# Waves 1.12

Maciej Matyka\* maq@panoramix.ift.uni.wroc.pl

Uniwersytet Wrocławski. Wydział Fizyki i Astronomii. Fizyka II BIS.

<sup>\*</sup>Podziękowania dla prof. Ewy Dębowskiej i prof. Ludwika Turko z Wydziału Fizyki Uwr oraz prof. Pawła Głowackiego z Wydziału Matematyki Uwr za okazaną pomoc.

# Spis treści

1	Kla	syczne równanie falowe
	1.1	Równanie falowe w jednym wymiarze
		1.1.1 Rozbicie równania falowego na układ dwóch sprzężonych równań różniczkowych
		rzędu pierwszego
		1.1.2 Siatka różnicowa Eulera w jednym wymiarze
		1.1.3 Rozwinięcie metodą Laxa II rzędu
	1.2	Algorytm
	1.3	Rezultaty
2	Róv	wnanie w dwóch wymiarach przestrzennych
	2.1	Analog różnicowy operatora Laplace'a
	2.2	Schemat dziewięciopunktowy
	2.3	Algorytm działania pętli obliczeniowych
3	Pro	ogram Waves
	3.1	Wymagania sprzętowe programu
	3.2	System operacyjny
	3.3	Ogólne założenia programu
	3.4	Interfejs użytkownika
		3.4.1 Ekran główny
		3.4.2 Zakładka "Control"
		3.4.3 Zakładka "View"
	3.5	Efekty działania programu Waves
		3.5.1 Pojedynczy impuls falowy
		3.5.2 Interferencja fali pochodzącej z dwóch źródeł
		3.5.3 Dyfrakcja na przeszkodzie
		3.5.4 Dyfrakcja na szczelinie
		3.5.5 Doświadczenie Younga
4	Pod	dsumowanie 19

#### Streszczenie

Program Waves w wersji 1.12 służy do symulacji zjawisk fizyki fal. W niniejszej dokumentacji przedstawiona została w zarysie metoda rozwiązania równania falowego na siatce przestrzennej Eulera użyta w programie Waves 1.12. Zaproponowane rozwiązania nie są jedynymi możliwymi, jednak charakter poruszanego zagadnienia oraz efekty działania użytych algorytmów sugerują, że dobór metod numerycznych jest prawidłowy.

## 1 Klasyczne równanie falowe

Klasyczne równanie falowe stanowi fundamentalny opis zjawisk fizyki fal. Równanie nie skomplikowane matematycznie opisuje naprawdę szeroki wachlarz zjawisk. Równanie falowe w postaci ogólnej zapisujemy jako:

$$\Delta U = \frac{1}{v^2} \cdot U_{tt} \tag{1}$$

gdzie U oznacza wychylenie z położenia równowagi, a v jest prędkością rozchodzenia się fali.

Równanie falowe jest przykładem równania różniczkowego cząstkowego i należy do klasy równań hiperbolicznych.

Tak zapisane równanie falowe stanowi punkt wyjścia do zapisu konkretnych równań dla fal mechanicznych i elektromagnetycznych w jednym, dwóch lub trzech wymiarach przestrzennych.

#### 1.1 Równanie falowe w jednym wymiarze

W tym miejscu zajmiemy się najprostszym przypadkiem - równaniem falowym w jednym wymiarze przestrzennym.

Niech funkcja wychylenia, będzie zależna od czasu i jednej współrzędnej przestrzennej (np. x). W takim układzie równanie (1) przyjmie postać

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0 \tag{2}$$

co stanowić będzie dla nas punkt wyjścia dla obliczeń numerycznych.

# 1.1.1 Rozbicie równania falowego na układ dwóch sprzężonych równań różniczkowych rzędu pierwszego.

Rozwiązanie równania falowego w jednym wymiarze przestrzennym rozpoczniemy od wprowadzenia nowych oznaczeń (pomysł zaczerpnięty z [1]). Niech  $T_x$  oznacza przemieszczenie kątowe , definiowane jako pochodna cząstkowa wychylenia po współrzędnej przestrzennej, czyli

$$T_x = v \cdot \frac{\partial U}{\partial x} \tag{3}$$

Podobnie postępujemy z pochodną po czasie, wprowadzając V, jako zmianę wychylenia w czasie

$$V = \frac{\partial U}{\partial t} \tag{4}$$

Tak zapisane tożsamości pozwalają na zredukowanie stopnia trudności zagadnienia z rozwiązywania równania drugiego rzędu do układu równań rzędu pierwszego. Podstawienie (3) i (4) do równania (2) daje w rezultacie układ dwóch równań sprzężonych

$$\begin{cases}
\frac{\partial V}{\partial t} = v \cdot \frac{\partial T_x}{\partial x}, \\
\frac{\partial T_x}{\partial t} = v \cdot \frac{\partial V}{\partial x}.
\end{cases} (5)$$

# 1.1.2 Siatka różnicowa Eulera w jednym wymiarze.

Rozwiązanie układu równań (5) rozpoczynamy od zdefiniowania siatki różnicowej Eulera. W szczególnym przypadku jednego wymiaru siatkę tworzymy alokując jednowymiarową tablicę danych zmienno-przecinkowych. Siatka taka posiada ważną cechę rozmiar. Pamiętać należy, że rozmiar siatki musi być na tyle duży, aby rozwiązanie pozostało stabilne. Siatka nie może być też za duża, bo czas obliczeń rośnie wraz z jej powiększaniem. Właściwe dobranie parametrów siatki nie jest trudne.



Rysunek 1: Orientacja punktów na siatce jednowymiarowej Eulera.

Rozwiązanie układu równań (2) rozpinamy nad wcześniej zdefiniowaną siatką różnicową. Istnieje kilka możliwych sposobów aproksymacji pochodnych cząstkowych na siatkach Eulera. W pokazanym rozwiązaniu stosujemy metodę aproksymacji pierwszego rzędu "w przód".

Zgodnie z teorią aproksymacji różnicowej "w przód" przybliżenie pochodnej cząstkowej  $\frac{\partial V}{\partial t}$  bezpośrednio zapisać można jako

$$\frac{\partial V}{\partial t} \approx \frac{V_i^{n+1} - V_i^n}{\Delta t} \tag{6}$$

, gdzie  $\Delta t$ jest rozmiarem kroku czasowego. Podobnie pochodna  $\frac{\partial T_x}{\partial x}$ jest przybliżona wg. schematu

$$\frac{\partial T_x}{\partial x} \approx \frac{T_{x,i+1}^n - T_{x,i}^n}{\Delta x} \tag{7}$$

, gdzie  $\Delta x$  jest rozmiarem pojedynczej komórki na siatce. Otrzymujemy stąd algorytmiczny zapis układu (5)

$$V_i^{n+1} = V_i^n + v \cdot \frac{T_{x,i+1}^n - T_{x,i}^n}{\Delta x} \cdot \Delta t$$
 (8)

$$T_{x,i}^{n+1} = T_{x,i}^n + v \cdot \frac{V_{i+1}^n - V_i^n}{\Delta x} \cdot \Delta t \tag{9}$$

Wychylenie U obliczamy z równania (4), dla każdego kroku czasowego z osobna, wykorzystując metodę Eulera I-go rzędu, czyli

$$U_i^{n+1} = U_i^n + V_i^n \cdot \Delta t \tag{10}$$

#### 1.1.3 Rozwinięcie metodą Laxa II rzędu.

Algorytmiczny zapis układu (2) dwóch równań sprzężonych (kroki 8,9) przybliżają pochodne z dokładnością pierwszego rzędu. W prosty sposób można osiągnąć dokładność drugiego rzędu. Zamiana wartości funkcji w bieżącym kroku czasowym (indeksy odpowiednio i, n) na średnią arytmetyczną wartości leżących po bokach na siatce spowoduje, iż schemat osiągnie dokładność drugiego rzędu. Rozwiązanie to nosi nazwę schematu Laxa II rzędu. Odpowiednio kroki (8) i (9) w schemacie Laxa przyjmują postać

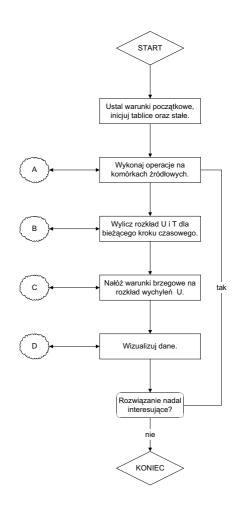
$$V_i^{n+1} = \frac{V_{i-1}^n + V_{i+1}^n}{2} + v \cdot \frac{T_{x,i+1}^n - T_{x,i}^n}{\Delta x} \cdot \Delta t \quad (11)$$

$$T_{x,i}^{n+1} = \frac{T_{x,i-1}^n + T_{x,i+1}^n}{2} + v \cdot \frac{V_{i+1}^n - V_i^n}{\Delta x} \cdot \Delta t \tag{12}$$

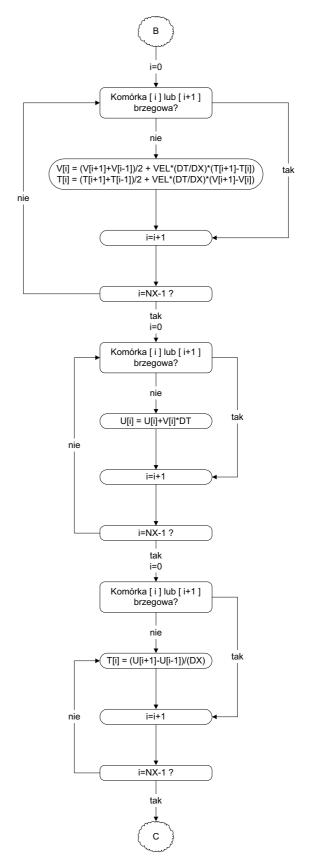
Schematy w tej postaci zastosowane do rozwiązania równania falowego w jednym wymiarze przestrzennym.

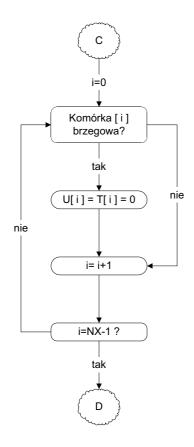
#### 1.2 Algorytm

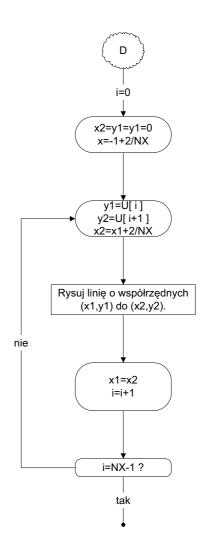
Poniżej, w formie diagramów, przedstawiam algorytmiczny zapis rozwiązania równania fali w jednym wymiarze przestrzennym. Program niewiele różni się od rozwiązania dla dwóch wymiarów, umiejętne wstawienie przybliżenia dla operatora Laplace'a w dwóch wymiarach (o tym niżej) pozwala uzyskać efekty w dwóch wymiarach.





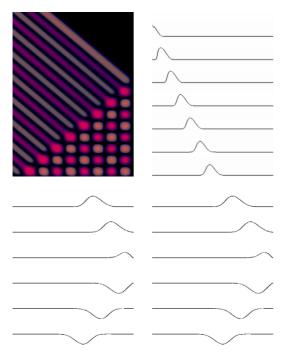






#### 1.3 Rezultaty

Rezultaty rozwiązania w jednym wymiarze przestrzennym są zadowalające i pokazane poniżej dla najprostrzych przypadków rozchodzenia się impulsów falowych.



Pokazane rezultaty zgadzają się oczywiście z teorią fal (rysunki górne - powstawanie fali stojącej i rozchodzenie się impulsu falowego, rysunki poniżej - odbicia impulsów falowych). Program dostarczony do konkursu nie rozwiązuje jednak równania falowego w jednym wymiarze. Zagadnienie takie nie jest ciekawe i raczej niezbyt pasjonujące. Dlatego też warto zająć się rozwiązaniem równania w dwóch wymiarach przestrzennych, którego rozwiązaniem będzie trójwymiarowy model przestrzeni pokazujący wychylenia dla każdej chwili czasowej w czasie rzeczywistym obliczając rozwiązania równania fali.

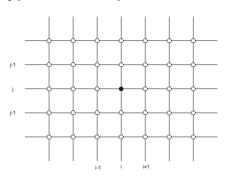
# 2 Równanie w dwóch wymiarach przestrzennych

Rozwiązanie równania postaci (1) rozpisujemy na dwa wymiary przestrzenne:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \tag{13}$$

Rozwiązanie równania rozpoczynamy od zdefiniowania siatki przestrzennej Eulera z węzłami za-

wierającymi przestrzenny rozkład funkcji U(x, y, t), jak pokazano na rys. 2. Każdy węzeł siatki tak zdefiniowanej zawiera w sobie informacje o wychyleniu na bieżącym kroku czasowym.



Rysunek 2: Orientacja punktów na siatce dwuwymiarowej Eulera (zaznaczony punkt i, j).

#### 2.1 Analog różnicowy operatora Laplace'a

Rozwiązanie równania (13) sprowadzi się w takim przypadku do zastosowania algorytmu przybliżenia numerycznego operatora Laplace'a w dwóch wymiarach przestrzennych. Zanim jednak będzie można to zrobić trzeba pozbyć się z równania (13) drugiej pochodnej funkcji U po czasie. Stosujemy podstawienie:

$$V = \frac{\partial U}{\partial t} \tag{14}$$

Rozwiązanie operatora Laplace'a jest bardzo proste dla modelu siatki dwuwymiarowej, prostokątnej. Wiadomo, że przybliżeniem na drugą pochodną  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$  (aproksymacja różnicowa "wprzód" - patrz [3]) jest:

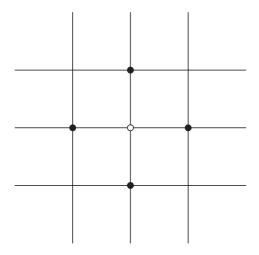
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \approx \frac{U_{i+1,j}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i-1}^n j}{\Delta x^2}$$
 (15)

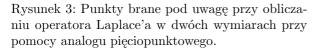
Zastosowanie tego schematu do operatora Laplace'a w dwóch wymiarach daje nam prosty i efektywny analogon różnicowy, pięciopunktowy (rys. 3):

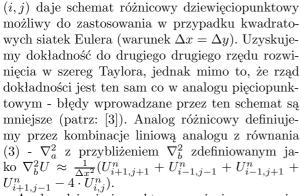
$$\nabla_a^2 U \approx \frac{1}{\Delta x^2} (U_{i+1,j}^n + U_{i-1,j}^n + U_{i,j+1}^n + U_{i,j-1}^n - 4 \cdot U_{i,j}^n) \tag{16} \label{eq:delta_a}$$

#### 2.2 Schemat dziewięciopunktowy

Kombinacja liniowa analogu różnicowego pokazanego na rysunku (3) wraz z dokładnie takim samym rozwiązaniem biorącym punkty na ukos od







Analog dziewięciopunktowy zapisujemy w zwięzłej formie:

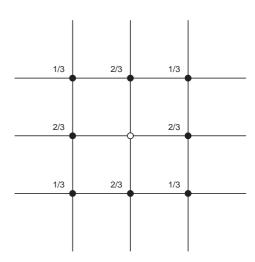
$$\nabla_{\mathbf{q}}^{2} = \varepsilon \cdot \nabla_{\mathbf{q}}^{2} + (1 - \varepsilon) \cdot \nabla_{\mathbf{p}}^{2} \tag{17}$$

gdzie  $\varepsilon \in [0,1]$ . Stała  $\varepsilon$  jest wagą analogów  $\nabla_a^2$  i  $\nabla_b^2$ . Z reguły stosuje się wartość większą dla wariantu a, bo sam w sobie analog  $\nabla_b^2$  jest niestabilny, dopiero w połączeniu z  $\nabla_a^2$  jest on pomocny.

Sensowną wartością  $\varepsilon$  (zastosowaną w programie "Waves") jest  $\varepsilon = \frac{2}{3}$ . Dla tej wartości  $\varepsilon$  otrzymujemy rozkład współczynników jak na rysunku (4).

#### 2.3 Algorytm działania pętli obliczeniowych

Tyle na temat teorii rozwiązania równania falowego w dwóch wymiarach przestrzennych. W praktyce rozwiązania sprowadza się do zastosowania pokazanego schematu różnicowego na siatce różnicowej i



Rysunek 4: Rozkład wag dla analogu dziewięcio-punktowego i wartości  $\varepsilon = \frac{2}{3}$ .

wyliczenia wychyleń z podstawienia (14) np. schematem Eulera pierwszego rzędu (takie podstawienie ma charakter niewymagający dokładności większej niż pierwszego rzędu). Ogólny algorytm działania niewiele różni się od przedstawionego dla przypadku jednowymiarowego, więc go tu pomijam.

### 3 Program Waves

#### 3.1 Wymagania sprzętowe programu

Niestety - są duże. W dobie wszechobecnej komputeryzacji wymagania raczej nie szokują, ale nie jest to mało. Do sensownej pracy z programem potrzebna jest przede wszystkim dobra karta graficzna (Riva TNT 2 wystarcza w zupełności) oraz procesor (troche ponad 400Mhz powinno wystarczyć). Zdaję sobie sprawę, że wymagania te mogą zdawać się duże, ale w zamian mamy pełną wizualizację równania falowego w formie modelu trójwymiarowego wizualizującego wychylenia na siatce różnicowej Eulera.

#### 3.2 System operacyjny

Do realizacji programu wybrałem system operacyjny Windows. Wersja źródłowa programu dostarczona do konkursu jest jednak możliwa do skompilowania pod systemem Linux bez żadnych przeróbek. Do stworzenia interfejsu użytkownika wykorzystałem bowiem pakiet "FOX", który nie jest zależny od systemu operacyjnego. Wersja wykonywalna programu "Waves" dostarczona do konkursu jest

jednak wersją pod Windowsy.

#### 3.3 Ogólne założenia programu

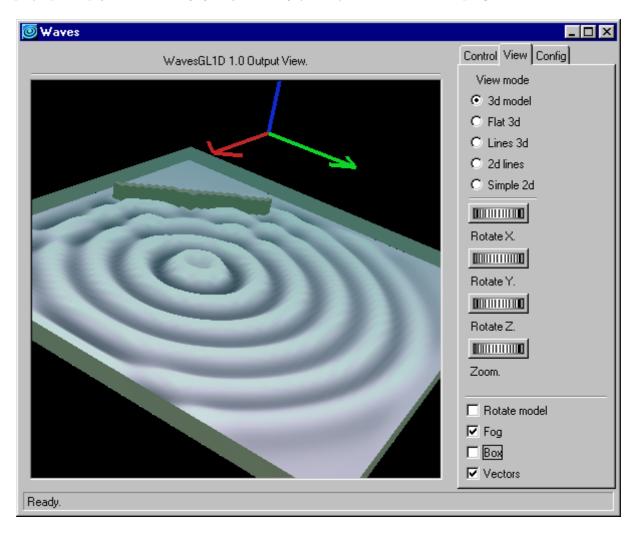
Już od początku powstawania program Waves w założeniu miał być bardzo efektowny i w efektowny (!) sposób przedstawiać podstawowe zjawiska fizyki fal takie jak rozchodzenie się impulsów falowych w dwóch wymiarach, interferencja czy dyfrakcja na szczelinach. Nie chodziło tu o badanie jakiś szczególnych właściwości zjawisk falowych, choć i do tego program może być po kilku małych modyfikacjach użyty, ale do ładnej i efektownej wizualizacji zjawisk falowych, które odpowiednio pokazane moga się podobać nawet nieobeznanym z fizyką (a chyba o to nam chodzi!). Bardzo ważnym (i co najważniejsze zrealizowanym) założeniem programu było jego działanie w czasie rzeczywistym. Cóż to oznacza dla użytkownika? Tyle, że nie musi czekać godzinami na efekt działania programu, obliczenia, efekty, czy ogladać gotowe animacje stworzone wcześniej. Działanie programu w czasie rzeczywistym oznacza tyle, że program rozwiązuje równanie falowe od razu je pokazując. Program liczy rozwiązanie na siatce różnicowej, tworzy model do wizualizacji, pokazuje go i tak cały czas. Dlatego też użytkownik programu może dokonywać ingerencji w rozwiązanie równania falowego również w trakcie jego działania!

#### 3.4 Interfejs użytkownika

Interfejs użytkownika programu "Waves" jest raczej prosty i starałem się go nie udziwniać, ani nie rozdmuchiwać do niewiarygodnych rozmiarów. Nie zależało mi na stworzeniu jakiegoś strasznie dużego programu, który mógłby potencjalnego użytkownika przerazić mnogością opcji. Starałem się w programie zamieścić opcje najbardziej potrzebne i jak najprostsze. W dalszej części przedstawiam opcje programu wraz z komentarzem co do czego służy.

#### 3.4.1 Ekran główny

Na rysunku (5) pokazane jest okno główne programu Waves. Po stronie lewej znajduje się view port do pokazywania grafiki. Po stronie prawej na zrzutce widać zakładki z opcjami, których oopis znajduje się poniej. Program ma raczej prostą i prejrzystą strukturę interfejsu użytkownika. dla oszczędności miejsca przy opisie opcji z zakładek będą znajdować się tylko wycinki z całości okna programu.



Rysunek 5: Okno główne programu.

#### 3.4.2 Zakładka "Control"

Obok na rysunku (6) znajduje się część okna programu "Waves" z opcjami zakładki "Control".



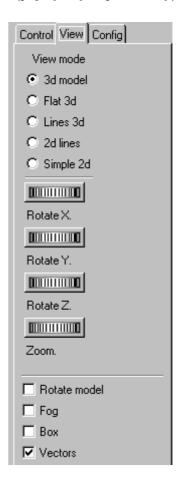
Rysunek 6: Opcje "Control" programu Waves.

opis poszczególnych komend: **Pause** - zatrzymuje działanie programu. W rzeczywistości zatrzymuje tylko jego część obliczeniową - część wizualizacyjna nadal działa i zatrzymaną "klatkę" z animacji przedstawiającej falę nadal można oglądać z każdej strony, obracać itp. **Continue** - kontynuacja zatrzymanego przez **Pause** programu. **About** - kilka pożytecznych (lub nie) informacji. **Quit** - kończy działanie programu.

#### 3.4.3 Zakładka "View"

Na rysunku (7) znajduje się druga zakładka programu - tu opcji jest więcej i służą one do zmiany sposobu wizualizacji graficznej rozwiązania równania falowego na ekranie komputera. Opcji jest dość dużo, ale nie są zbyt skomplikowane. Ich działanie

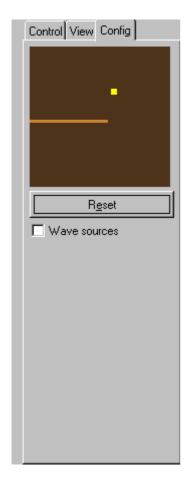
przedstawione zostanie na jednym przykładowym rozwiązaniu (pojedynczy impuls falowy).



Rysunek 7: Opcje "Control" programu Waves.

Grupa "View Mode" to główny, nadrzędny sposób wyświetlania grafiki.

3d model (rysunek 9) - opcja standardowo wybierana przy starcie programu, trójwymiarowy model stworzony na mapie wychyleń przetrzymywanych w tablicy dwuwymiarowej. Model ten składa się z trójkatów i jest dynamicznie tworzony i wyświetlany w trakcie działania programu. Oprócz tego na model nałożony jest kolor zależny od wychylenia w danym miejscu na siatce. Cieniowanie jest realizowane sprzetowo przez karte graficzną. Flat 3d (rysunek 10) - to samo co poprzednio, ale wizualizacja bez płynnej zmiany kolorów - czasem lepiej widać charakter rozwiązania przy tym sposobie wizualizacji. Lines 3d (rysunek 11)- pozwala dokładnie obejrzeć stworzony model trójwymiarowy, rysowane są tylko krawędzie stworzonego modelu w trzech wymiarach. 2d Lines (rysunek 12) - rysuje



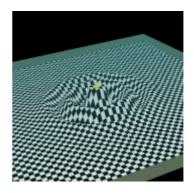
Rysunek 8: Opcje "Config" programu Waves.

model dwuwymiarowy przy pomocy linii, wychylenie w kierunku osi y (efekt pseudotrójwymiarowy). Simple 2d (rysunek 13) - prosta wizualizacja dwuwymiarowa - wychylenie pokazywane jest przy pomocy zmiany jasności punktów (im jaśniej - tym większe wychylenie).

Suwaki Rotate oraz Zoom służą do orientacji modelu trójwymiarowego w przestrzeni. Można dowolnie obracać, powiększać pokazywany model także w trakcie działania programu. Następne cztery opcje służą do ustawień efektów w wizualizacji trójwymiarowego modelu. Rotate Model - automatycznie obraca model wokół osi y - przydatne do prezentacji. Fog - włącza i wyłącza efekt mgły (to tylko dla wizualizacji w trzech wymiarach). Box - włącza i wyłącza otaczający model trójwymiarowy sześcian - uwaga! po włączeniu tej opcji prawie na pewno trzeba będzie modelem poobracać, bo sześcian ma tylko dwie usunięte ściany i może zasłonić model. Vectors - włącza i wyłącza wektory widocz-



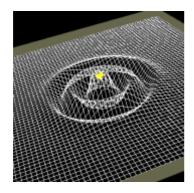
Rysunek 9: Opcja 3d model.



Rysunek 10: Opcja Flat 3d.

ne nad modelem trójwymiarowym - pozwala zorientować sie co do orientacji układu współrzednych.

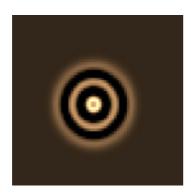
Opcje w zakładce "Config" służą do definiowania geometrii, oraz rozkładu źródeł fal. Edycja ta nie jest trudna i wykonuje się ją na widocznym na rysunku (8) pomniejszonym oknie pokazującym rzut dwuwymiarowy tablicy konfiguracyjnej. Brzegi definiuje się przy pomocy myszki podobnie jak przy rysowaniu linii w programach graficznych. Po narysowaniu brzegu program zapyta, czy chcemy go dodać do naszej konfiguracji. Do rysowania komórek brzegowych używa się w programie lewego przycisku myszki. Przycisk prawy jest zarezerwowany do ustawiania źródeł punktowych fali, przy pomocy których można również wprowadzić do programu źródła dla fal podłużnych ustawiając źródła punktowe obok siebie. Wave sources - włącza i wyłącza źródła fal - opcja wygodna przy dodawaniu nowych źródeł, które startują dopiero przy włączonej opcji Wave sources. Funkcja Reset służy do wymazania bieżącej konfiguracji programu.



Rysunek 11: Opcja Lines3d.



Rysunek 12: Opcja 2d Lines.

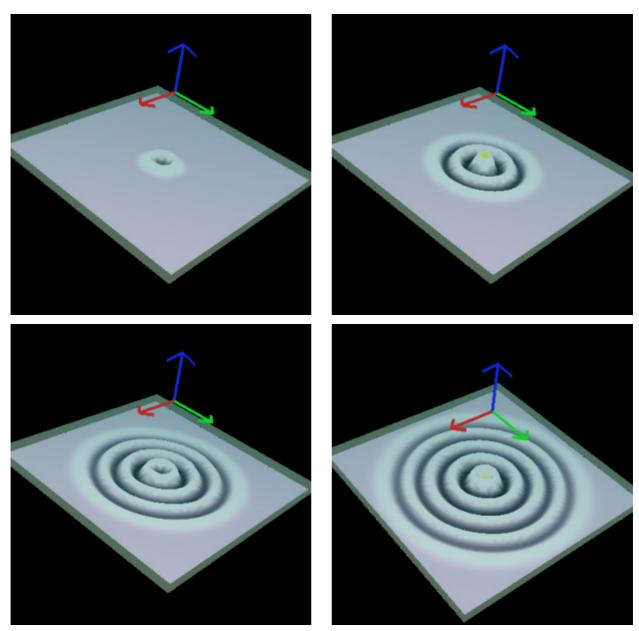


Rysunek 13: Opcja Simple 2d.

# 3.5 Efekty działania programu Waves

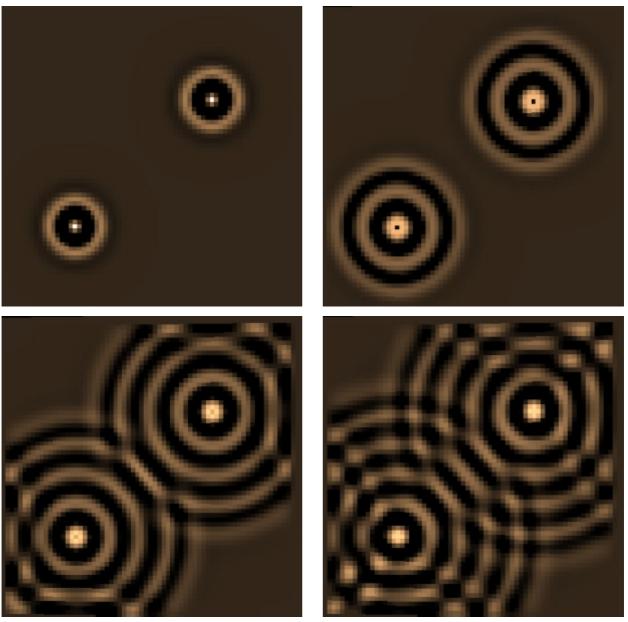
Poniżej przedstawiam efekty działania programu dla różnych konfiguracji przestrzennych źródeł, komórek brzegowych oraz różnych sposobów konfiguracji sposobów wizualizacji otrzymanych danych.

#### 3.5.1 Pojedynczy impuls falowy



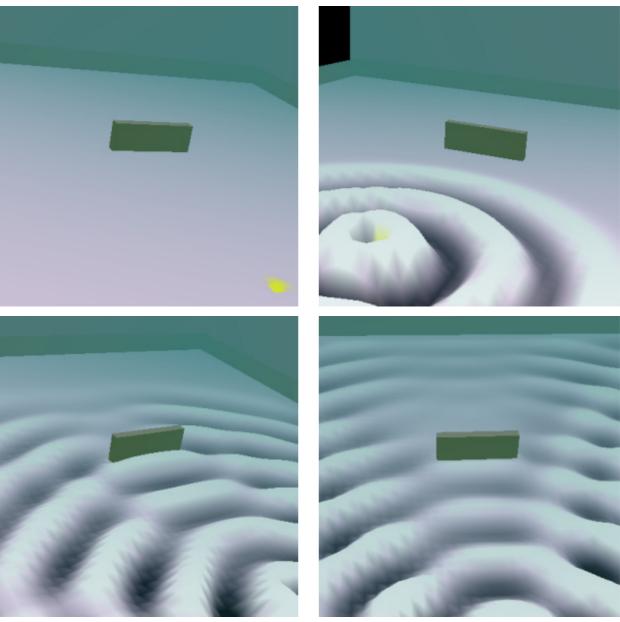
Rozchodzenie się impulsu falowego w dwóch wymiarach. Propagacja impulsu powoduje zmniejszanie się amplitudy wychyleń fali (energia), co widać dokładnie w modelu trójwymiarowym.

# 3.5.2 Interferencja fali pochodzącej z dwóch źródeł



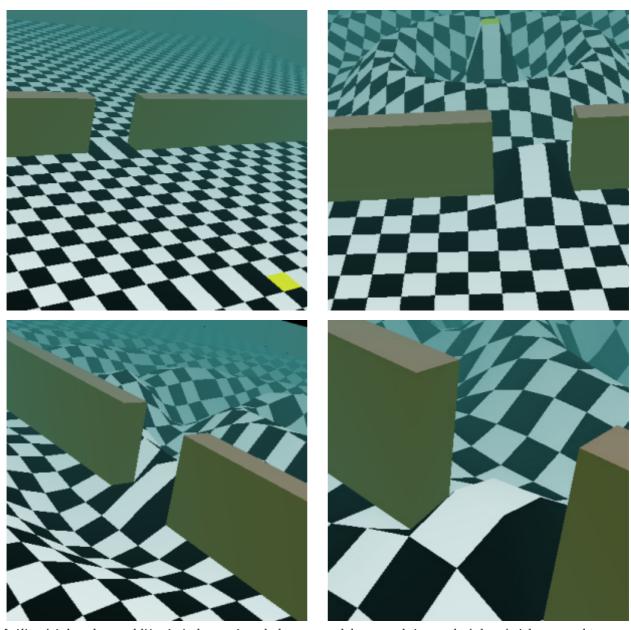
Interferencja fal mających źródło w dwóch punktach przedstawione w formie dwuwymiarowej kolor-wychylenie.

# 3.5.3 Dyfrakcja na przeszkodzie



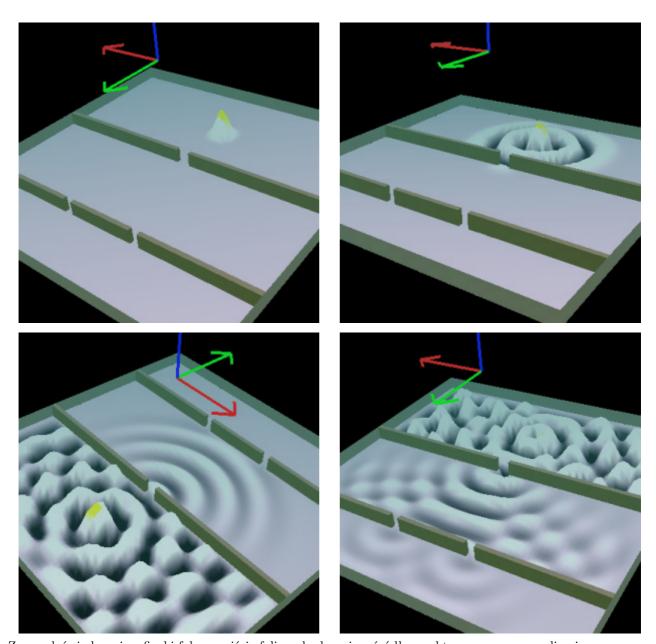
Rozmiary przeszkody są niewielkie w porównaniu do długości przeszkody, dlatego dyfrakcja jest nieznaczna, ale widoczna.

# 3.5.4 Dyfrakcja na szczelinie



Możliwości dowolnego zbliżania i obracania oglądanego modelu pozwalają uzyskać dosyć ciekawe punkty widzenia dla wizualizacji.

#### 3.5.5 Doświadczenie Younga



Znane doświadczenie z fizyki fal - przejście fali pochodzącej ze źródła punktowego przez szczelinę i przez dwie szczeliny. W przykładzie tym trochę lepiej niż poprzednio widać dyfrakcję na szczelinach.

#### 4 Podsumowanie

Kończąc chciałbym raz jeszcze podziękować wszystkim tym, którzy pomogli mi w kilku kwestiach z programem związanych. Dla wszystkich zainteresowanych rozwojem programu podaję adres kontaktowy: maq@panoramix.ift.uni.wroc.pl

Życzę owocnej pracy z programem!

# Literatura

- [1] David Potter 'Metody obliczeniowe fizyki', PWN 1982.
- [2] Frank S. Crawford Jr, 'Fale'.
- [3] Ryszard Gryboś, 'Podstawy mechaniki płynów' (Tom 1 i 2), PWN 1998.
- [4] J. Welch, F. Harlow, J. Shannon, 'The Splash of Liquid Drop', Journal of Applied Physics (Vol. 38, No.10 Sept. 1967).