



多旋翼飞行器设计与控制

第八讲 可观性和卡尔曼滤波

全权 副教授

qq_buaa@buaa.edu.cn

自动化科学与电气工程学院

北京航空航天大学

2016年4月28日 北航主南401



北航可靠飞行控制研究组

BUAA Reliable Flight Control Group



前言

东方哲理：可观性对应的哲学道理是：观察问题是否客观全面。宋代苏轼诗词《题西林壁》的“横看成岭侧成峰,远近高低各不同。不识庐山真面目,只缘身在此山中”。这首诗描写了庐山变化多姿的面貌,并借景说理,指出观察问题应客观全面,如果主观片面,就得不出正确的结论。中国古代还有盲人摸象的故事。盲人都说自己摸到的才是大象真正的样子。而实际上呢?他们一个也没说对。后以“盲人摸象”比喻看问题以偏概全。图片:盲人摸象,来自<http://arkeke.blog.163.com/blog/static/2200920100220729757/>





前言

什么是可观性？ 如何设计卡尔曼滤波器？



大纲

1. 可观性
2. 卡尔曼滤波
3. 多速率采样卡尔曼滤波
4. 扩展卡尔曼滤波
5. 应用实例
6. 总结
7. 作业





1. 可观性

可观性就是回答“状态的变化能否由输出反映出来”

中医“望闻问切”
是否能瞧病？



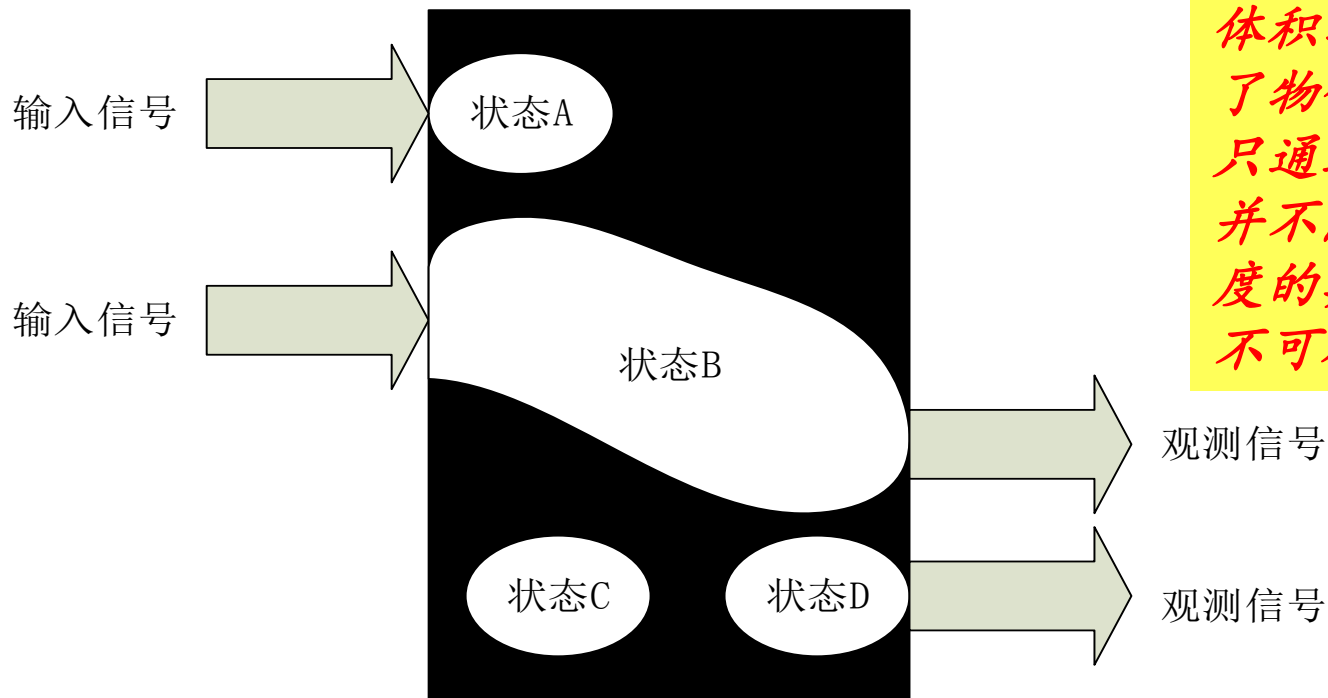
网络大数据作为输出，能否观测
更有价值信息？



三个关键词：动态系统、状态、输出



1. 可观性



体积与密度共同决定了物体的重量，但是只通过观测重量我们并不能知道体积与密度的具体数值，因此不可观。

黑箱系统

对于一个系统，根据输入与观测的关系，系统状态存在上图几种情况
状态A和状态C信息完全不会被出现在观测量中，根据观测信号不可能知道它们内部变化情况，因此肯定不可观；虽然状态B和状态D的变化会在观测信号中体现，但是根据有限的观测结果并不一定能将所有内部完全观测出来



1. 可观性

□ 连续线性系统

(1) 定义

考虑如下连续线性系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}^T \mathbf{x}$$

其中 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m, \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}, \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n \times m}$

定义1. 如果在有限时间间隔 $t_0 \leq t \leq t_f$ 内, 根据输出值 $\mathbf{y}(t)$ 和给定值 $\mathbf{u}(t)$, 能够确定系统的初始状态 $\mathbf{x}(t_0)$ 的每一个分量, 那么称此系统是完全可以观的, 简称可观测。

三个关键词: 动态系统、状态、输出



1. 可观性

□ 连续线性系统

(2) 直观解释

由系统方程可知

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}^T \mathbf{x}$$

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{C}^T \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{C}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{C}^T \mathbf{B} \mathbf{u} \Rightarrow \dot{\mathbf{y}} - \mathbf{C}^T \mathbf{B} \mathbf{u} = \mathbf{C}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$$

$$\ddot{\mathbf{y}} = \mathbf{C}^T \mathbf{A}^2 \mathbf{x} + \mathbf{C}^T \mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{u} + \mathbf{C}^T \mathbf{B} \dot{\mathbf{u}} \Rightarrow \ddot{\mathbf{y}} - \mathbf{C}^T \mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{u} - \mathbf{C}^T \mathbf{B} \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{C}^T \mathbf{A}^2 \mathbf{x}$$

\vdots

$$\mathbf{y}^{(n-1)} - \sum_{k=0}^{n-2} \mathbf{C}^T \mathbf{A}^{n-2-k} \mathbf{B} \mathbf{u}^{(k)} = \mathbf{C}^T \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{x}$$



$$\begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \dot{\mathbf{y}} - \mathbf{C}^T \mathbf{B} \mathbf{u} \\ \vdots \\ \mathbf{y}^{(n-1)} - \sum_{k=0}^{n-2} \mathbf{C}^T \mathbf{A}^{n-2-k} \mathbf{B} \mathbf{u}^{(k)} \end{bmatrix} = \mathbf{O}_v \mathbf{x} \quad \text{其中} \quad \mathbf{O}_v = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^T \\ \mathbf{C}^T \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{C}^T \mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix}$$

为什么不多求
几阶导数？如：

$$\mathbf{O}'_v = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_v \\ \mathbf{C}^T \mathbf{A}^n \end{bmatrix}$$



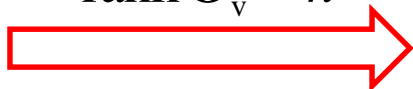
1. 可观性

□ 连续线性系统

(3) 定理

进一步

$$\text{rank } \mathbf{O}_v = n$$



$$\mathbf{x} = \mathbf{O}_v^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \dot{\mathbf{y}} - \mathbf{C}^T \mathbf{B} \mathbf{u} \\ \vdots \\ \mathbf{y}^{(n-1)} - \sum_{k=0}^{n-2} \mathbf{C}^T \mathbf{A}^{n-2-k} \mathbf{B} \mathbf{u}^{(k)} \end{bmatrix}$$

利用此方程可以通过历史观测值 \mathbf{y} 逆向唯一求解出状态 \mathbf{x}

定理1. 系统 $\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}^T \mathbf{x} \end{cases}$ 可观测的充分必要条件 $\text{rank } \mathbf{O}_v = n$ 。



1. 可观性

□ 连续线性系统

(4) 例子

例1. 给出两个传感器**GPS**和**加速度计**，那么哪一个能够稳定地估计出多旋翼速度？

- **GPS**。为了简化起见，我们用GPS观测位置，一般用如下模型

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \varepsilon \end{bmatrix}$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C^T} \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix}$$

$y=x$ ，故位置状态 x 可通过输出 y 直接求导得到，需要估计的是速度状态 v

$$O_v = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

可观！
能够稳定地
估计多旋翼速度

其中 $x, v \in \mathbb{R}$ 分别表示位置和速度， $\varepsilon \in \mathbb{R}$ 表示已知统计特性的噪声。



1. 可观性

□ 连续线性系统

(4) 例子

例1. 给出两个传感器**GPS**和**加速度计**，那么哪一个能够稳定地估计出多旋翼速度？

- **加速度计**。为了简化起见，用加速度计估计速度，一般用如下模型

$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \varepsilon \end{bmatrix}$$
$$a = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ a \end{bmatrix}$$



$$\mathbf{O}_v = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**不可观！
不能够稳定地
估计多旋翼速度**

其中 $v, a \in \mathbb{R}$ 分别表示速度和加速度， $\varepsilon \in \mathbb{R}$ 表示已知统计特性的噪声。



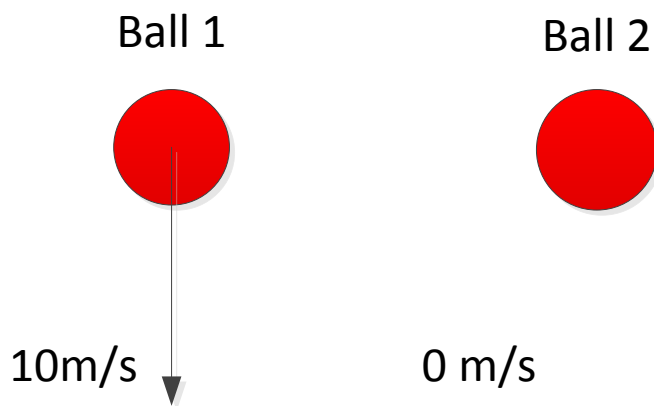
1. 可观性

□ 连续线性系统

(4) 例子

例1. 给出两个传感器**GPS**和**加速度计**，那么哪一个能够稳定地估计出多旋翼速度？

- **加速度计。**



两个自由落体的小球
加速度一样，但是初
始速度不一样。无法从
输出（加速度），观测出
小球初始速度（状态）。
不可观。



1. 可观性

□ 离散线性系统

(1) 定义

对于连续线性系统，可以通过采样周期 T_s 精确地将连续系统转化成离散系统。将连续系统模型转换成如下离散采样线性系统

$$\mathbf{x}_k = \Phi \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{u}_{k-1}$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}^T \mathbf{x}_k$$

其中 $\Phi = e^{A T_s}$, $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}'_{k-1}$, $t \in [(k-2)T_s, (k-1)T_s]$, $\mathbf{u}_{k-1} = \int_0^{T_s} e^{A s} \mathbf{B} ds \cdot \mathbf{u}'_{k-1}$

定义2. 如果在有限时间间隔 NT_s 内，根据输出值 \mathbf{y}_k 和外界输入值 \mathbf{u}_k ，能够确定系统的初始状态 \mathbf{x}_0 的每一个分量，那么称此系统是完全可观的，简称**可观测**。



1. 可观性

□ 离散线性系统

(2) 直观解释

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_0 &= \mathbf{C}^T \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}_1 &= \mathbf{C}^T \mathbf{x}_1 = \mathbf{C}^T \Phi \mathbf{x}_0 + \mathbf{C}^T \mathbf{u}_0 \Rightarrow \mathbf{y}_1 - \mathbf{C}^T \mathbf{u}_0 = \mathbf{C}^T \Phi \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}_2 &= \mathbf{C}^T \mathbf{x}_2 = \mathbf{C}^T \Phi \mathbf{x}_1 + \mathbf{C}^T \mathbf{u}_1 \Rightarrow \mathbf{y}_2 - \mathbf{C}^T \mathbf{u}_1 - \mathbf{C}^T \Phi \mathbf{u}_0 = \mathbf{C}^T \Phi^2 \mathbf{x}_0 \\ &\vdots \\ \mathbf{y}_n - \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{C}^T \Phi^{n-1-k} \mathbf{u}_k &= \mathbf{C}^T \Phi^n \mathbf{x}_0 \end{aligned}$$



$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}_0 \\ \mathbf{y}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{n-1} - \sum_{k=0}^{n-2} \mathbf{C}^T \Phi^{n-2-k} \mathbf{u}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^T \\ \mathbf{C}^T \Phi \\ \vdots \\ \mathbf{C}^T \Phi^{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{x}_0$$

(3) 定理

定理2. 系统

$$\mathbf{x}_k = \Phi \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{u}_{k-1}$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}^T \mathbf{x}_k$$

可观测的充分必要条件是

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{C}^T \\ \mathbf{C}^T \Phi \\ \vdots \\ \mathbf{C}^T \Phi^{n-1} \end{bmatrix} = n$$



2. 卡尔曼滤波

The Kalman Filter
1959



The Kalman Filter (with music). From <https://www.youtube.com/watch?v=aNzGCMRnvXQ>





2. 卡尔曼滤波

□ 概述

卡尔曼滤波是一种递推线性最小方差估计算法。它的最优估计需满足以下三个条件：

1) 无偏性：即估计值的期望等于状态的真值；

若 $E(\hat{g}) = g$ ，那么意味着 \hat{g} 是参数 g 的无偏估计，否则为有偏估计，其中 $E(\cdot)$ 表示期望。

2) 估计的方差最小；

若 $D(\hat{g}) = E\left(\left(\hat{g} - g\right)^2\right)$ ，如果对于任意一个估计 \tilde{g} ，我们有 $D(\hat{g}) \leq D(\tilde{g})$ ，那么称 \hat{g} 为最小方差估计，其中 $D(\cdot)$ 表示方差。

3) 实时性。



2. 卡尔曼滤波

□ 模型描述

假设线性离散系统模型如下：

$$\mathbf{x}_k = \Phi_{k,k-1} \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{u}_{k-1} + \Gamma_{k,k-1} \mathbf{w}_{k-1}$$

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k$$

式中，过程噪声 \mathbf{w}_{k-1} 和观测噪声 \mathbf{v}_k 的统计特性为

自相关系数 $\mathbf{R}_{\mathbf{w}\mathbf{w}}$

互相关系数 $\mathbf{R}_{\mathbf{w}\mathbf{v}}$

系统噪声方差阵 $\mathbf{Q}_k \geq \mathbf{0}$

观测噪声方差阵 $\mathbf{R}_k > \mathbf{0}$

克罗内克 δ 函数

$$\delta_{kj} = \begin{cases} 1, & k = j \\ 0, & k \neq j \end{cases}$$

$$E(\mathbf{w}_{k-1}) = \mathbf{0}, E(\mathbf{v}_k) = \mathbf{0}, \mathbf{R}_{\mathbf{w}\mathbf{v}}(k, j) = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{R}_{\mathbf{w}\mathbf{w}}(k, j) = E(\mathbf{w}_k \mathbf{w}_j^T) = \mathbf{Q}_k \delta_{kj} = \begin{cases} \mathbf{Q}_k, & k = j \\ \mathbf{0}, & k \neq j \end{cases}$$

$$\mathbf{R}_{\mathbf{v}\mathbf{v}}(k, j) = E(\mathbf{v}_k \mathbf{v}_j^T) = \mathbf{R}_k \delta_{kj} = \begin{cases} \mathbf{R}_k, & k = j \\ \mathbf{0}, & k \neq j \end{cases}$$

独立不相关



2. 卡尔曼滤波

□ 模型描述

假设线性离散系统模型如下：

$$\mathbf{x}_k = \Phi_{k,k-1} \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{u}_{k-1} + \Gamma_{k,k-1} \mathbf{w}_{k-1}$$

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k$$

初始状态 \mathbf{x}_0 的统计特性为

$$E(\mathbf{x}_0) = \hat{\mathbf{x}}_0, \text{cov}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{P}_0$$

其中, $\text{cov}(\cdot)$ 表示协方差

还假设状态的初始值 $\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_k$ 与 $\mathbf{w}_{k-1}, \mathbf{v}_k, k \geq 1$, 均不相关, 并且噪声向量 \mathbf{w}_{k-1} 与 \mathbf{v}_k 也不相关, 即有:

$$\mathbf{R}_{\mathbf{xw}}(0, k) = E(\mathbf{x}_0 \mathbf{w}_k^T) = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{R}_{\mathbf{xv}}(0, k) = E(\mathbf{x}_0 \mathbf{v}_k^T) = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{R}_{\mathbf{uw}}(k, j) = E(\mathbf{u}_k \mathbf{w}_j^T) = \mathbf{0}$$

独立不相关



2. 卡尔曼滤波

□ 卡尔曼滤波推导思路

假设线性离散系统模型如下：

$$\mathbf{x}_k = \Phi_{k,k-1} \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{u}_{k-1} + \Gamma_{k,k-1} \mathbf{w}_{k-1}$$

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k$$

目的：假设滤波器形式

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \mathbf{K}'_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} + \mathbf{K}_k \mathbf{z}_k + \mathbf{K}''_k \mathbf{u}_{k-1}$$

其中 $\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}$ 是 \mathbf{x}_{k-1} 的最优线性估计（**最小方差无偏估计**）。求

$$\mathbf{K}'_k, \mathbf{K}_k, \mathbf{K}''_k$$

使得 $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$ 是 \mathbf{x}_k 的最优线性估计。



2. 卡尔曼滤波

□ 卡尔曼滤波推导思路

第一步：求 K'_k, K''_k 使得 $\hat{x}_{k|k}$ 是 x_k 的无偏估计

因为

$$\tilde{x}_{k|k} = x_k - \hat{x}_{k|k}$$

$$\begin{aligned} &= K'_k \tilde{x}_{k-1|k-1} + \left(\Phi_{k,k-1} - K_k H_k \Phi_{k,k-1} - K'_k \right) x_{k-1} \\ &\quad + \left(\Gamma_{k,k-1} - K_k H_k \Gamma_{k,k-1} \right) w_{k-1} + \left(I - K_k H_k - K''_k \right) u_{k-1} - K_k v_k \end{aligned}$$

又因为要求 $E(\tilde{x}_{k|k}) = 0$ ，又已知 $E(\tilde{x}_{k-1|k-1}) = 0, E(v_k) = 0, E(w_{k-1}) = 0$

不能要求 $E(x_{k-1}) = 0, E(u_{k-1}) = 0$ ，那么只能让

$$\Phi_{k,k-1} - K_k H_k \Phi_{k,k-1} - K'_k = 0$$

$$I - K_k H_k - K''_k = 0$$

$$\begin{cases} K'_k = \Phi_{k,k-1} - K_k H_k \Phi_{k,k-1} \\ K''_k = I - K_k H_k \end{cases}$$



2. 卡尔曼滤波

□ 卡尔曼滤波推导思路

第一步：求 K'_k, K''_k 使得 $\hat{x}_{k|k}$ 是 x_k 的无偏估计

$$\begin{aligned} \Phi_{k,k-1} - K_k H_k \Phi_{k,k-1} - K'_k &= 0 \\ I - K_k H_k - K''_k &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} K'_k = \Phi_{k,k-1} - K_k H_k \Phi_{k,k-1} \\ K''_k = I - K_k H_k \end{cases}$$



$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + K_k (z_k - \hat{z}_{k|k-1})$$

物理意义？

其中 $\hat{x}_{k|k-1} = \Phi_{k,k-1} \hat{x}_{k-1|k-1} + u_{k-1}, \hat{z}_{k|k-1} = H_k \hat{x}_{k|k-1}$

$$\begin{bmatrix} \text{状态} \\ \text{更新值} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{状态} \\ \text{预测值} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{卡尔曼} \\ \text{增益} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{新息} \\ \text{矢量} \end{bmatrix}$$





2. 卡尔曼滤波

□ 卡尔曼滤波推导思路

第二步：求 \mathbf{K}_k 使得 $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$ 是 \mathbf{x}_k 的**最小方差估计**

也就是求解优化问题

$$\min_{\mathbf{K}_k} \text{tr} \mathbf{P}_{k|k} = \min_{\mathbf{K}_k} E \left(\text{tr} \left(\tilde{\mathbf{x}}_{k|k} \tilde{\mathbf{x}}_{k|k}^T \right) \right)$$

这里
$$\mathbf{P}_{k|k} = (\mathbf{I} - \underline{\mathbf{K}}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_{k|k-1} (\mathbf{I} - \underline{\mathbf{K}}_k \mathbf{H}_k)^T + \underline{\mathbf{K}}_k \mathbf{R}_k \underline{\mathbf{K}}_k^T$$

其中
$$\mathbf{P}_{k|k-1} = E \left(\tilde{\mathbf{x}}_{k|k-1} \tilde{\mathbf{x}}_{k|k-1}^T \right)$$

进一步可以得到 **当作已知**

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \Phi_{k,k-1} \mathbf{P}_{k-1|k-1} \Phi_{k,k-1}^T + \Gamma_{k,k-1} \mathbf{Q}_{k-1} \Gamma_{k,k-1}^T$$



2. 卡尔曼滤波

□ 卡尔曼滤波推导思路

第二步：求 K_k 使得 $\hat{x}_{k|k}$ 是 x_k 的**最小方差估计**

也就是求解优化问题

$$\min_{K_k} \text{tr} P_{k|k} = \min_{K_k} E \left(\text{tr} \left(\tilde{x}_{k|k} \tilde{x}_{k|k}^T \right) \right)$$

➡
$$\frac{d}{dK_k} \text{tr}(P_{k|k}) = -2P_{k|k-1}^T H_k^T + 2K_k (H_k P_{k|k-1} H_k^T + R_k) = 0$$

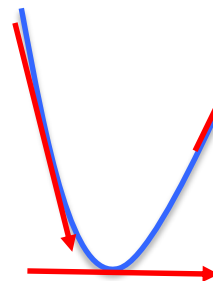
➡
$$K_k = P_{k|k-1} H_k^T (H_k P_{k|k-1} H_k^T + R_k)^{-1}$$

$H_k P_{k|k-1} H_k^T + R_k$ 正定矩阵

➡
$$P_{k|k} = (I - K_k H_k) P_{k|k-1}$$

物理意义？

一般极值在导数为零处求得



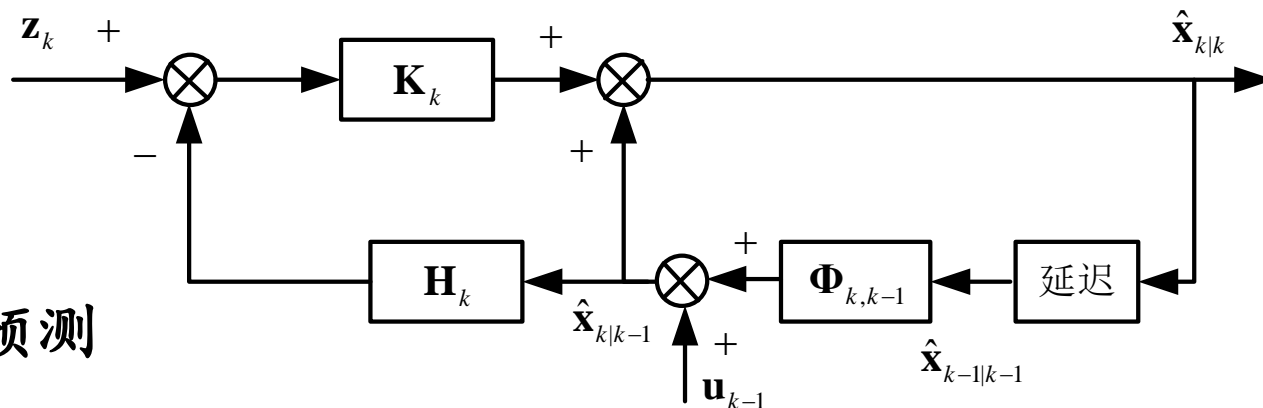
$$\frac{d}{dA} \text{tr}(ABA^T) = 2AB$$

其中 $B = B^T$, B 是对称阵.



2. 卡尔曼滤波

□ 卡尔曼滤波算法总结



1. 状态预测

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \Phi_{k,k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} + \mathbf{u}_{k-1}$$

2. 误差协方差预测

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \Phi_{k,k-1} \mathbf{P}_{k-1|k-1} \Phi_{k,k-1}^T + \Gamma_{k,k-1} \mathbf{Q}_{k-1} \Gamma_{k,k-1}^T$$

3. 卡尔曼滤波增益

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1}$$

4. 状态估计校正

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k (\mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1})$$

$$\text{其中 } \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1} = \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$$

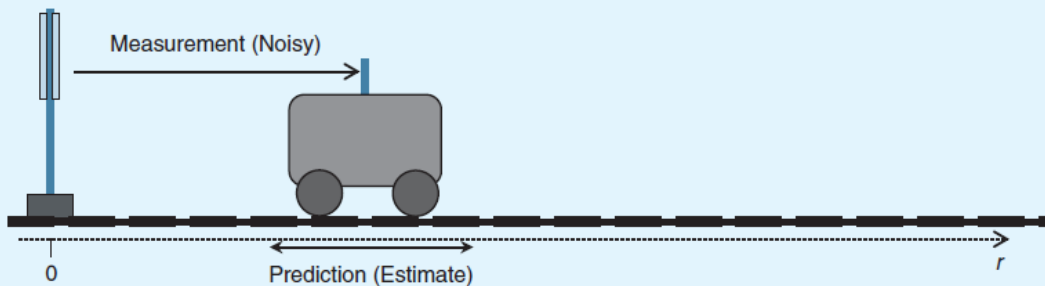
5. 误差协方差估计校正

$$\mathbf{P}_{k|k} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_{k|k-1}$$

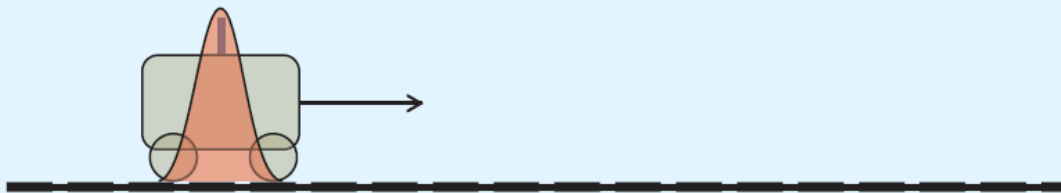


2. 卡尔曼滤波

□ 卡尔曼滤波算法总结



[FIG1] This figure shows the one-dimensional system under consideration.



[FIG2] The initial knowledge of the system at time $t = 0$. The red Gaussian distribution represents the pdf providing the initial confidence in the estimate of the position of the train. The arrow pointing to the right represents the known initial velocity of the train.

我们的估计只来自
两个方面的
组合：

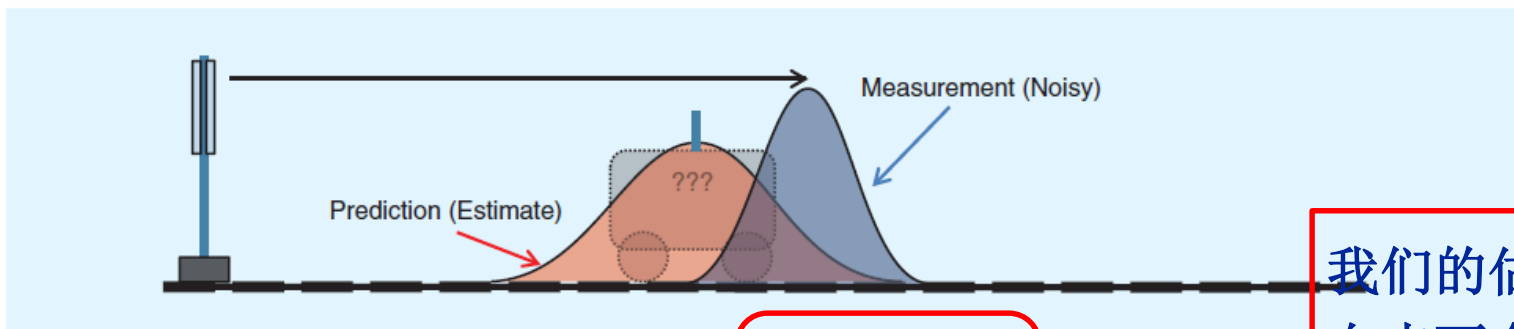
经验+测量

R. Faragher. Understanding the Basis of the Kalman Filter Via a Simple and Intuitive Derivation. IEEE Signal Processing Magazine, 2012, pp.128-132.



2. 卡尔曼滤波

□ 卡尔曼滤波算法总结

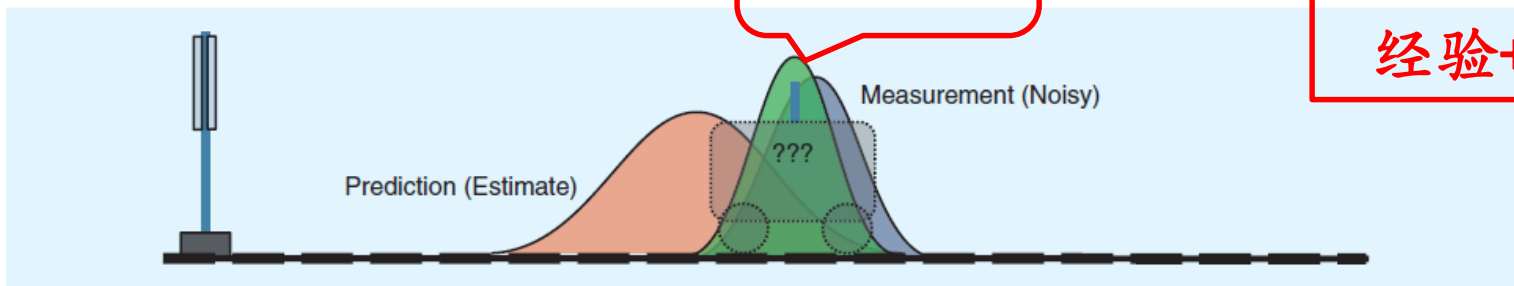


[FIG4] Shows the measurement of the location of the train at time $t = 1$ and the level of uncertainty in that noisy measurement, represented by the blue Gaussian pdf. The combined knowledge of this system is provided by multiplying these two pdfs together.

方差会变小

我们的估计只来自两个方面的组合：

经验+测量



[FIG5] Shows the new pdf (green) generated by multiplying the pdfs associated with the prediction and measurement of the train's location at time $t = 1$. This new pdf provides the best estimate of the location of the train, by fusing the data from the prediction and the measurement.

R. Faragher. Understanding the Basis of the Kalman Filter Via a Simple and Intuitive Derivation. IEEE Signal Processing Magazine, 2012, pp.128-132.



2. 卡尔曼滤波

□ 其他说明

(1) 一般来说, 采样周期合理情况下, 连续系统可观, 离散化的系统也会可观。然而有时候采样周期选择不当, 系统可能失去可控性及可观性。

(2) 卡尔曼滤波器是一种最优的观测器, 观测增益 K_k 是时变的。

(3) $H_k P_{k|k-1} H_k^T + R_k$ 需要是非奇异的, 否则 $K_k = P_{k|k-1} H_k^T (H_k P_{k|k-1} H_k^T + R_k)^{-1}$ 无法实现。

(4) 如果 $(\Phi_{k,k-1}, H_k)$ 不可观, 那么卡尔曼滤波器仍然可以运行, 只不过不可观的模态没有进行修正, 只是递推罢了。极端情况 $H_k = 0$, 那么 $K_k = 0$ 整个系统完全不可观, 那么

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \Phi_{k,k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} + \mathbf{u}_{k-1}$$

$$\mathbf{P}_{k|k} = \Phi_{k,k-1} \mathbf{P}_{k-1|k-1} \Phi_{k,k-1}^T + \Gamma_{k,k-1} \mathbf{Q}_{k-1} \Gamma_{k,k-1}^T$$



3. 多速率卡尔曼滤波

□ 模型

考虑一类多速率采样的线性离散系统：

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_k &= \Phi_{k,k-1} \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{u}_{k-1} + \Gamma_{k,k-1} \mathbf{w}_{k-1} \\ \mathbf{z}_k &= \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k\end{aligned}$$

其中：状态和噪声的定义与前面相同，不同在于传感器观测。假设系统基本采样周期为 T_0 ，两种不同传感器的采样周期分别为 $T_i (i=1,2)$ ，且 $T_i (i=1,2)$ 为 T_0 的整数倍，即 $T_i = n_i T_0, n_i \in \mathbb{N}$ 。它们测量矩阵为 $\mathbf{H}_{ik} \in \mathbb{R}^{m_i \times n}$ ，噪声方差阵 $\mathbf{R}_{ik} \in \mathbb{R}^{m_i \times m_i}$ （非奇异）， $i=1,2$ 。令 αT_0 表示各观测数据的采样周期的最小公倍数。当没有观测量时，我们认为 $\mathbf{H}_k = \mathbf{0}$ ，为了保证算法不发生奇异问题，方差阵设置为单位阵（只要不是0的常数阵都可以）。



3. 多速率卡尔曼滤波

□ 模型改进

考虑一类多速率采样的线性离散系统：

$$\mathbf{x}_k = \Phi_{k,k-1} \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{u}_{k-1} + \Gamma_{k,k-1} \mathbf{w}_{k-1}$$

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k$$

最终，观测阵 \mathbf{H}_k 以及观测噪声方差阵 \mathbf{R}_k 均以 αT_0 为周期变化，即

$$\mathbf{H}_k = \begin{cases} \mathbf{H}_{ik}, \text{if } \text{mod}(k, n_i) = 0 \ \& \ \text{mod}(k, \alpha) \neq 0 \\ \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{1k} \\ \mathbf{H}_{2k} \end{bmatrix}, \text{if } \text{mod}(k, \alpha) = 0 \\ \mathbf{0}, \quad \text{else} \end{cases} \quad \mathbf{R}_k = \begin{cases} \mathbf{R}_{ik}, \text{if } \text{mod}(k, n_i) = 0 \ \& \ \text{mod}(k, \alpha) \neq 0 \\ \text{diag}(\mathbf{R}_{1k}, \mathbf{R}_{2k}), \text{if } \text{mod}(k, \alpha) = 0 \\ \mathbf{I}, \quad \text{else} \end{cases}$$

在整个过程中，观测阵 \mathbf{H}_k 、观测噪声方差阵 \mathbf{R}_k 和观测量 \mathbf{z}_k 的维数在不断的变化，而 $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$ 和 $\mathbf{P}_{k|k}$ 会根据每一步的信息更新而更新。它的推导过程就与经典的卡尔曼滤波就相同了。



4. 扩展卡尔曼滤波

□ 模型描述

假设非线性离散系统模型如下：

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_k &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{w}_{k-1}) \\ \mathbf{z}_k &= \mathbf{h}(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k)\end{aligned}$$

将非线性函数 $\mathbf{f}(\cdot)$ 围绕次滤波值 $\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}$ 展开成Taylor级数的形式，并忽略二次以上的高阶项，得到

$$\begin{aligned}\mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{w}_{k-1}) &= \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{0}) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{w})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \mathbf{w}=\mathbf{0}} (\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}) \\ &\quad + \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{w})}{\partial \mathbf{w}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \mathbf{w}=\mathbf{0}} \mathbf{w}_{k-1}\end{aligned}$$





4. 扩展卡尔曼滤波

□ 模型描述

假设非线性离散系统模型如下：

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{w}_{k-1})$$

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{h}(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k)$$

类似地，非线性函数 $\mathbf{h}(\cdot)$ 在 $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$ 处的线性化值为

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k) = \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{0}) + \left. \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{v}=\mathbf{0}} (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) + \left. \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{v}=\mathbf{0}} \mathbf{v}_k$$



4. 扩展卡尔曼滤波

□ 模型描述

$$\Phi_{k,k-1} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{w})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \mathbf{w}=\mathbf{0}}$$

$$\mathbf{H}_k = \left. \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{v}=\mathbf{0}}$$

$$\Gamma_{k,k-1} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{w})}{\partial \mathbf{w}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \mathbf{w}=\mathbf{0}}$$

$$\mathbf{u}'_{k-1} = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{0}) - \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{w})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \mathbf{w}=\mathbf{0}} \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}$$

$$\mathbf{z}'_k = \mathbf{z}_k - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{0}) + \left. \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{v}=\mathbf{0}} \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$$

$$\mathbf{v}'_k = \left. \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{v}=\mathbf{0}} \mathbf{v}_k$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k &= \Phi_{k,k-1} \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{u}'_{k-1} + \Gamma_{k,k-1} \mathbf{w}_{k-1} \\ \mathbf{z}'_k &= \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}'_k \end{aligned}$$

其中 \mathbf{v}'_k 的统计特性为 $E(\mathbf{v}'_k) = \mathbf{0}$,

$$\mathbf{R}_{v'v'}(k, j) = E(\mathbf{v}'_k \mathbf{v}'_j^T) = \begin{cases} \mathbf{R}'_k, & k = j \\ \mathbf{0}, & k \neq j \end{cases}$$

其中

$$\mathbf{R}'_k = \left. \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{v}=\mathbf{0}} \mathbf{R}_k \left(\left. \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{v}=\mathbf{0}} \right)^T$$



5. 应用实例：基于单摄像机的多旋翼鲁棒位姿估计

□ 摘要

(1) 提出了一种考虑多旋翼运动特性的非线性匀速过程模型，以实现基于外部单目视觉的多旋翼准确和鲁棒位姿估计。

(2) 提出了一种可以处理任意数目点的特征点匹配方法和一种基于特征点匹配的扩展卡尔曼滤波方法。

(3) 实验表明在处理噪声和遮挡方面，文章所提的扩展卡尔曼滤波方法比传统的扩展卡尔曼滤波方法具有更好的鲁棒性。

该方法既适用于普通摄像机也适用于鱼眼摄像机。

- Qiang Fu, Quan Quan, Kai-Yuan Cai. Robust Pose Estimation for Multirotor UAVs Using Off-board Monocular Vision. IEEE Transactions on Automation Science and Engineering. (在审)



5. 应用实例

□过程模型1：非线性匀速过程模型

$$\dot{\mathbf{T}} = \mathbf{V}$$

$$\dot{\mathbf{V}} = \mathbf{R}(\boldsymbol{\Theta})(g + \varepsilon_1)\mathbf{e}_3 - g\mathbf{e}_3$$

$$\dot{\boldsymbol{\Theta}} = \mathbf{W}$$

$$\dot{\mathbf{W}} = \boldsymbol{\xi}$$

其中, $\mathbf{T} = [X, Y, Z]^T$, $\mathbf{V} = [V_x, V_y, V_z]^T$, $\mathbf{W} = [w_1, w_2, w_3]^T$ 分别为相对位置、速度和角速度向量; $\boldsymbol{\Theta} = [\theta, \varphi, \phi]^T$ 为相对姿态角; $\mathbf{R}(\boldsymbol{\Theta})$ 为由姿态角表示的旋转矩阵; ε_1 和 $\boldsymbol{\xi} = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3]^T$ 是高斯白噪声。



5. 应用实例

□过程模型1：非线性匀速过程模型

假设 T_s 表示采样时间，
采用一阶向后差分法，得
到用于卡尔曼滤波过程模型的离散形式：

$$X_k = X_{k-1} + T_s V_{x,k-1}$$

$$V_{x,k} = V_{x,k-1} + (T_s \cos \phi_{k-1} \sin \theta_{k-1} \cos \varphi_{k-1} + T_s \sin \phi_{k-1} \sin \varphi_{k-1})(g + \varepsilon_{1,k-1})$$

$$Y_k = Y_{k-1} + T_s V_{y,k-1}$$

$$V_{y,k} = V_{y,k-1} + (T_s \cos \phi_{k-1} \sin \theta_{k-1} \sin \varphi_{k-1} - T_s \sin \phi_{k-1} \cos \varphi_{k-1})(g + \varepsilon_{1,k-1})$$

$$Z_k = Z_{k-1} + T_s V_{z,k-1}$$

$$V_{z,k} = V_{z,k-1} - T_s g + T_s \cos \phi_{k-1} \cos \theta_{k-1} (g + \varepsilon_{1,k-1})$$

$$\theta_k = \theta_{k-1} + T_s w_{1,k-1}$$

$$w_{1,k} = w_{1,k-1} + T_s \varepsilon_{2,k-1}$$

$$\varphi_k = \varphi_{k-1} + T_s w_{2,k-1}$$

$$w_{2,k} = w_{2,k-1} + T_s \varepsilon_{3,k-1}$$

$$\phi_k = \phi_{k-1} + T_s w_{3,k-1}$$

$$w_{3,k} = w_{3,k-1} + T_s \varepsilon_{4,k-1}$$



5. 应用实例

□过程模型1：非线性匀速过程模型

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{\Gamma}(\mathbf{x}_{k-1})\boldsymbol{\varepsilon}_{k-1}$$

其中 $\mathbf{x}_k = [X_k \ V_{x,k} \ Y_k \ V_{y,k} \ Z_k \ V_{z,k} \ \theta_k \ w_{1,k} \ \phi_k \ w_{2,k} \ \psi_k \ w_{3,k}]^T \in \mathbb{R}^{12}$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{k-1} = [\varepsilon_{1,k-1} \ \varepsilon_{2,k-1} \ \varepsilon_{3,k-1} \ \varepsilon_{4,k-1}]^T \in \mathbb{R}^4$$

$$\mathbf{\Gamma}(\mathbf{x}_{k-1}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ T_s \cos \phi_{k-1} \sin \theta_{k-1} \cos \varphi_{k-1} + T_s \sin \phi_{k-1} \sin \varphi_{k-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ T_s \cos \phi_{k-1} \sin \theta_{k-1} \sin \varphi_{k-1} - T_s \sin \phi_{k-1} \cos \varphi_{k-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ T_s \cos \phi_{k-1} \cos \theta_{k-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_s \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{12 \times 4}$$

噪声向量
维数：4



5. 应用实例

□过程模型2：线性匀速过程模型

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}\mathbf{x}_{k-1} + \boldsymbol{\gamma}_{k-1}$$

其中 $\mathbf{x}_k = [X_k \quad V_{x,k} \quad Y_k \quad V_{y,k} \quad Z_k \quad V_{z,k} \quad \theta_k \quad w_{1,k} \quad \varphi_k \quad w_{2,k} \quad \phi_k \quad w_{3,k}]^T \in \mathbb{R}^{12}$

$$\boldsymbol{\gamma}_{k-1} = [0 \quad \gamma_{k-1}^1 \quad 0 \quad \gamma_{k-1}^2 \quad 0 \quad \gamma_{k-1}^3 \quad 0 \quad \gamma_{k-1}^4 \quad 0 \quad \gamma_{k-1}^5 \quad 0 \quad \gamma_{k-1}^6]^T \in \mathbb{R}^{12}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & T_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & T_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & T_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & T_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & T_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & T_s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{12 \times 12}$$

噪声向量
维数：6



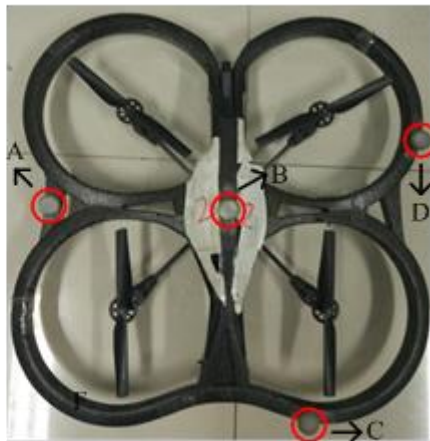
5. 应用实例

□ 观测模型（此处细节简化）

如果3D-2D的特征匹配点 $P_j \leftrightarrow p_j$ 已知的情况下，描述输出观测和系统状态之间关系的观测模型为



(a)



(b)

图：(a)单摄像机下，不同坐标系的说明；
(b)四旋翼和固定在其上面的四个反光标识点

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{g}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k$$

其中 $\mathbf{z}_k = [u_1^i \ v_1^i \ \dots \ u_{n_F}^i \ v_{n_F}^i]^T \in \mathbb{R}^{2n_F}$ 是 n_F 个特征点组成的观测向量。 \mathbf{v}_k 是观测噪声向量，假设其中的每个元素是独立同分布且均值为零、方差为 \mathbf{R}_i 的高斯白噪声。



5. 应用实例

□ EKF方程

采用非线性匀速过程模型和观测模型，其EKF预测和校正方程为：

$$\hat{\mathbf{x}}_{k,k-1} = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1,k-1})$$

$$\mathbf{P}_{k,k-1} = \mathbf{F}_{k-1} \mathbf{P}_{k-1,k-1} \mathbf{F}_{k-1}^T + \mathbf{\Gamma}_{k-1} \mathbf{Q}_{k-1} \mathbf{\Gamma}_{k-1}^T$$

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k,k-1} \mathbf{H}_k^T (\mathbf{R}_k + \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k,k-1} \mathbf{H}_k^T)^{-1}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k,k} = \hat{\mathbf{x}}_{k,k-1} + \mathbf{K}_k (\mathbf{z}_k - \mathbf{g}(\hat{\mathbf{x}}_{k,k-1}))$$

$$\mathbf{P}_{k,k} = \mathbf{P}_{k,k-1} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k,k-1}$$

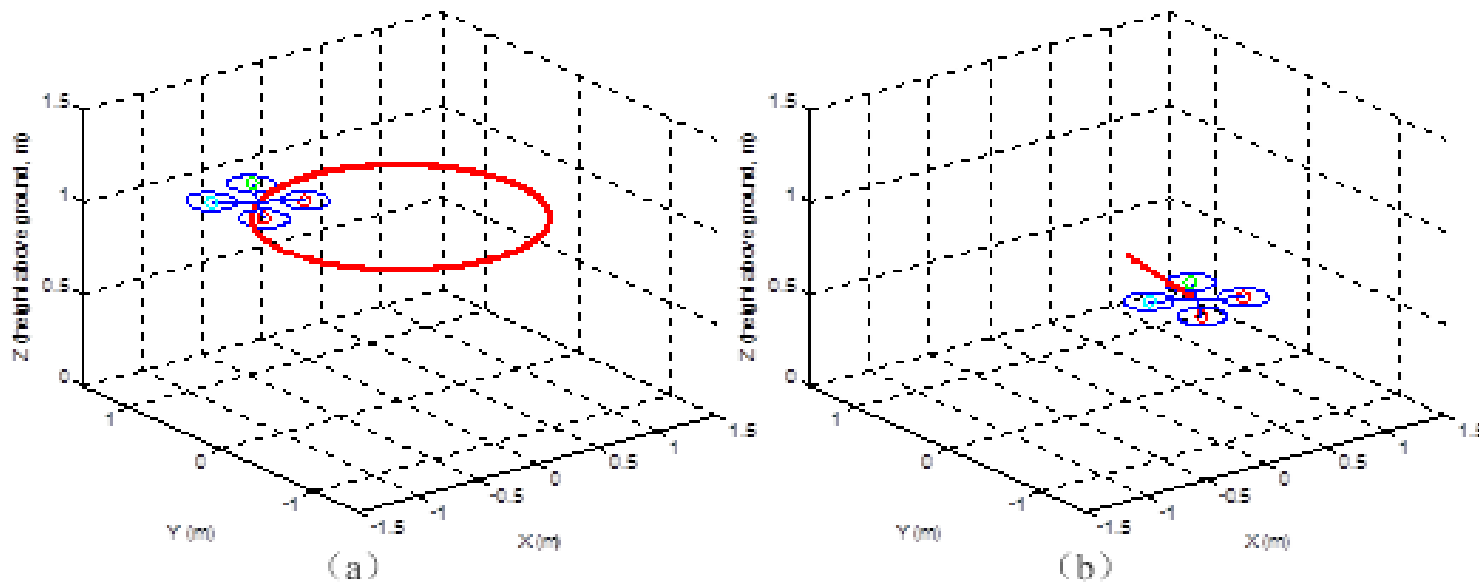
$$\mathbf{F}_{k-1} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k-1,k-1}}, \mathbf{H}_k = \left. \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k,k-1}}$$



5. 应用实例

□ 实验结果

(1) 仿真实验



图：单摄像机下，仿真实验中生成的四旋翼轨迹：

(a) 二维圆轨迹；(b) 三维曲线轨迹



5. 应用实例

□ 实验结果

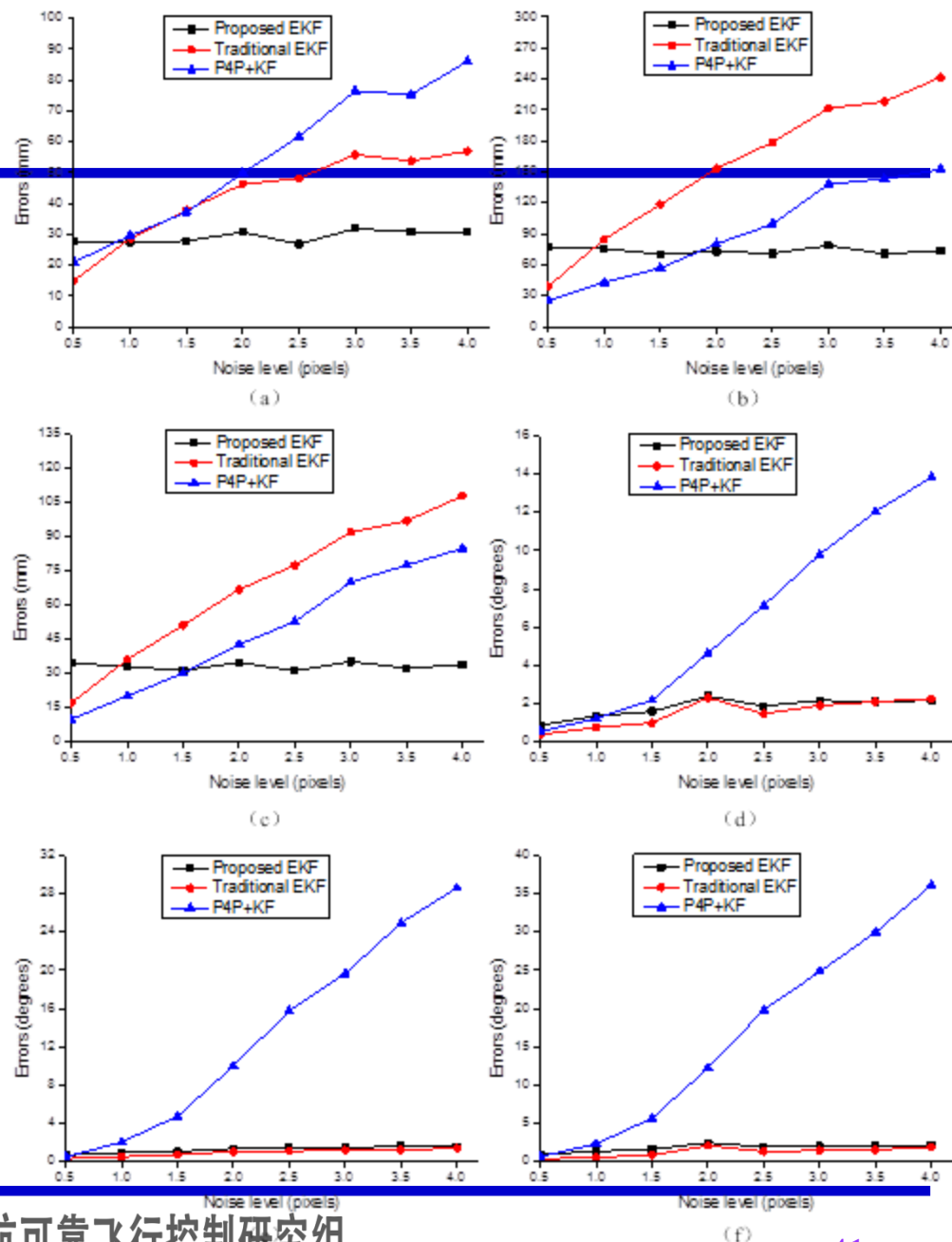
(1) 仿真实验

图a-f分别为用三种卡尔曼滤波方式估计四旋翼在

二维圆轨迹下状态

$X, Y, Z, \theta, \phi, \dot{\phi}$ 的均方根

误差, 可以看出所提的扩展卡尔曼滤波方法更加精确。





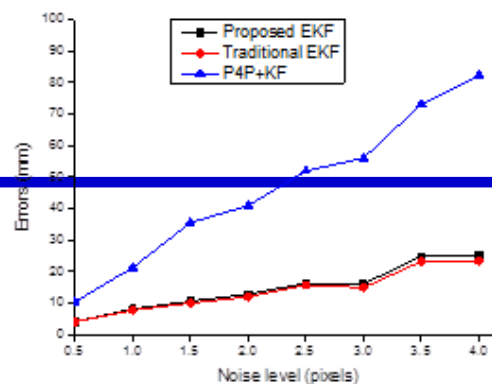
5. 应用实例

□ 实验结果

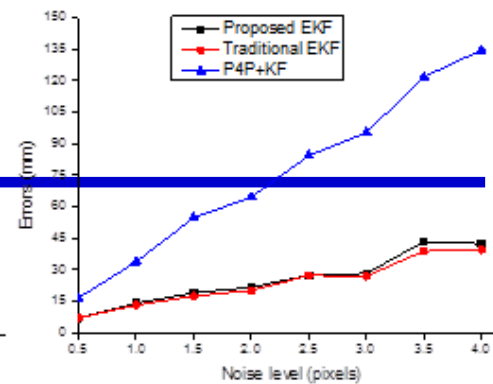
(1) 仿真实验

图a-f分别为用三种卡尔曼滤波方式估计四旋翼在
三维曲线轨迹下状态

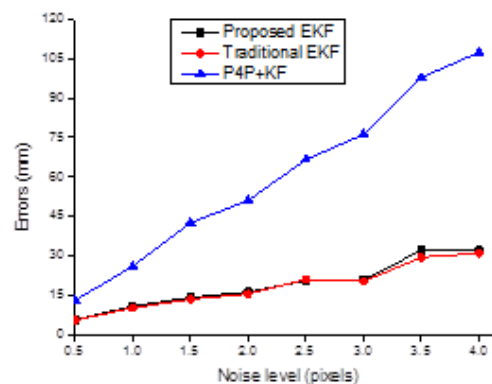
$X, Y, Z, \theta, \varphi, \phi$ 的均方根
误差, 可以看出所提的扩展
卡尔曼滤波方法更加精确。



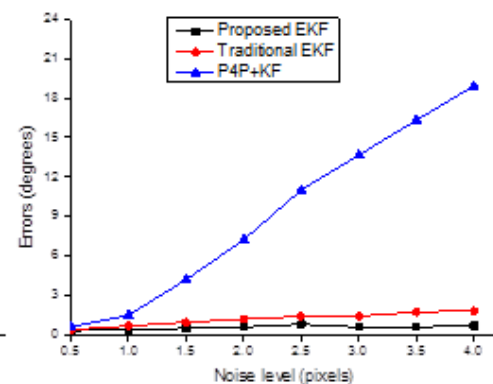
(a)



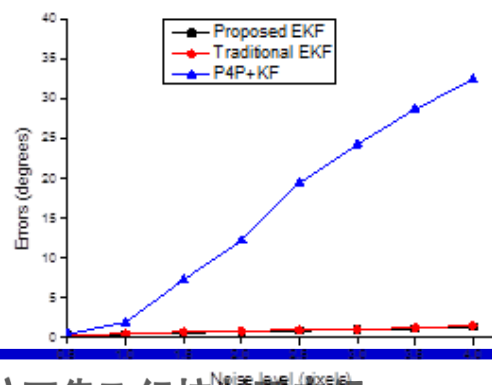
(b)



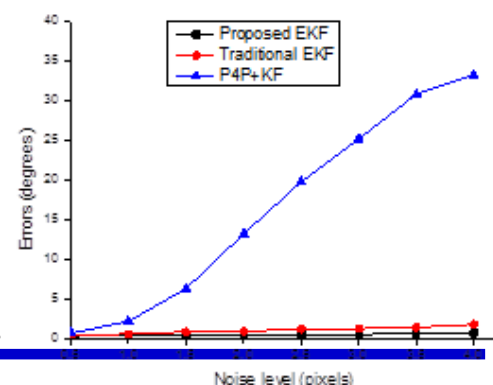
(c)



(d)



(e)



(f)





5. 应用实例

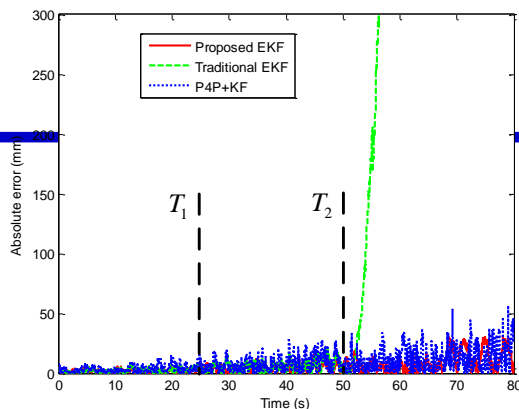
□ 实验结果

(1) 仿真实验

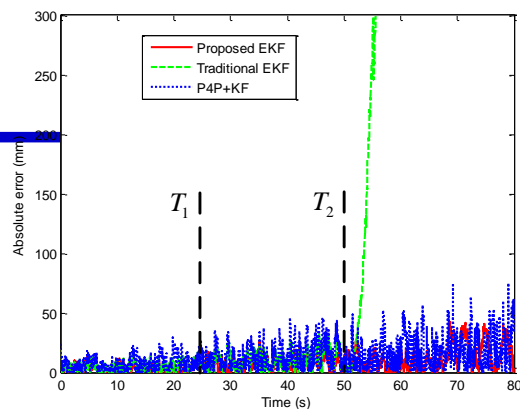
图a-f分别为用三种卡尔曼滤波方式估计四旋翼在有遮挡情况下状态（只有两个特征点被观察到）

$X, Y, Z, \theta, \varphi, \phi$ 的均方根

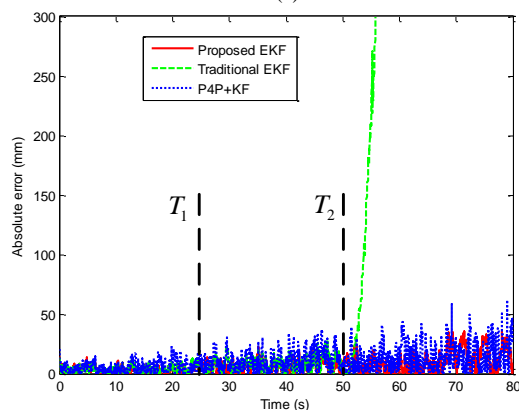
误差，可以看出所提的扩展卡尔曼滤波方法更加鲁棒。



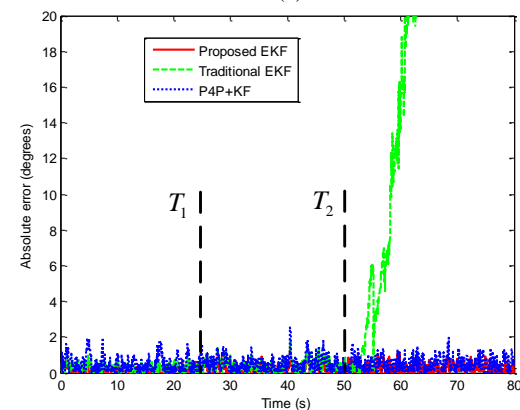
(a)



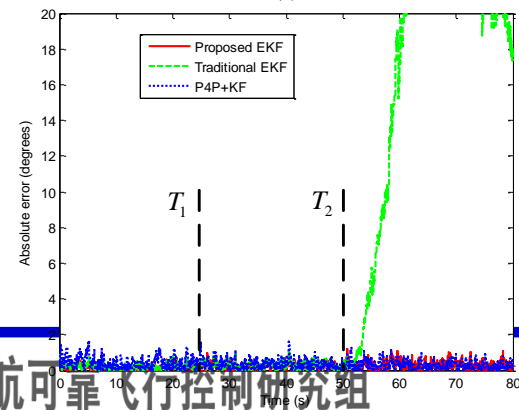
(b)



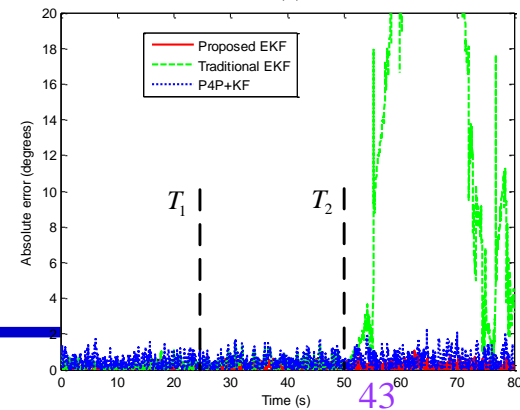
(c)



(d)



(e)



(f)



5. 应用实例

□ 实验结果

Robust Pose Estimation for Multirotor UAVs Using Off-board Monocular Vision

Qiang Fu, Quan Quan and Kai-Yuan Cai



北航可靠飞行控制研究组

BUAA Reliable Flight Control Group



rfly.buaa.edu.cn





6. 总结

- 实际中我们如何选取传感器和如何布置传感器等大部分是靠经验，没有实际的理论来支持。从理论上可以进行可观度（Degree of Observability）的研究，即可观测的程度方面的研究。
- 在Kalman滤波方面的研究可以考虑更加实际的情况，比如：对于维数较高的模型减少计算量，减少对噪声特性的依赖，减少延迟等等。



7. 作业

选做一题：

1. 根据课件提供的思路完成经典卡尔曼滤波的推导过程。
2. 考虑实际滤波过程中的延迟问题，参考相关文献给出一种时滞卡尔曼滤波器的设计思路。
3. 自拟一道与本章节内容相关的题，并回答。（难度与上面题目相当，不能抄袭其他书籍）



资源

- (1) 课程中心 (课件、资料、作业等)
- (2) 可靠飞行控制研究组主页 (课件等)

<http://rfly.buaa.edu.cn/resources/>

- (3) 关注可靠飞行控制研究组公众号 **buaarfly** (课件等)





谢谢！

如课件有错误之处，请反馈到邮箱 qq_buaa@buaa.edu.cn