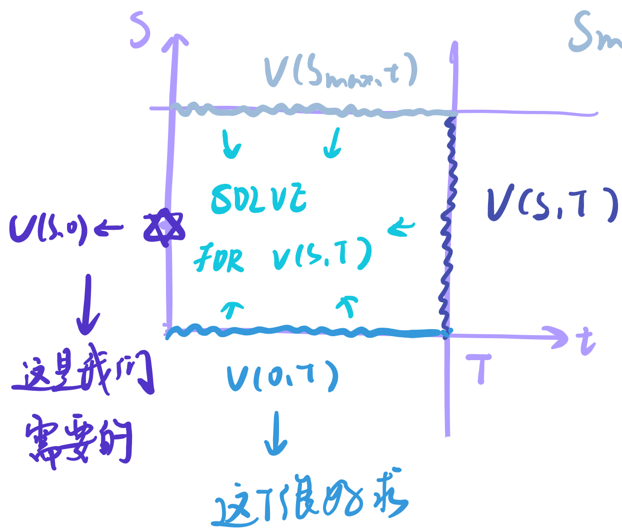
PDE Solutions to the Black-Scholes equation

我们费了这么大劲，现在却只有一个我们尚不能解出来的公式：

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rS\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV = 0$$ — 接下来我们并不是要解它（还不解？），而是提供足够的信息来解对于一系列不同的衍生品适用的公式。我们还要理解一下欧式 call & put

我们先来试图写出 boundary condition



S_{max} → call 立即执行，put 永不执行

$V(S,T)$ → all possible price at maturity

用三个 bound 来估计（解）中间值

$$V(S,t) = e^{-r(T-t)}\left(S e^{(r-d)(T-t)} N(d_1) - K N(d_2)\right) \rightarrow \text{European Call}$$

（这是我们知道的解了）

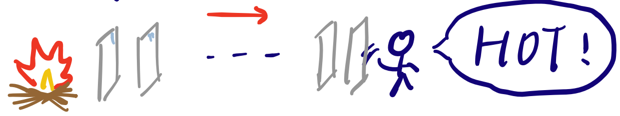
下面我们来解 PDE：

PDE有很多种：elliptic, hyperbolic or parabolic

椭圆型　双曲线型　抛物线型

Black-Scholes 显然是抛物线型，因为只有 $\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$ 是二阶导，$\frac{\partial V}{\partial t}$ 只有一阶导。而且这个 PDE 是 backward parabolic PDE，$\frac{\partial V}{\partial t}$ 和 $\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$ 符号相同

* 热传导方程 (Heat conduction EQ^{n}) 是 forward



而我们的PDE是从 maturity 向前，所以是 backward

backward 有什么特征吗？

Boundary Condition at $t=T$, not at $t=0$

用上些 final conditions 来决定 $t<T$ 时衍生品的价格

* Linearity:

如果 V_1, V_2 是 Black-Scholes equation 的两个解，那么它们的线性组合 $V = aV_1 + bV_2$ 也是一个解

This can be ~~easily~~ verified by substituting this expression into the PDE

去你的显然易！

$$\frac{\partial V_1}{\partial t}dt + rS\frac{\partial V_1}{\partial S}dS + \frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2 V_1}{\partial S^2} = rV_1$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial t}dt + rS\frac{\partial V_2}{\partial S}dS + \frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2 V_2}{\partial S^2} = rV_2$$

$$r(aV_1+bV_2) = \left(a\frac{\partial V_1}{\partial t}dt + b\frac{\partial V_2}{\partial t}dt\right) + \left(arS\frac{\partial V_1}{\partial S}dS + brS\frac{\partial V_2}{\partial S}dS\right) + \left(\frac{a}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2 V_1}{\partial S^2} + \frac{b}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2 V_2}{\partial S^2}\right)$$

$$= \frac{\partial(aV_1+bV_2)}{\partial t}dt + rS\frac{\partial(aV_1+bV_2)}{\partial t}dS + \frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2(aV_1+bV_2)}{\partial S^2}dS^2$$

* 核心是什么呢：

$$a\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial aV}{\partial t}$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{\partial V_2}{\partial t} = \frac{\partial(V_1+V_2)}{\partial t}$$

所以从数学上 Linearity 是成立的，那么我们从金融上要如何理解呢？

(注意如果有 transaction cost 的话 linearity 就不成立了)

如果一个 portfolio 中每一种衍生品都符合 PDE，那么这个 portfolio 也必然符合 PDE 以及根据 No-arbitrage theory，V 不能大于或小于 aV_1+bV_2

下面我们来看看 European option 的 Boundary Conditions：

European Call $\quad V(S,T) = \max(S-K, 0)$

$V(0,t) = 0$

$V(S,t) = S - Ke^{-r(T-t)}$ as $S\to\infty$

因为你知道一定会执行，所以此刻的价值是立即执行的价值的折现

未来的股价可用远期价格 $Se^{r(T-t)}$ 代替 $\to V(S,t) = e^{-r(T-t)}(Se^{r(T-t)} - K)$

European Put $\quad V(S,T) = \max(K-S, 0)$

$V(0,t) = Ke^{-r(T-t)}$

$V(S,t) = 0$ as $S\to\infty$

S 太大了，执行真是遥遥无期

* 如果有 div. 对于 call 来说 $V(S,t) = Se^{-\delta(T-t)} - e^{-r(T-t)}K$

多提一嘴：

$$V(S,t) = e^{-r(T-t)}\left(Se^{(r-d)(T-t)}N(d_1) - KN(d_2)\right) \longrightarrow \text{European Call}$$

在 $S\to\infty$ 时 $\ln\frac{S}{K}\to\infty$ $\quad N(d_1)\to 1$ $\quad N(d_2)\to 1$，和上面是一致的

— Boundary Condition 我们先介绍到这里

其实有的时候解 PDE 是非常简单的：下面是一个 Forward 的例子：

At $t=T$ $\quad F(S,T) = S-K \to$ Forward Price set at $t=0$

$V(S,t) = F(S,t) = S - Ke^{-r(T-t)}$

下面我们把这个 $V(S,t)$ 往 PDE 里面套：

$$\frac{\partial V}{\partial t} = 0 - rKe^{-r(T-t)} \qquad \frac{\partial V}{\partial S} = 1 \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = 0$$

$$-rKe^{-r(T-t)} + rS + 0 - r(S - Ke^{-r(T-t)}) = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rS\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV = 0$$

Quiz：证明以下两个 V 是满足 PDE 的

① $V(S,t) = AS$ → Stock

② $V(S,t) = Ae^{rt}$ → Bond

①：$\frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad \frac{\partial V}{\partial S} = A \quad \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = 0$

$0 + A \cdot rS + 0 - r \cdot AS = 0$

②：$\frac{\partial V}{\partial t} = rAe^{rt} \quad \frac{\partial V}{\partial S} = 0 \quad \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = 0$

$rAe^{rt} + 0 + 0 - rAe^{rt} = 0$

- simpliest possible assets also satisfy PDE → A.D Securities

  但是任何 asset 都可以用 A-D 表示.

ALL payoffs can be written in terms of portfolios of A-D securities.

→ 任何 asset 都符合 PDE

举个栗子：European Call

$$\sum_{i=1}^{N} \max(S_i - K, 0)\, \pi_i \qquad (\text{states } i = 1, \cdots N)$$

我们知道 Maturity 的 value 是什么. 但我们真正想知道的是 value before maturity

叫做 Fundamental Solution

$$V(S,0) = \sum \text{payoff}(S_i)\, \pi_i$$ → value of A-D security at $t=0$

最难的部分是把 π_i 找出来

下面我们来解决两个问题：

1、How to determine π_i

2、How to determine the payoff of π_i（看起来有点奇怪）

我们先来看问题 2 ：

B-S (continuous time) world 会有无数 A-D securities

$t=0$ $\quad$ $t=T$

S $\quad$ S' → stock price at maturity

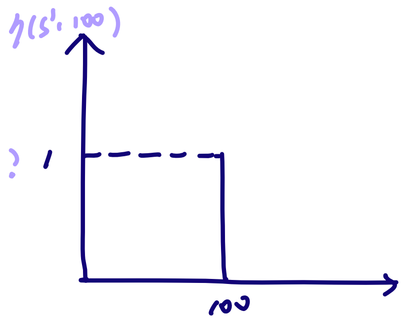
$$V(S,t) = \int_0^{\infty} p(S')\pi(S')dS'$$

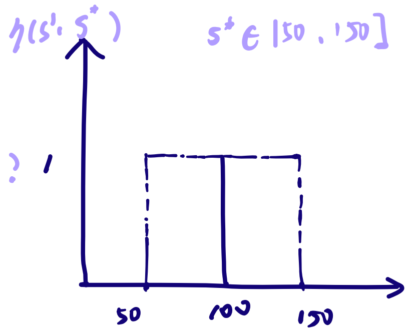
π is the current value

$g(S',100)$ is the payoff of A-D security at T paying \$1 when $S'=100$ and \$0 everywhere else

这个方程长啥样呢？

在 binomial world 中：





$S^* \in [50,150]$

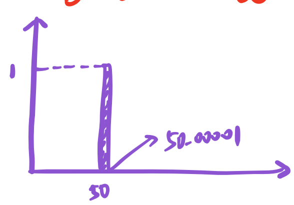
在 [50,150] 中每个可能性汇总起来是无穷的 \$

如果是所有的 state 加起来是无穷又有什么问题呢？

二叉树如果是 10000 步最后所有 state 加起来 payoff 不也是很大么？

→ $\int_a^b g(S',S')dS' = b-a \neq \infty$ → 应该是无限的，但积出来是有限的

问题出在哪里呢？



这段矩形的面积是 1×0.00001

而如果 A-D 的 payoff 是 1 的话，这一段矩形的面积是无数个 1 相加

下面我们引入 Dirac Delta function：

A-D security 的 payoff 是 Dirac Delta function

$\eta(s', 100) = \delta(s' - 100)$

它有什么特征呢？

1、 piecewise smooth 分段光滑

2. $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(x)dx = 1$

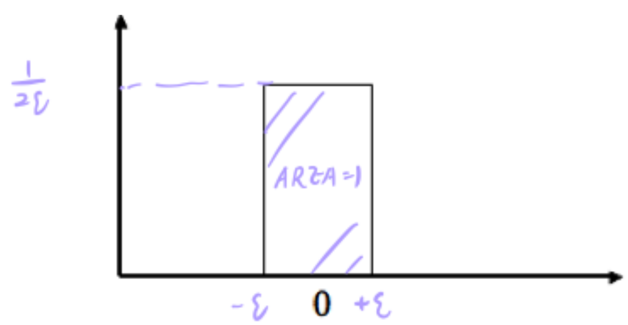
3、 对于任意 $x \neq 0$ $\lim_{\varepsilon \to 0} \delta_\varepsilon(x) = 0$

4、 对于 smooth function $f(x)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x)\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(x) f(x)\, dx = f(0)$$

所以它到底长什么样呢？

$$\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon} & -\varepsilon \le x \le \varepsilon \\ 0 & |x| > \varepsilon \end{cases}$$



这是一种，也可以是 $\delta_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon}} e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}}$ （类似正态分布的 pdf）

通过 Delta function 我们就能表示出 A-D 的 payoff 了

$\eta(s', s^*) = \delta(s' - s^*)$

为什么可以这样表示呢？ 因为它满足几个特征

$\int_a^b \delta(s' - 100)\, ds' = 1$ 相当于往右平移了 100

$\int_a^b \delta(s' - s')\, ds' = \infty$

$\int_a^b \delta(s' - 100)\, p(s')ds' = p(100)$

这样 $V(S,0) = \int_0^\infty \text{payoff}(S') \times \underbrace{\pi(S')}_{\text{green's function}} dS'$ → possible stock prices

即使我们把 $\pi(S')$ 求出来，积分也会有问题

我们的 approach to B-S formula 是推导出一个 pde 的特解

special solution 有 initial condition given by a delta function

对应 payoff of a single A-D security

gives current value of a single A-D security

special solution is called Green's function solution

$$
\begin{aligned}
V(S,t) &= \int_0^\infty \frac{e^{-r(T-t)}}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}} \frac{1}{S'} \\
&\times \exp\left(-\frac{(\ln(S'/S) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t))^2}{2\sigma^2(T-t)}\right) \\
&\times \text{Payoff}(S') dS'
\end{aligned}
$$

蓝色是 $\pi(S')$

我们需要把它积出来： European Call

$$V(S,t) = S N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2)$$

其实不用 Delta Function 和 Green Formula → 有 shortcut