice-Boltzmann.

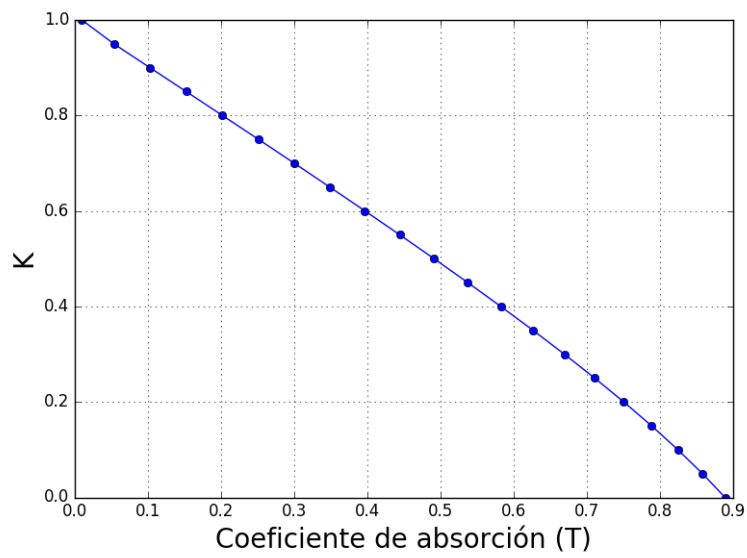


Fig. 4.3 Relación entre la absorción y la constante de rebote k del modelo de lattice-Boltzmann.

Chapter 5

Simulación del tiempo de reverberación en un recinto cerrado

Una vez establecida la base teórica, en este capítulo se realiza una simulación con el fin de determinar el tiempo de reverberación en un recinto cerrado y como se compara con el tiempo que se obtiene al usar la ecuación de Sabine. De esta manera se logra poner a prueba el modelo de lattice-boltzmann desarrollado en este trabajo.

5.1 Montaje de la simulación

Para simular la reverberación se usa un recinto cúbico dentro del cual se colocan varias fuentes de ondas. Las fuentes se encienden durante el tiempo suficiente para que la energía acústica dentro del cubo se estabilice. Luego se apagan las fuentes y se registra cuanto tiempo tarda la energía en decaer, lo cual nos permite obtener el tiempo de reverberación.

En este caso se usa una malla cubica de lado $L = 50$ (figura 5.1). A todas las caras del cubo se les asigna un coeficiente de absorción de $T = 0$, excepto en la cara inferior. En esa cara se establece $T = 0.5$.

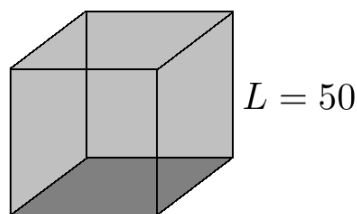


Fig. 5.1 Se usa una malla cúbica de $50 \times 50 \times 50$ celdas.

Para garantizar que las ondas que se forman dentro del cubo se distribuyan uniformemente, se colocan varias fuentes de sonido en el interior del cubo teniendo cuidado de que estas no coincidan con las posiciones donde se forman los modos normales ni tampoco a lo largo de diagonales o puntos de simetría dentro del cubo. Asumiendo que el origen de coordenadas está centrado en una de las esquinas del cubo, las posiciones de las fuentes quedan dadas por

$$\begin{array}{lll} \mathbf{r}_1 = (2, 4, 12) & \mathbf{r}_3 = (48, 12, 17) & \mathbf{r}_5 = (24, 26, 31) \\ \mathbf{r}_2 = (37, 38, 46) & \mathbf{r}_4 = (13, 31, 26) & \mathbf{r}_6 = (19, 16, 33). \end{array}$$

Una vez establecida la geometría del cubo y de las fuentes, se establecen los siguientes parámetros de simulación:

- El espacio de simulación es una malla cúbica de $50 \times 50 \times 50$ celdas.
- La longitud de onda usada es de $\lambda = 7$ celdas.
- La velocidad de las ondas es de $c = 0.5$ celdas por paso de tiempo.
- Las fuentes generan ondas de la forma $p = A \sin(2\pi ct/\lambda)$, donde t es el paso de tiempo de la simulación.

5.2 Procedimiento

El procedimiento para el cálculo del tiempo de reverberación es el siguiente:

- La simulación se ejecuta por 6000 pasos de tiempo, esto con el fin de asegurar que la energía acústica dentro del cubo sea aproximadamente uniforme.
- Para medir el tiempo de reverberación se escoge el plano $x = 5$.
- La simulación se ejecuta durante otros 6000 pasos de tiempo. Durante este intervalo se registra en una matriz bidimensional la amplitud máxima y mínima de la presión para cada celda dentro del plano.
- Se hace un promedio entre las amplitudes obtenidas: $p = (p_{\max} - p_{\min})/2$. Con esto se obtiene la amplitud p para cada celda del plano.
- Se eleva al cuadrado cada elemento de la matriz, donde se obtiene una cantidad que es proporcional a la energía para cada celda dentro del plano.

- Se calcula el volumen del recinto ($V = 50 \times 50 \times 50 = 125000$) y la absorción ($A = 0.5 * 50^2 = 1250$).
- Se hace un ajuste lineal al logaritmo de la presión, de manera que usando (2.15) se pueda encontrar el tiempo de reverberación para el plano $x = 5$.
- El procedimiento anterior se repite para los planos $x = 15, 25, 35, 45$. De igual manera se hace para los planos en y y z . Promediando el tiempo de reverberación para cada uno de estos planos se puede hacer una estimación del tiempo de reverberación en todo el cubo.

5.3 Resultados

En la figura 5.2 se pueden ver los cortes de los planos una vez han transcurrido 6000 pasos de tiempo, es decir, una vez que la presión dentro del cubo ha alcanzado un valor de equilibrio. Allí se aprecia que en general hay un equilibrio en la presión a lo largo del cubo. Los puntos mas brillantes que se ven corresponden a las fuentes de sonido.

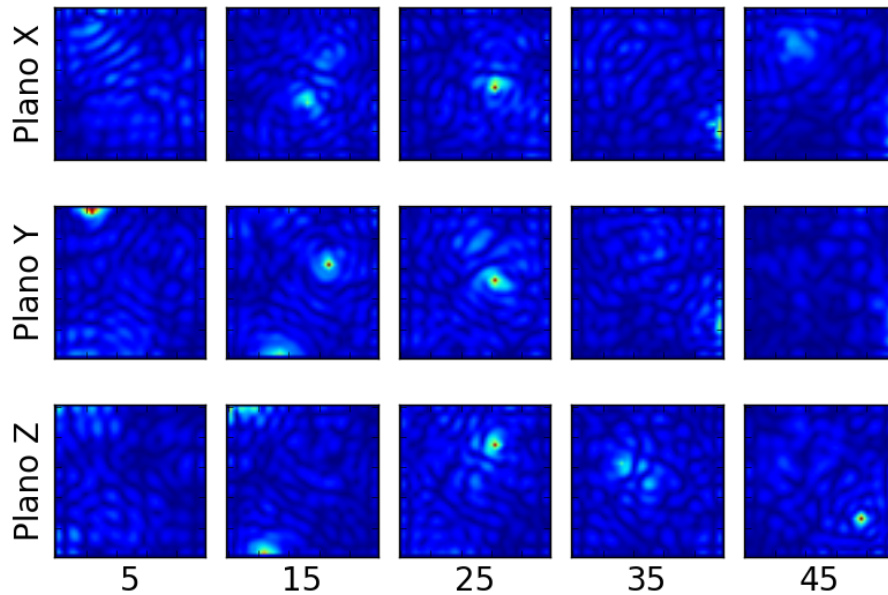


Fig. 5.2 La presión para cada uno de los planos considerados una vez han transcurrido 6000 pasos de tiempo.

En la figura 5.3 se ve como es el cuadrado de la presión para una celda dentro del cubo a lo largo de la simulación. Se aprecia como al principio la presión cambia erráticamente

para después estabilizarse en un cierto valor. Una vez que las fuentes de apagan la presión empieza a decaer.

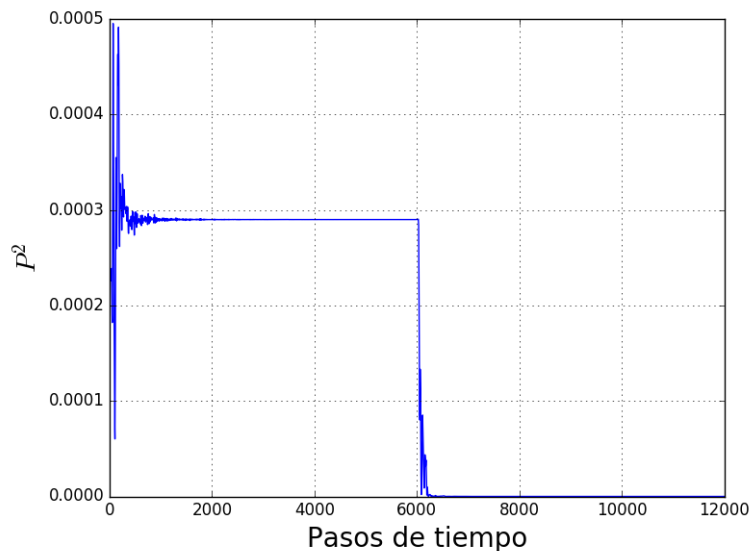


Fig. 5.3 Comportamiento del cuadrado de la energía para una sola celda dentro del cubo.

Para tener una mejor resolución en nuestros datos se hace un promedio de la presión al cuadrado para cada una de las celdas de todos los planos. El resultado de ese promedio se puede ver en la figura 5.4. Allí se aprecia que las fluctuaciones de la anterior gráfica desaparecen y en cambio se tiene una gráfica mas uniforme. Nuevamente el comportamiento es el esperado: la presión empieza a aumentar hasta estabilizarse para después decaer una vez que se apagan las fuentes.

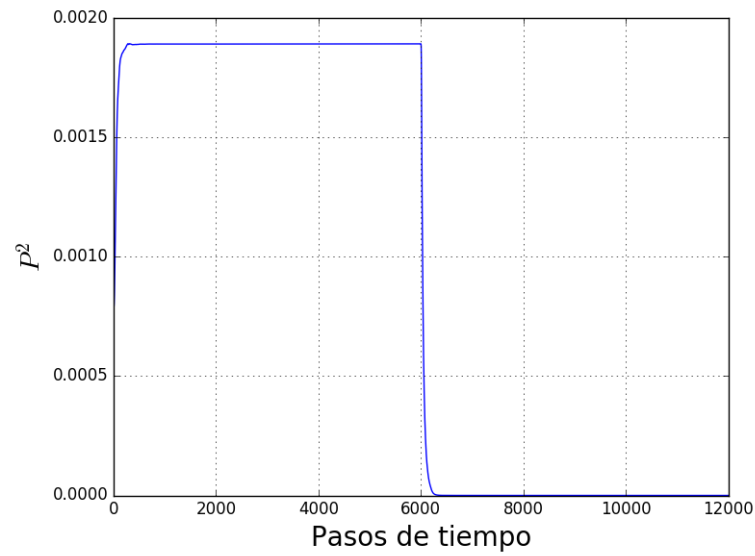


Fig. 5.4 Comportamiento del cuadrado de la energía para el promedio de todas las celdas de los planos en consideración.

Ya que se supuso un decaimiento exponencial para la energía dentro del cubo, para calcular el tiempo de reverberación se hace un ajuste lineal al logaritmo de P^2 a partir del momento en que se apagan las fuentes. En la figura 5.5 se puede ver el ajuste realizado a la gráfica.

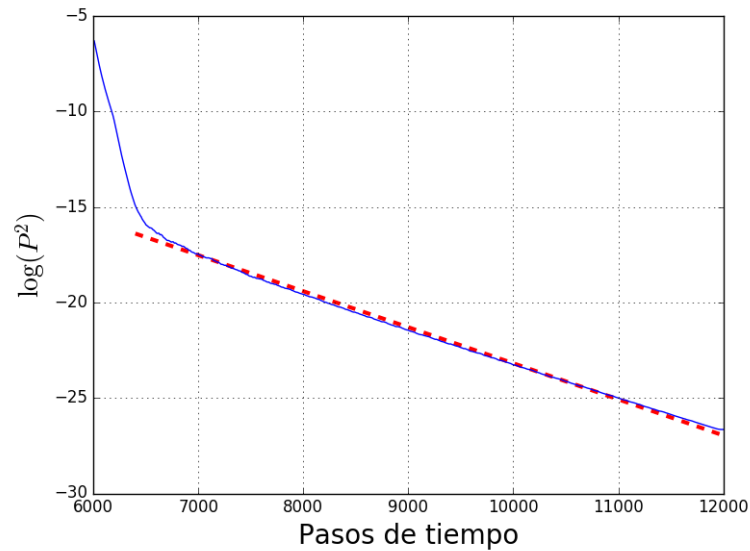


Fig. 5.5 Logaritmo de P^2 con respecto al tiempo.

Allí se puede ver que al aplicar el logaritmo se generan dos rectas y no una como se suponía. Si se realiza el ajuste lineal a la recta que está a la izquierda se puede calcular el tiempo de reverberación usando 2.15, el cual arroja un valor de

$$t_{izq} = 624 \text{ pasos de tiempo.}$$

De igual manera, haciendo un ajuste lineal de la segunda recta se obtiene un tiempo de reverberación de

$$t_{der} = 7322 \text{ pasos de tiempo.}$$

Para tener un punto de comparación, se hace el calculo teórico del tiempo de reverberación haciendo uso de los parámetros del cubo. El valor obtenido es de

$$t_{teo} = 6 \log(10) \tau_E = 6 \log(10) \frac{4V}{Ac} = 5526 \text{ pasos de tiempo.}$$

El valor teórico coincide mucho mejor con al ajuste de la recta de la derecha. Puesto que la primera recta se produce dentro de los primeros 400 pasos de tiempo se puede suponer que este comportamiento es debido a que el decaimiento de la energía no ha tenido el tiempo suficiente para estabilizarse. Si la simulación se hiciera usando los parámetros de un recinto real se tendría una malla de simulación mas grande y un tiempo de simulación mucho más largo. En ese caso, la estabilización que se produzca en los primeros instante después de apagadas las fuentes debería ser muy pequeña y no sería significativa a la hora de realizar el ajuste, donde prevalecería la recta de la derecha.

Por otro lado, también se realizó una simulación del tiempo de reverberación en función de la frecuencia de las ondas. Para hacerla se utilizaron los mismos parámetros anteriores con la única diferencia de que la longitud de onda se varió desde 4 hasta 24 en pasos de 2. La figura 5.6 muestra el resultado de la simulación.

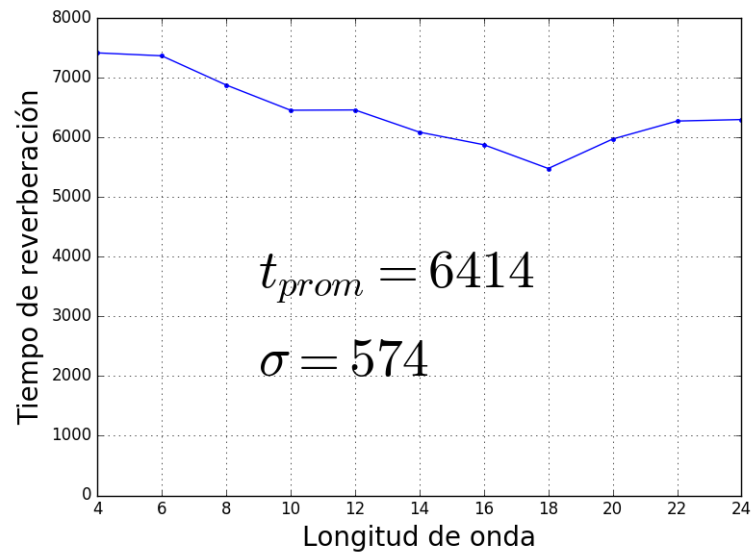


Fig. 5.6 Comportamiento del tiempo de reverberación en función de la longitud de onda.

El tiempo de reverberación fluctúa alrededor de un valor promedio de $t = 6414$ con una desviación estándar de $\sigma = 574$. Esta gráfica no tiene una tendencia clara en favor de un comportamiento creciente o decreciente, sino que mas bien fluctúa entre un valor de 5500 y 7400 pasos de tiempo.

Chapter 6

Otros resultados

Ya habiendo simulado los fenómenos de absorción y reverberación, en este capítulo se muestran dos resultados adicionales: una simulación de una galería de susurros y la simulación de las ondas en un recinto elíptico. Estos resultados, a diferencia de los anteriores, son más que todo demostrativos y se realizan con el fin de probar el modelo de lattice-Boltzmann en otros escenarios y para tener un mayor entendimiento de sus capacidades.

6.1 Simulación de una galería de susurros

Las galerías de susurros son recintos circulares o semi-esféricos en forma de domo. Estos tienen la peculiaridad de que un sonido emitido en un extremo del recinto se escuchará en el extremo opuesto del mismo debido a reflexiones internas que el sonido realiza por las paredes del recinto. Por esta razón, se dice que si un par de personas están hablando cerca a una de las paredes del domo, una persona que este lejos en el extremo opuesto podrá escuchar con total claridad la conversación, casi igual a que si estuviera junto a ellas (figura 6.1). El término galerías de susurro fue usado por primera vez por Lord Rayleigh a finales del siglo XIX cuando descubrió dicho fenómeno bajo el domo de la catedral de san Pablo de Londres.

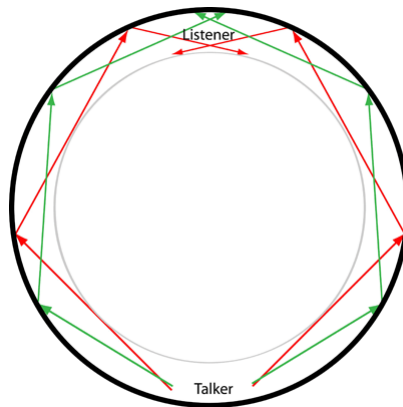


Fig. 6.1 En una galería de susurros si una persona habla en uno de sus extremos, lo que dice puede oírse con claridad en el otro extremo.

El fenómeno de las galerías de susurros se puede explicar por medio de los modos normales que generan las ondas de sonido producto de la reflexión interna dentro de las paredes de un domo. Estos se pueden justificar analizando el comportamiento de las ondas en un recinto cilíndrico de radio a [10]. En este caso, para simular la reflexión de las ondas en las paredes se usa un cambio de velocidad en el medio, donde se escoge una velocidad c_0 muy grande en las paredes y una velocidad c_1 para las ondas dentro del domo, de manera que se tiene un coeficiente de refracción $n=c_0/c_1$. Este cambio abrupto de velocidad genera una reflexión total interna.

De esta manera, debido a la simetría cilíndrica se deben resolver dos ecuaciones de Helmholtz para adentro y fuera del cilindro,

$$\begin{aligned}\nabla^2 \psi_\zeta + k_{1,\zeta}^2 \psi_\zeta &= 0, \quad r < a \\ \nabla^2 \psi_\zeta + k_{0,\zeta}^2 \psi_\zeta &= 0, \quad r > a.\end{aligned}$$

Las solución de esta ecuación describe todos los modos normales dentro del cilindro. Uno de estos modos se puede ver en la figura 6.2. Allí se puede ver como los picos de presión ocurren cerca de la frontera, tal como se esperaría de una galería de susurros.

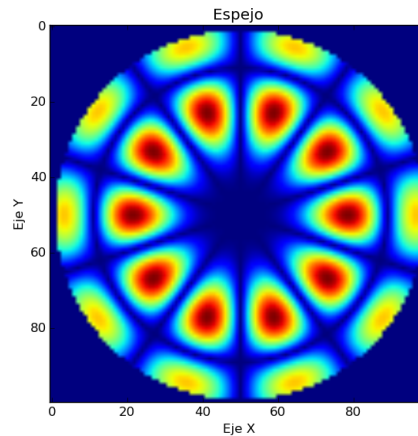


Fig. 6.2 Uno de los modos normales de las ondas de presión dentro de un recinto cilíndrico.

Para lograr un comportamiento similar se simuló media esfera con el modelo de lattice-Boltzmann de manera que se tuviera una geometría parecida a la de un domo. El resultado de la simulación se puede ver en la figura 6.3, donde se hizo un corte horizontal cerca del piso del domo para poder visualizar mejor. Allí se puede ver un patrón parecido al teórico en donde se aprecian unos “lóbulos” cerca de la frontera donde la presión es mayor. En cambio, cerca al centro de la circunferencia la presión es menor, lo cual coincide con el comportamiento esperado. Sin embargo, no se tiene una imagen más precisa pues el surgimiento de los distintos modos normales en la simulación es fuertemente dependiente del lugar en el que se coloque la fuente.

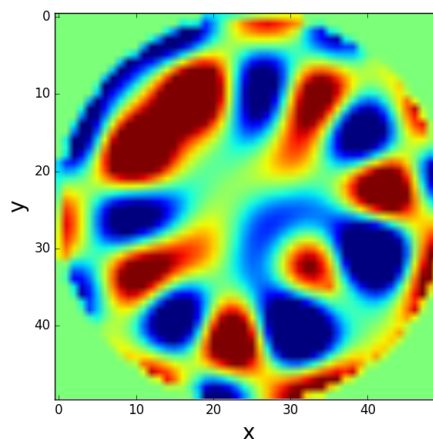


Fig. 6.3 Simulación de las ondas dentro de una semi-esfera con el modelo de lattice-Boltzmann.

6.2 Simulación de un recinto elíptico

Ahora se simula el comportamiento de las ondas cuando se usa un recinto elíptico. Para ello establecemos una geometría parecida al caso anterior, pero esta vez con forma de elipsoide. El objetivo es colocar una fuente de sonido en uno de los focos de la elipse y verificar que efectivamente las ondas rebotan en las paredes hasta converger en el otro foco. Como siempre, ya que la simulación es tridimensional se muestra un corte de la elipse para visualizar mejor.

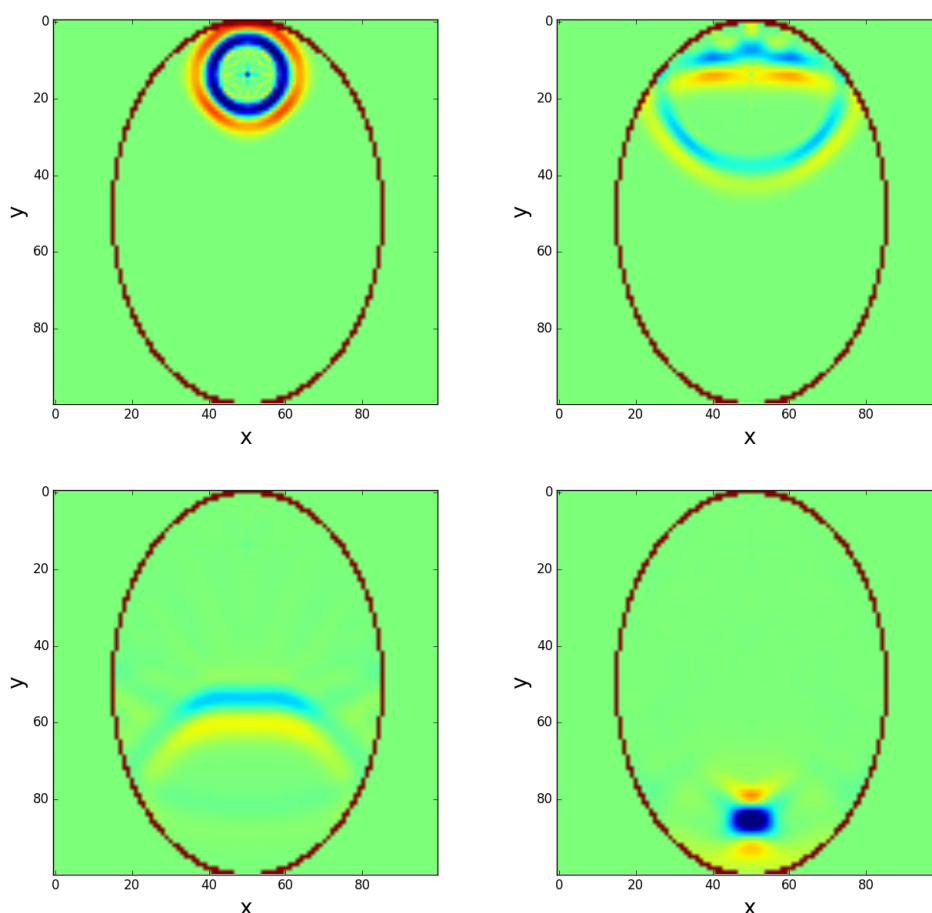


Fig. 6.4 Se muestran varios cuadros dentro de la simulación, en donde se puede ver como una perturbación producida en uno de los focos de la elipse rebota por las paredes hasta converger en el otro foco.

En la figura 6.4 se puede ver una secuencia de imágenes en las cuales se puede apreciar como se produce una perturbación en uno de los focos de la elipse para después converger en el otro foco. El hecho de que la simulación reproduzca el comportamiento deseado en el caso de una geometría no trivial como una elipse nos da la confianza de que el modelo aquí

desarrollado se puede extender para geometrías arbitrarias, de manera que se puedan simular recintos más complejos y realistas.

Chapter 7

Conclusiones

Este trabajo realiza una modelación numérica de recintos acústicos por medio del modelo de lattice-Boltzmann para ondas escalares. El trabajo se enfoca en simular dos características muy importantes en la acústica de auditorios: la absorción y el tiempo de reverberación dentro de un recinto cerrado. La absorción se reproduce reflejando las funciones de distribución en las fronteras, pero multiplicando las funciones de distribución reflejadas por un valor constante que las reduce. Para encontrar la relación entre este factor de atenuación y el coeficiente de absorción se implementó un experimento unidimensional con una fuente sinusoidal a un lado y una superficie absorbente en el otro. El análisis del patrón de ondas estacionarias que resulta permite calcular el coeficiente de reflexión. Nuestros resultados muestran una relación aproximadamente lineal entre las dos variables, que permite modelar coeficientes de absorción entre 0 y 0.9 cuando el factor de proporcionalidad varía entre 0 y 1. Este resultado es un insumo de gran relevancia para la simulación de auditorios en trabajos futuros.

El tiempo de reverberación es uno de los parámetros más importantes de un auditorio, pues determina si el auditorio se adecúa al uso (conciertos, conferencias o reuniones) para el cual está diseñado, por lo tanto es importante determinar si el modelo de lattice-Boltzmann es capaz de reproducir correctamente este comportamiento. Para ello, se simuló un recinto cúbico formado cinco paredes completamente reflectivas y una pared absorbente con un coeficiente de absorción fijo. El procedimiento de simulación consistió en colocar seis fuentes en diferentes puntos del recinto cúbico, evitando favorecer en lo posible la formación de modos normales de oscilación únicos. El sistema se dejó oscilar hasta que la energía acústica total alcanzara un valor estable cuando la potencia absorbida por la pared coincidiera con la potencia generada por los osciladores. En ese momento, los osciladores se apagan y se monitorea el decaimiento exponencial de la energía acústica total. La medición del tiempo característico de este decaimiento exponencial nos permite calcular el tiempo de reverberación. Se observa que la energía decae como dos exponenciales, una más pronunciada

al inicio y una más lenta al final. La más lenta coincide con el tiempo de reverberación calculado teóricamente. Este resultado nos dice que para modelar el comportamiento teórico es necesario dejar pasar un tiempo inicial de la simulación, un resultado de relevancia en el uso futuro de estos modelos para la simulación de auditorio.

Adicionalmente, se realizan modelan dos situaciones que ilustran el poder del método: el funcionamiento de una galería de susurros y la propagación de las ondas en un recinto elíptico. Para la primera se muestra que fue posible reproducir los modos normales correspondientes al funcionamiento de la galería, que son aquellos oscilan con mayor amplitud cerca de las paredes. Similarmente, la simulación de un recinto elíptico muestra claramente que un pulso acústico generado en uno de los focos se refleja en las paredes y se concentra nuevamente en el otro, tal como se esperaba. Estos resultados ilustran el uso que se le puede dar al modelo de lattice-Boltzmann en ondas para simular la propagación de sonidos en recintos cerrados.

Con estos resultados sería posible intentar la simulación de un auditorio real, como por ejemplo una sala de conciertos. Para ello se usarían los coeficientes de absorción de materiales reales y se haría una discretización mas refinada del recinto en cuestión. Los resultados de esa simulación después de compararían con los obtenidos por medio de un software comercial o por medio de mediciones directas realizadas en un recinto real. La simulación acústica de recintos no se limita solamente a auditorios. El manejo de niveles de ruido en centros comerciales y plazas de comida y el efecto del ruido producido por el tráfico vehicular, por la industria o por sitios de diversión son elementos que afectan de manera importante la calidad de vida de las personas, pero requieren de mucha potencia de cómputo para poder simular grandes volúmenes. Por tanto sería de gran interés poder simularlos con modelos de lattice-Boltzmann en el futuro.

Una de las características más importantes del modelo de lattice-Boltzmann es que su paralelización resulta directa. Esto cobra relevancia cuando se usan tiempos de simulación largos o geometrías grandes, pues el tiempo de ejecución del algoritmo puede crecer considerablemente. Por este motivo, el algoritmo aquí usado se optimizó para ser usado en un computador con múltiples CPU. Si esto no se hubiera hecho, los tiempos de ejecución hubieran sido considerablemente más grandes. Sin embargo, aún hay espacio para optimizar más el algoritmo, implementándolo por ejemplo en tarjetas gráfica. Este es un objetivo importante para ser realizado en un trabajo futuro.

Otra extensión a este trabajo consistiría en investigar una manera de implementar de una forma más eficiente condiciones de frontera curvas, ya que el modelo aquí desarrollado usa una cuadrícula cuadrada. Esta aproximación es útil con geometrías rectas, pero resulta poco conveniente cuando se tienen por ejemplo geometrías circulares. Aunque con el modelo

actual se pueden simular geometrías curvas, para ello hace falta que la resolución de la malla sea lo suficientemente grande, lo cual incrementa los tiempos de ejecución.

El trabajo aquí presentado proporciona métodos para simular la propagación del sonido en presencia de superficies absorbentes y para medir el tiempo de reverberación de un auditorio usando un modelo de lattice-Boltzmann. Por lo tanto, constituye una contribución significativa para la simulación de la acústica de recintos cerrados. De esta manera, se comprueba la viabilidad de los modelos de lattice-Boltzmann para realizar simulaciones en acústica.

Referencias

- [1] William C. Elmore, Mark A. Heald, “Physics of Waves”, McGraw-Hill 1969
- [2] L. D. Landau, E.M. Lifshitz, “Theory of Elasticity”, Second Revised and Enlarged Edition, Pergamon Press
- [3] G. K. Batchelor, F.R.S., “An introduction to fluid dynamics”, Cambridge University Press
- [4] L. D. Landau, E.M. Lifshitz, “Fluid Mechanics”, Third Revised English Edition, Pergamon Press
- [5] Greiner, Neise, Stöcker, Thermodynamics and Statical Mechanics, Springer
- [6] Herbert B. Callen, Thermodynamics and an introduction to thermostatistics, Second edition, University of Pennsylvania
- [7] “Instructions and Applications” for Standing Wave Apparatus Type 4002 and Frequency Analyzer Type 2107, (Brüel & Kjaer, 1967)
- [8] Lawrence E. Kinsler, Austin R. Frey, Alan B. Coppens, James V. Sanders, “Fundamentals of Acoustics”, Fourth Edition, John Wiley & Sons, Inc 2000
- [9] G. McNamara, G. zanetti, “Use of the Boltzmann Equation to Simulate Lattice-Gas Automata”, Physical Review Letters, Vol 61 N° 20, pp. 2332-2335, 1988
- [10] Matjaz Gomilsek, “Whispering gallery modes”, Seminar, University of Ljubljana, November 2011
- [11] Lianjie Huang, “A Lattice Boltzmann Approach to Acoustic-Wave Propagation”, In: Ru-Shan Wu, Valerie Maupin and Renata Dmowska, Editor(s), Advances in Geophysics, Elsevier, 2007, Volume 48, Pages 517-559, ISSN 0065-2687, ISBN 9780120188505
- [12] Maysam Saidi, Hassan Basirat Tabrizi, Reza Sepahi Samian, “Lattice Boltzmann Modeling of Wave Propagation and Reflection in the Presence of Walls and Blocks”, Proceedings of the World Congress on Engineering 2013 Vol III, WCE 2013, July 3 - 5, 2013, London, U.K.
- [13] Erlend Magnus Viggen, “The lattice Boltzmann method in acoustics”, 33rd Scandinavian Symposium on Physical Acoustics, February 2010

- [14] Guillaume A. Brès, Franck Pérot, David Freed, “Properties of the Lattice-Boltzmann Method for Acoustics”, 15th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference (30th AIAA Aeroacoustics Conference), 11 - 13 May 2009, Miami, Florida
- [15] Hicham MACHROUKI, Denis Ricot, Olivier Coste, “Lattice Boltzmann aero-acoustics modelling of flow around obstacles”, Société Française d’Acoustique, Acoustics 2012, Apr 2012, Nantes, France.
- [16] Tapio Lokki, Alex Southern, Samuel Siltanen, Lauri Savioja, “Acoustics of Epidaurus – Studies With Room Acoustics Modelling Methods”, ACTA ACUSTICA UNITED WITH ACUSTICA, Vol. 99 (2013) 40 – 47
- [17] Andrzej GOLAS, Katarzyna SUDER-DEBSKA, “Analysis of Dome Home Hall Theatre Acoustic Field”, ARCHIVES OF ACOUSTICS 34, 3, 273–293 (2009)
- [18] T. Kamisiński, “Acoustic Simulation and Experimental Studies of Theatres and Concert Halls”, ACTA PHYSICA POLONICA A, Vol. 118 (2010)
- [19] Anders Chr. Gade, Martin Lisa, Claus Lynge, Jens Holger Rindel, “Roman Theatre Acoustics; Comparison of acoustic measurement and simulation results from the Aspendos Theatre, Turkey”, ICA 2004

Appendix A

How to install L^AT_EX

Windows OS

TeXLive package - full version

1. Download the TeXLive ISO (2.2GB) from
<https://www.tug.org/texlive/>
2. Download WinCDEmu (if you don't have a virtual drive) from
<http://wincdemu.sysprogs.org/download/>
3. To install Windows CD Emulator follow the instructions at
<http://wincdemu.sysprogs.org/tutorials/install/>
4. Right click the iso and mount it using the WinCDEmu as shown in
<http://wincdemu.sysprogs.org/tutorials/mount/>
5. Open your virtual drive and run setup.pl

or

Basic MikTeX - T_EX distribution

1. Download Basic-MiK_TE_X(32bit or 64bit) from
<http://miktex.org/download>
2. Run the installer
3. To add a new package go to Start » All Programs » MikTeX » Maintenance (Admin)
and choose Package Manager

4. Select or search for packages to install

TexStudio - T_EX editor

1. Download TexStudio from
<http://texstudio.sourceforge.net/#downloads>
2. Run the installer

Mac OS X

MacTeX - T_EX distribution

1. Download the file from
<https://www.tug.org/mactex/>
2. Extract and double click to run the installer. It does the entire configuration, sit back and relax.

TexStudio - T_EX editor

1. Download TexStudio from
<http://texstudio.sourceforge.net/#downloads>
2. Extract and Start

Unix/Linux

TeXLive - T_EX distribution

Getting the distribution:

1. TexLive can be downloaded from
<http://www.tug.org/texlive/acquire-netinstall.html>.
2. TexLive is provided by most operating system you can use (rpm,apt-get or yum) to get TexLive distributions

Installation

1. Mount the ISO file in the mnt directory

```
mount -t iso9660 -o ro,loop,noauto /your/texlive####.iso /mnt
```

2. Install wget on your OS (use rpm, apt-get or yum install)
3. Run the installer script install-tl.

```
cd /your/download/directory
./install-tl
```

4. Enter command 'i' for installation
5. Post-Installation configuration:
<http://www.tug.org/texlive/doc/texlive-en/texlive-en.html#x1-320003.4.1>
6. Set the path for the directory of TexLive binaries in your .bashrc file

For 32bit OS

For Bourne-compatible shells such as bash, and using Intel x86 GNU/Linux and a default directory setup as an example, the file to edit might be

```
edit ~/.bashrc file and add following lines
PATH=/usr/local/texlive/2011/bin/i386-linux:$PATH;
export PATH
MANPATH=/usr/local/texlive/2011/texmf/doc/man:$MANPATH;
export MANPATH
INFOPATH=/usr/local/texlive/2011/texmf/doc/info:$INFOPATH;
export INFOPATH
```

For 64bit OS

```
edit ~/.bashrc file and add following lines
PATH=/usr/local/texlive/2011/bin/x86_64-linux:$PATH;
export PATH
MANPATH=/usr/local/texlive/2011/texmf/doc/man:$MANPATH;
export MANPATH
```

```
INFOPATH=/usr/local/texlive/2011/texmf/doc/info:$INFOPATH;  
export INFOPATH
```

Fedora/RedHat/CentOS:

```
sudo yum install texlive  
sudo yum install psutils
```

SUSE:

```
sudo zypper install texlive
```

Debian/Ubuntu:

```
sudo apt-get install texlive texlive-latex-extra  
sudo apt-get install psutils
```

Appendix B

Installing the CUED class file

\LaTeX .cls files can be accessed system-wide when they are placed in the $\langle\text{texmf}\rangle/\text{tex}/\text{latex}$ directory, where $\langle\text{texmf}\rangle$ is the root directory of the user's \TeX installation. On systems that have a local texmf tree ($\langle\text{texmflocal}\rangle$), which may be named “ texmf-local ” or “ localtexmf ”, it may be advisable to install packages in $\langle\text{texmflocal}\rangle$, rather than $\langle\text{texmf}\rangle$ as the contents of the former, unlike that of the latter, are preserved after the \LaTeX system is reinstalled and/or upgraded.

It is recommended that the user create a subdirectory $\langle\text{texmf}\rangle/\text{tex}/\text{latex}/\text{CUED}$ for all CUED related \LaTeX class and package files. On some \LaTeX systems, the directory look-up tables will need to be refreshed after making additions or deletions to the system files. For \TeX Live systems this is accomplished via executing “ texhash ” as root. \TeX Live users can run “ initexmf -u ” to accomplish the same thing.

Users not willing or able to install the files system-wide can install them in their personal directories, but will then have to provide the path (full or relative) in addition to the filename when referring to them in \LaTeX .

