

Extreme Value Theory

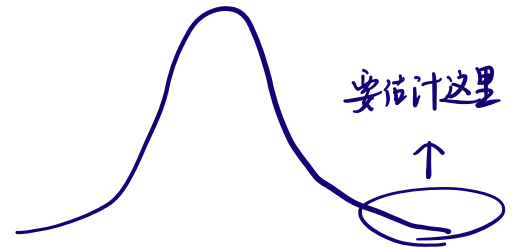
- 我们用 futures exchange 举例说明:

Every day, the futures clearinghouse receives cash from some clearing members, and pays cash to other clearing members

The exchange wants to be sure that it will (with some high probability) have sufficient cash to make the required payments to the clearing members

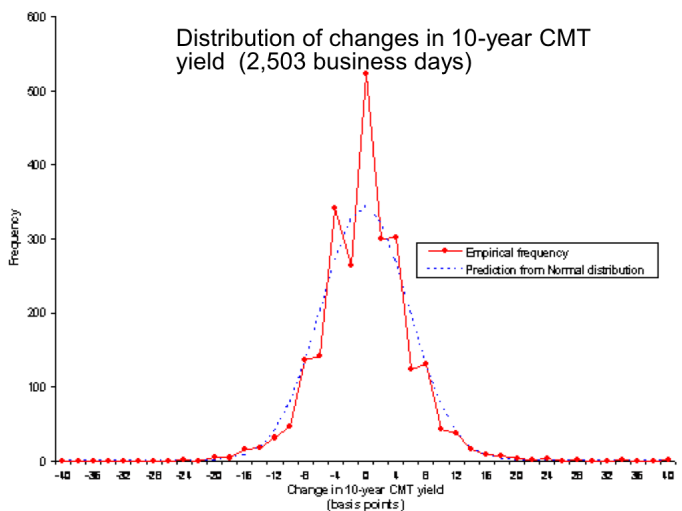
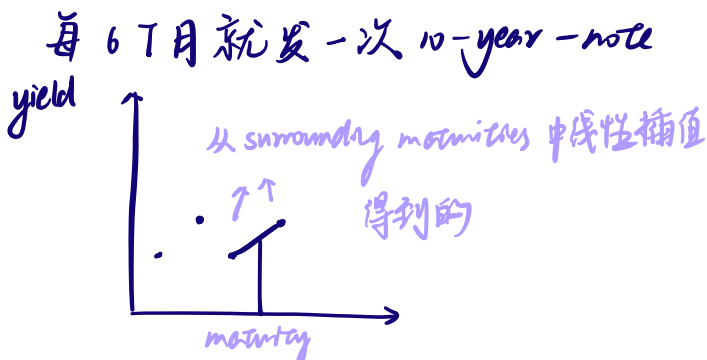
Thus, it wants to model the distribution of possible cash payments; in particular, it wants to model the (upper) tail of the distribution of cash payments to clearing members.

clearing house 需要很多 tail 的预测



- 我们需要估计极端值的分布

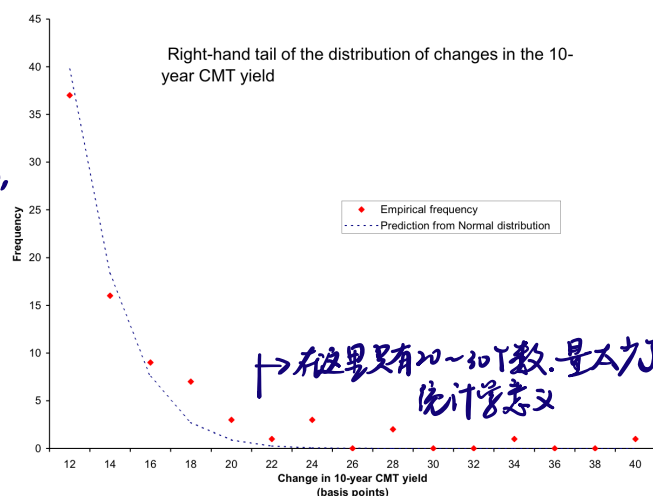
→ 右侧是实际的例子. 其中 CMT 是 Constant Maturity Treasury



Treasury interpolate the yield for the exactly 10-years maturity
因为 yield is often used as a reference in interest-rate derivative contract.

- 下面我们来看实际的数据:

• 显而易见, Empirical 有更厚的尾部. 因为根据 Central limit theorem, 正态分布在中央最有效, 而我们想预测极端值



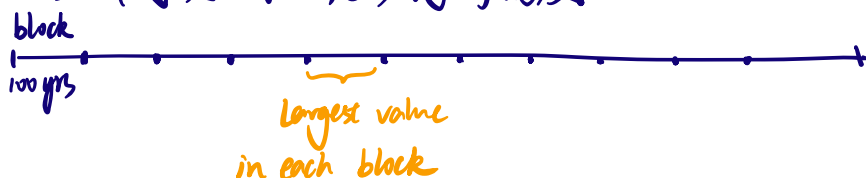
→ 在这里只有 20~30 个数, 量太小未必有统计学意义

• 那我们要用什么办法呢? 这就是本节的内容, 有两部分:

① Block Maxima models — 跟 finance 没有多大关系, 我们不用它

• 假设现在有一段很长的时间序列:

比如我们想讨论尼罗河的高度



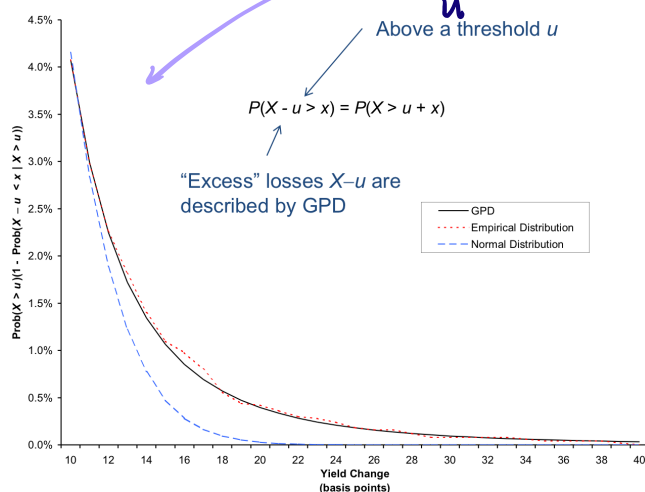
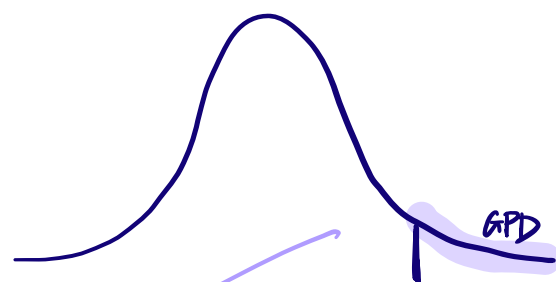
② Peaks over Threshold (POT) models
门槛

只要门槛够大, tail 能用 Generalized Pareto Distribution 描述

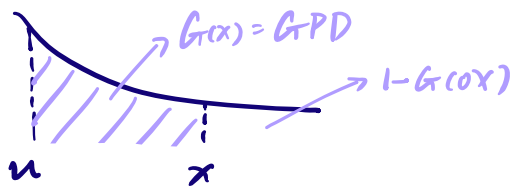
— 从某种程度上这很像 Central Limit

Theorem: 用 $\sim N$ 估计 average, 这里我们用 GPD 估计 tail

而不用管生成这些数据本身的分布是什么



下面我们来关注跨过 threshold 的情况:



→ 显而易见, 这里应该用条件概率来考虑

所以 GPD 长什么样呢?

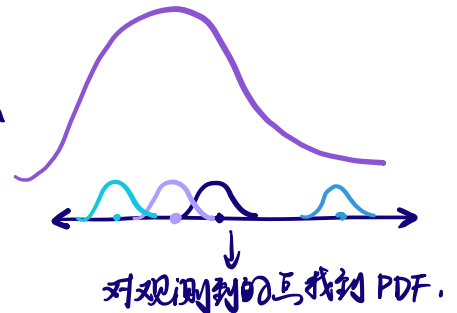
$$G(x) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \xi \frac{x}{\beta}\right)^{-1/\xi} & \text{if } \xi \neq 0, \\ 1 - \exp\left(-\frac{x}{\beta}\right) & \text{if } \xi = 0, \end{cases}$$

由上图我们可以看到拟合的很好

* BUT! ----- → Empirical Distribution 是哪儿来的?

Kernel estimate, 用来估计 density function

我们取 average of the hills



• 找到 GPD 之后我们可以利用 $P(X-u > x)$ 来求 VaR: $VaR-u$

$$\alpha = P(X > VaR) = P(X > u + x) = P(X > u) \left(1 + \xi \frac{x}{\beta}\right)^{-1/\xi}$$

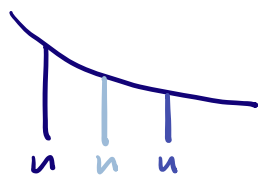
$$\Rightarrow VaR = u + \frac{\beta}{\xi} \left[\left(\frac{\alpha}{P(X > u)}\right)^{-\xi} - 1\right]$$

• 那么我们如何估计 GPD 的 parameter 呢?

Sep 1 Pick threshold u that is "large enough"

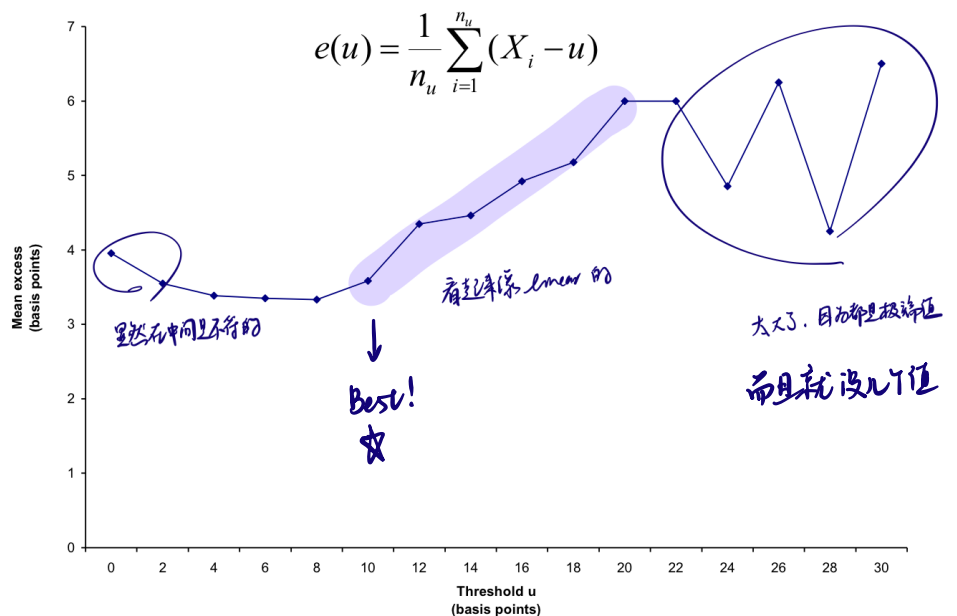
我们选取很多的 threshold, 找 mean excess ($e(u) = E[X-u | X > u]$)

由于 $e(u) = \frac{\beta + \xi u}{1 - \xi} \rightarrow$ It's LINEAR!



那该选哪 u 呢?

我们选最小的, 也就是 linear 部分的起点, 以包括更多的数据



Sep 2 Estimate β , $\hat{\epsilon}$ and $P(x > u)$

- Using MLE 来估计 $\hat{\epsilon}$ 和 $\hat{\beta}$

• In order to use APD, we need i.i.d data. 虽然 data 一般都不是 independent 的, 但我们希望它是

可能这月的 volatility is low, 下月 is high, so the distribution for two months is different \rightarrow quite annoying!

Let's suppose we have a standard framework to think about return:

$$r_t = \underbrace{\mu}_0 + \sigma_t \times \underbrace{z_t}_{i.i.d}$$

(daily return)

We scale the return are plausibly i.i.d.
我们希望 apply EVT to returns.
(rescaled)

那么我们怎么做呢? We need a model for volatility. 怎么做以后再讨论

• EVT 看起来很好用, 但是为什么不普遍呢?

因为它只适用于单变量的情况. 但是 portfolio 净值只包含 $-T$ 变量

我们也是有其他办法的: 可以利用 Historical Simulation 来估计 P/L, 这样我们就只剩下一 T 变量了. It might be hard. 因为 p/L 很难是 i.i.d 因为 σ 不一样

