

# 1 压气机管道周向声模态的测量

## 1.1 管道声学理论

在连续性、均匀流和无黏假设条件下，圆形管道内对流波动方程为：

$$\frac{1}{c_0^2} \left( \frac{D}{Dt} \right)^2 p - \Delta p = 0 \quad (1)$$

其中  $c_0$  是当地声速， $D/Dt$  是圆柱坐标系下的随流导数， $\Delta$  是圆柱坐标系中的拉普拉斯算子。

波动方程式(84)在某特定频率下的特解为

$$p_{mnf}(x, r, \theta, t) = A_{mnf} E_{mn}(\kappa_{mn} r) e^{i(2\pi ft + m\theta - \xi_{mn} x)} \quad (2)$$

$$E_{mn}(\kappa_{mn} r) = C_{mn} [J_m(\kappa_{mn} r) + Q_{mn} Y_m(\kappa_{mn} r)] \quad (3)$$

其中  $A_{mnf}$  是  $(m, n)$  阶声模态振幅； $f$  是频率； $x$  是轴向位置坐标； $x, \kappa, r$  都是管道半径  $R$  的无量纲量； $\xi$  是轴向波数； $\theta$  是周向角度； $\kappa$  是硬壁圆形/环形管道贝塞尔函数特征值； $m$  和  $n$  分别是周向和径向模态阶数。 $C_{mn}$  是归一化因子， $J_m$  和  $Y_m$  分别表示特征值为  $\kappa_{mn}$  和  $Q_{mn}$  的硬壁圆形/环形管道第一类和第二类  $m$  阶贝塞尔函数。

对所有模态下的波进行叠加就可以获得该频率下的总声压为：

$$p_f(x, r, \theta, t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} A_{mnf} E_{mn}(\kappa_{mn} r) e^{i(2\pi ft + m\theta - \xi_{mn} x)} \quad (4)$$

由于本文研究的只是周向声模态，上式可以简化为

$$p_f(\theta) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_{mf} e^{-im\theta} \quad (5)$$

## 1.2 模态分解理论

由式(88)可知，想要获得各个周向声模态对应的振幅，需要知道周向上的声学信息。通常，这可以通过实验测量获得。在实际实验中，由于实验条件的限制，只能测量周向有限位置上的声学信息。假设测量点有  $K$  个（即  $K$  个麦克风），周向位置分别是  $\theta_k$ ，其中  $k = 1, 2, \dots, K$ 。模态振幅可以通过求解方程式(88)得到

$$a_{mf} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K p_f(\theta_k) e^{im\theta_k} \quad (6)$$

假设周向只有一个模态，即  $p_f(\theta) = e^{-im\theta}$ ，则对于一般的等间距麦克风阵列， $\theta_k = 2\pi k / K$ ，其中  $k = 1, 2, \dots, K$ ，有

$$a_{mf} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K e^{2\pi i(m-\mu)k/K} \quad (7)$$

分析式(90)可知当  $m = \mu + lk$  (其中  $l$  是整数) 时,  $a_{mf} = 1$ , 此时会出现混淆现象; 而当  $m \neq \mu + lk$  时,  $a_{mf} = 0$ , 此时没有旁瓣影响。为了避免混淆现象的发生, 一般情况下, 用来测量周向声场信息的麦克风的个数至少时所要求周向声模态阶数的 2 倍。

### 1.3 模态分解数据处理过程

假设周向均匀分布的麦克风阵列包含  $K$  个麦克风, 标记为  $k = 1, 2, \dots, K$ , 用于采集参考信号的麦克风标记为  $k = 0$ 。用周向位置  $\theta_k$  表示第  $k$  个麦克风的周向角度位置。

假定第  $k$  个麦克风测得的压力脉动信号为  $\chi_k(t)$ , 则  $\chi_k(t) = \chi_k(s\Delta t)$   $s = 1, 2, \dots, S$ 。其中  $S$  为选取的采集数据的个数。对其进行快速傅里叶变换可以得到复数压力脉动振幅  $p_{f_j}(\theta_k)$ 。其中  $f_j = j/(S\Delta t)$   $j = 1, 2, \dots, S/2 - 1$ 。

模态分解是在某一固定频率上进行的, 为了便于表达, 以下表达式中不再使用频率的下标  $j$ 。从 Tyler 和 Sofrin 理论提出以来, 有很多种模态分解技术被提出, 如传统的方均根(RMS)法、对角线移除(DR)法、与参考信号互相关(CC)法以及主要部分分析(PC)法。本报告主要介绍 RMS 模态分解技术, 并应用到本试验台进口声场阵列的模态测试。

### 1.4 RMS 模态分解技术

由测量获得的  $K$  个麦克风压力脉动频谱, 可以得到复数形式的模态振幅  $a_{mf}$ , 由上式(89)给出。为了减小误差, 对采集信号进行快速傅里叶变换多次平均, 得到平均模态能量  $\Gamma_{mf}$  的表达式。

$$\begin{aligned} \Gamma_{mf} &= \frac{1}{2} \left\langle |a_{mf}|^2 \right\rangle = \frac{1}{2K^2} \left\langle \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^K p_f(\theta_k) e^{im\theta_k} p_f(\theta_l) e^{-im\theta_l} \right\rangle = \\ &= \frac{1}{K^2} \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^K e^{im\theta_k} \left\langle p_f(\theta_k) p_f(\theta_l)^* \right\rangle e^{-im\theta_l} = \frac{1}{K^2} \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^K e^{im\theta_k} C_{kl} e^{-im\theta_l} \end{aligned} \quad (8)$$

其中  $C_{kl}$  表示互相关函数, 可以写成  $C_{kl} = \langle p_f(\theta_k) p_f(\theta_l)^* \rangle / 2$ ,  $*$  表示复数的共轭,  $\langle \rangle$  表示取若干时间段上信号的平均值。

当麦克风信号  $p_f(\theta_k)$  被随机噪声信号  $\varepsilon_k$  干扰时, 获得的模态能量  $\Gamma_{mf}$  就会与真实值  $\Gamma_{mf}$  之间存在偏差。事实上, 背景噪声本身会引起模态振幅误差。

$$\delta_m = \frac{1}{K^2} \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^K e^{im\theta_k} \frac{1}{2} \langle \varepsilon_k \varepsilon_l^* \rangle e^{-im\theta_l} \quad (9)$$

经过多次平均, 可以得到

$$\overline{\Gamma_{mf}} = \frac{1}{K^2} \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^K e^{im\theta_k} \frac{1}{2} \left\langle [p_f(\theta_k) + \varepsilon_k] \cdot [p_f(\theta_l) + \varepsilon_l]^* \right\rangle e^{-im\theta_l} = \Gamma_{mf} + \delta_m \quad (10)$$

在管道内部, 不同麦克风对应的(边界层)干扰噪声是互不相关的, 因而式(93)简化为

$$\delta_m = \frac{1}{K^2} \sum_{k=1}^K \frac{1}{2} \langle |\varepsilon_k|^2 \rangle \quad (11)$$

假设各个麦克风的干扰噪声强度相同，令  $\langle |\varepsilon_k|^2 \rangle / 2 = Q$ ，则式(94)变成  $\delta_m = Q / K$ 。因此，RMS 算法在一定程度上降低干扰噪声。

### 1.5 压气机管口试验周向模态分析

如图 56 所示，在压气机管口附件布置 32 个平均分布的自由场传声器阵列，在不同转速工况下同时采集声压数据，并利用式(91)即可计算得到在特定频率下面，不同周向模态的幅值。由于传感器个数的限制，周向模态的分析范围在-16~16。



图 1 管口传声器阵列布置

根据 Tyler 和 Sofrin 研究，在低速条件下，压气机管道的声模态主要由于转子和静子相互干涉，而形成的旋转压力模态的  $n$  次谐波的周向模态阶数为

$$m = nB \pm kV \quad (12)$$

式中， $k$  是任意常数，表示静子产生的畸变的空间谐波。 $B$  为动叶数， $V$  为静叶数。

在本压气机试验中， $B$  为 29， $V$  为 32 (IGV 导叶)。如图 57，图 58 分别展示了 5000rpm，6000rpm 的周向模态计算结果。可以看出，在 5000rpm，1BPF 突出的幅值在  $m=3$ ，这刚好为 IGV 与动叶转静干涉传播出来的周向模态。而 6000rpm，1BPF 则无明显的  $m=3$  占优，而在 2BPF 突出的幅值在  $m=6$ ，这对应与  $2 * (32-29)$ 。随着转速的提高，周向模态也变得更加复杂，无法直接看出整数倍周期的周向阶数。这是因为，在管道来流马赫数的提高以及来流的非均匀性增强所导致的。因此，为研究声场和流场的作用关系，环形阵列的设置应该尽量往

IGV 导叶附近移动。

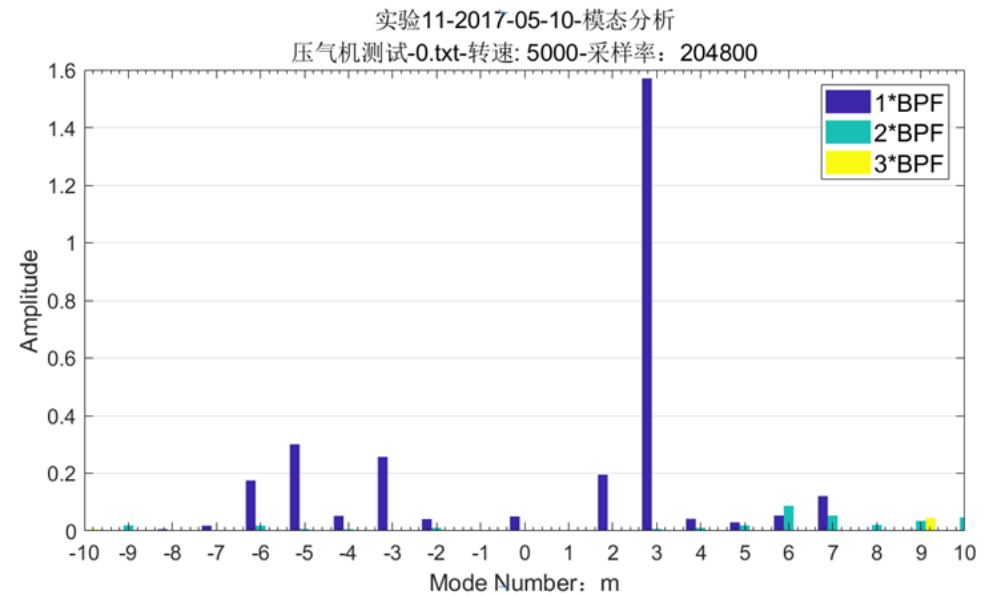


图 2 5000rpm 正常工况模态分布图

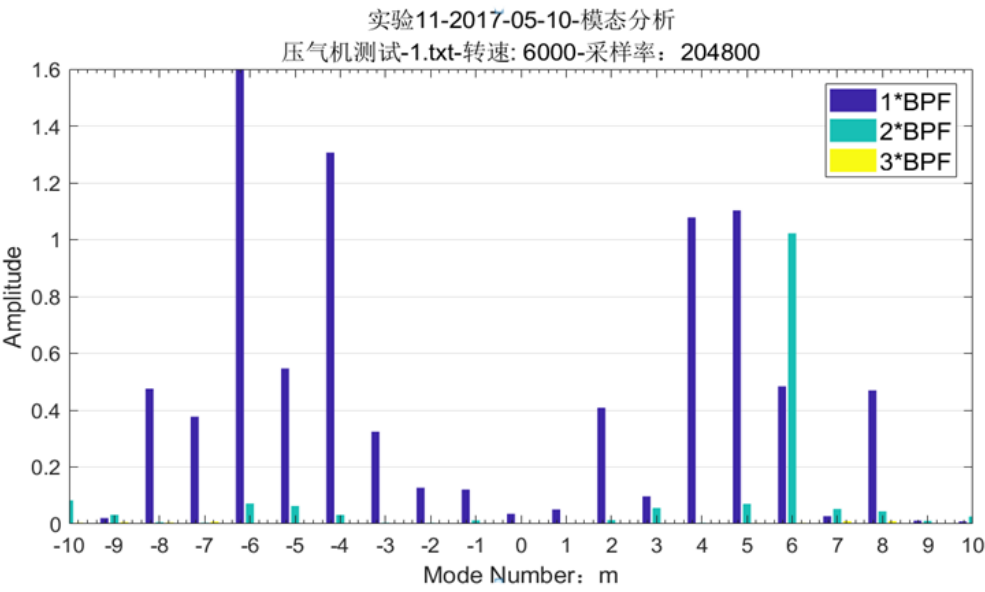


图 3 6000rpm 正常工况模态分布图

速演化过程