

旋流管道声传播

王佳琪

1 背景介绍

当前, 国内外不少研究考虑到了流致噪声的产生和气动弹性不稳定性(如颤振、强迫振动和声共振)相关, 已经广泛研究了轴向流动管状机械中的小扰动的传播及其与叶片排的相互作用。在没有强冲击波的情况下, 流动不均匀性的强度通常很小, 因此在许多应用中, 它们可以被认为是对平均流动的小扰动。因此, 运动方程可以做线化处理。这使得这种流动的数学处理大大简化。对不稳定流动现象, 假设上游流动由施加在均匀轴向平均流动上的扰动组成。然后可以将这些扰动分成不同的独立潜在的声学、熵和旋涡模式。该模型适用于轴向平均流管道模型。然而, 在涡轮风扇发动机的级间区域中, 流场表现为非均匀的可压缩剪切流和强旋涡。对于旋流存在的情况, 平均旋流与扰动量的相互耦合作用严重影响着声波的传播截止特性。旋流产生的离心力和科式力使得声模态、涡模态和熵模态耦合在一起。而传统的轴向平均流情况的模态分析、基于轴向平均流的对流波动方程以及基于无旋流平均流假设的全势方程都不再适用。因此, 需要从原始未简化的连续方程、动量方程和能力方程出发, 重新建立新的旋流声传播模型来研究旋流存在下的模态特性。

从上个世纪 70 年代, Nayfeh 等人[1]系统的分析了发动机管道内声模态传播特性后, 1977 年, Kerrebrock[2]最先采用模态形式分析了无限长管道内包含旋流的小扰动传播问题, 并给出了刚体旋转和自由涡两种平均旋流的近似形式。90 年代中期, Kousen[3-5]采用配置发求解欧拉方程特征值问题, 研究无限长硬壁管道内有均熵、无粘、可压旋流情况下的小扰动传播特性。他的研究结果表明, 当有平均旋流存在时, 管道内有三类模态: 第一类是类似平均轴流声模态的近声模态(Acoustic modes), 与流体可压性相关, 之所以叫作近声模态是由于这部分模态不像在平均轴流情况下完全是压力波, 但又压力占优, 扰动的压力成分主要集中在这部分模态; 第二类模态是由于旋流的存在产生的一个特征值(即特征波数)连续体(Critical Layer), 这部分模态的随流导数为 0, 因此叫做纯对流模态, 这部分模态不含压力成分, 主要是涡扰动。第三类模态是位于纯对流模态两侧的两支离散的近对流模态(Hydrodynamic modes), 熵量占优但又包含少量压力成分。在后续的研究中, 一些学者又相继考虑了边界条件的影响, 在包含软壁面边界条件的同时, 近声模态将发生偏离。旋流背景下软硬边界条件,

满足基本欧拉线性方程的特征值对比如下图 1 所示。

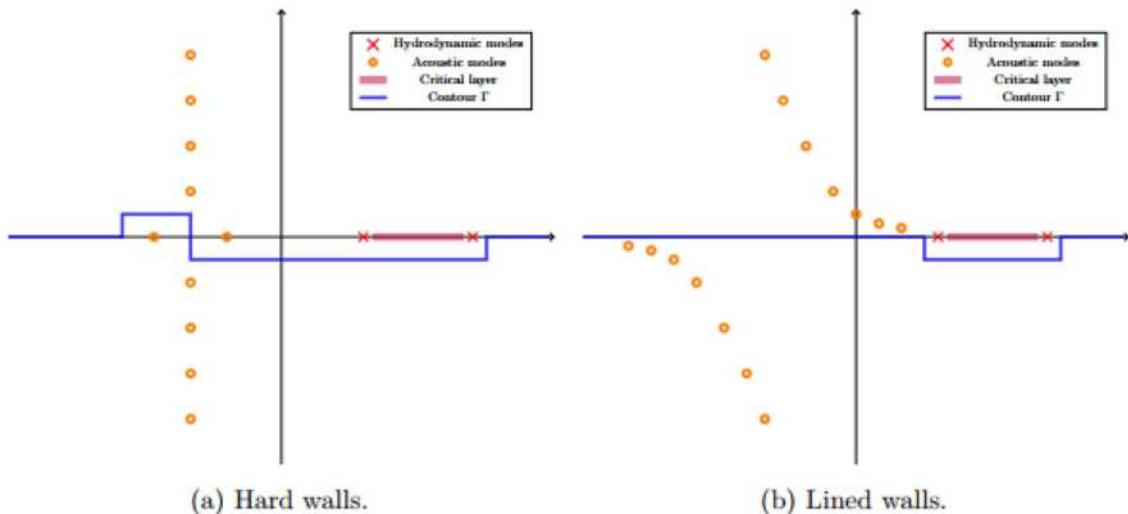


图 1 旋流轴向波数(特征值)示意图

从本世纪初开始, 美国圣母大学(the University of Notre Dame) Atassi 教授领导的 Hessert 航空研究中心在压气机螺旋流的流致噪声、声传播及声模态研究方面进行了一系列深入科研工作[6-10]。同样是进行无限长硬壁管道均熵旋流的模态分析, 与 Kousen 不同的是, 他们采用 Goldstein 的速度分解理论, 将 扰动速度分解成与平均流涡量相关的速度(有旋部分), 与压力相关的速度(有势部分)和由熵引起的速度三部分, 然后代入欧拉方程求解特征值问题。研究给出了近对流模态的特性及不同模态之间的耦合程度。1998 年, Tam 和 Aunault[11]也通过采用有限差分格式 求解线化欧拉方程初值问题分析了有旋流存在时硬壁管道内的模态特性, 他们假设定常流的密度是常量, 实际上求解的是个非均熵流问题。给出了此种情况下不稳定波的性质, 并指出近声模态与可压性有关, 而可压性对对流模态几乎没有影响。2001 年, Nijboer[12] 比较了 Kousen 和 Tam 模态分析的工作, 指出硬壁情况下非均熵流和均熵流特征值的计算结果的差异, 尤其是对流模态部分, 当假设定常流密度不变时, 对流模态会产生伪模态。2006 年, Atassi[7]分析了非均匀流中耦合的熵波和涡波的传播和稳定性问题。同年, Heaton 和 Peake[13]分析了有旋流存在时, 对流模态中的连续谱的不稳定性问题。Cooper [14] 利用在径向以对数变化的熵分布研究了有旋流条件熵对模态的影响。由于管道内存在平均旋流时, 模态扰动(指有相同旋转周期和行波波数的扰动)一般不能用类似正余弦函数(矩形管)或 Bessel 函数(圆管)这类特殊函数表示, 而只能用一些数值方法描述, 需要从原始控制方程出发采用近似解析或者数值方法求解, 如 WKB 近似、配置法、谱方法等。

从模态分析的结果人们认识到旋流对模态传播截止特性的影响, 因此有限长管道内包含

平均旋流的声传播问题开始受到重视。本世纪初, Cooper 和 Peake[14]采用基于摄动理论的多尺度方法研究渐变管道内平均旋流存在下的声传播特性。指出平均旋流会使同向旋转的模态更靠近截止(反向旋转模态远离截止)。并指出当壁面为软壁面时, 同向旋转的模态比在无旋流中更容易衰减(反向旋转的模态可能会放大)。2004 年又进一步分析了航空发动机内由于旋流和管道截面的变化在入口管道产生的声共振现象[15, 16]。2005 年同时考虑了有旋流情况下, 声波在管道中的传播情况, 和采用 Wiener-Hopf 方法计算等截面硬壁环管中有锥体存在情况下声波向前和向后的辐射[17]。2006 年, 在以往工作的基础上, Cooper[18]分析了平均流熵的形式对变截面管中含有旋流时声传播的影响。但多尺度方法公式不具有通用性, 应用不方便, 并且无法考虑各模态之间反射、散射等相互作用, 因此只能作为一种近似方法。2001 年, Ali 等人[6, 19]推导了包含旋流影响的管道出入口无反射边界条件, 并应用到线化欧拉方程中采用有限差分方法分析声和涡扰动在管道内的传播。另一种常用的管道声传播计算方法是有限元方法, 已有的有限元模型主要还是局限于有势平均流情况, 不适用于计算有平均旋流情况。

除管道声传播外, 利用声类比对旋转声源的发声和预测也是至关重要的一个环节。1951 年, Lighthill[20, 21]创造性地提出, 把流体力学基本方程重新变换, 并把脉动的气体密度作为独立的变量, 准确地类比流体力学方程左端项为自由空间的声传播波动算子, 右边作为流动噪声的声源项。该方程的最终可通过计算为源项与格林函数的卷积得到, 在这种情况下格林函数为简单的自由空间格林函数。经过不断的发展, 莱特希尔的类比已经以多种方式扩展, 包括考虑流动中的移动表面, Curle[22](1955)和 Ffowcs Williams 和 Hawkings [23](1969), 并在左侧选择不同的因变量(例如, Goldstein[24] (1976) 和 Morfey 和 Wright[25] (2007))。此外, 一些学者通过改写左侧的算子使得其对某些研究的问题的流动噪声更加适用。Lilley[26](1973)将 Lighthill 的类比扩展为更适合的形式通过在左侧引入三阶算子来表示高速喷射噪声, 以表示单向基础剪切流。Howe[27](1975)的对流波动方程重新改造了声类比方程, 使得其这个理论能够明确地考虑到各种非声学、非均匀平均流动等因素对流动噪声的影响。

应用发动机管道的噪声预测, 通过格林函数考虑管道旋流中的影响。同时, 旋流与转子、静子叶片排之间的相互作用及旋流对转静干涉噪声的作用等问题也值得研究。1994 年, Wundrow[28]采用格林函数的方法研究旋流与叶片排的相互作用。此外, Atassi、Peake 等人陆续研究了有旋流存在时叶栅的声辐射问题, 给出了其高频近似, 分析了旋流对叶片负载的影响。2005 年, Cooper 等人[29]建立近似解析模型来预测转静干涉噪声。Posson 和 Peake [30,

31](2012-2013)考虑了管道中轴向剪切和旋转的基流的影响, 重新整理方程为六阶线性算子作用下的压力扰动的形式, 并将其应用于转静干涉的噪声预测。

本报告的组织如下: 首先, 介绍了旋流管道的特征值求解问题, 相较于传统的均匀流管道, 重新整理的原始控制方程将考虑熵值变化的影响, 并通过配置法数值求解矩阵特征值。最终, 给出一些案例论证旋流、边界条件以及周向模态对特征值的影响。接着, 第 3 节和第 4 节将分别具体地分析均熵和非均熵条件下, 旋流管道声-涡-熵耦合的机理。耦合分析将建立在计算各个模态特征谱的压力、涡量和熵值的能量占比之上, 并借此进一步分析不同参数在声-涡-熵耦合中的作用。在非均熵研究中, 我们还将探究不稳定模态的产生机理和特性分析。最后, 第 5 小节介绍旋流管道的发声机理, 是对 Lighthill 声类比的拓展, 为后续对旋转机械旋流背景下的转静干涉的噪声预测及“声共振”机理的研究打下基础。

2 旋流管道特征值求解

2.1 线性欧拉方程

首先, 我们来考虑欧拉描述的无粘流体的运动方程。欧拉方程是 Navier-Stokes 方程粘度为零的特例。设 \underline{u} 是流体的总速度, $\underline{\rho}$ 是流体的总密度, \underline{p} 是流体的总压力, \underline{e} 是每单位质量流体的总内部能量。

欧拉方程由下式给出:

$$\partial \underline{\rho} / \partial t + \nabla \cdot (\underline{\rho} \underline{u}) = 0 \quad (1)$$

$$\underline{\rho} (\partial \underline{u} / \partial t + \underline{u} \cdot \nabla \underline{u}) + \nabla \underline{p} = 0 \quad (2)$$

$$\partial (\underline{\rho} \underline{e}) / \partial t + \nabla \cdot (\underline{\rho} \underline{e} \underline{u}) + \underline{p} (\nabla \cdot \underline{u}) = 0 \quad (3)$$

方程(1)为质量守恒, 方程(2)为动量守恒, 方程(3)为能量守恒。

能量守恒还可以写成总熵的表达形式:

$$\partial \underline{s} / \partial t + \underline{u} \cdot \nabla \underline{s} = 0 \quad (4)$$

另外, 还需状态方程来封闭求解欧拉方程, 假设为理想气体:

$$\underline{p} = R \underline{\rho} \underline{T} \quad (5)$$

其中, \underline{T} 为绝对温度。

令 c_p 为等压热容, c_v 为等体积热容, $R = c_p - c_v$, 绝热指数 $\gamma = c_p/c_v$. 对理想气体来说, $\underline{e} = c_v \underline{T}$,

因此可得下式:

$$\underline{\rho e} = \underline{pc_v}/R \quad (6)$$

可以带入质量守恒守恒可以将能量方程(3)改写成下式:

$$\partial \underline{p}/\partial t + \underline{\vec{u}} \cdot \nabla \underline{p} + \gamma \underline{p} (\nabla \cdot \underline{\vec{u}}) = 0 \quad (7)$$

声作为以特定波长的非定常扰动以声速在流体中的传播, 流体的总速度、密度和压力可表示为未扰动前的基础流(平均流)与扰动量的叠加形式:

$$\underline{\vec{u}} = \underline{\vec{u}_0} + \underline{\vec{u}}, \quad \underline{\rho} = \rho_0 + \rho, \quad \underline{p} = p_0 + p \quad (8)$$

在旋流管道内, 我们用柱坐标表达扰动速度 $\underline{\vec{u}} = (u, v, w)$, 分别表示轴向 x 、径向 r 和周向 θ 方向的分量。对于旋流管道内的基础流物理量, 速度、密度、压力和熵, 均假定只和径向位置有关。对于速度 $\underline{\vec{u}_0}$, 有以下表达形式:

$$\underline{\vec{u}_0} = (u_0, v_0, w_0) = (U_x(r), 0, U_\theta(r)) \quad (9)$$

即管内旋流在轴向和周向分量大小相近, 但是径向方向的分量可以忽略。

利用能量守恒方程(4)以及方程(7), 并用柱坐标系表达, 最终得到展开的扰动量形式的线性欧拉方程:

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{D_0 p}{Dt} + \frac{\rho_0 U_\theta^2}{rc_0^2} v + \rho_0 (\nabla \cdot \underline{\vec{u}}) = 0 \quad (10)$$

$$\rho_0 \left(\frac{D_0 u}{Dt} + v \frac{dU_x}{dr} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (11)$$

$$\rho_0 \left(\frac{D_0 v}{Dt} - \frac{2U_\theta w}{r} \right) - \frac{U_\theta^2}{r} \rho + \frac{\partial p}{\partial r} = 0 \quad (12)$$

$$\rho_0 \left(\frac{D_0 w}{Dt} + \frac{v}{r} \frac{d}{dr} (rU_\theta) \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0 \quad (13)$$

$$\frac{D_0 s}{Dt} + \frac{ds_0}{dr} v = 0 \quad (14)$$

其中, $s_0 = c_v \log \left(\frac{\gamma p_0}{\rho_0 \gamma} \right)$ (15)

$$c_0^2 = \gamma p_0 / \rho_0 \quad (16)$$

由方程(15)最终可以简化得到密度脉动量和压力脉动量之间的关系:

$$\rho = \frac{1}{c_0^2} p - \frac{\rho_0}{c_p} s \quad (17)$$

其中, s 为熵的扰动量。

2.2 波数域特征方程

由方程(17)可以看出, 在均熵情况下, 密度脉动力可以线性表达为压力脉动量的形式。因此, 可以在求解线性欧拉方程的时简化为 5 个脉动未知量, 并通过傅里叶变换:

$$\{u, v, w, p, s\}(r, x, \theta, t) = \int \sum_n \int \{U(r), V(r), W(r), P(r), S(r)\} e^{ikx} dk e^{in\theta} e^{-iot} d\omega \quad (18)$$

最终得到波数域的表达式:

$$-\frac{i\Omega P}{c_0^2} + V \frac{\rho_0 U_\theta^2}{rc_0^2} + \rho_0 \left[\frac{inW}{r} + ikU + \frac{V}{r} + \frac{dV}{dr} \right] = 0 \quad (19)$$

$$\rho_0 \left[-i\Omega U + V \frac{dU_x}{dr} \right] + ikP = 0 \quad (20)$$

$$\rho_0 \left[-i\Omega V - \frac{2U_\theta}{r} W \right] + \frac{dP}{dr} - \frac{U_\theta^2}{rc_0^2} P + \frac{\rho_0 U_\theta^2}{rc_p} S = 0 \quad (21)$$

$$\rho_0 \left[-i\Omega W + \frac{V}{r} \frac{d}{dr} (rU_\theta) \right] + \frac{inP}{r} = 0 \quad (22)$$

$$-i\Omega S + \frac{ds_0}{dr} V = 0 \quad (23)$$

$$\text{其中, } \Omega(r) = \omega - kU_x(r) - \frac{nU_\theta(r)}{r} \quad (24)$$

$$\text{令 } \hat{\Omega} = \omega - \frac{nU_\theta}{r}, \zeta = 1 - \frac{U_x^2}{n^2 c_0^2} \quad (25)$$

最后, 整理上述方程(19)-(23), 并将 k 提取到右侧, 得到矩阵表达形式:

$$AX = \lambda X \quad (26)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{U_x \hat{\Omega}}{c^2_0 \zeta} i & \left[-\frac{U_x}{c^2_0 \zeta} \frac{dUx}{dr} + \frac{1}{r\zeta} + \frac{U_\theta^2}{\zeta r c^2_0} \right] + \frac{1}{\zeta} \frac{d}{dr} & \frac{n}{r\zeta} i & -i \frac{\hat{\Omega}}{c^2_0 \rho_0 \zeta} & 0 \\ 0 & -i \frac{\hat{\Omega}}{U_x} & -\frac{2U_\theta}{rU_x} & \frac{1}{\rho_0 U_x} \frac{d}{dr} - \frac{U_\theta^2}{\rho_0 U_x r c^2_0} & \frac{U_\theta^2}{r c_p U_x} \\ 0 & \frac{1}{U_x} \left[\frac{U_\theta}{r} + \frac{dU_\theta}{dr} \right] & -\frac{\hat{\Omega}}{U_x} i & \frac{in}{r \rho_0 U_x} & 0 \\ -\frac{\rho_0 \hat{\Omega}}{\zeta} & \frac{\rho_0}{\zeta} \left[\frac{dU_x}{dr} - \left(\frac{U_\theta^2}{c^2_0} + 1 \right) \frac{U_x}{r} \right] - \frac{\rho_0 U_x}{\zeta} \frac{d}{dr} & -\frac{n \rho_0 U_x}{r \zeta} & i \frac{U_x \hat{\Omega}}{c^2_0 \zeta} & 0 \\ 0 & \frac{1}{U_x} \frac{ds_0}{dr} & 0 & 0 & -i \hat{\Omega} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \\ P \\ S \end{bmatrix}, \quad \lambda = -ki$$

2.3 声学边界条件

对于图 2 所示的无限长旋流管道模型, Ingard-Myers 给出了特征值问题的边界条件:

$$Z_h \frac{\omega V(h)}{U_x(h)} + \frac{\hat{\Omega}(h)P(h)}{U_x(h)} - kP(h) = 0 \quad (27)$$

$$Z_1 \frac{\omega V(1)}{U_x(1)} - \frac{\hat{\Omega}(1)P(1)}{U_x(1)} + kP(1) = 0 \quad (28)$$

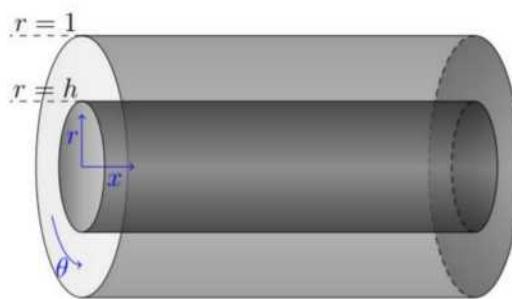


图 2 无限长旋流管道模型

2.4 特征值数值求解的配置法

当管道内存在平均旋流时, 特征方程不再是 Bessel 方程, 而是线化欧拉方程组。径向的特征函数也无法写成 Bessel 函数的形式。本报告采用数值配置法的方式求解该问题。所谓配置法, 即将所求方程组在配置点处展开求解, 然后利用配置点除的值可以插值得到任意点的

值。这里, 配置点选取 N 阶 Chebyshev 多项式的极点, 即

$$r_j = \cos \frac{\pi j}{N}, j = 0, \dots, N \quad (29)$$

若令 $f(r)$ 为 $[-1,1]$ 上连续函数, 则 $f(r)$ 可以用 N 阶插值多项式 $g_j(r)$ 插值得到, 即

$$f(r) = \sum_{j=0}^N f(r_j) g_j(r) \quad (30)$$

这里令

$$g_j(r) = \frac{(-1)^{j+1}(1-r^2)T'_N(r)}{\bar{c}_j N^2(r-r_j)}, j = 0, \dots, N \quad (31)$$

$$\text{其中, } \bar{c}_j = \begin{cases} 2 & j = 0, N \\ 1 & 1 \leq j \leq N-1 \end{cases} \quad (32)$$

所以任意扰动量 f , 在非配置点处函数值可由配置点 r_j 处的值插值得到, 即

$$f(r) = \frac{(1-r^2)T'_N(r)}{N^2} \sum_j f(r_j) \frac{(-1)^{j+1}}{\bar{c}_j(r-r_j)} \quad (33)$$

$$\text{其中, } T'_N(r) = \frac{N \cdot \sin(N \arccos r)}{\sqrt{1-r^2}} \quad (34)$$

从特征方程(26)可以看出, 系数矩阵里包含了变量的导数, 所以这里需要求解插值函数的导数。令扰动量在配置点处的导数为

$$\frac{df(r_i)}{dr} = \sum_{j=0}^N D_{ij} f(r_j), i = 0, \dots, N \quad (35)$$

则导数矩阵为

$$D_{ij} = \begin{cases} \frac{c_i (-1)^{i+j}}{2c_j \sin \frac{\pi}{2N} (i+j) \sin \frac{\pi}{2N} (-i+j)} & i \neq j; i = 0, \dots, N/2; j = 0, \dots, N \\ \frac{-\cos(\frac{\pi i}{N})}{2 \sin^2(\frac{\pi i}{N})} & i = j; i = 1, \dots, N/2; j = 1, \dots, N \\ \frac{2N^2 + 1}{6} & i = j = 0 \\ -D_{N-i, N-j} & i = N/2 + 1, \dots, N; j = 0, \dots, N \end{cases} \quad (36)$$

值得一提的是, 在采用配置法求解特征值问题时, 由于在边界上的配置点既要满足控制方程

又要满足边界条件, 因此在边界点上, 方程是“超定”的。处理“超定”边值问题的方法有两种, 一种叫作“强制”边界条件, 即用声学边界条件替换边界上某个控制方程; 另一种叫作“自然”边界条件, 即将控制方程进行变换, 使控制方程的个数与未知数的个数相同。本报告采用“强制”边界条件进行计算。

2.5 不同变量参数对特征值的影响

采用上述的配置法求解线性欧拉方程的特征值问题, 可以得到轴向波数(特征值)和扰动量的径向分布(特征向量)。包含旋流的典型特征模态谱主要包含两类模态:一类是(近/纯)声模态, 这类模态并不跟随平均流运动, 其特征值的分布是离散的; 另一类是涡量占优的(近/纯)对流模态, 这类模态基本跟随平均流运动, 即对流波数 $-w + kU_x + nU_\theta / r$ 近似为零或者为零。因此, 在无旋流的情况下, 对流模态的轴向波数分布位于:

$$\inf_{h < r < 1} \frac{w}{U_x(r)} \leq k \leq \sup_{h < r < 1} \frac{w}{U_x(r)} \quad (37)$$

而在周向平均流速非零的情况下, 对流模态的周向波数分布位于:

$$\inf_{h < r < 1} \frac{w - nU_\theta(r)}{U_x(r)} \leq k \leq \sup_{h < r < 1} \frac{w - nU_\theta(r)}{U_x(r)} \quad (38)$$

模态的一个重要参数是轴向波数 k 。如果 w/c_0 远大于特征值 α_n , 则 α_n 为实数且不小, 并且轴向模态表现为正弦曲线, 且轴向波长不大(图3a)。如果将 w/c_0 减小到接近 α_n , 则 k_n 变小而轴向波长变大(图3b)。如果 $w/c_0 = \alpha_n$ 且 $k_n = 0$, 则该模式处于共振状态, 并且轴向波长是无限的(图3c)。如果 $w/c_0 = \alpha_n < \alpha_n$ 并且 k_n 是虚数, 则该模式呈指数衰减或“截止”(图3d)。

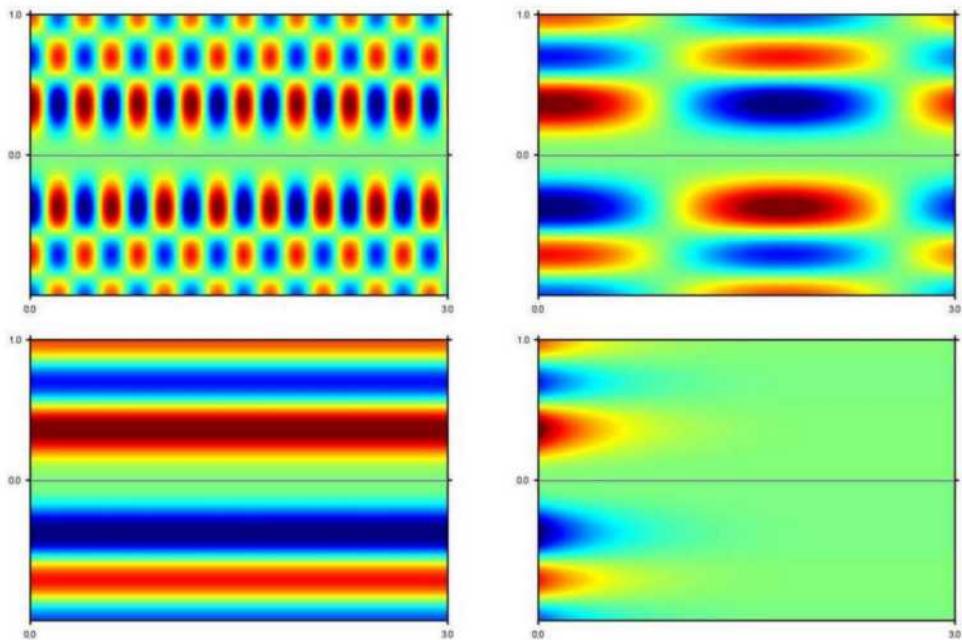
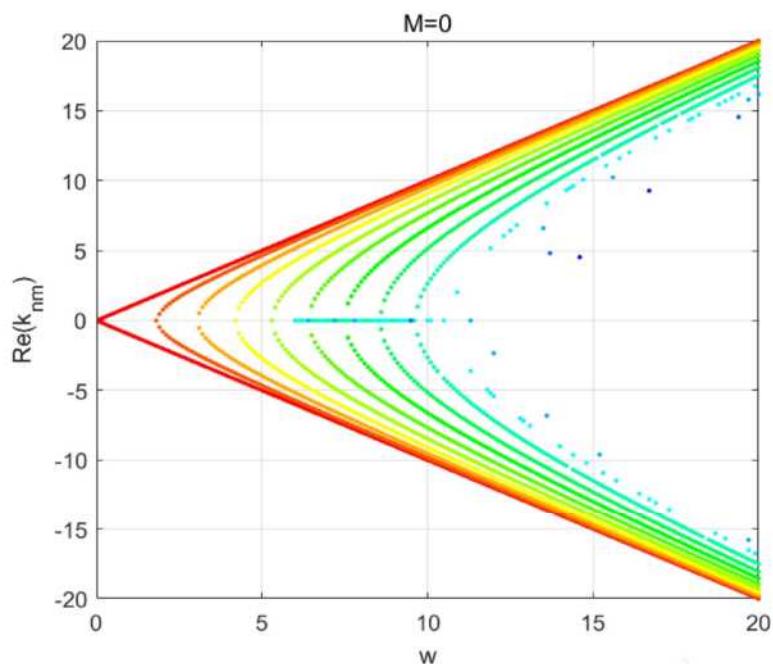


图 3 不同轴向波数的模态特性

(a) k 为实数, 且较大, (b) k 为实数, 比较小, (c) k 为 0, (d) k 为虚数

轴向流速对轴向波数的截止特性具有较大的影响, 根据特征值计算可以得到无流管道和轴向流速马赫数 0.5 时, cut-on 模态轴向波数的实数项分布特性如图 4 和图 5 所示。相关仿真计算结果也得到了试验结果的证实。

图 4 径向模态为 1 下的 cut-on 模态轴向波数的实数项分布特性 ($M=0$)

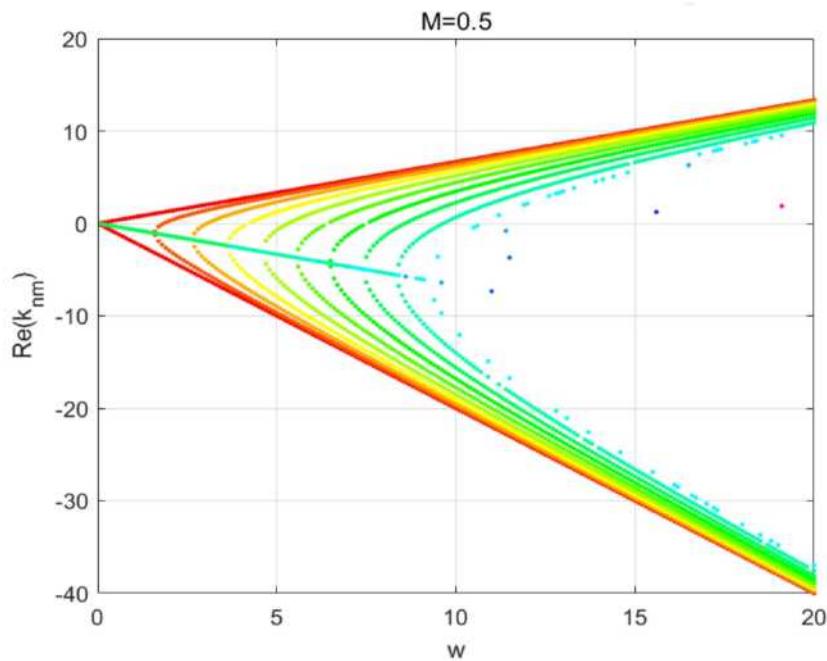


图 5 径向模态为 1 下的 cut-on 模态轴向波数的实数项分布特性 (M=0.5)

接下来我们将逐一对 4 个案例进行分析, 探究旋流、软壁面边界、模态等因素对特征值及其声传播的影响。案例如下表所示:

案例	轴向速度 U_x	周向速度 U_θ	w	n	软壁面边界条件
1	0.5	$0; 0.1r + 0.1/r;$ $0.2r + 0.2/r$	25	15	硬壁
2	0.5	0	25	15	硬壁 vs 软壁 ($1-2*i$)
3	0.5	$0; 0.1r + 0.1/r;$ $0.2r + 0.2/r$	25	15	软壁 ($1-2*i$)
4	0.5	$0.1r + 0.1/r$	25	5/10/15	软壁+旋流

2.5.1 案例 1: 平均旋流对模态计算的影响

图 6 为典型的无旋流和旋流的轴向波数对比, 恰好能验证上述分析结果。其中, 管道内径为 0.6, 轴向模态 n 为 15, 频率 w 为 25, 轴向速度为 0.5, 内外均为硬壁均熵的条件。根据理论推导无旋流条件下模态可知, 其 cut-off 所在的直线需满足 $\text{real}(k) = -wU_x / (1 - U_x^2)$, 该参数条件下 $\text{real}(k) = -25 * 0.5 / (1 - 0.5^2) = 16.67$, 符合要求。同时, 对流模态需满足方程(37), $k=50$, 同样在误差可接受范围内满足要求。对比无旋流, 在旋流条件下, 对流模态扩展为连续点,

这与方程(38)的结果是一致的。旋流的引入同样改变了管道声传播的截止和传播特性, 图中三种轴向速度参数下, 其 cut-on 声模态依次递减; 同时, cut-off 所在的直线也逐渐右移。Cooper 和 Peake[16]在 2000 年 JFM 期刊曾将旋流的因素考虑在导致进口叶道区域产生声共振的因素之一。从图中也可以体现旋流使得原先传播的模态截止, 导致声音无法继续后传, 而非稳定的近对流模态的能量却逐渐增加。

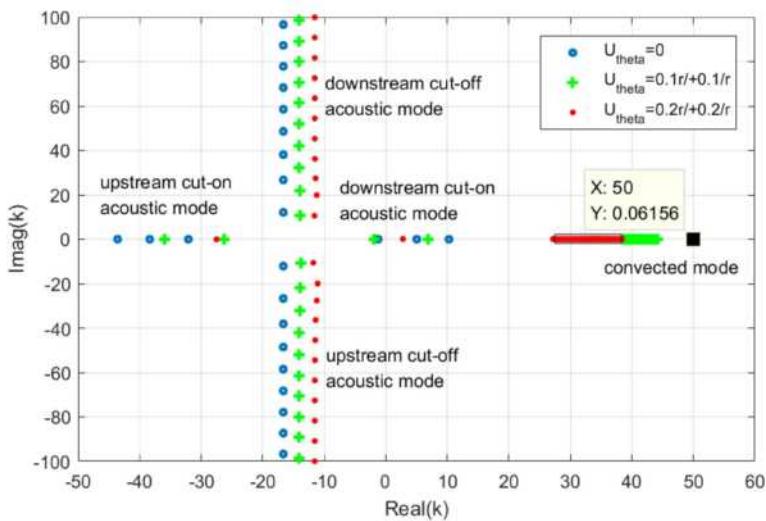


图 6 案例 1: 轴向波数无旋流与旋流对比-参数: $h=0.6, w=25, n=15, U_x=0.5$ 硬壁

2.5.2 案例 2-3: 壁面边界条件对特征值的影响

首先通过案例 2 来单独分析有壁面边界条件对特征值的影响。如图 7 所示, 分别为硬壁、内外均为软壁面、内环软壁面

外环硬壁、内环硬壁外环软壁面四种边界条件。图中可以看出, 软壁面的存在使得 cut-on 模态逐渐往 cut-off 模态方向聚拢, 极大程度的改变了管道声传播的特性, 尤其是对截至频率的影响, 另外内外均设软壁相比单环软壁影响更大。但吸声的效果与模态和频率等参数直接相关。因此, 在管道降噪问题中, 根据实际情况合理的选择软壁面的声学参数十分关键。

接下来案例 3 分析了均熵情况下, 平均旋流对软壁面吸声效果的影响, 选取的旋流参数与案例 1 一致。从图 8 可以看出, 在旋流条件下, 随着旋流的增大无衰减的传播声模态个数逐渐减少, 声模态截至线右移, 对流模态左移并且范围变大, 这与案例 1 旋流的影响类似。加上软壁面后, 不同旋流参数对截至模态的曲线形状并未产生改变, 可以认为软壁面和旋流效果可以叠加。另一方面, 软壁面并不改变对流模态的性质, 其原因与对流模态的能量由于流动的涡量的作用效果, 而并非压强的作用有关。当然, 从图 7 右图可以看出, 对流模态的数值仿真会分裂出上下两条曲线, 这是数值计算的误差所导致的, 与实际 critical layer 相比,

其计算精度仍在可接受范围内。值得注意的是, 在对流模态末端会出现离散的一些点, 通常称为近对流模态或者旋转模态, 它们包含了绝大部分的非定常涡量, 许多学者开始着手研究该模态与管道声学失稳之间的关系。

2.5.3 案例 4: 周向模态对特征模态的影响

案例 4 分析了均熵自由涡和刚体旋流存在, 并且同时存在内外软壁面的情况下, 周向模态数对特征模态计算结果的影响。N 分别取-15, -5, 5, 15。从图 9 可以看出, 当旋流与声波传播方向相反对 (n 为负) 声模态的截止线相对左移, 有更多无衰减的传播声模态, 而对流模态相对右移, 并且范围扩大; 当旋流与声波传播方向相同时 (n 为正) 声模态的截止线相对右移, 无衰减的传播声模态数量减小, 而对流模态相对左移, 并且范围扩大;

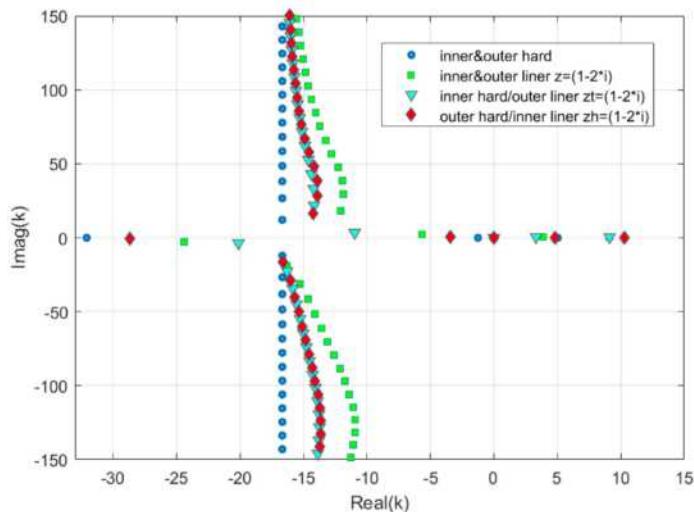


图 7 案例 2: 轴向波数硬壁与软壁面对比-参数: $h=0.6, w=25, n=15, U_x=0.5$ 硬壁 vs 软壁

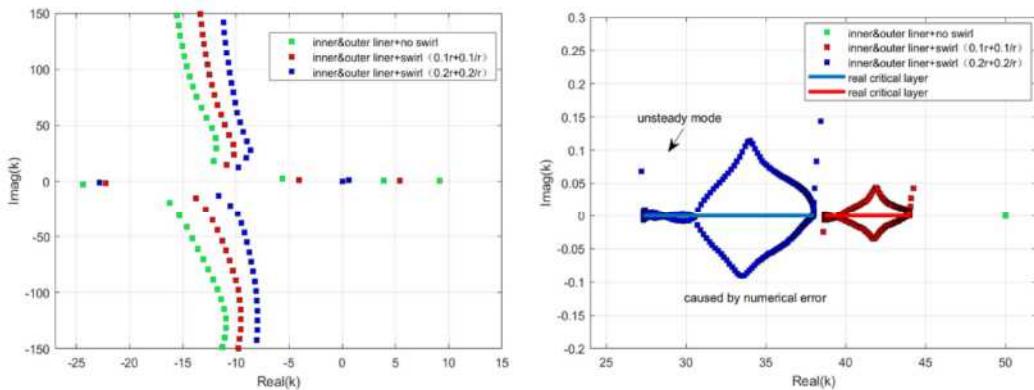


图 8 案例 3: 旋流对软壁吸声效果的影响对比-参数: $h=0.6, w=25, n=15, U_x=0.5$ 软壁+旋流

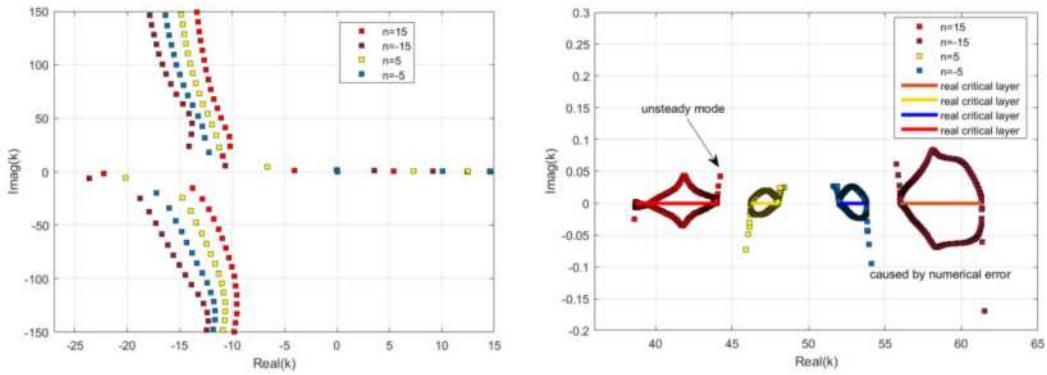


图 9 案例 4: 不同周向模态旋流对软壁面吸声效果对比-参数: $h=0.6, w=25, n=-5/-15/5/15, U_x=0.5$

3 均熵旋流管道声-涡耦合

当有平均旋流存在时, 管道内的声、涡和熵模态是耦合在一起的, 这种耦合的机制和现象一直是旋流研究中的热点和难点, 它涉及了旋流对声场和稳定性的影响。这一部分, 我们就来具体探讨管道内这些模态的耦合程度, 并展示不同模态的特征函数及其特点。

首先, 计算各个模态的压力、涡量和熵。柱坐标系扰动速度 \vec{u} 旋度公式为:

$$\nabla \times \vec{u} = \vec{e}_r \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \vec{e}_\theta \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \vec{e}_x \left(\frac{\partial rw}{\partial r} - \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \quad (39)$$

三个方向的扰动速度同样可以表达成如式(18)所示的谐波形式, 则将其带入上面的旋度公式得:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{u} = & \vec{e}_r \left[\frac{U(r)}{r} in - W(r)ik \right] e^{ikx+in\theta-i\omega t} + \vec{e}_\theta \left[V(r)ik - \frac{dU(r)}{dr} \right] e^{ikx+in\theta-i\omega t} + \\ & \vec{e}_x \left[\frac{W(r)}{r} + \frac{dW(r)}{dr} - \frac{V(r)}{r} in \right] e^{ikx+in\theta-i\omega t} \end{aligned} \quad (40)$$

所以三个方向的旋度沿径向的变化为:

$$\zeta_x(r) = \frac{W(r)}{r} + \frac{dW(r)}{dr} - \frac{V(r)}{r} in \quad (41)$$

$$\zeta_r(r) = \frac{U(r)}{r} in - W(r)ik \quad (42)$$

$$\zeta_\theta(r) = V(r)ik - \frac{dU(r)}{dr} \quad (43)$$

由式(17)得熵扰动的表达式为

$$s = c_v \frac{p}{p_0} - c_p \frac{\rho}{\rho_0} \quad (44)$$

这里为分析声、涡和熵模态之间的耦合程度, 定义如下公式来衡量各个模态声压、涡和熵部

分占的比例。令声压部分占的比例为:

$$H_p = \frac{\sum_{i=0}^N |p(r_i)|}{\sum_{i=0}^N (|p(r_i)| + |\zeta_x(r_i)| + |\zeta_\theta(r_i)| + |\zeta_r(r_i)| + |s(r_i)|)} \quad (45)$$

其中 N 为配置点个数。涡部分占的比例为:

$$H_\zeta = \frac{\sum_{i=0}^N (|\zeta_x(r_i)| + |\zeta_\theta(r_i)| + |\zeta_r(r_i)|)}{\sum_{i=0}^N (|p(r_i)| + |\zeta_x(r_i)| + |\zeta_\theta(r_i)| + |\zeta_r(r_i)| + |s(r_i)|)} \quad (46)$$

熵部分占的比例为:

$$H_s = \frac{\sum_{i=0}^N (|s(r_i)|)}{\sum_{i=0}^N (|p(r_i)| + |\zeta_x(r_i)| + |\zeta_\theta(r_i)| + |\zeta_r(r_i)| + |s(r_i)|)} \quad (47)$$

利用上式(45)-(47)能量计算式, 我们逐一通过几个案例, 探究在均熵情况, 涡流 (自由涡旋流和刚体旋转旋流) 因素下的声-涡耦合关系。案例如下表所示:

案例	轴向速度 U_x	周向速度 U_θ	w	n	软壁面	均熵与非均熵
5	0.3	0.3 r	10	2	硬壁	$\beta = 0$
6	0.3	0.3/r	10	2	硬壁	$\beta = 0$

3.1 均熵自由涡旋流声-涡耦合

这里首先给出自由涡旋流特征函数的特性和声涡模态的耦合(案例 5)。选取参数为 $h=0.5$, $U_x=0.3$, $U_\theta=0.3r$ (通常称其为自由涡旋流), $w=10$, $n=2$ 。平均流压力、密度和声速的分布如图 10 所示。

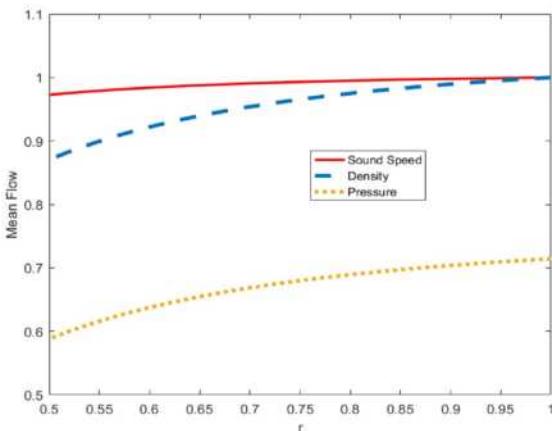


图 10 平均流压力、密度和声速沿径向的分布

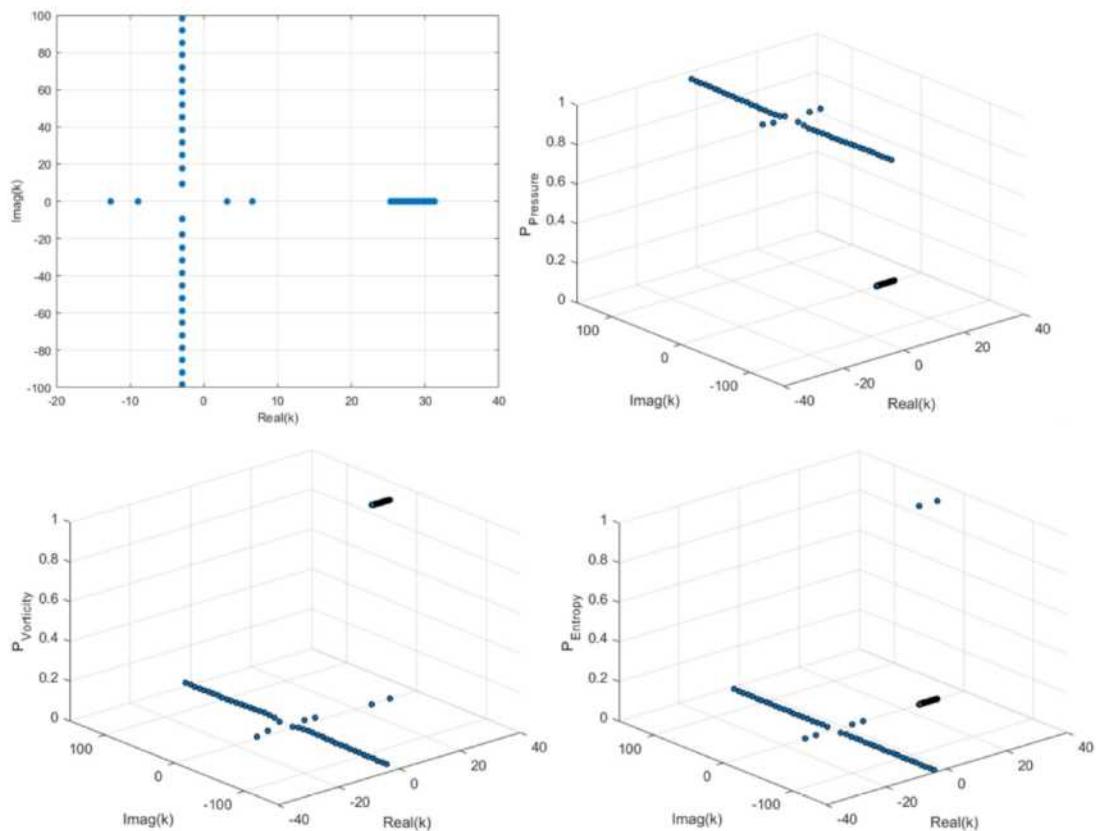


图 11 自由涡旋流各模态压力、涡量和熵值成分

图 11-图 19 给出了自由涡旋流各个模态特征值以及其模态压力、涡量和熵值的分布。可以看出均熵自由涡旋流情况下, 压力均集中在声模态部分, 而涡量均集中在对流模态部分, 这是因为此种情况平均流无旋, 所以扰动量三个方向的旋度也为零, 声模态是无旋的。同时, 虽然在特征值及其特征函数考虑熵值参数的影响, 但由于案例 5 为均熵条件, 因此脉动熵值均为 0。其中, 图中有两个在对流模态两侧的点, 其相对于对流模态熵值占优, 这是由于边界条件带来的伪点, 其特征函数由于在边界上产生的数值误差。

图 12-图 19 给出了两个向上游无衰减传播模态的压力和三个方向扰动速度的特征函数, 包

含实部和虚部的复数分布。声模态的阶数由压力特征函数的实部穿过实轴的次数决定, 第 N 阶径向模态穿过实轴的次数是 N-1 次。

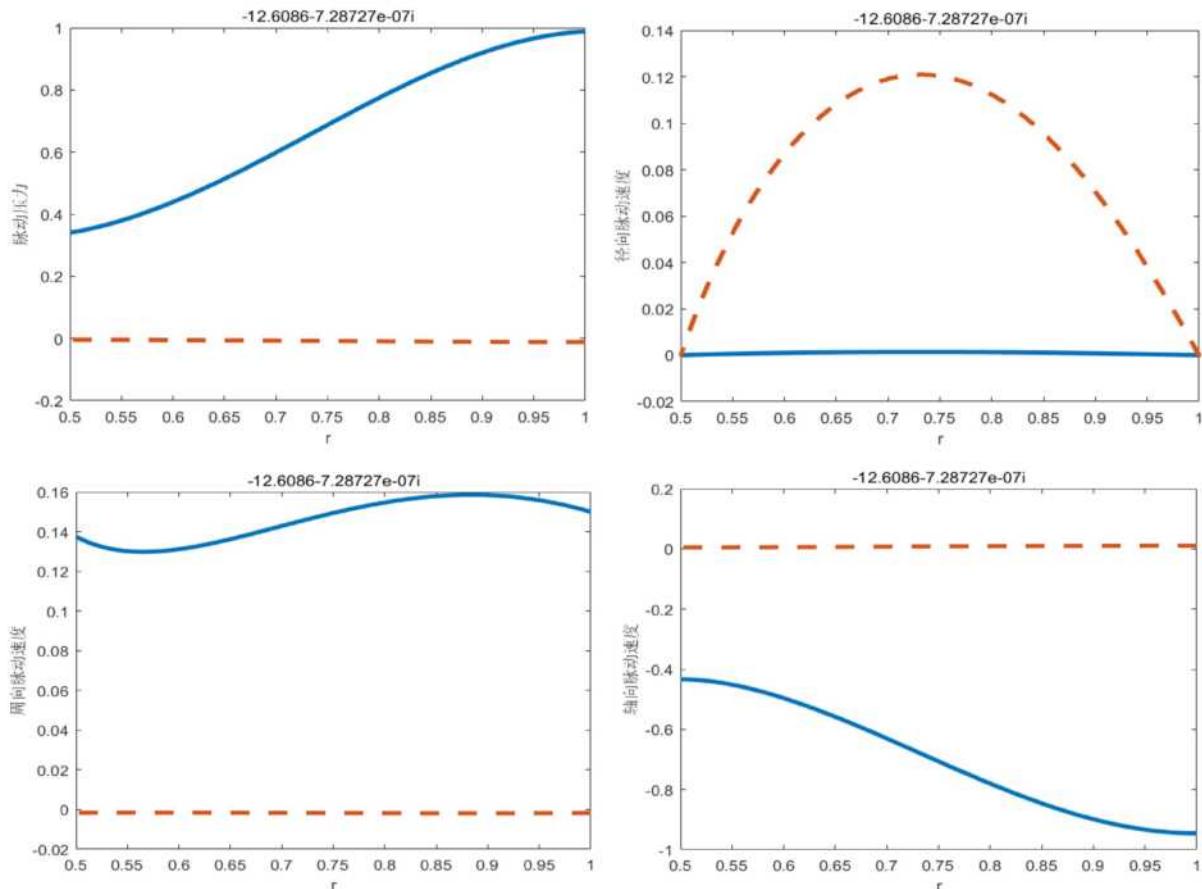
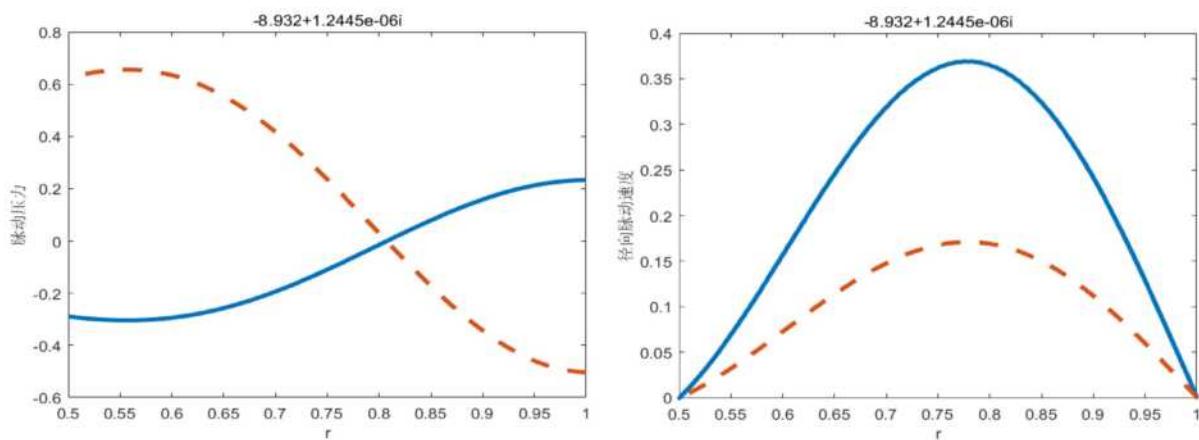


图 12 第一阶向上游 cut-on 的声模态中的压力和速度扰动



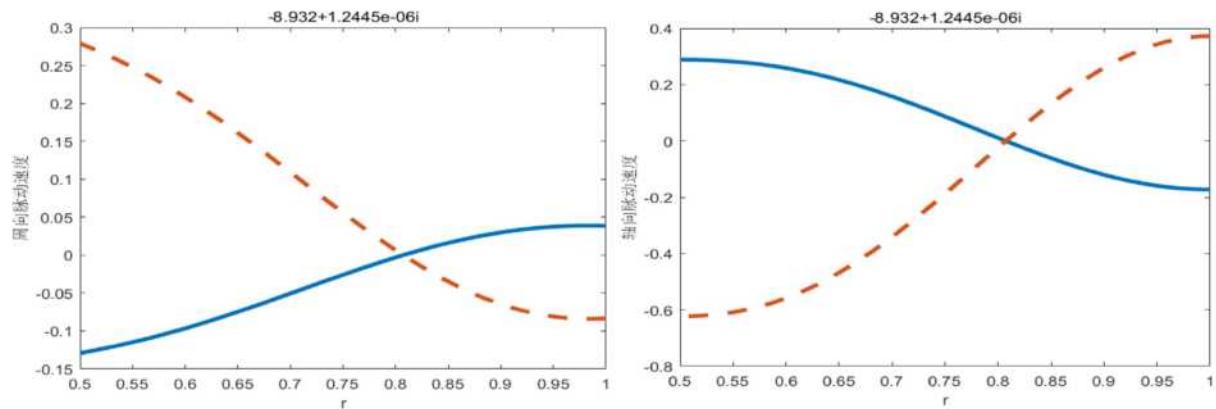


图 13 第二阶向上游 cut-on 的声模态中的压力和速度扰动

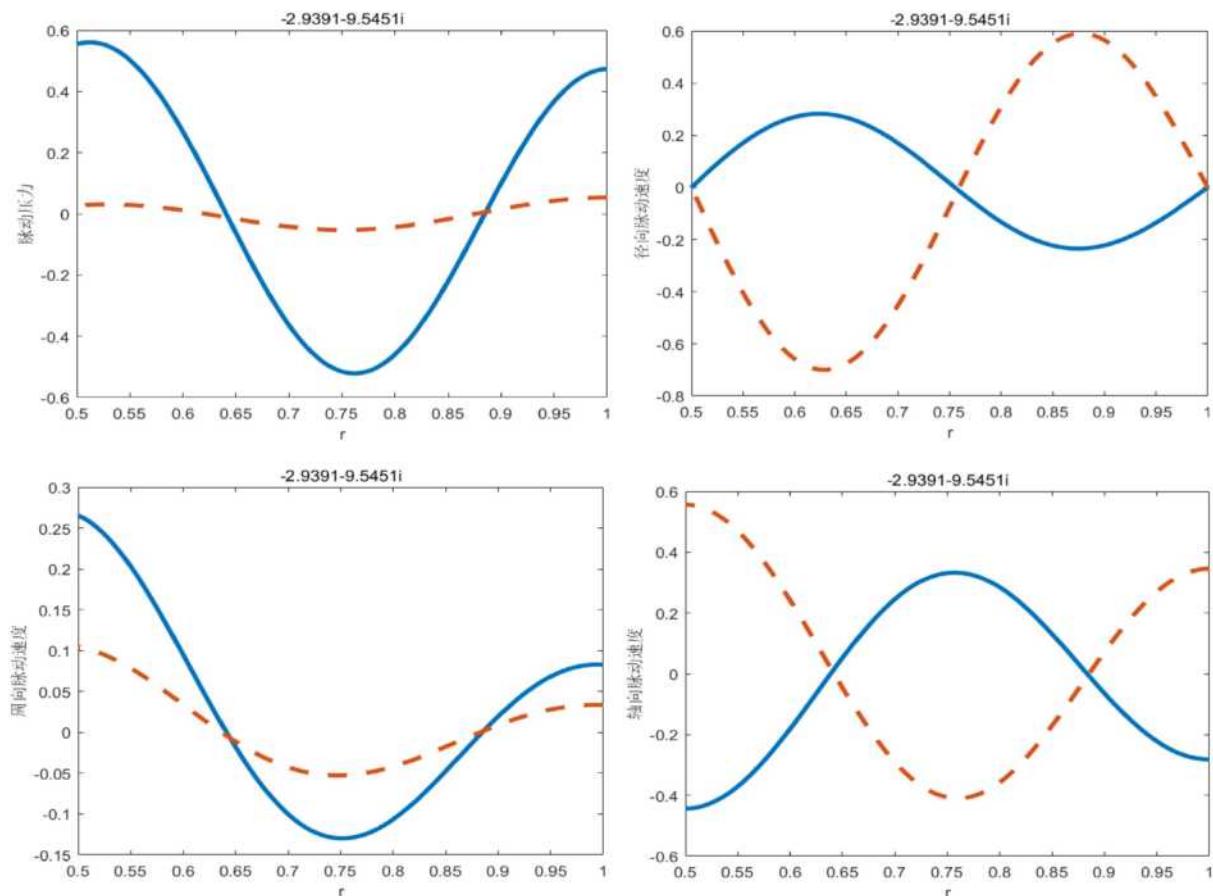


图 14 第三阶向上游 cut-off 的声模态中的压力和速度扰动

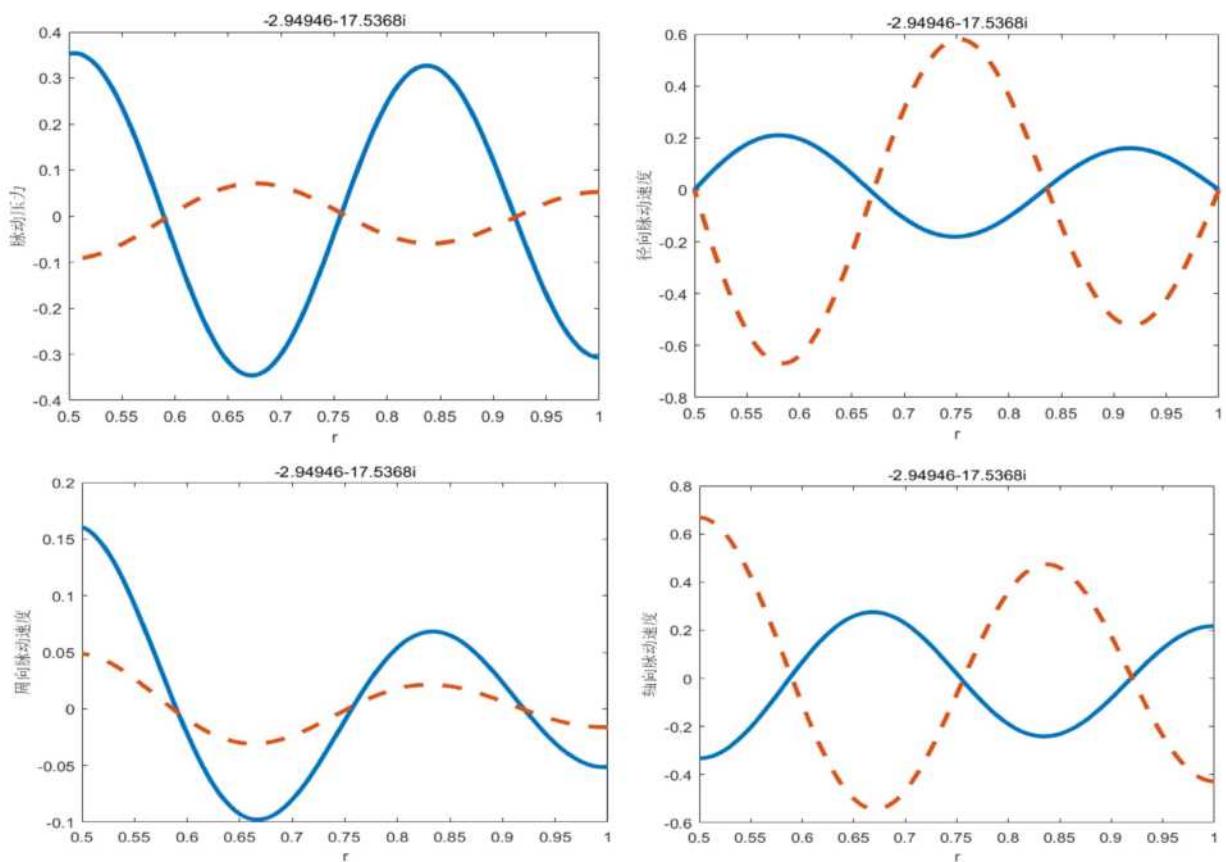


图 15 第四阶向上游 cut-off 的声模态中的压力和速度扰动

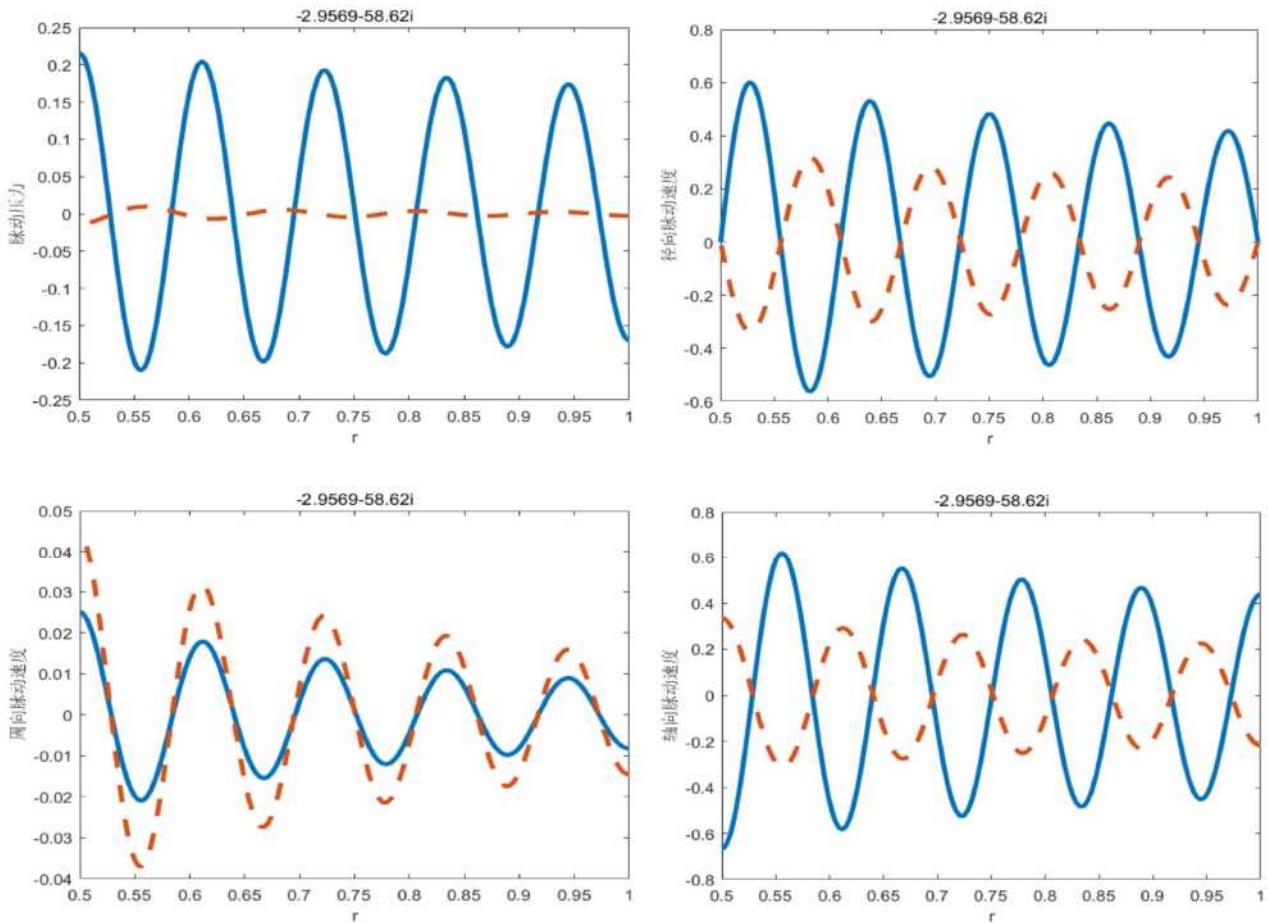


图 16 第十阶向上游 cut-off 的声模态中的压力和速度扰动

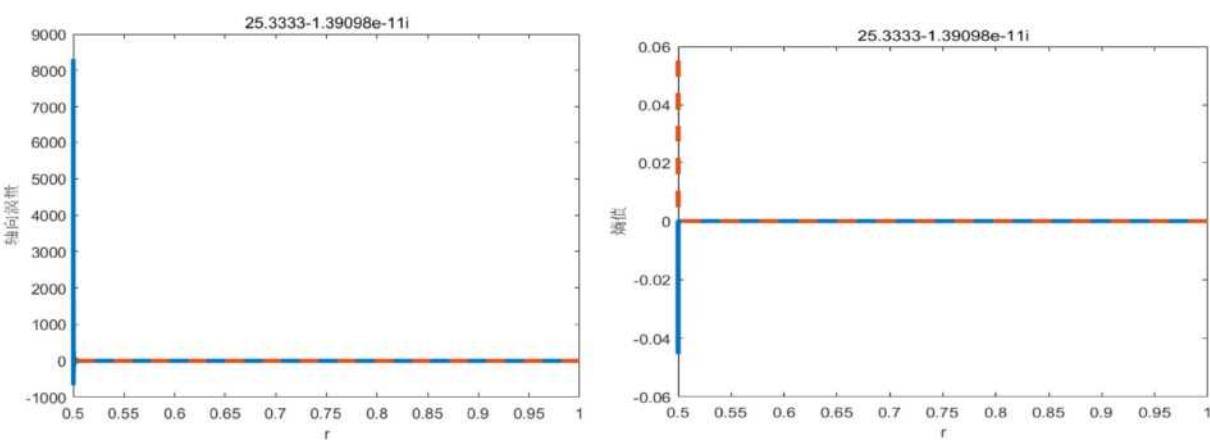
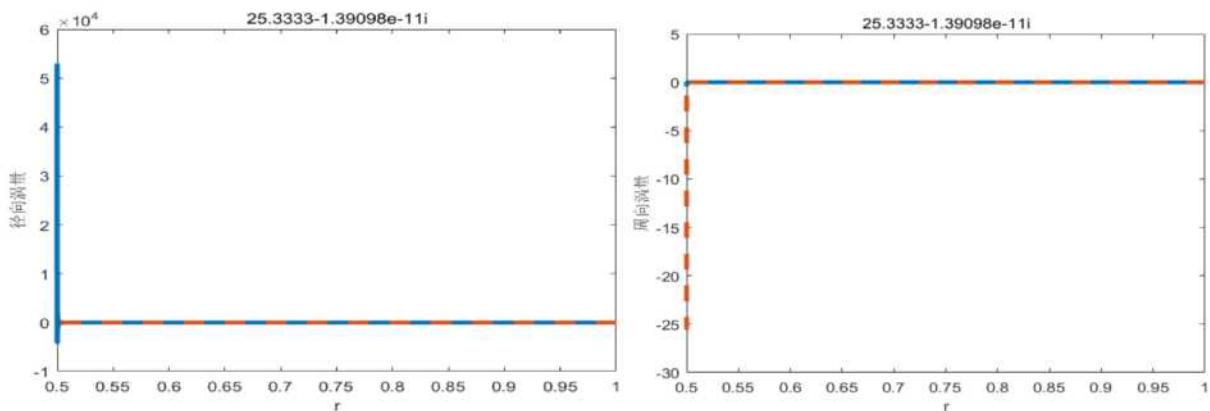
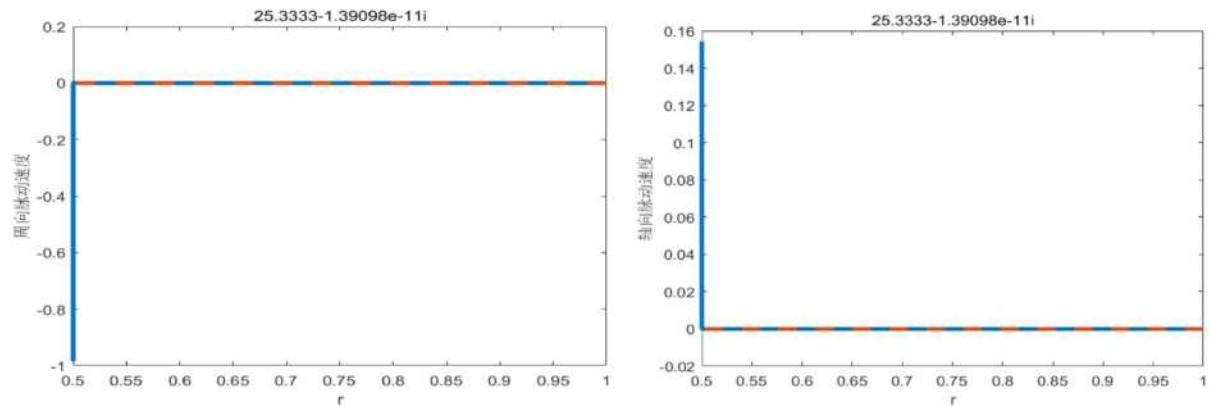
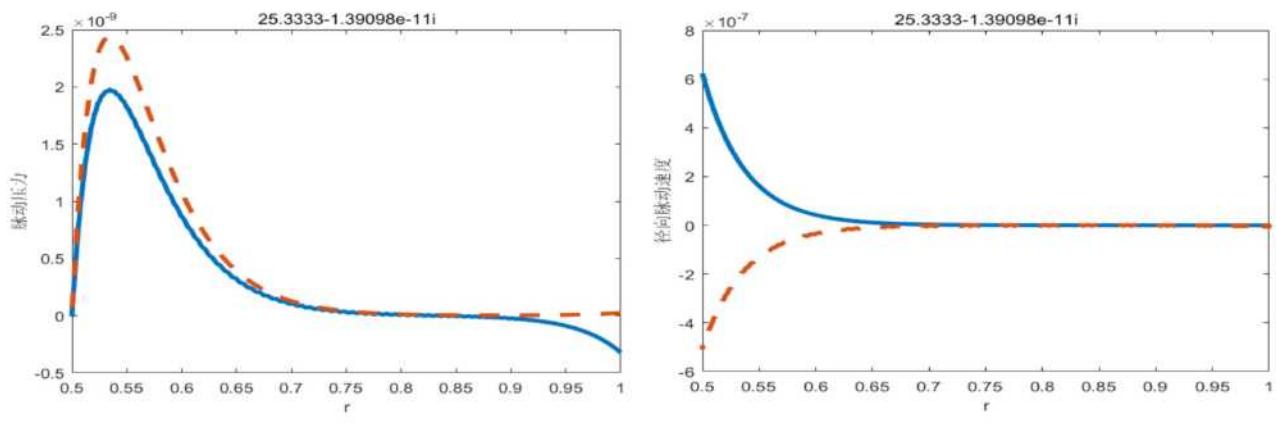


图 17 第一阶对流模态的压力、速度和涡扰动

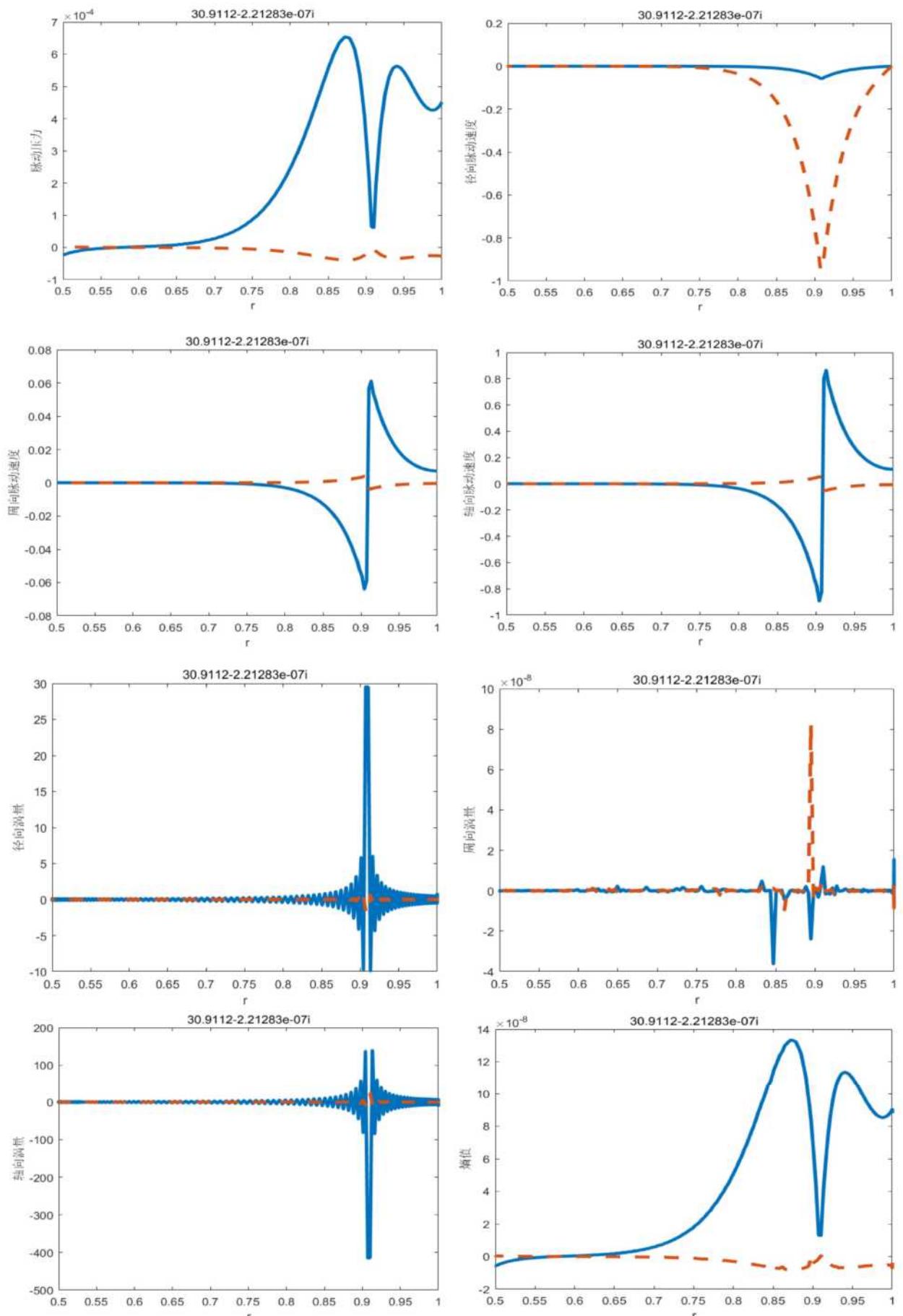


图 18 某阶对流模态的压力、速度和涡扰动分布

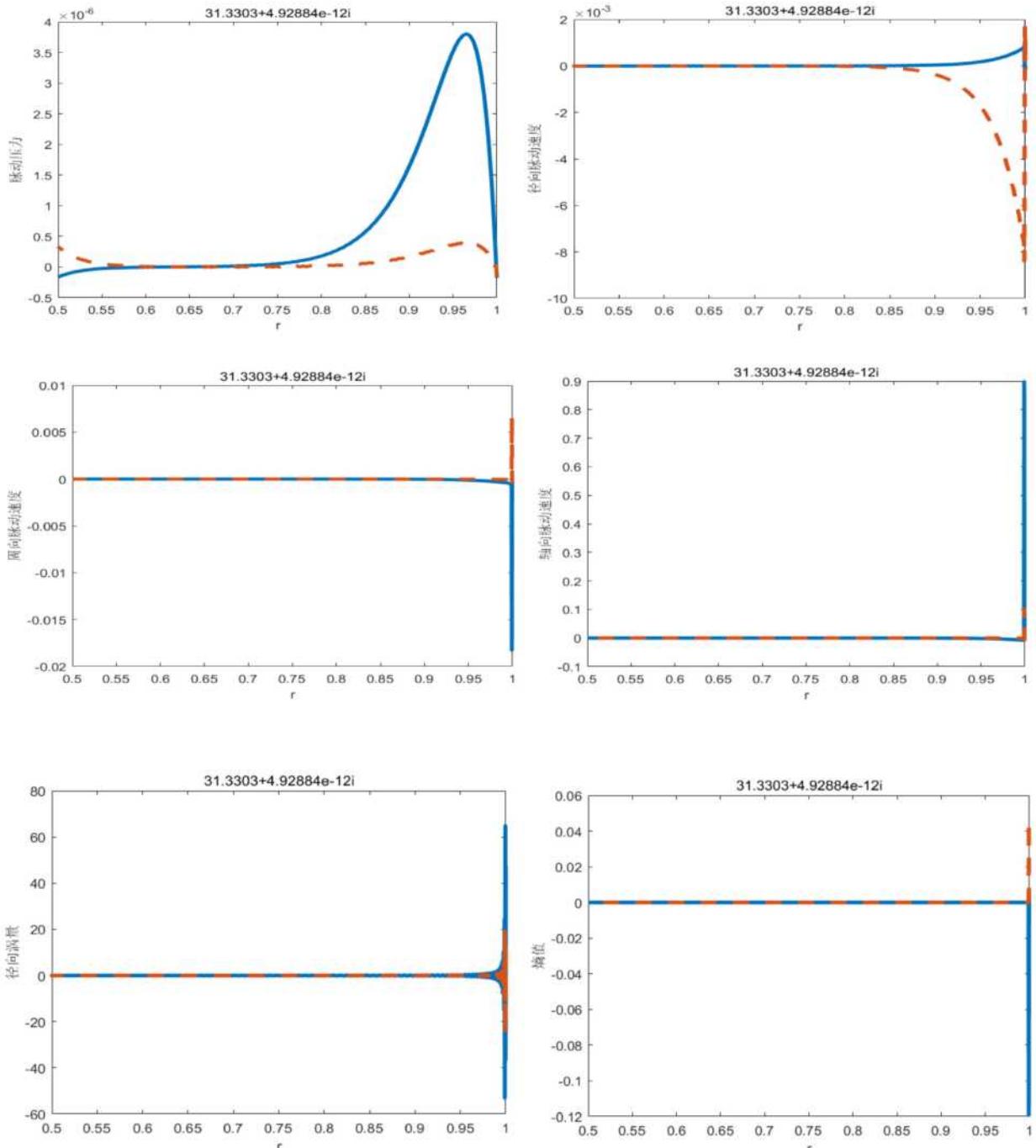


图 19 最后一阶对流模态的压力、速度和涡扰动分布

3.2 均熵刚体旋转旋流声-涡耦合

这里分析包含刚体旋转旋流的均熵平均流产生的声涡模态的耦合程度（案例 6）。选取的参数为 $h=0.6$, $U_x=0.3$, $U_\theta=0.3/r$ (通常称其为刚体旋转旋流), $w=10$, $n=2$, 图 20 给出了平均流压力、密度和声速的分布。

图 21 给出了自由涡旋流各个模态特征值以及其模态压力、涡量和熵值的分布。可以看出与无旋的自由涡旋流相比, 均熵刚体旋转旋流声模态部分的涡量成分明显增加, 并且传播

声模态的压力成分随着模态阶数的增加而减小。大部分的衰减声模态是涡量占优的, 而且衰减声模态的涡量成分随着特征值虚部的增加而增加, 所以这里的声模态不同于均匀轴流和自由涡旋流情况, 叫作近声模态。所有近对流模态都是涡量占优的, 与声模态相比有很少的压力成分, 而纯对流模态的压力成分为 0。

对近声模态部分, 图 22 和图 23 给出了两个向上游无衰减传播近声模态(即第一、二阶径向模态)的压力、速度、涡量和熵值扰动分布, 其涡量不再像自由涡情况为零。图 24-图 25 给出了向上游衰减的前两阶(第三和第四阶)和第十阶近声模态的压力、速度、涡量和熵值扰动分布。

对于对流模态部分, 左右两支近对流模态中的前两届模态和某阶近对流模态的压力、速度、涡量和熵值扰动分布, 如图 26-图 28。从图中可以看出, 这些近对流的压力分量与其他速度分量相比很小, 甚至可以忽略。右支近对流模态特征函数性质与左支类似, 不再详述。另外, 从图中可以看出, 随着近对流模态特征值越来越接近纯对流特征值, 它的特征函数及其涡量扰动分布越来越振荡。在纯对流特征值处, 压力特征值趋于 0, 完全是涡扰动成分, 如图 29。

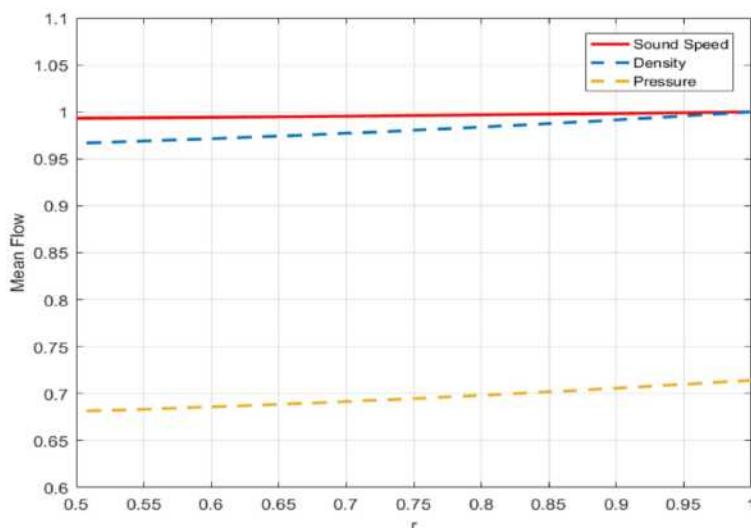
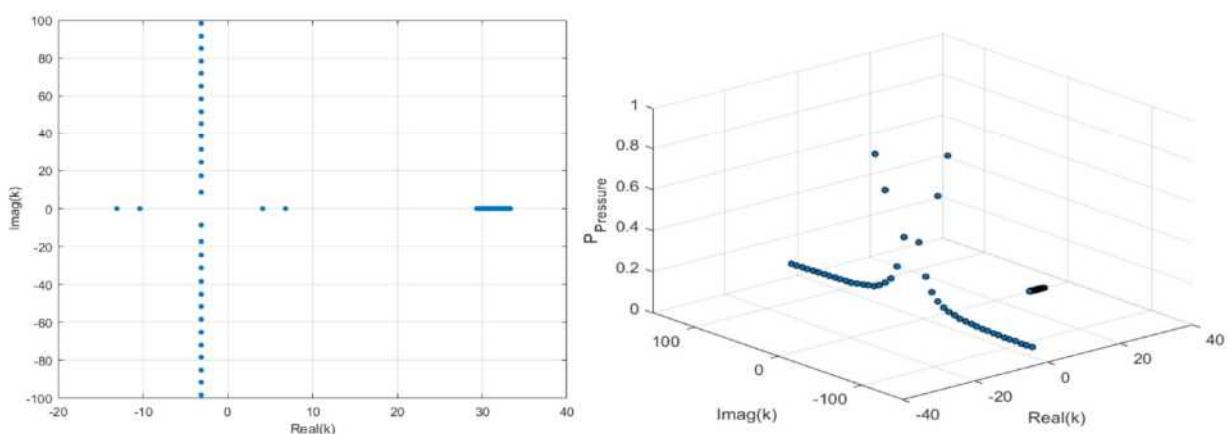


图 20 平均流压力、密度和声速沿径向的分布



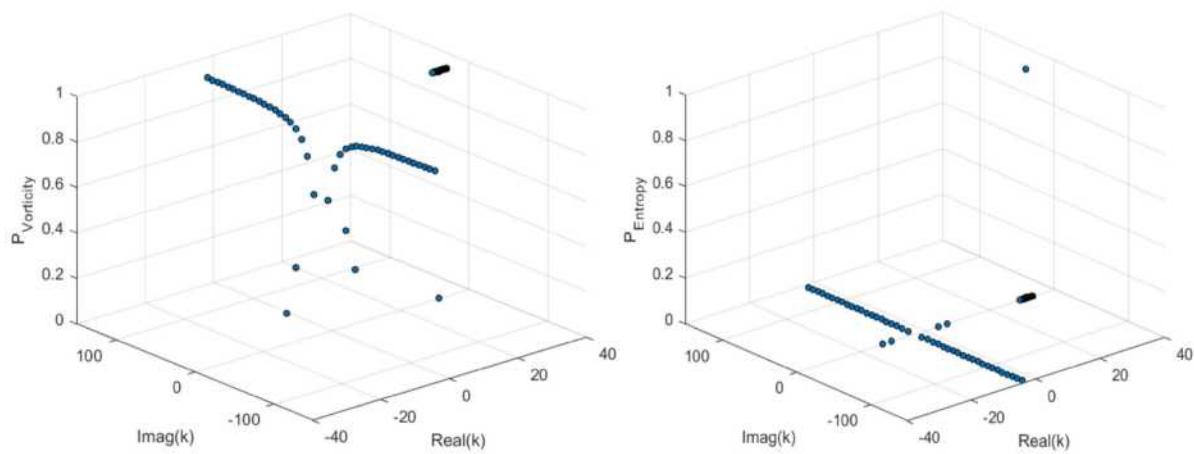
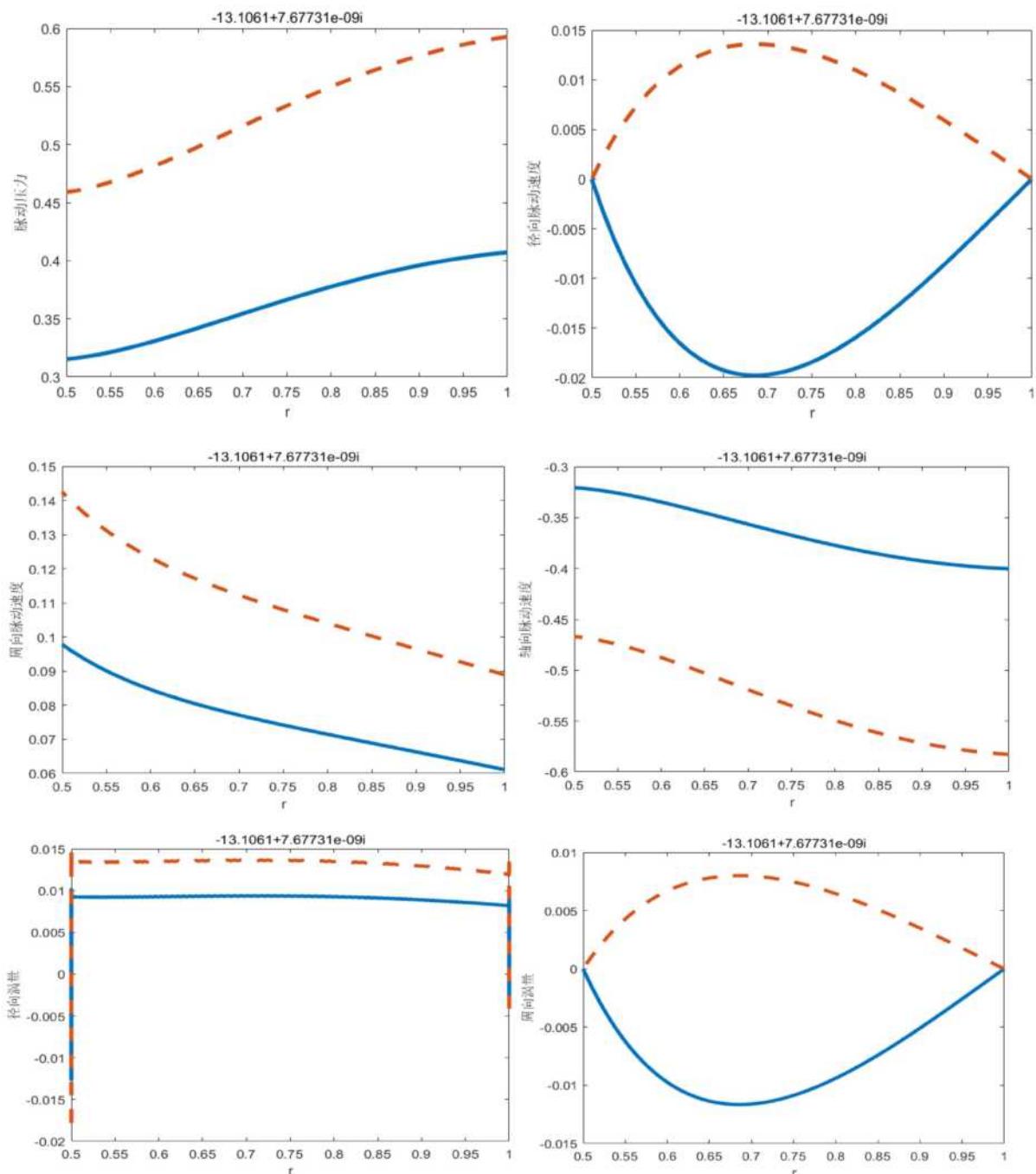


图 21 自由涡旋流各模态压力、涡量和熵值成分



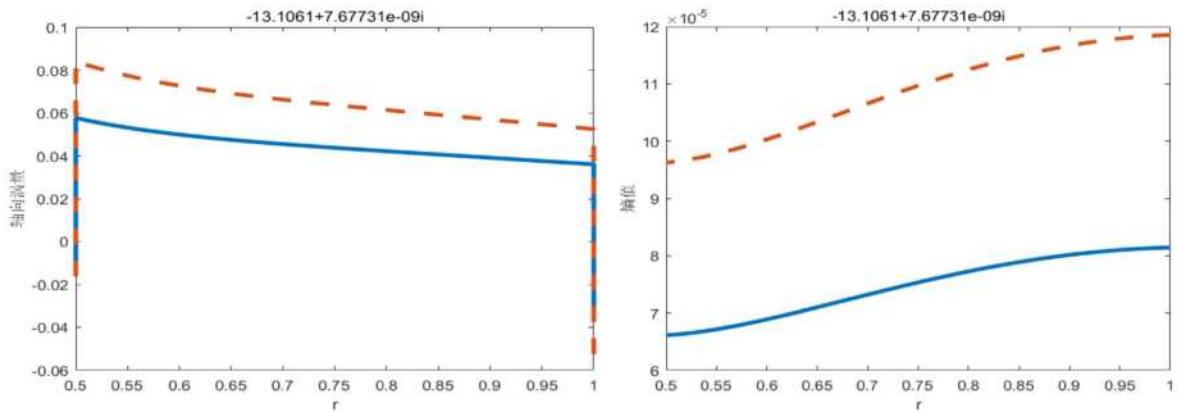
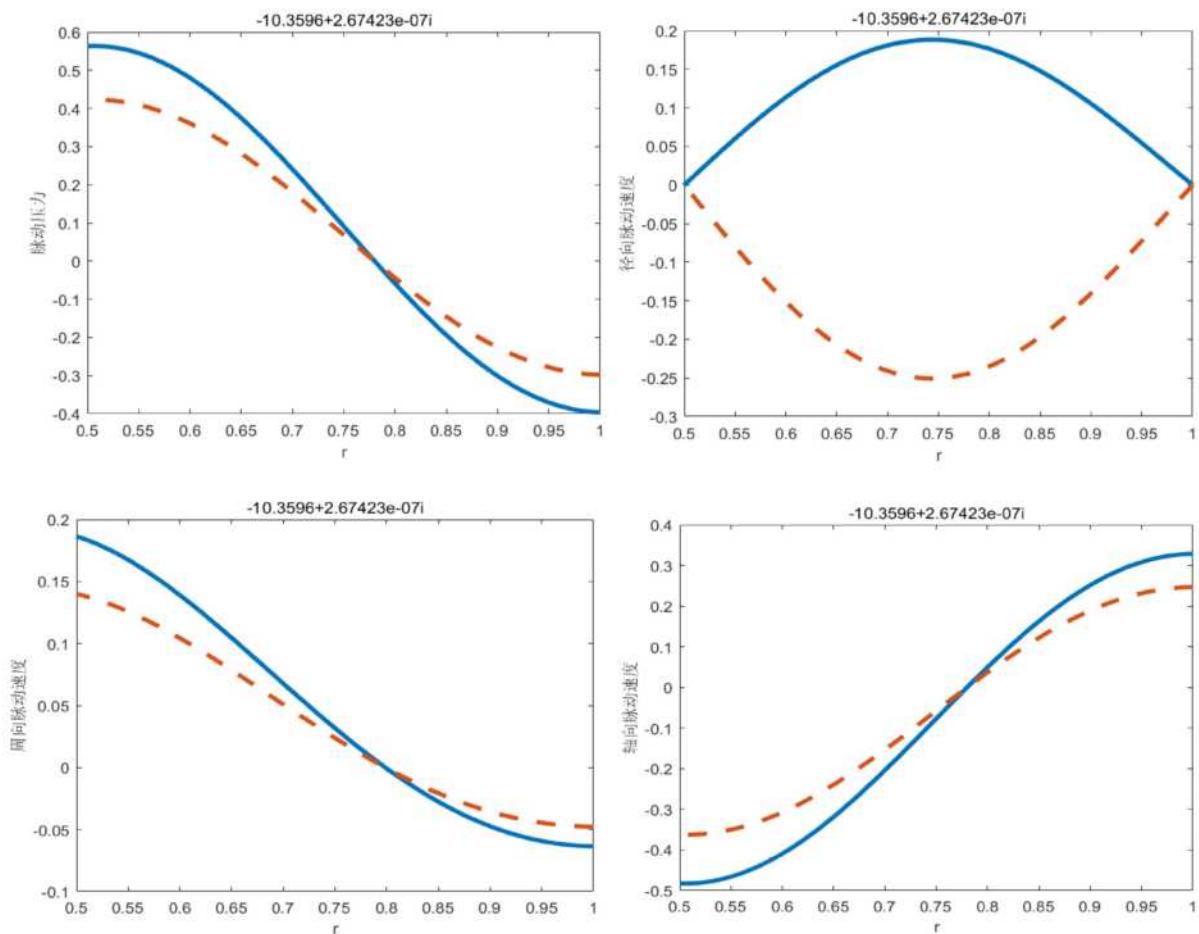


图 22 第一阶向上游传播的声模态的压力、速度、涡扰动和熵扰动



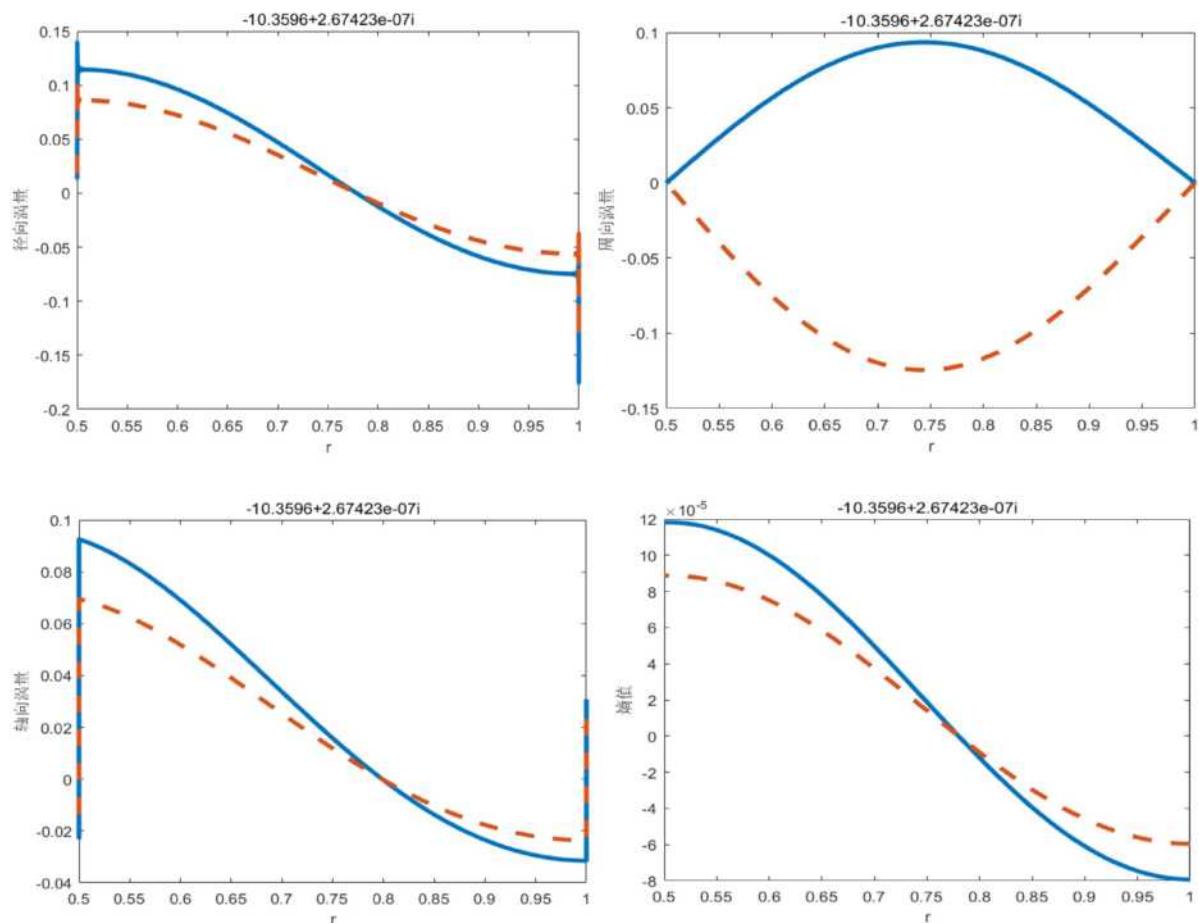
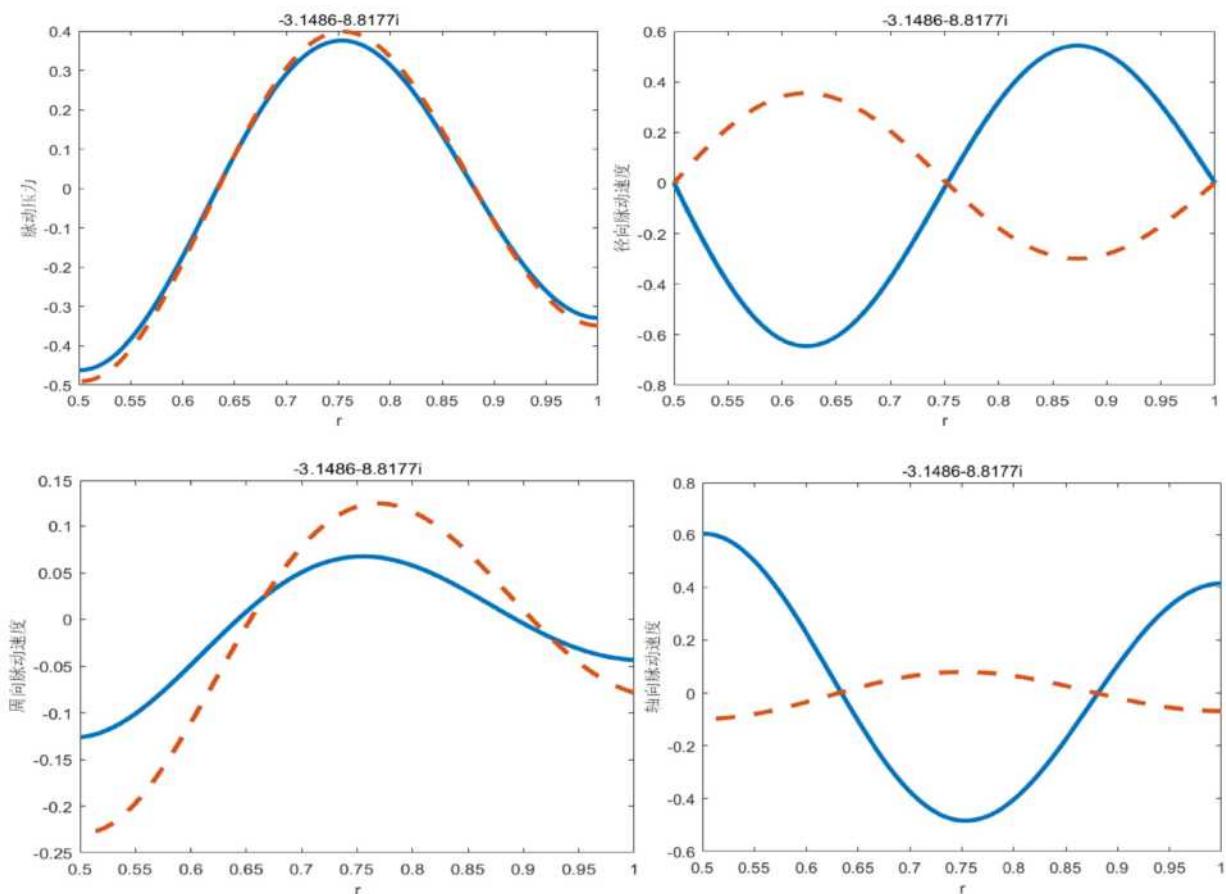


图 23 第二阶向上游传播的声模态的压力、速度、涡扰动和熵扰动



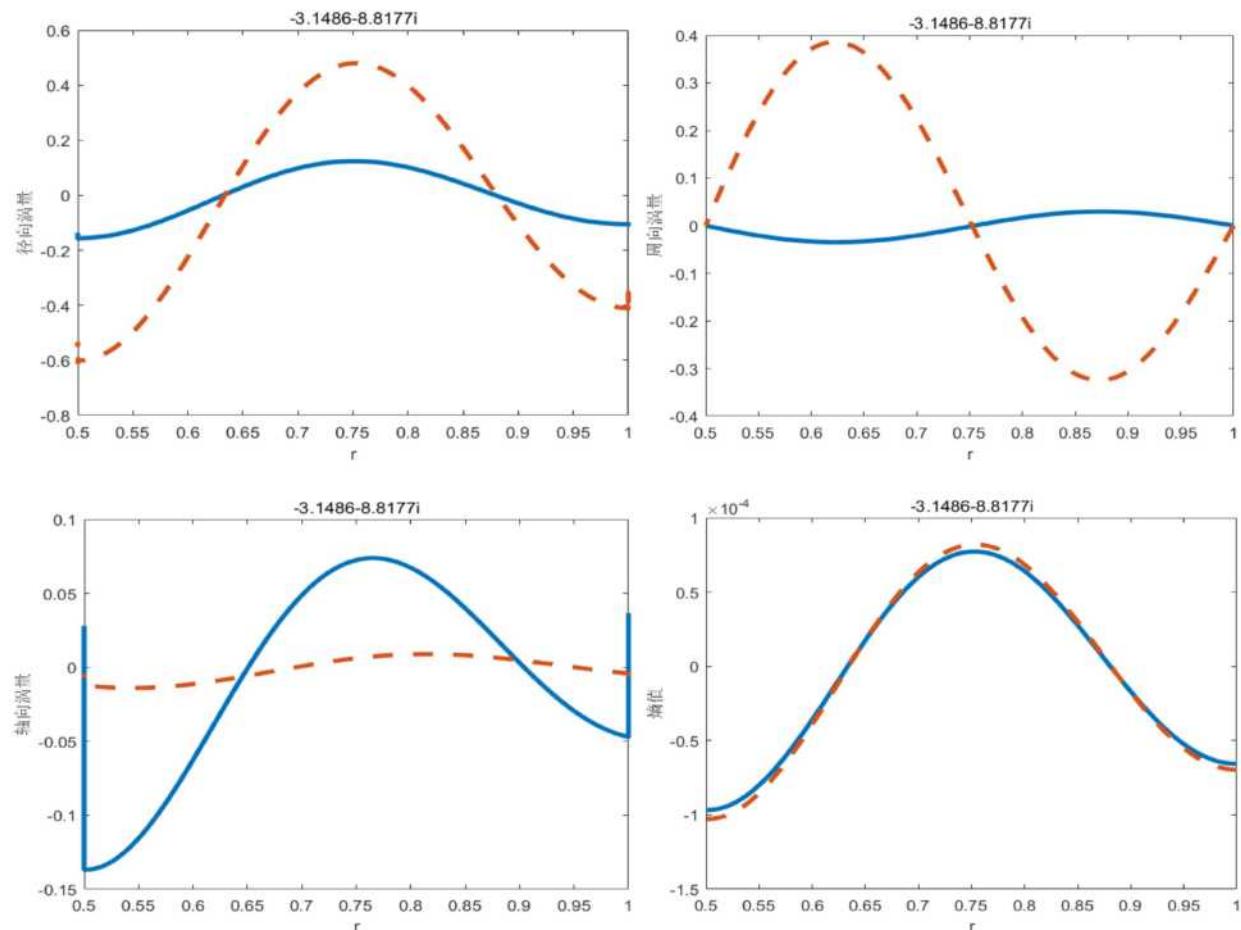
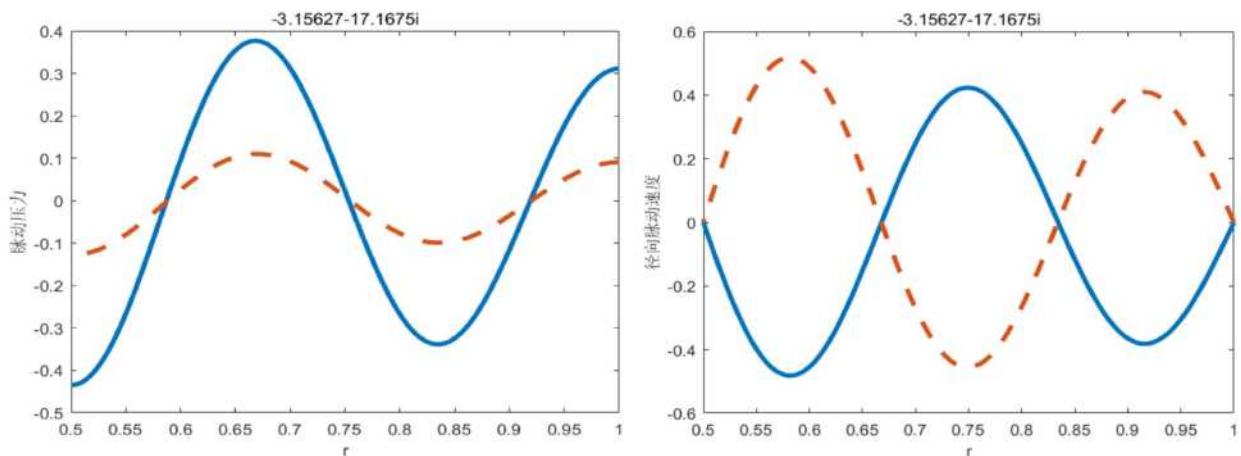


图 24 第三阶向上下游衰减声模态的压力、速度、涡扰动和熵扰动



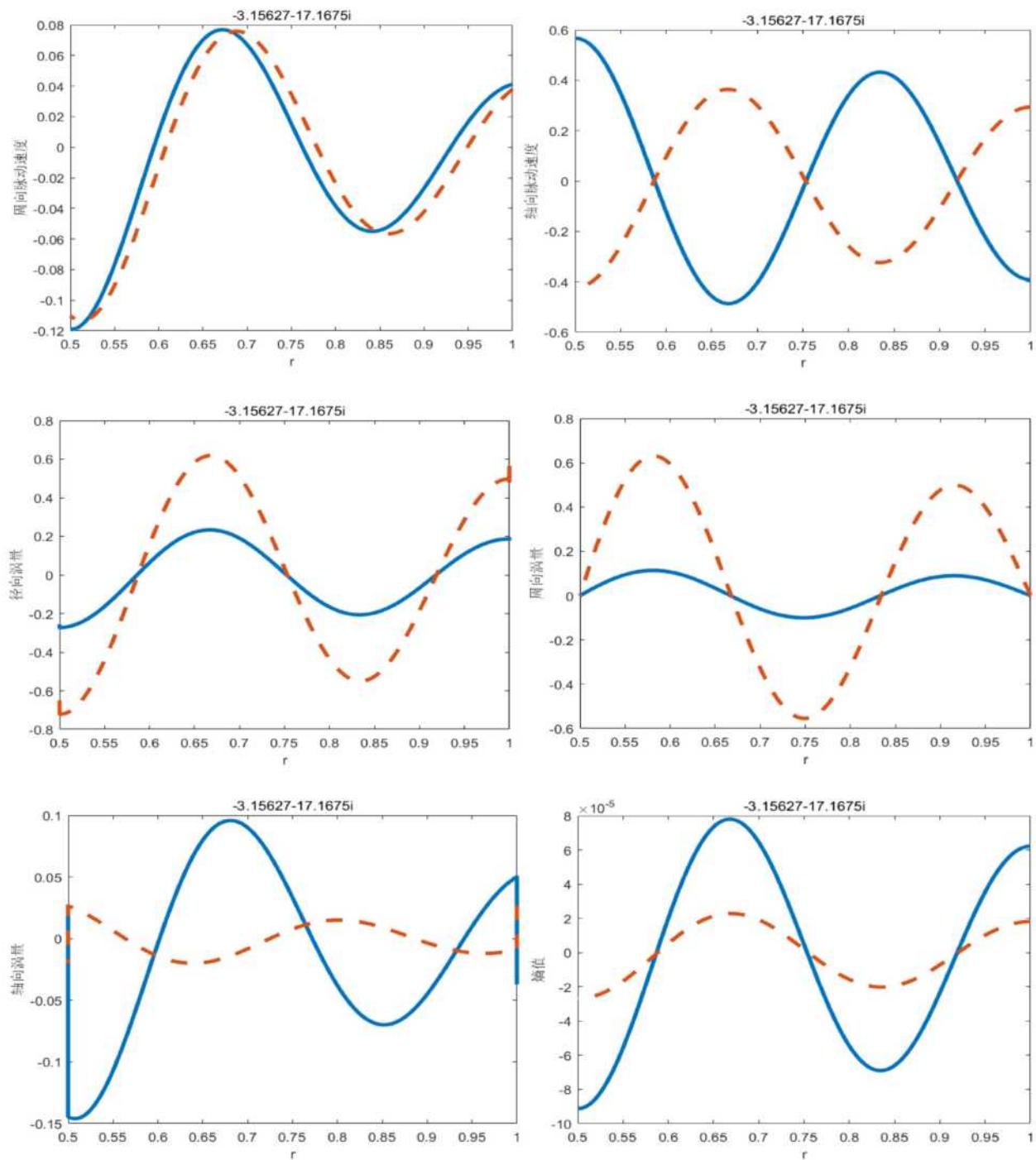
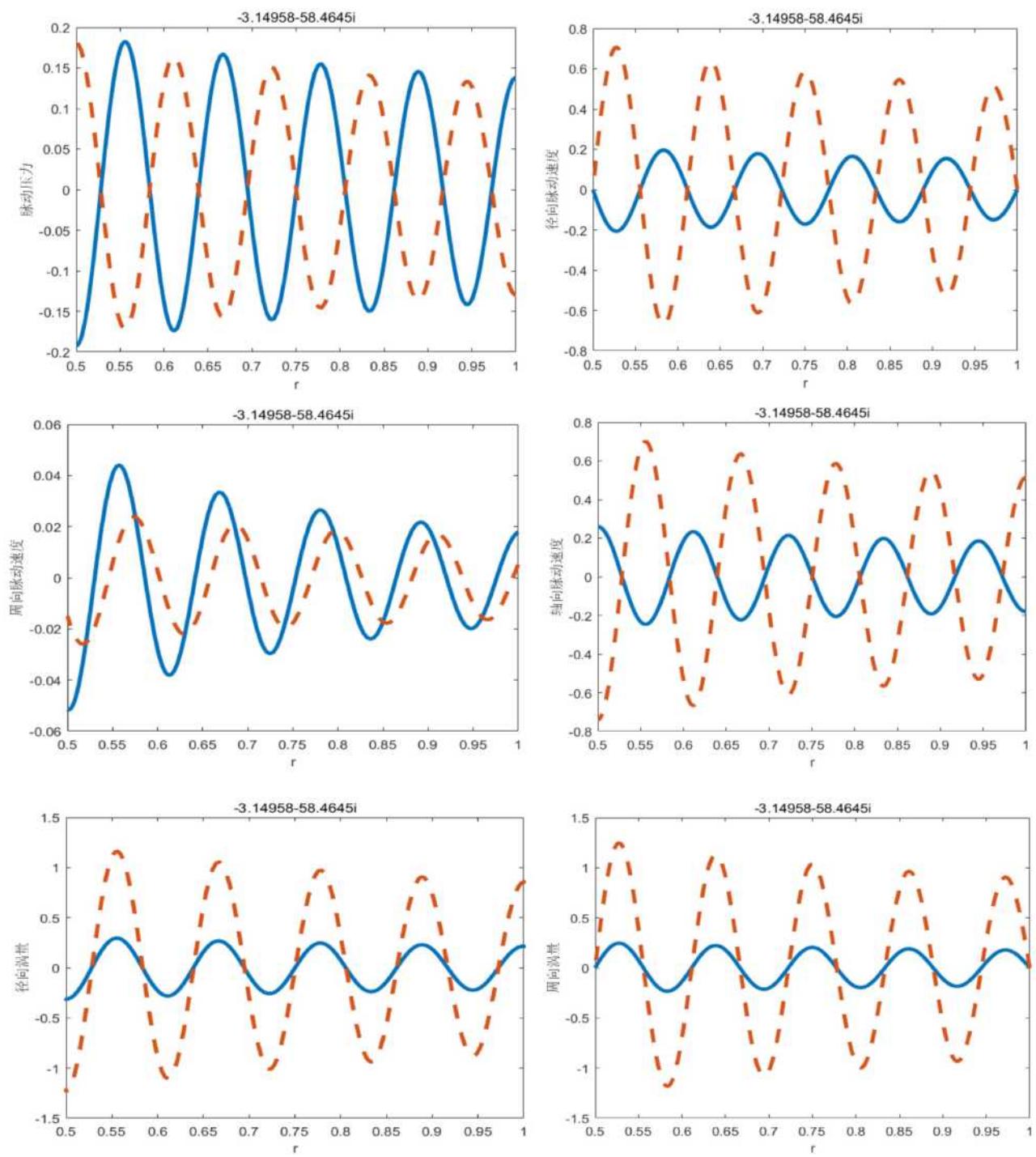


图 25 第四阶向上游衰减声模态的压力、速度、涡扰动和熵扰动



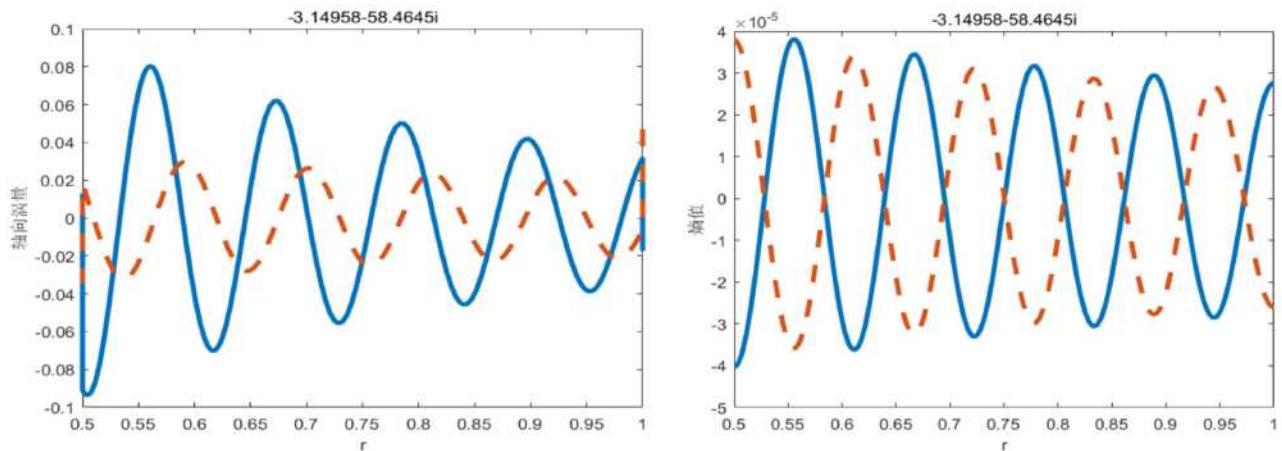
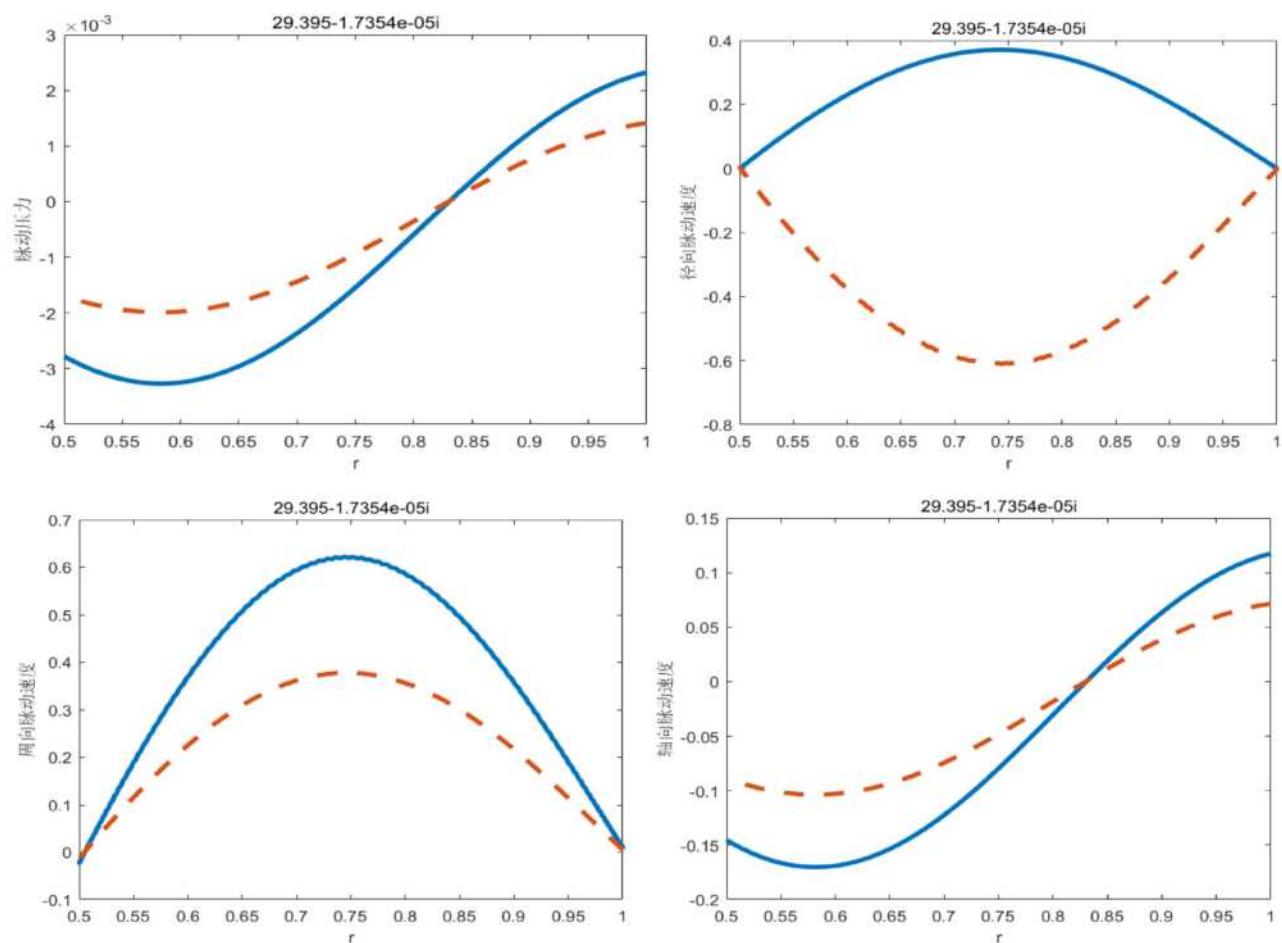


图 26 第十阶向上游衰减声模态的压力、速度、涡扰动和熵扰动



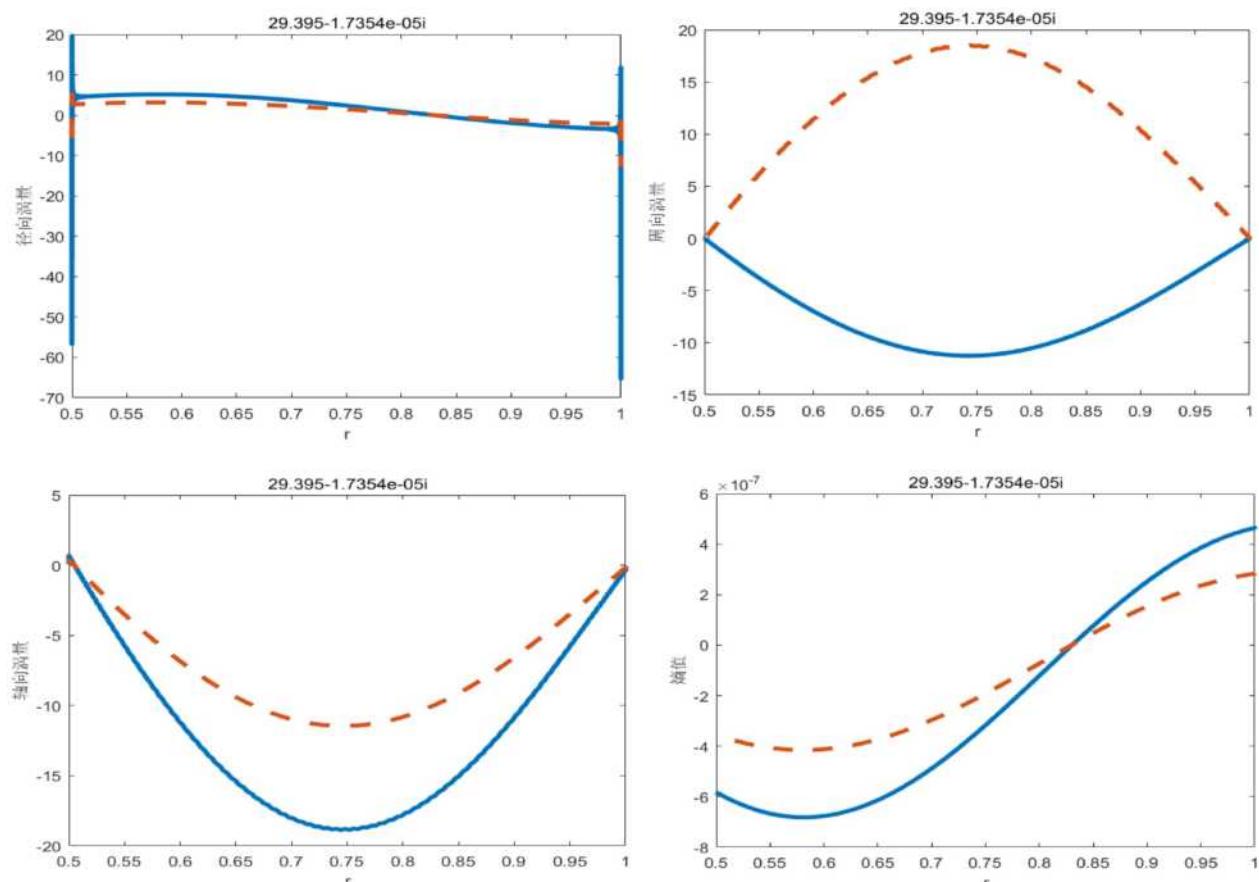
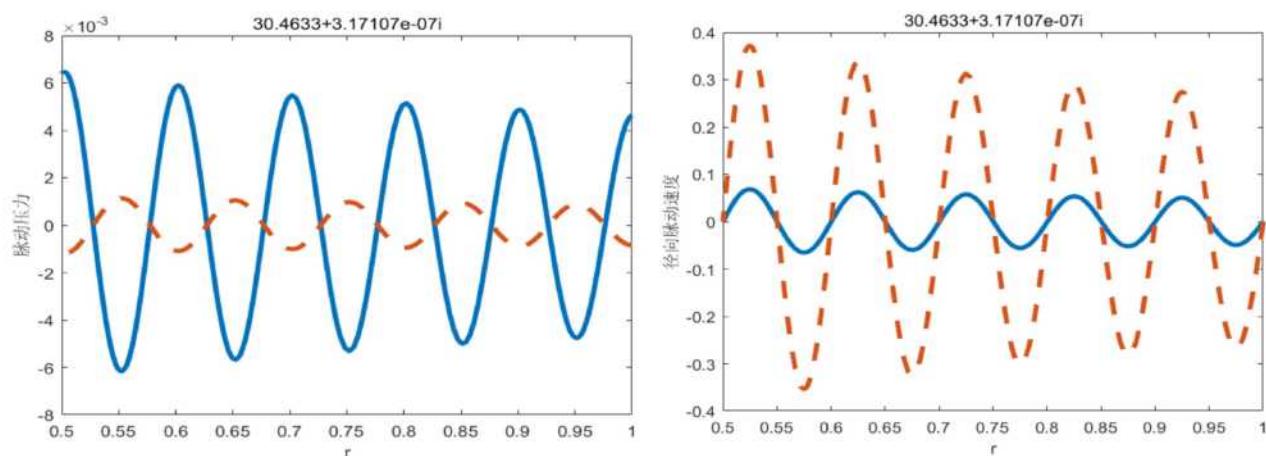


图 27 左支第一阶近对流模态的压力、速度、涡扰动和熵扰动



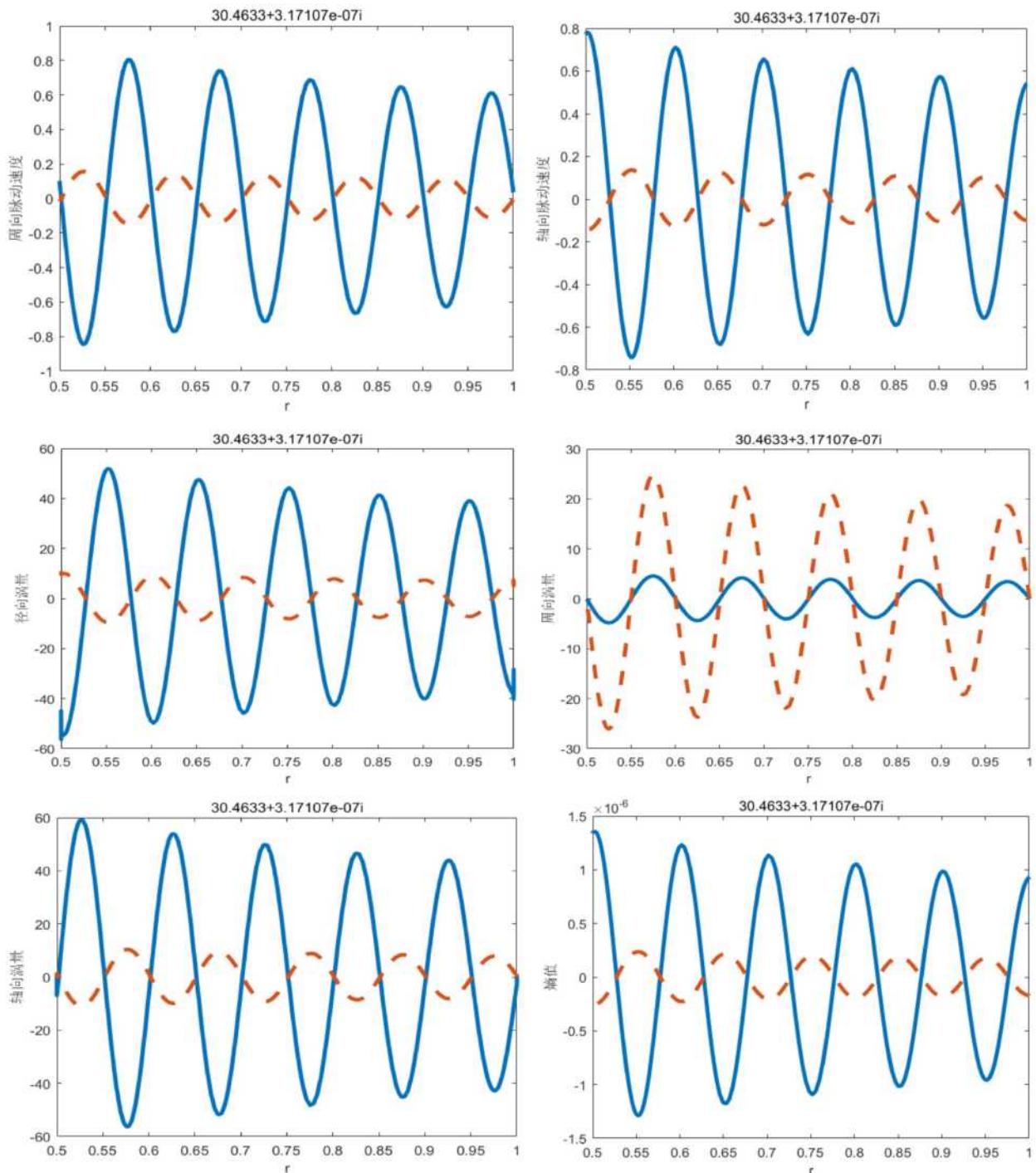
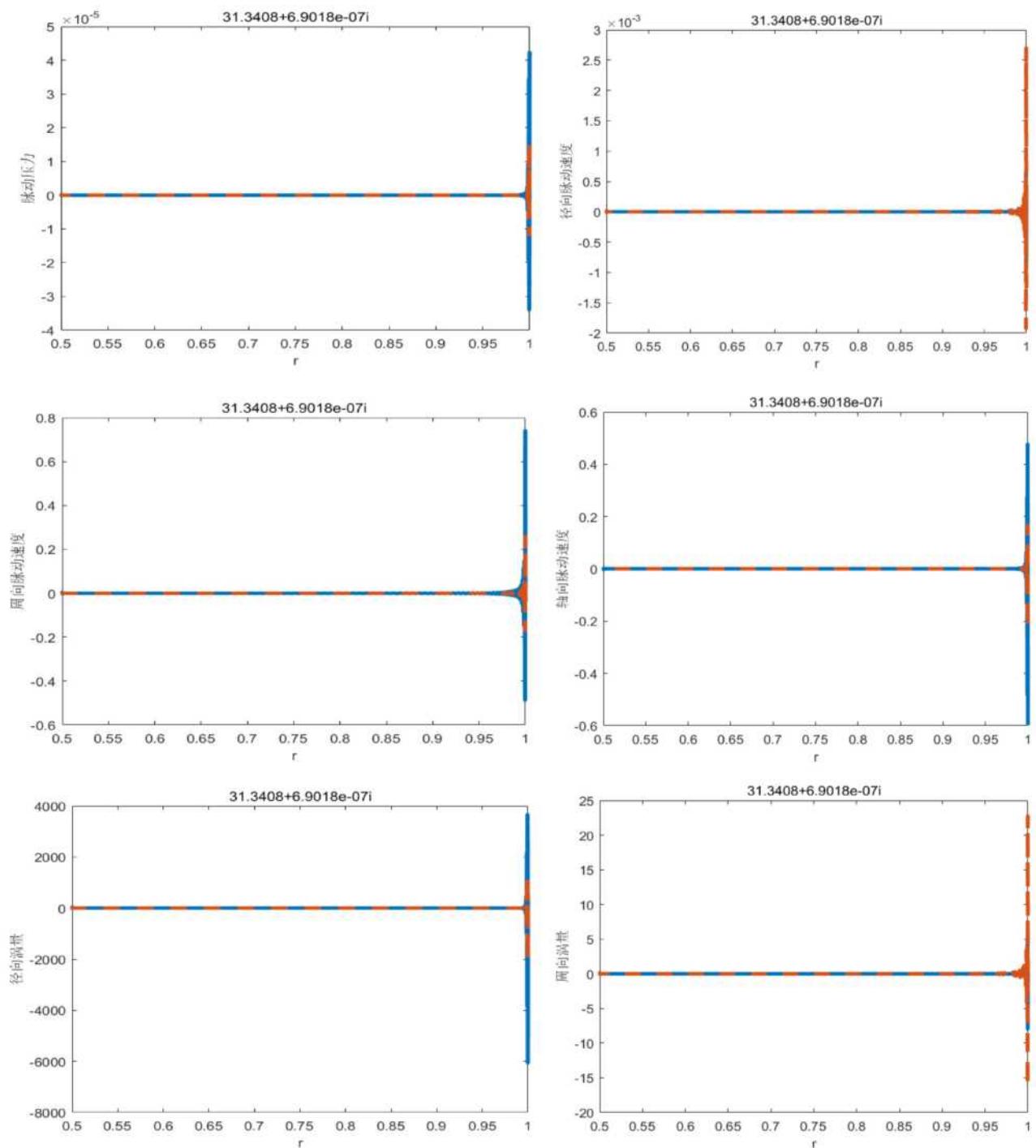


图 28 左支某阶近对流模态的压力、速度、涡扰动和熵扰动



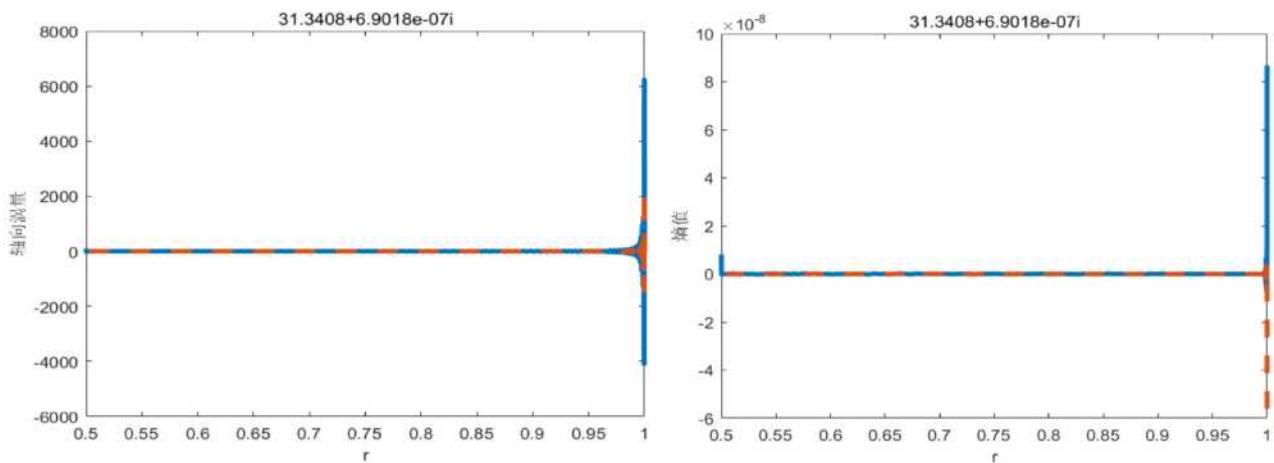


图 29 绝对流模态的压力、速度、涡扰动和熵扰动

4 非均熵旋流管道声-涡-熵耦合

4.1 非均熵情况平均流的计算

相较案例 5 和案例 6 均熵案例, 旋转机械靠近叶片的管道平均流实际上应该为非均熵。对于非均熵情况, 除了声-涡耦合之外, 熵扰动的变化也很难直接通过脉动压力进行表达, 其特征矩阵也必须将熵扰动参数或者压力脉动参数考虑在内。因此, 在接下来的各模态压力、涡量和熵值成分分析中, 我们也可以看到, 熵值的能量成分也不完全等于 0。

为更符合实际叶轮机械工作工况, Cooper(2006)曾建议将均熵假设修改为随半径对数变化, 即以下形式:

$$s_0(r) = -\log(r^\beta) \quad (48)$$

再根据前面的定义, 速度和密度分别将满足:

$$c_0^2(r) = c_0^2(1)r^{-\beta/c_p} + (\gamma-1)r^{-\beta/c_p} \int_1^r s^{\beta/c_p} \frac{U_\theta^2(s)}{s} ds \quad (49)$$

$$\rho_0^{\gamma-1}(r) = r^{\beta/c_v} c_0^2(r) \quad (50)$$

接下来, 我们将分析非均熵条件下的几个案例, 如下表所示。

案例	内径 h	轴向速度 U_x	周向速度 U_θ	w	n	软壁面	均熵与非均熵
7	0.5	0.3	$0.3r+0.3/r$	20	2	硬壁	$\beta = 0, 2, -2$
8	0.4	0.3	$0.2/r$	10	2	硬壁	$\beta = -2$
9	0.6	0.5	0	25	15	软壁	$1-2*i$
							$\beta = -1.5 \sim 0.5$

4.2 非均熵对模态计算的影响

这里首先分析案例 7, 选取上述熵的对数表达的形式, 选取 β 值为 0, 2, -2 分别对应均伤, 熵有负梯度和熵有正梯度三种情况分析平均流熵梯度对声传播特性的影响。其他参数为 $h=0.5$, $U_x=0.3$, $w=20$, $U_0=0.3r+0.3/r$, $n=2$, 平均流的压力、声速、密度和熵分布如图 30 所示。图 31 是不同熵分布的声模态特征值谱的对比, 从图中可以看出平均熵的梯度会改变 cut-off 截止线, 正的平均熵梯度 (β 为负) 比均熵情况有更多的传播声模态, 负的平均熵模态 (β 为正) 与均熵情况相比传播声模态的数量会减少。这是因为, 当我们增加熵值 $s_0(r)$ 时, 同时也就增加了声速 $c_0(r)$, 也就减小了马赫数 U_x (实际周向流速除以声速的平方表示为它的无量纲形式)。在均匀流中, cut-off 截至线的实值在 $real(k)=-wU_x/(1-U_x^2)$ 附近。因此增加熵值 $s_0(r)$ 使得截止线右移。另外, cut-on 模态同样会随着 U_x 的增加, 向虚数 cut-off 转化。因此随着熵值的增大, cut-on 的模态越来越少。

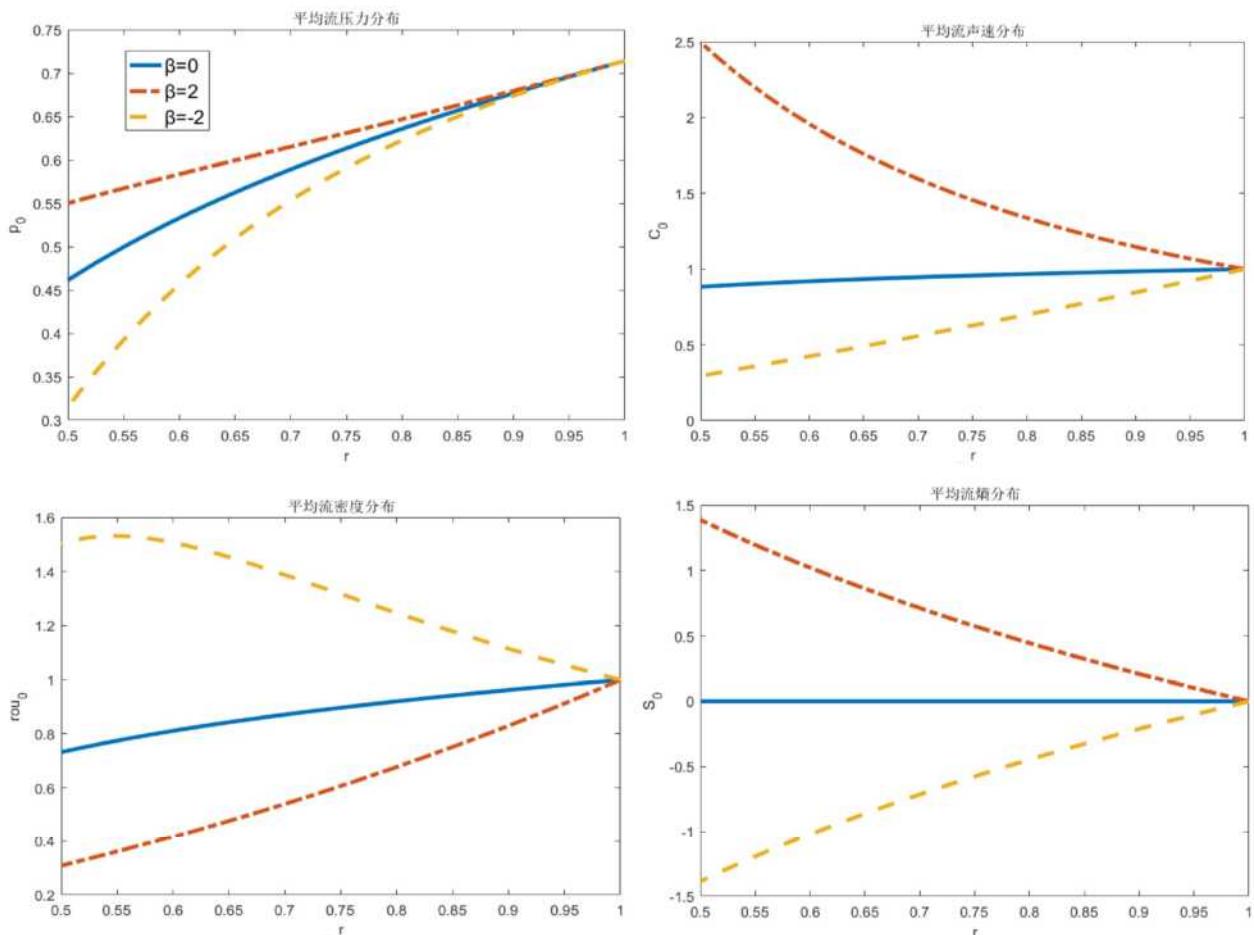


图 30 不同非均熵梯度系数 β 对平均流场的影响

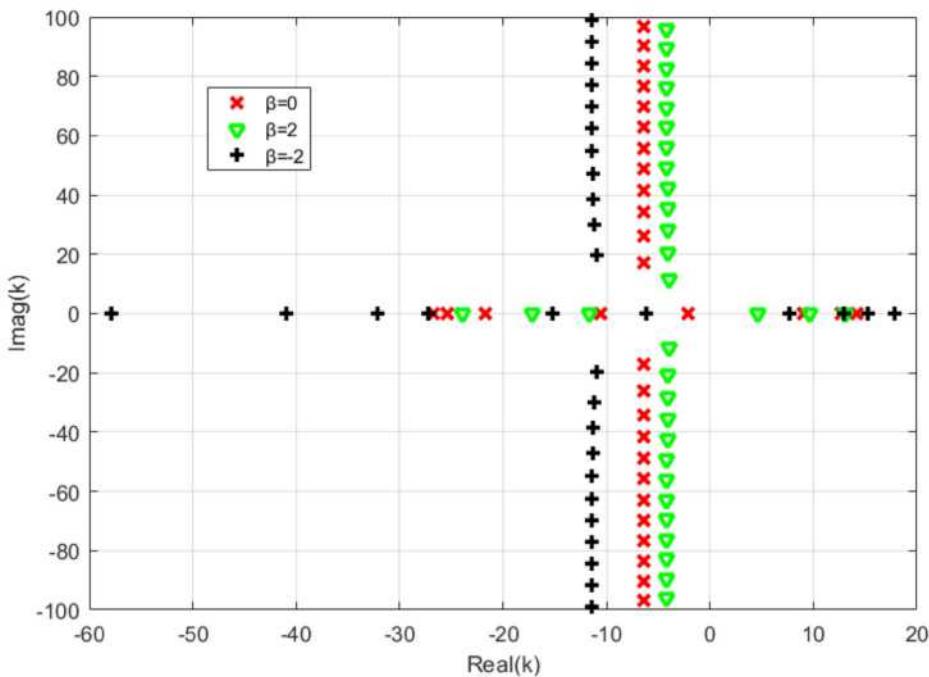


图 31 不同熵分布的声模态特征值谱

4.3 不稳定模态

当平均流是非均熵情况时，包含旋流的特征值计算会出现不稳定模态，即模态的压力扰动沿着传播方向逐渐放大的模态。对于向下游传播的模态，当轴向特征值虚部为负数时，由于扰动量表达式中 $\exp(-Im(k)x)$ 项的存在，使得扰动随 x 的增加而放大，因此对于向下游传播的模态，轴向特征值虚部为负的模态为不稳定模态。这类模态在特征值谱中可以很容易的分辨，并且不随配置点取的多少而改变，因此不同于模态计算中出现的伪模态。

首先，通过案例 8 来说明不稳定波的特性。选取的参数为 $h=0.4$, $U_x=0.3$, $w=10$, $U_\theta=0.2/r$, $n=2$ 。首先，给出 $\beta = -2$ 情况下的对流对流模态附近的非稳定模态及其特征函数。如图 32 所示，在对流模态附近出现上下对称分布的几组模态，其脉动压力特征谱在内壁面边界幅值较大，随半径增大迅速衰减为 0。

接下来，我们有必要再来分析上述参数下，非均熵各模态压力、涡量和熵值成分的占比。可以看出非均熵旋流情况下，压力仍然均集中在近声模态部分，而涡量大部分集中在近对流模态部分。此时，熵值扰动量能量不完全为 0，部分下游的低阶近声模态以及近对流模态附近的非稳定模态将与熵耦合，占据一部分能量。整体非均熵情况声-涡-熵耦合较为复杂，这部分内容将在后续进一步研究和完善。

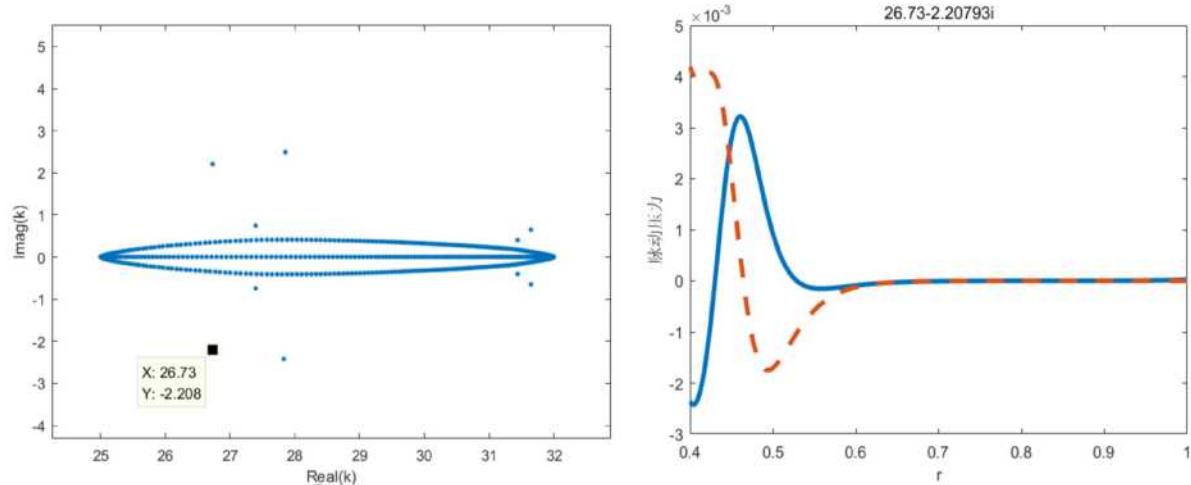


图 32 对流模态附近的非稳定模态及其特征函数

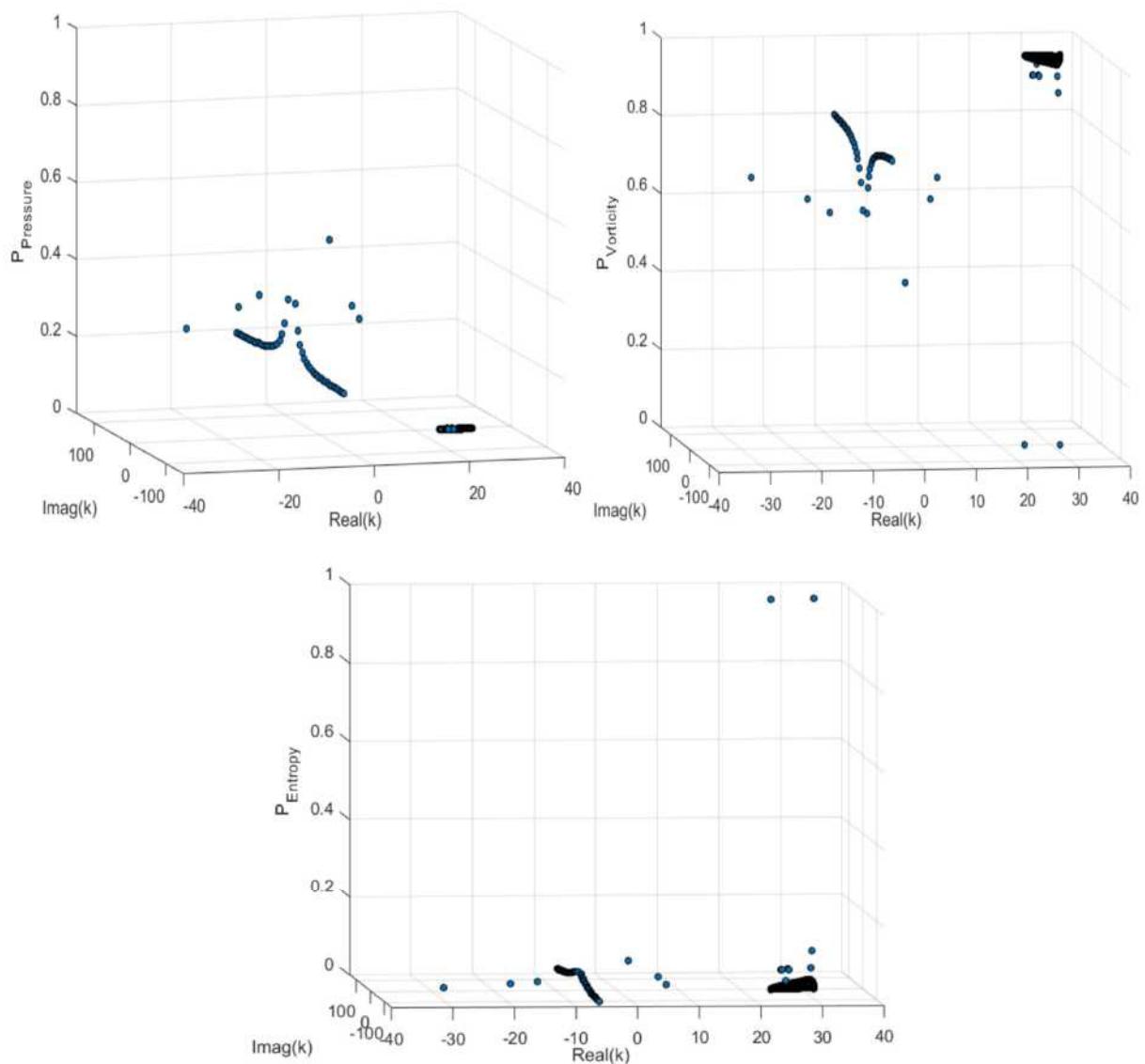


图 33 非均熵各模态压力、涡量和熵值成分

下面依次分析轴向马赫数、周向模态数和平均流熵梯度对不稳定模态的影响。

图 34 是不同的马赫数情况对对流部分特征谱的对比, 其他参数与案例 7 一致。从上分析可知, 图中位于对流模态上下对称分布的两组模态中, 只有特征值虚部为负数的一组为不稳定模态。可见随着马赫数增加, 不稳定模态数量减小。

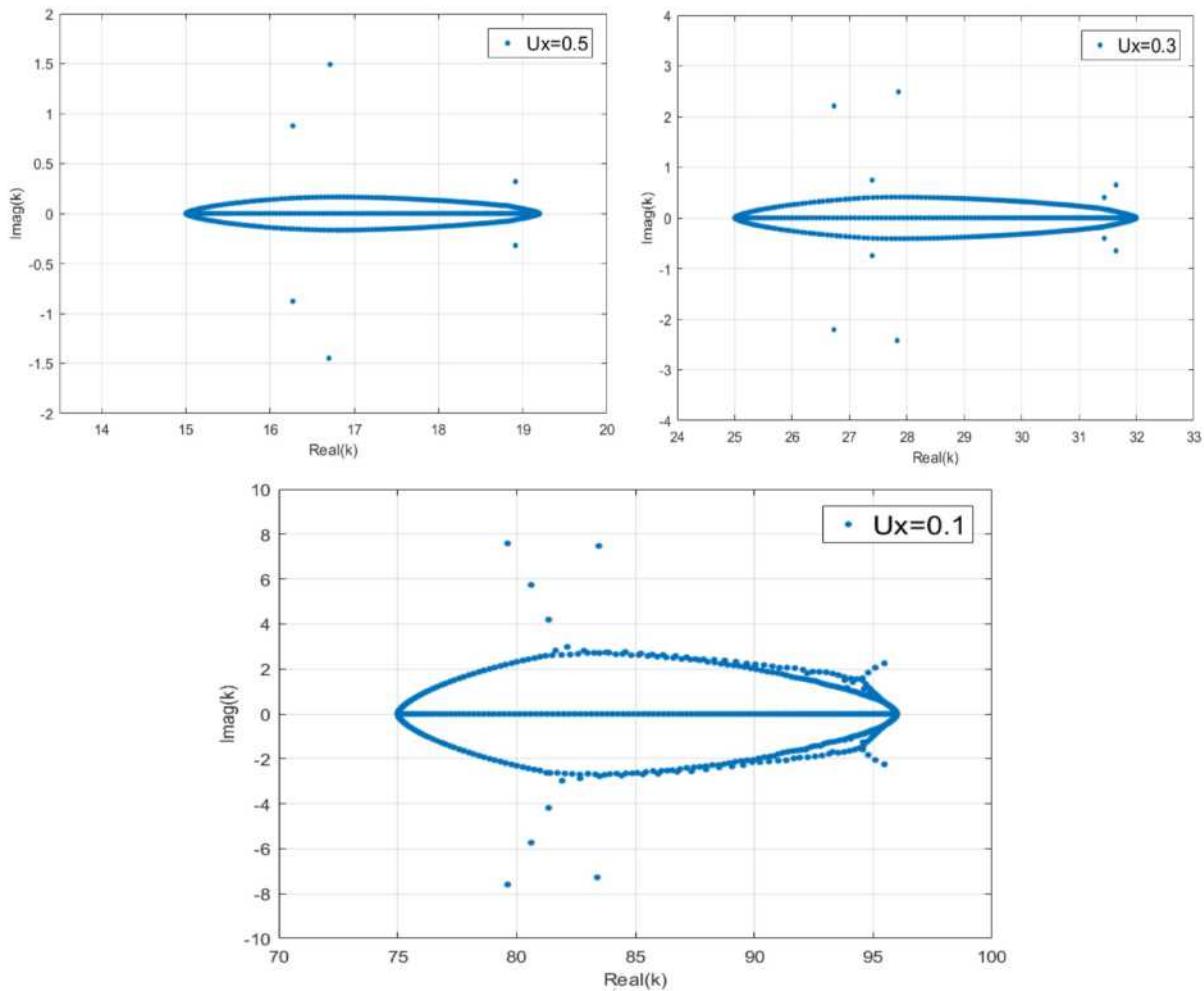
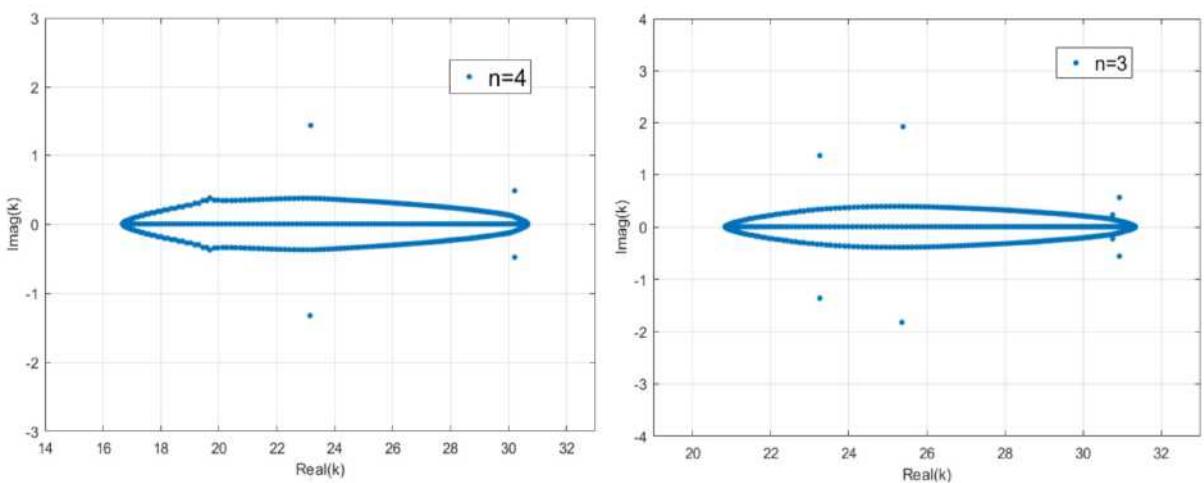


图 34 轴向马赫数对不稳定模态的影响 ($U_x=0.5, 0.3, 0.1$)

图 35 是不同的周向模态数 n 情况对对流部分特征谱的对比, 其他参数与案例 7 一致。可以看出, 随着周向模态数 n 的增大, 不稳定模态数量减小。



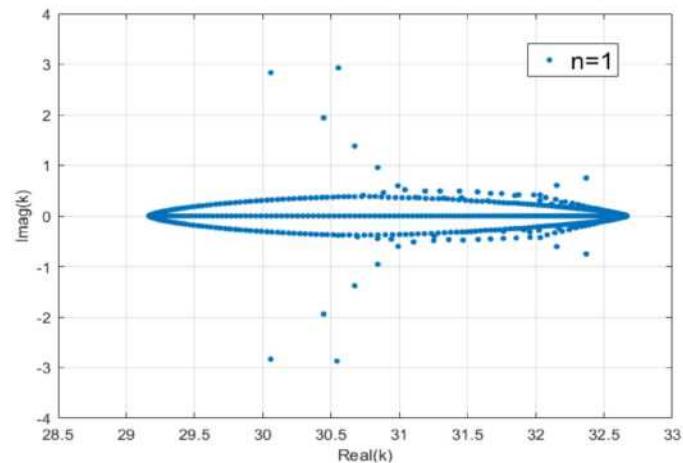
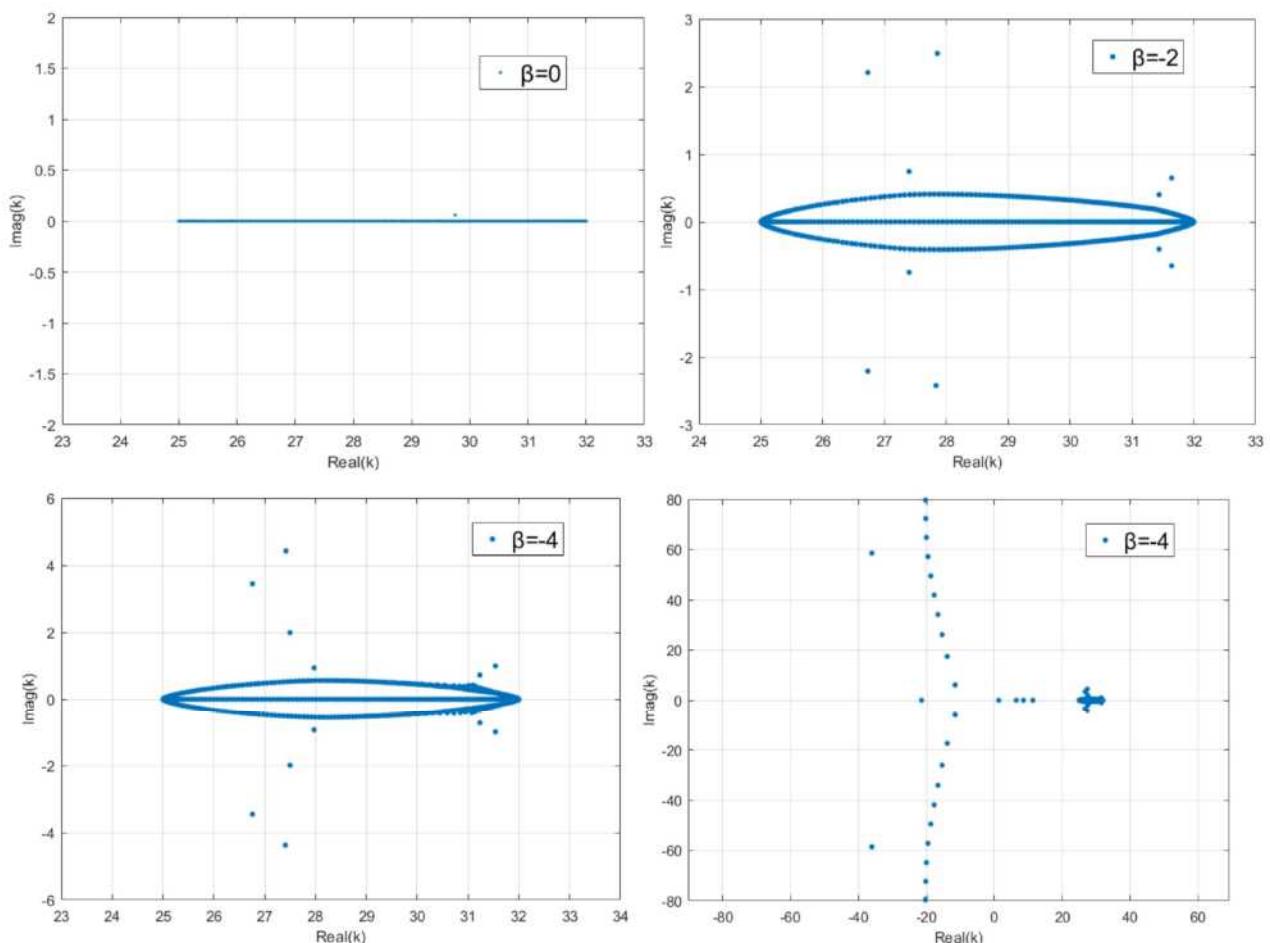
图 35 周向模态数对不稳定模态的影响 ($n=4,3,1$)

图 36 是不同的平均熵情况对对流部分特征谱的对比, 其他参数与案例 7 一致。可以看出, 当熵参数 β 为负 (熵有正梯度) 时比均熵情况有更多不稳定模态。尤其在 β 减小的一定程度, 例如 $\beta = -4$ 时, 从图中可以看到, 除了在对流模态附近产生非稳定模态以外, 在截止线附近也“脱落”出离散的模态。

图 36 平均熵对不稳定模态的影响 ($\beta=0,-2,-4$)

4.4 非均熵无旋流软壁边界

接下来我们考虑在无旋流条件下, 非均熵与软壁面边界条件同时作用的结果 (案例 9)。

如图 37 所示, 当我们改变均匀流的熵值 $s_0(r)$ 时, 基本上表现为三个主要特征。首先, 当我们增加系数 β , cut-off 截止线将会向右移动。其次, 随着系数 β 的增加, cut-on 的模态数也逐渐减少。再者, 管道边界敷设声衬情况下, 当熵值减小的一定程度 (如 $\beta = -1 \& -1.5$), 可以发现在上下游均会出现区别于声学和对流模态的不稳定模态。

前两个现象已经在 0 节较好解释, 不再赘述。

最后一个现象, 图 38 所示给非均熵情况下, 3 个“surface-entropy”模态 (在剑桥 Mathews 博士论文中的叫法) 和其他 cut-off 和 cut-on 模态之间的区别。显然, 声模态的特征函数类似于正弦曲线, 根据均匀流圆管声传播的解析式, 我们可以类比得到, 声模态经过实轴的次数类似于径向模态的阶数。但是, 对于“surface-entropy”模态则表现出不同的形态, 其在内壁面振动, 随径向逐渐衰减为 0。该特性与上述非稳定模态类似, 也是区别于均熵旋流所独有的。

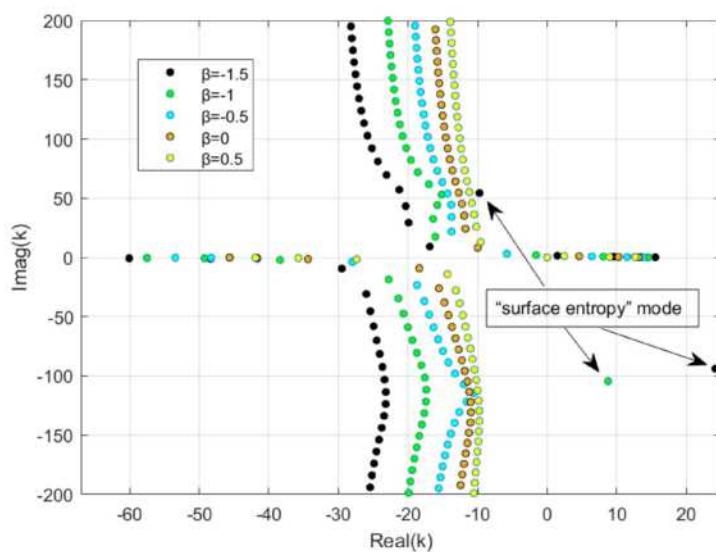


图 37 非均熵情况对比-参数: $h=0.6, w=25, n=15, U_x=0.5$, 软壁面

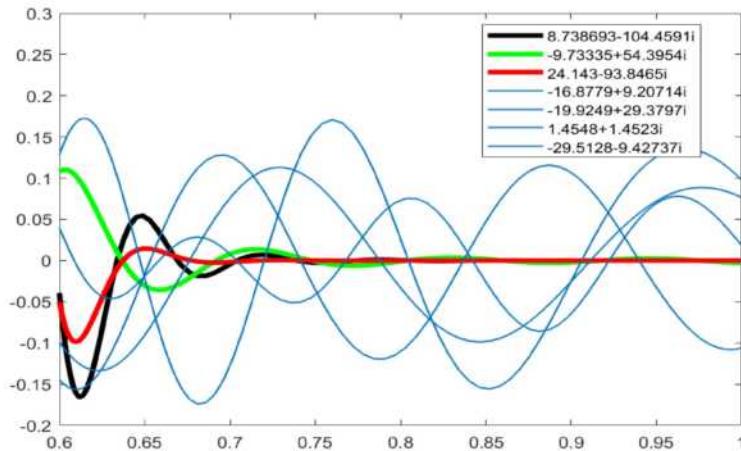


图 38 非均熵“surface-entropy” mode vs 声模态特征函数

5 旋流管道中的流致噪声机理

在考虑旋流管道声传播机制以后, 我们有必要继续研究旋流背景下的流致噪声机理。

通常情况下, 压气机管道里面的模型常被简化为均匀流背景下的叶片偶极子噪声。Goldstein 的《气动声学》一书中, 简化模型计算一个无限大圆形管道中均匀流下的一个风扇的辐射声场, 如图 39 所示。

通过 Lighthill 声类比公式出发, 最终得到包含格林函数的展开形式:

$$\rho'(\vec{x}, t) = \frac{1}{c_0^2} \int_{-T}^T \int_{v(\tau)} \frac{\partial^2 G}{\partial y_i \partial y_j} T'_j d\bar{y} d\tau + \frac{1}{c_0^2} \int_{-T}^T \int_{S(\tau)} \frac{\partial G}{\partial y_i} f_i dS(\bar{y}) d\tau + \frac{1}{c_0^2} \int_{-T}^T \int_S \rho_0 V' n \frac{D_0 G}{\partial \tau} dS(\bar{y}) d\tau \quad (51)$$

上式方程(51)包含三项, 分别为四极子、偶极子和单极子产生的噪声。

通过本征函数法, 可以推导得到针对无限长管道满足管壁边界条件的格林公式。本报告将着重推导旋流背景下的格林公式。在这里, 我们将直接给出任意界面形状的圆管的格林公式, 其中本征值用 $k_{n,m}$ 表示, 本征函数用 $\Psi_{m,n}$ 表示:

$$G(\vec{y}, \tau | \vec{x}, t) = \frac{i}{4\pi} \sum_{m,n} \frac{\Psi_{m,n}(y_2, y_3) \Psi_{m,n}^*(x_2, x_3)}{\Gamma_{m,n}} \times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp \left\{ i \left[w(\tau - t) + \frac{Mk_0}{\beta^2} (y_1 - x_1) + \frac{k_{n,m}}{\beta^2} |y_1 - x_1| \right] \right\}}{k_{n,m}} dw \quad (52)$$

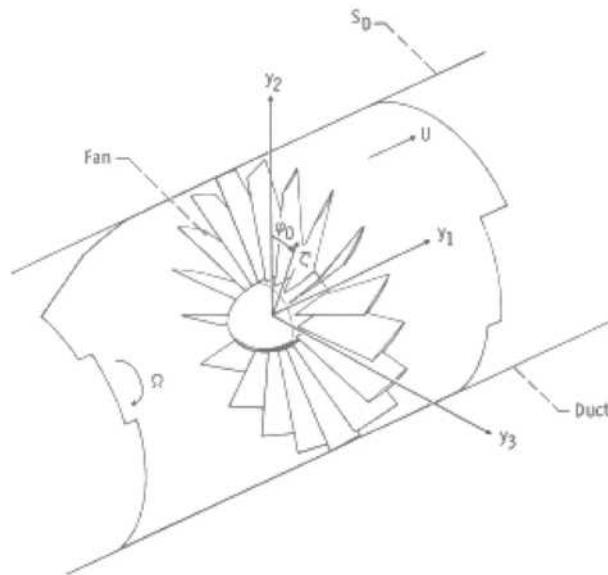


图 39 无限长管道中的风扇

在这种情况下, 很自然用到在管道的 S_D 面上法向导数为零的格林函数。于是, 由于表面里 f_i 的压强分量式沿着法向的, 这里忽略四极子项和体积位移效应的贡献, 所以对方程(51)中只包含偶极子项的贡献为

$$\rho'(\vec{x}, t) = \frac{1}{c_0^2} \int_{-T}^T \int_{S_{F(0)}} \frac{\partial G}{\partial y_i} f_i dS(\vec{y}) d\tau \quad (53)$$

5.1 旋流声类比方程

Posson 和 Peake (2012-2013)考虑了管道中轴向剪切和旋转的基流的影响, 重新整理方程为六阶线性算子作用下的压力扰动的形式, 并将其应用于转静干涉的噪声预测。

本报告将给出旋流背景下的声类比方程的最终形式, 如下:

$$F^M(\tilde{p}) = S^M \quad (54)$$

算子 F^M 定义为:

$$F^M := \left(\frac{1}{c_0^2} \frac{\bar{D}_0^2}{Dt^2} - \frac{\bar{\partial}^2}{\partial x^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\bar{\partial}^2}{\partial \theta^2} \right) \mathfrak{R}^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\bar{D}_0}{Dt} - U'_x \frac{\bar{\partial}}{\partial x} - Y_\theta \frac{\bar{\partial}}{\partial \theta} + \left(\frac{U_\theta^2}{rc_0^2} - \frac{\rho'_0}{\rho_0} \right) \frac{\bar{D}_0}{Dt} \right) \mathfrak{R} \mathbf{T} \\ + \mathfrak{R} \frac{\bar{D}_0}{Dt} \frac{\bar{\partial}}{\partial r} \mathbf{T} - \frac{\bar{D}_0}{Dt} \left[2U'_x \frac{\bar{\partial}}{\partial x} \frac{\bar{D}_0}{Dt} + 2 \left(\frac{U_\theta}{r} \right)' \frac{\bar{\partial}}{\partial \theta} \frac{\bar{D}_0}{Dt} + \mathfrak{I}'_\theta \right] \mathbf{T} \quad (55)$$

源项最终表达为:

$$S^M = \Re^2 \left(S_2^M \right) - \Re \left(\frac{\bar{D}_0}{Dt} \left(\frac{1}{r} + \frac{\bar{\partial}}{\partial r} \right) \right) - U'_x \frac{\bar{\partial}}{\partial x} - Y_\theta \frac{\bar{\partial}}{\partial \theta} + \\ \left(\frac{U_\theta^2}{rc_0^2} - \frac{\rho'_0}{\rho_0} \right) \frac{\bar{D}_0}{Dt} S_1^M + \frac{\bar{D}_0}{Dt} [2U'_x \frac{\partial}{\partial x} \frac{\bar{D}_0}{Dt} + 2(\frac{U_\theta}{r})' \frac{\bar{\partial}}{\partial \theta} \frac{D_0}{Dt} + \Im'_\theta] S_1^M \quad (56)$$

其中, $\Re = \frac{\bar{D}_0^2}{Dt^2} + \Im_\theta, \quad \mathbf{T} = -\frac{\bar{D}_0}{Dt} \frac{\bar{\partial}}{\partial r} - \frac{2U_\theta}{r^2} \frac{\bar{\partial}}{\partial \theta} + \frac{U_\theta^2}{rc_0^2} \frac{\bar{D}_0}{Dt}$ (57)

$$\Im_\theta = \frac{2U_\theta(r)}{r^2} \frac{d}{dr} (rU_\theta) + \frac{U_\theta}{r} \left(\frac{\rho'_0}{\rho_0} - \frac{U_\theta^2}{rc_0^2} \right) \quad (58)$$

接下来, 根据格林函数的定义可以给出以下形式:

$$F^M(G(\vec{x}, t | \vec{x}_0, t_0)) = \delta(\vec{x} - \vec{x}_0) \delta(t - t_0) \quad (59)$$

由此, 我们就可以通过格林公式与源项的卷积形式, 求出压力。

$$p(\vec{x}, t) = \int (G(\vec{x}, t | \vec{x}_0, t_0) S^M(\vec{x}_0, t_0)) dx_0 dt_0 \quad (60)$$

5.2 旋流格林公式

上节给出了旋流背景下的声类比方程, 其中源项可以通过实际测量或者 CFD 方法获得。因此, 我们还需要实际得到格林函数 G 的表达形式, 本报告采用本征函数法数值求解格林函数的频域形式 G_w 。

首先, 我们对上式(59)方程对时间作傅里叶变换, 并展开为柱坐标的表达形式, 得:

$$F^M(G_w(\vec{x} | \vec{x}_0) e^{-iwt}) = \delta(\vec{x} - \vec{x}_0) e^{-iwt} = \delta(x - x_0) \frac{\delta(r - r_0)}{r} \delta(\theta - \theta_0) e^{-iwt} \quad (61)$$

对应式(60), 脉动压力即可表达为:

$$p(\vec{x}, t) = \int (G_w(r, x, \theta | r_0, x_0, \theta_0) S(r_0, x_0, \theta_0)) dx_0 e^{-iwt} \quad (62)$$

进一步, G_w 还可以通过傅里叶变换得到波数域的表达形式:

$$G_w(\vec{x} | \vec{x}_0) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in(\theta - \theta_0)} \int G_n(r | r_0; w, k) e^{ik(x - x_0)} dk \quad (63)$$

参考 Dean G Duffy (2001), 可以给出 G_n 的表达形式如下:

$$G_n(r | r_0; w, k, n) = \frac{1}{r_0 W(r_0) J(r_0, k)} \begin{cases} g_1(r_0; w, k, n) g_2(r; w, k, n) & r \leq r_0 \\ g_2(r_0; w, k, n) g_1(r; w, k, n) & r > r_0 \end{cases} \quad (64)$$

其中, $J(r_0, k) = [\Omega^2(r_0, k) - \Im_\theta(r_0)] \Omega^2(r_0, k)$ (65)

W 为 $g1, g2$ 的朗斯基行列式:

$$W(r_0; w, k, n) = g_1(r_0; w, k, n) \frac{dg_2}{dr}(r_0; w, k, n) - g_2(r_0; w, k, n) \frac{dg_1}{dr}(r_0; w, k, n) \quad (66)$$

其中, 将格林函数带入边界条件, 使得 $g1$, $g2$ 满足相应的边界条件。接着, 通过数值方法可以求解得到 $g1$, $g2$ 。

这里, 实际结果表明, cut-on 模态以及靠近实轴的 cut-off 模态的前几项能量最高, 其他模态项 (包括近对流模态) 实际声能占比很小。因此, 我们只考虑模态为离散形式的声模态的影响。

根据留数定理, 可得:

$$G_n^m(x, r | x_0, r_0) = \pm \frac{iw}{2\pi} e^{iw\kappa_n^m(x-x_0)} \frac{1}{r_0 \left(\frac{\partial W}{\partial \kappa} J_0 + \frac{\partial J_0}{\partial \kappa} W \right)} \begin{cases} g_1(r_0; \kappa_n^m) g_2(r; \kappa_n^m) & r \leq r_0 \\ g_2(r_0; \kappa_n^m) g_1(r; \kappa_n^m) & r > r_0 \end{cases} \quad (67)$$

通过上述数值方法求解得到给定频率 w 下的 G_n^m 结果。最终, 对这些周向模态成分的 G_n^m

进行累加求和:
$$G_w \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in(\theta-\theta_0)} \sum_{Kn^\pm} G_n^m(x, r | x_0, r_0) \quad (68)$$

这里我们给出的案例为, 单极子位于 $(r_0, \theta_0) = (0.8, 0)$, $x-x_0=0.5$, r , θ 变化。其他参数为 $Ux=0.5$, $w=25$, $h=0.6$ 。

5.3 无旋流单极子噪声

首先图 40-图 41 展示的为无旋流情况下, 硬壁边界条件的声场分布以及各个模态所占的比重。可以看出, 在无旋流的情况下, 位于 $\theta=0$ 处的单极子声源所产生的声场上下对称分布。同时, 从模态占比图上也能很好的反映这一特点。另外, 在声源所在位置处, 其强度最大, 并随距离的增加逐渐衰减。周向模态绝对值超过 25 之后, 其能量也迅速呈现衰减的趋势。

我们再分别展示 $n=0, 5, -5, 20, -20$ 的无旋流声模态特征。如图 42-图 46 所示, 周向模态为 0 时, 参数随角度不会变化。另外, 在无旋流的情况下, 周向模态的正负取决于管道模态旋转的方向。这与解析模型是完全一致的。

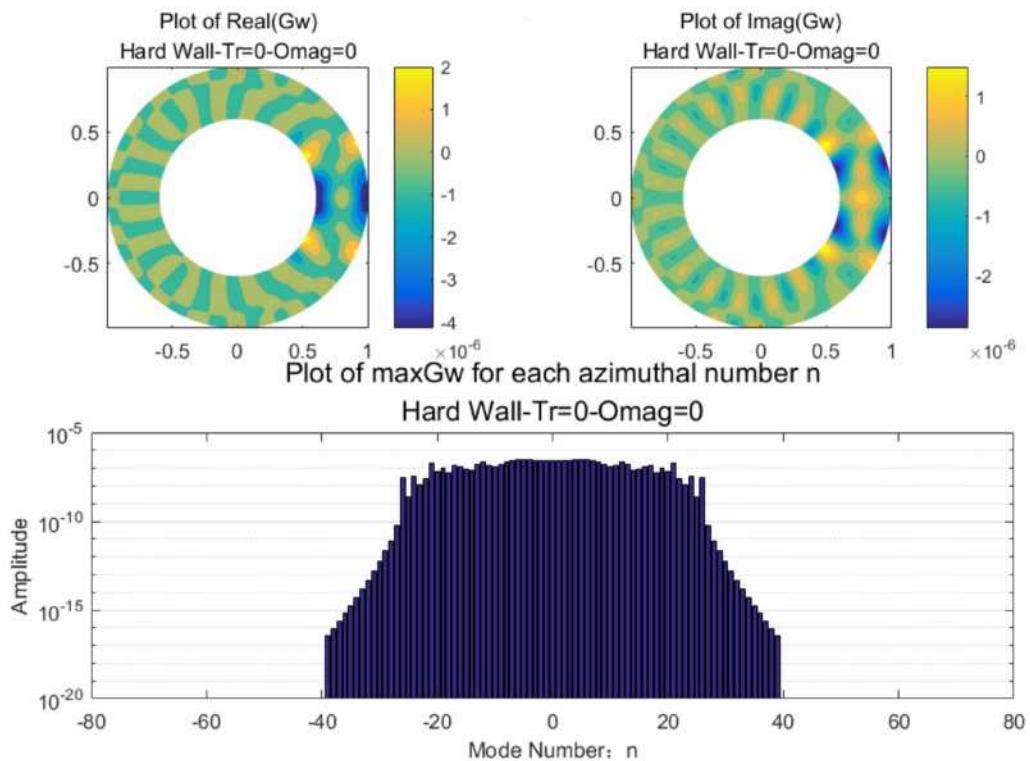


图 40 单极子位于 $(r_0, \theta_0) = (0.8, 0)$, $x-x_0=0.5$, r , θ 变化。 $Ux=0.5$, $w=25$, $h=0.6$ 无旋流

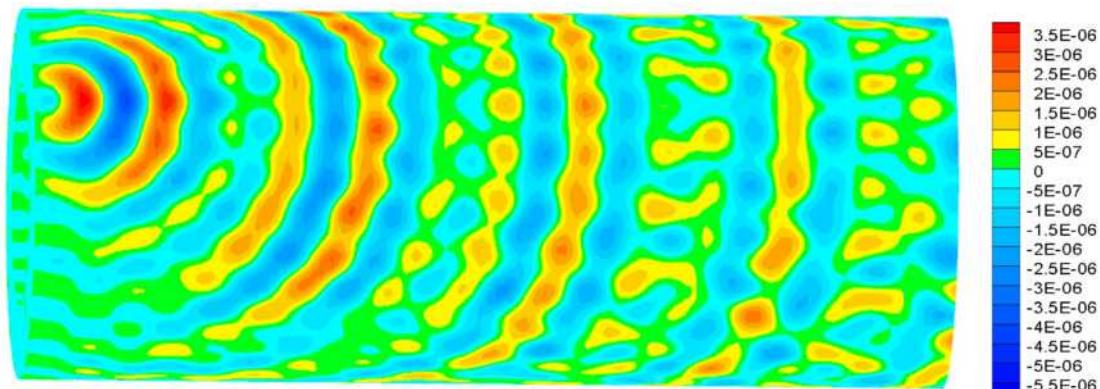


图 41 单极子噪声空间声压图 $(r_0, \theta_0) = (0.8, 0)$, $x-x_0=0.5$, r , θ 变化。 $Ux=0.5$, $w=25$, $h=0.6$ 无旋流

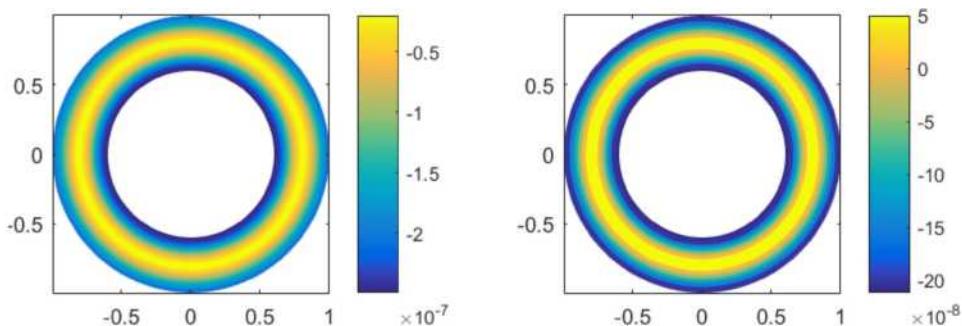


图 42 无旋流-周向模态为 $n=0$

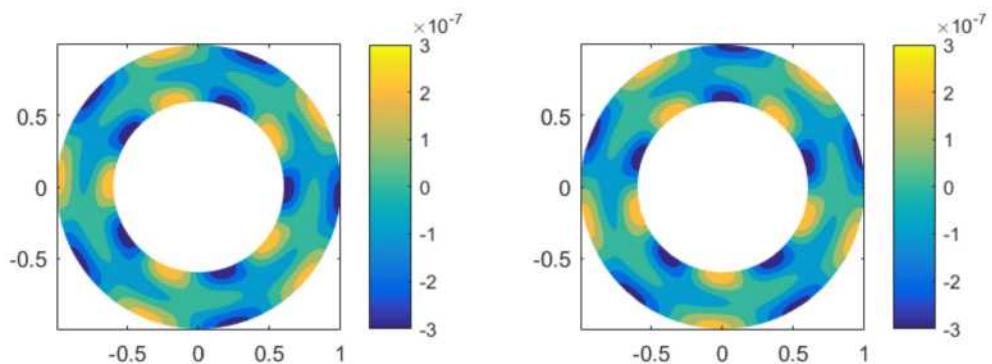


图 43 无旋流-周向模态为 $n=5$

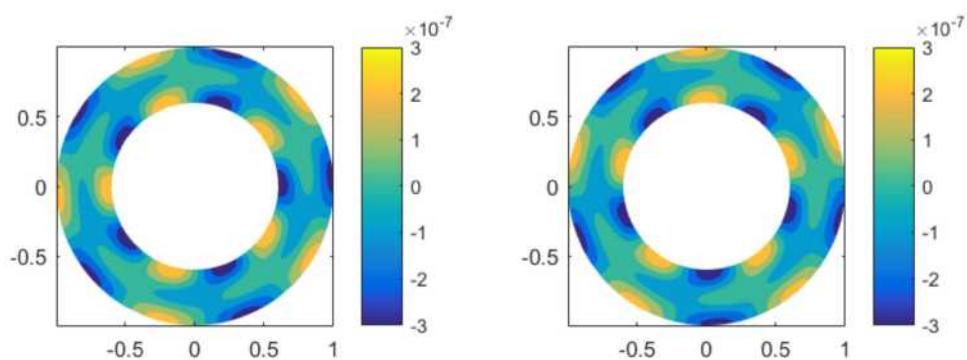


图 44 无旋流-周向模态为 $n=-5$

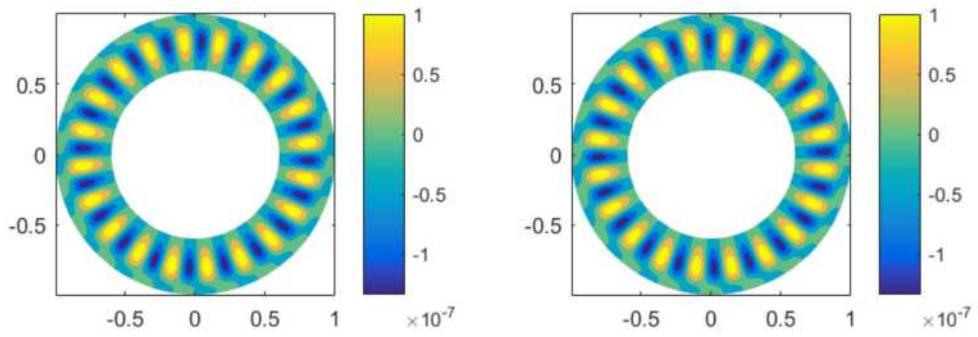


图 45 无旋流-周向模态为 $n=20$

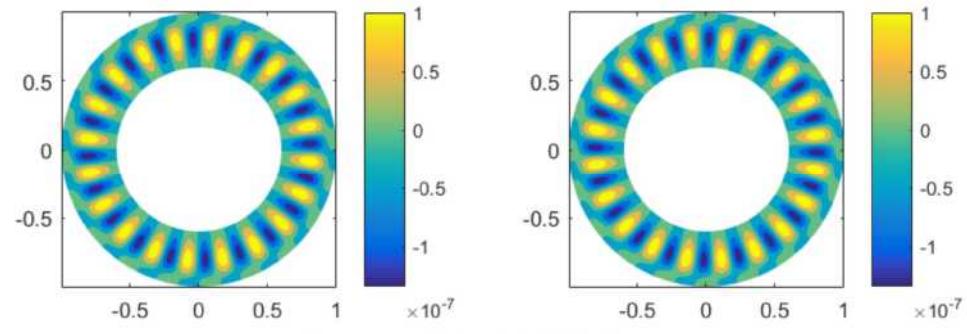


图 46 无旋流-周向模态为 $n=-20$

5.4 有旋流单极子噪声

首先图 47 单极子位于 $(r_0, \theta_0) = (0.8, 0)$, $x-x_0=0.5$, r , θ 变化。 $U_x=0.5$, $w=25$, $h=0.6$, $U_\theta=0.1/r+0.1r$ 有旋流情况下, 硬壁边界条件的声场分布以及各个模态所占的比重。可以看出, 在有旋流的情况下, 位于 $\theta = 0$ 处的单极子声源所产生的声场非对称分布。同时, 从模态占比图上看, 能量占比向负方向偏移。随着周向模态的绝对值增大, 其能量也迅速呈现衰减的趋势。值得注意的是, 在模态比占图 48 上可以较为明显的看出, 周向模态为-20 的模态比相邻的模态能量要大一个量级。

如图 49-图 51, 我们着重能看到 $n=-20$ 相较其他模态的差异, 其径向模态数可以到达 4, 超过其他周向模态图的径向模态, 对比其相邻的周向模态 $n=-21, -19$, 同样差异明显。因此, 我们有必要探究该现象的根源。

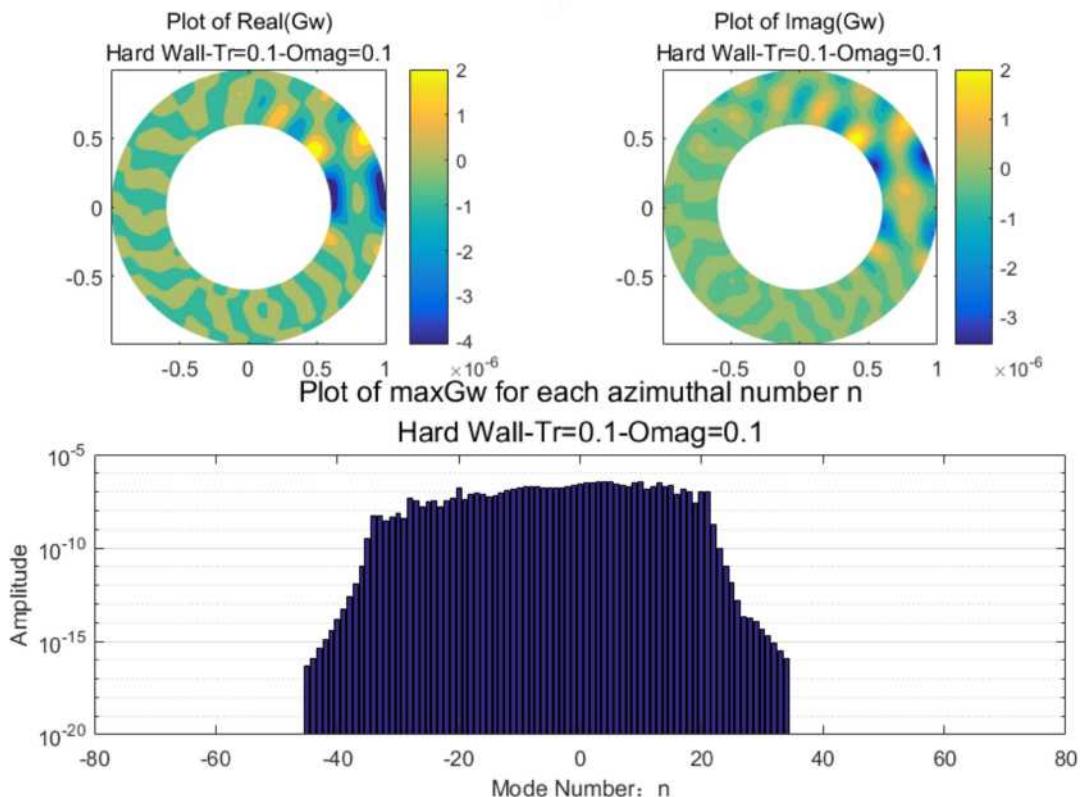


图 47 单极子位于 $(r_0, \theta_0) = (0.8, 0)$, $x-x_0=0.5$, r , θ 变化。 $U_x=0.5$, $w=25$, $h=0.6$ 有旋流 $U_\theta=0.1/r+0.1r$

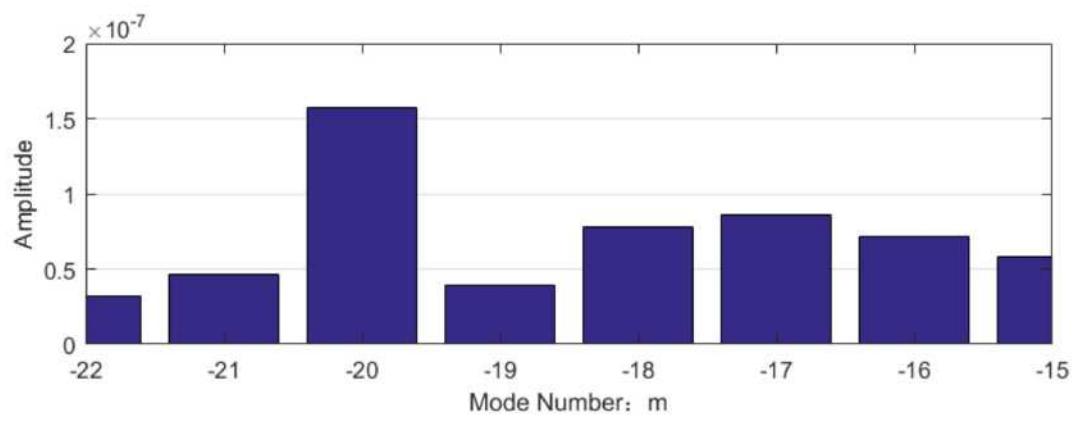


图 48 模态占比放大图

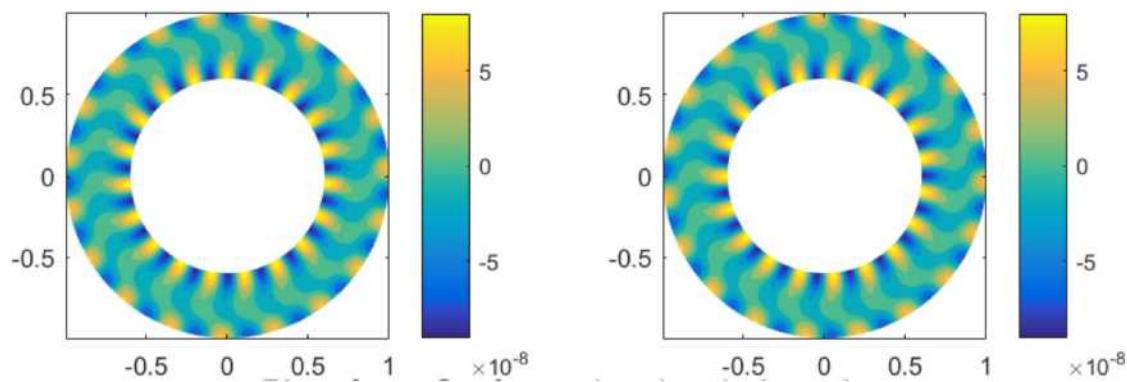


图 49 有旋流-周向模态为 $n=-19$

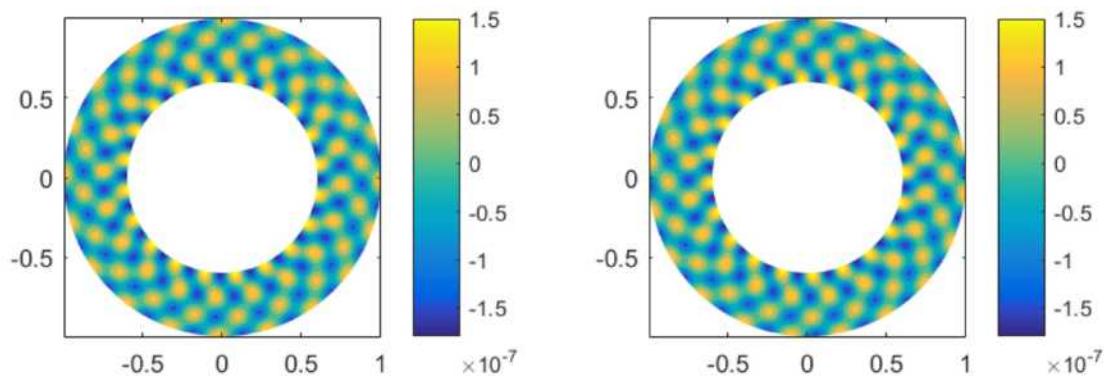


图 50 有旋流-周向模态为 $n=-20$

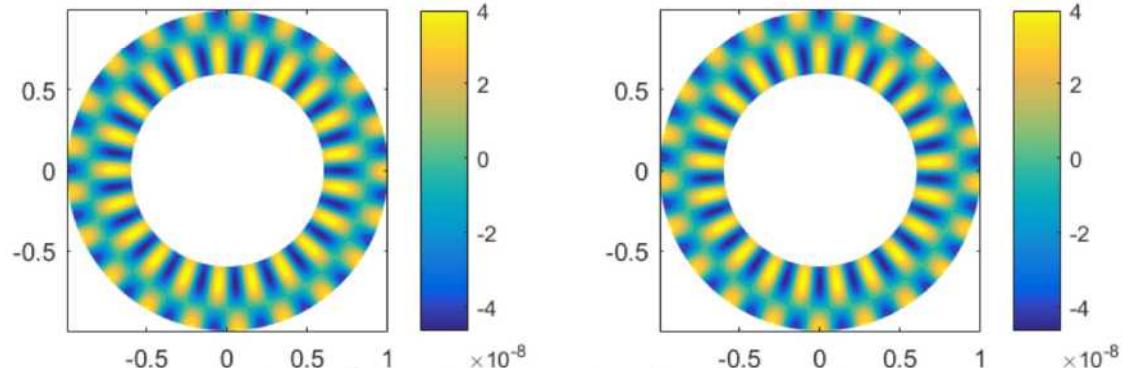


图 51 有旋流-周向模态为 $n=-21$

特别地, 分析周向模态 $n=-20$ 及其附近模态的特征值。

如图 52 所示。其中对于下游能量贡献率最高的主要有 6 个(标记点), 同时分别做出这 6 个特征值所对应的格林函数 G_n^m 。可以看出, 绿色曲线(其特征值为 $-19.05-1.419i$) 的径向模态为 4 阶的格林函数幅值最大。从 -19 到 -21 其特征值的运动规律示意可以看出, 同为四阶径向模态, 但只有靠近 cut-off 与实轴的交点的特征值有较高的能量。这也解释了上述截面压力图中模态 $n=-20$ 出现密集分布的“小斑块”的原因。

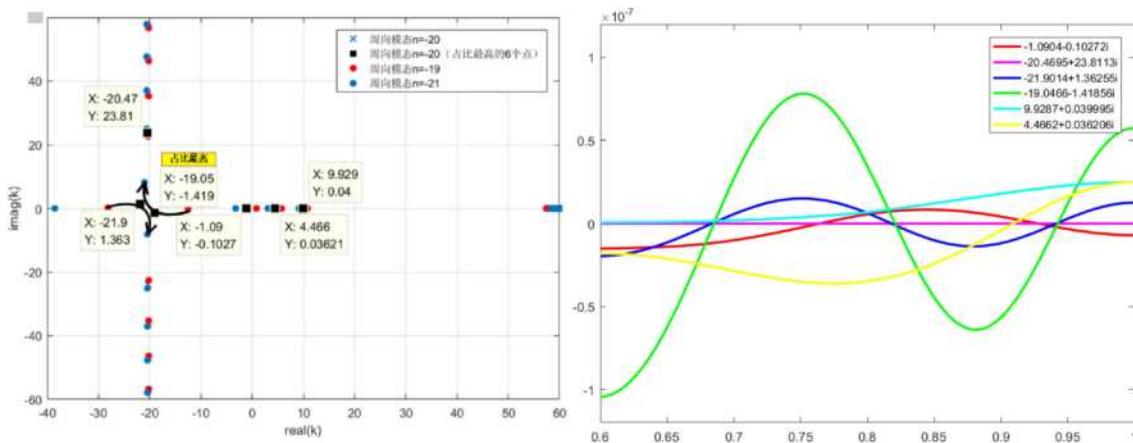


图 52 周向模态为 -20 的特征值及所对应格林函数的分布

6 参考文献

1. Nayfeh, A. H., Kaiser, J. E., and Telionis, D. P. "Acoustics of aircraft engine-duct systems," *AIAA Journal* Vol. 13, No. 2, 1975, pp. 130-153.
2. Kerrebrock, J. L. "Small disturbances in turbomachine annuli with swirl," *AIAA Journal* Vol. 15, No. 6, 1977, pp. 794-803.
3. Kousen, K. "Pressure modes in ducted flows with swirl," *Aeroacoustics Conference*. 1996, p. 1679.
4. Kousen, K. A. "Eigenmodes of ducted flows with radially-dependent axial and swirl velocity components," 1999.
5. Kousen, K. A. "Eigenmode analysis of ducted flows with radially dependent axial and swirl components," *CEAS/AIAA Joint Aeroacoustics Conference, 1 st, Munich, Germany*. 1995, pp. 1085-1094.
6. Ali, A., Atassi, H., and Atassi, O. "Derivation and implementation of inflow/outflow conditions for aeroacoustic problems with swirling flows," *7th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference and Exhibit*. 2001, p. 2173.
7. Atassi, O. V. "Propagation and stability of vorticity-entropy waves in a non-uniform flow," *Journal of Fluid Mechanics* Vol. 575, 2007, pp. 149-176.
8. Ali, A., Atassi, H., and Atassi, O. "Acoustic eigenmodes in a coannular duct with a general swirling flow," *6th Aeroacoustics Conference and Exhibit*. 2000, p. 1954.
9. Golubev, V., Atassi, H., Golubev, V., and Atassi, H. "Acoustic-vorticity modes in an annular

- duct with mean vortical swirling flow," *3rd AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*. 1997, p. 1695.
10. Golubev, V., and Atassi, H. "Sound propagation in an annular duct with mean potential swirling flow," *Journal of Sound and Vibration* Vol. 198, No. 5, 1996, pp. 601-616.
 11. Tam, C. K., and Auriault, L. "The wave modes in ducted swirling flows," *Journal of Fluid Mechanics* Vol. 371, 1998, pp. 1-20.
 12. Nijboer, R. "Eigenvalues and eigenfunctions of ducted swirling flows," *7th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference and Exhibit*. 2001, p. 2178.
 13. Heaton, C., and Peake, N. "Continuous Spectrum Growth and Modal Instability in Swirling Duct Flow," *12th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference (27th AIAA Aeroacoustics Conference)*. 2006, p. 2583.
 14. Cooper, A., and Peake, N. "Wave propagation in a slowly-varying duct with mean vortical swirling flow," *7th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference and Exhibit*. 2001, p. 2124.
 15. Cooper, A., Parry, A., and Peake, N. "Acoustic resonance in aeroengine intake ducts," *Journal of turbomachinery* Vol. 126, No. 3, 2004, pp. 432-441.
 16. Cooper, A., and Peake, N. "Trapped acoustic modes in aeroengine intakes with swirling flow," *Journal of Fluid Mechanics* Vol. 419, 2000, pp. 151-175.
 17. Heaton, C., and Peake, N. "Generation and scattering of sound in vortical flow," *11th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*. 2005, p. 3023.
 18. Cooper, A. J. "Effect of mean entropy on unsteady disturbance propagation in a slowly varying duct with mean swirling flow," *Journal of sound and vibration* Vol. 291, No. 3-5, 2006, pp. 779-801.
 19. Ali, A. A. *Aeroacoustics and stability of swirling flows*, 2001.
 20. Lighthill, M. J. "On sound generated aerodynamically I. General theory," *Proc. R. Soc. Lond. A* Vol. 211, No. 1107, 1952, pp. 564-587.
 21. Lighthill, M. J. "On sound generated aerodynamically II. Turbulence as a source of sound," *Proc. R. Soc. Lond. A* Vol. 222, No. 1148, 1954, pp. 1-32.
 22. Curle, N. "The influence of solid boundaries upon aerodynamic sound," *Proc. R. Soc. Lond. A* Vol. 231, No. 1187, 1955, pp. 505-514.
 23. Williams, J. F., and Hawking, D. L. "Sound generation by turbulence and surfaces in arbitrary motion," *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A* Vol. 264, No. 1151, 1969, pp. 321-342.
 24. Goldstein, M. E. "Aeroacoustics," *New York, McGraw-Hill International Book Co.*, 1976. 305 p., 1976.
 25. Morfey, C., and Wright, M. "Extensions of Lighthill's acoustic analogy with application to computational aeroacoustics," *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. Vol. 463, The Royal Society, 2007, pp. 2101-2127.
 26. Lilley, D. G. "Prediction of inert turbulent swirl flows," *AIAA Journal* Vol. 11, No. 7, 1973, pp. 955-960.
 27. Howe, M. "Contributions to the theory of aerodynamic sound, with application to excess jet noise and the theory of the flute," *Journal of Fluid Mechanics* Vol. 71, No. 4, 1975, pp. 625-673.
 28. Wundrow, D. W., Hultgren, L. S., and Goldstein, M. "Interaction of oblique instability waves with a nonlinear plane wave," *Journal of Fluid Mechanics* Vol. 264, 1994, pp. 343-372.

29. Cooper, A. J., and Peake, N. "Upstream-radiated rotor–stator interaction noise in mean swirling flow," *Journal of Fluid Mechanics* Vol. 523, 2005, pp. 219-250.
30. Posson, H., and Peake, N. "Acoustic analogy in swirling mean flow applied to predict rotor trailing-edge noise," *18th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference (33rd AIAA Aeroacoustics Conference)*. 2012, p. 2267.
31. Posson, H., and Peake, N. "The acoustic analogy in an annular duct with swirling mean flow," *Journal of Fluid Mechanics* Vol. 726, 2013, pp. 439-475.