The Black-Scholes Merton Equation

- 今天是整合的一天：

Binomial

- Stock / Bond model
- Replicating portfolios
- No Arbitrage
- Formula

Continuous Stochastic Process

- Brownian Motion
- Ito Process
  - ↳ Stock Model
  - ↳ Ito's Lemma

Black-Scholes Merton PDE

partial differential equation

* 我们只是提供一下简单的推导，有一些关键的概念会在之后讲到

Black-Scholes ('73)：

市场里存在 stock 和 bond，它们的价格可以用下面两个式子描述：

$$dB = rB\,dt$$

$$dS = \mu S\,dt + \sigma S\,dX$$

r 是 risk-free rate，μ 是 expected return on the stock，σ 是 stock volatility

和 binomial model 一样，continuous time 中 option value 也是从 stock 和 bond 组成的 portfolio 中算得的

我们简单提一下关于 B 的定价

$$dB = rB\,dt \Rightarrow \frac{dB}{B} = r\,dt \Rightarrow \ln B(t) = \ln B_0 + rt$$

$$\Rightarrow B(t) = B(0)e^{rt}$$

下面我们可以开始推导包含 written option : $-V(S,t)$ 和 Δ shares 的组合:

$$\Pi = -V + \Delta S$$

其实可以是任何东西,只要取决于 S, t

然后我们来研究这个组合的价值变化:

$$d\Pi = -dV + \Delta dS$$

这里我们假设 Δ 是不变的,这种做法和我们在 Binomial 中做的一样

显然接下来我们可以使用 Ito's Lemma

$$d\Pi = -dV + \Delta dS$$

$$= -\frac{\partial V}{\partial t}dt - \frac{\partial V}{\partial S}dS - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}dS^2 + \Delta dS$$

$$= -\frac{\partial V}{\partial t}dt - \frac{\partial V}{\partial S}(\mu S dt + \sigma S dX) - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 dt + \Delta(\mu S dt + \sigma S dX)$$

$$\Downarrow$$

$$d\Pi = \left(-\frac{\partial V}{\partial t}dt - \frac{\partial V}{\partial S}\mu S - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \Delta\mu S\right)dt + \left(-\frac{\partial V}{\partial S}\sigma S + \Delta\sigma S\right)dX$$

当然,我们仍然想去掉 dX 项:

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$$

那么 $d\Pi = \left(-\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)dt$ → 我们可以算明天它值多少钱

这个式子的价值是 predictable 并且完全 risk free . $d\Pi$ 中不包括布朗运动

根据 No - arbitrage principle : 会有其他的 assets with same properties

我们只知道一种毫无风险的产品: Risk-free Asset

$$\Rightarrow r\Pi dt = \left(-\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)dt$$

What is the value of π ? $\Pi = -V + \Delta S = -V + \frac{\partial V}{\partial S}S$

把上面的式子换成一个更好的形式：

$$r\left(-V+\frac{\partial V}{\partial S}S\right)dt = \left(-\frac{\partial V}{\partial t}-\frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)dt$$

这一步其实是非常可疑的

$$\left(-rV+\frac{\partial V}{\partial S}rS+\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)dt=0$$

$$-rV+\frac{\partial V}{\partial S}rS+\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}=0$$ → 我们之后的任务是解这个PDE

— Self-financing 实际是想从数学上来解决这个问题.

我们的推导过程有什么问题么？

- V通常是S和t的非线性函数，那么Δ应该不是常数

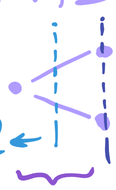
  (Mathematical Problem，可以用 $d(\Delta S) = Sd\Delta + \Delta dS + d\Delta dS$ 来解决)

— 我们不是要证明Δ不变，而是想探究Δ变化的情况下我们如何得出上面的结论

- 我们认为Π是一个无风险资产、但是在Δ随时间随机变化时，hedge portfolio 其实是 risky 的

  (Financial Problem，但其实不是个问题)

  为什么不是个问题呢？在二叉树中：



而不是在这里 ←

→ 我们在这里计算Δ和β

在中间我们不调整我们的portfolio

直觉上 Financial Problem 是正确的，我们只需要调整 Mathematical 的问题

?∴ 我们接下来考虑 Self-Financing 的问题

- Self-Financing 构成了完全闭合的系统

解决 stochastic process followed by the portfolio：

我们用 some weights of option，α；some weights of stock，Δ；some weights of risk-free asset，β

α，Δ，β 在 beginning of the time steps 是 visible 的

$$\int_0^t d\Pi_\tau = \int_0^t \alpha_\tau dV_\tau + \int_0^t \Delta_\tau dS_\tau + \int_0^t \beta_\tau dB_\tau$$

$$d\Pi = \alpha_t dV + \Delta_t dS + \beta_t dB$$

$$\underbrace{+\left((V_t + dV_t)d\alpha_t + (S_t + dS_t)d\Delta_t + (B_t + dB_t)d\beta_t\right)}_{} = 0 \rightarrow \text{闭合系统}$$

self-financing 很重要的一点就是一开始用 risk-free asset 的 position 让我们一分钱都不用投入。我们搞出一个 portfolio：

$$d\Pi = -dV + \Delta dS + \beta dB$$

$$d\Pi = -\left(\frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{\partial V}{\partial S}dS + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}dS^2\right) + \Delta dS + \beta dB$$

$$= -\left(\frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{\partial V}{\partial S}dS + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}dt\right) + \Delta dS + \beta dB$$

我们还是要选择 $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$

$\underline{\Pi = 0}$. $d\Pi = 0$ (self financing)

$\Pi = 0 \rightarrow \beta B = V - \frac{\partial V}{\partial S} S$ 我们选择 risk-free asset 的 position, s.t. βB 抵消掉 option value + short position

$$0 = -\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - r\left(V - \underbrace{\frac{dV}{dS}}_{} S\right)\right)dt$$

Δ 是可以预见的 $dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dX(t)$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

$\underline{S(t)} = S(0) + \int_0^t \mu S(\tau)d\tau + \int_0^t \sigma S(\tau)dX(\tau)$

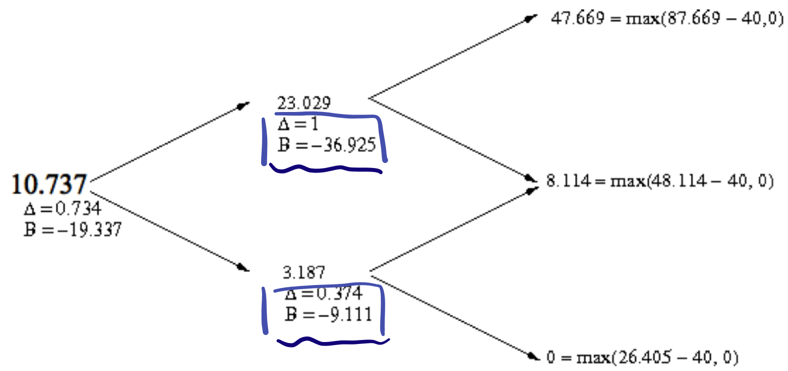
$S(t)$ is changing all the time. 但是 S 是可以观测的。这样我们可以写出 Δ。这样下个阶段有下个阶段的 Δ。我们永远能观测到

由上知我们不在意 dt 之间 Δ 是不变的

我们费了这么大劲，其实还是不会解

这里有一些问题：Self-financing 到底解决了什么问题呢？

下面是我的一些理解：



我们来看这个图，是很简单的 binomial tree. 在 t=1 时，明显上下两个节点的 Δ 和 B 是不同的.

在二叉树中，我们用来计算 option value 时用到的 replicating portfolio 是不同的 Δ 和 B 根据不同的 S 来进行调整

再来看看 self-financing 的式子：

$$d\Pi = -dV + \Delta dS + \beta \Delta B$$

我们已经让 $d\Pi$ 为0了，那么有：

$$dV = \Delta dS + \beta \Delta B$$

Δ 和 βdB 也在根据不同的 S 来进行调整

在 continuous model 中，实际上我们也是构造了一个 replicating portfolio，让 S 和 B 的 position 随时刻跟上 V 的变化，每过一个 Δt，我们重构一次这个 portfolio

为什么要有这个 self-financing 的东西呢？

如果没有的话就是 $dV = \Delta dS$

Δ是恒定的吗？实际上不是，就意味着我们不能把 $-dV+\Delta dS$ 当成 Bond

而在 Binomial 中，我们本来也不要求Δ恒定，我们只需要 Δ在每过一个Δt（binomial 中的一步）变一下就可以了 → 所以我们算的结果其实是正确的.

整个 Self-financing 这一大堆是在做什么呢？是用数学把我们算出来的“错误”结果凑出来，搞出一个完全闭合的 portfolio，进而写出含V的表达式

Quiz: $\Pi=0$ 意味着 $V \boxed{=} \alpha S+\beta B$

→ 强化一下 Replicating Portfolio 这个概念

我们每个阶段都能计算出 β_t: $\beta_t=\frac{V(S,t)-\alpha_t S_t}{B_t}$

Quiz: 上面我们都是用 stock 来 hedge option. 现在我们想用 option hedge stock

$$\Pi=-S+\alpha V+\beta B$$

$$\alpha=\frac{1}{\frac{\partial V}{\partial S}} \qquad \beta=\frac{S-\frac{\partial V}{\partial S}V}{B}$$

为什么要搞这个呢? 因为我们不一定先给 option 定价 只要是 (S,t) 的函数就可

! 在我们整个的假设中, r, μ, σ 都是固定的, 但它们可以是 t 的函数 只要不是随机的就可以

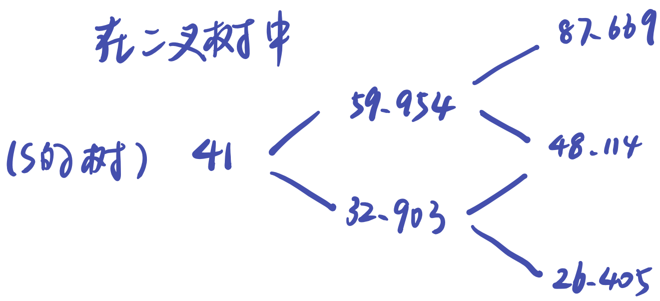
以及我们对 V 没有任何定义, 它可以是任何形态

下面是一个比较令人费解的问题:

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}+rS\frac{\partial V}{\partial S}-rV=0$$

μ 哪去了? 没有 μ. 下面我们用 FIN511 学到的知识来回答这个问题:

在二叉树中



我们在意的是什么? 是每一个节点的股价 到达每个节点的概率是多少? 我们 care 吗? 我们根本不 care! 为什么我们可以不 care?

对于股价来说, 假如 S μ 很高又没有风险 这现实吗? 不现实. 这往往意味着 S 的 σ 很大. 风险与收益共同进退. 高 μ 被高 discount factor compensate 掉了. 下面是数学上的一些理解:

$$\begin{aligned} V &= \Delta S + B = e^{-r\Delta t}\left(V_u\frac{e^{r\Delta t}-d}{u-d} + V_d\frac{u-e^{r\Delta t}}{u-d}\right) \\ &= e^{-r\Delta t}\left[qV_u + (1-q)V_d\right] \end{aligned}$$

我们来看这个基本公式，我们有一组可选的 u、d 是

$$u = e^{r\delta t+\sigma\sqrt{\delta t}}, \quad d = e^{r\delta t-\sigma\sqrt{\delta t}}$$

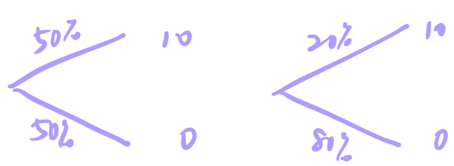
假设我们的 V 是 European Call，现在 $\sigma \to 2\sigma$，$V_u \uparrow$ V_d 不变

$$q' = \frac{e^{r\delta t} - e^{r\delta t-2\sigma\sqrt{\delta t}}}{e^{r\delta t+2\sigma\sqrt{\delta t}} - e^{r\delta t-2\sigma\sqrt{\delta t}}} = \frac{1-e^{-2\sigma\sqrt{\delta t}}}{e^{2\sigma\sqrt{\delta t}} - e^{-2\sigma\sqrt{\delta t}}} = \frac{e^{2\sigma\sqrt{\delta t}}-1}{\underbrace{e^{4\sigma\sqrt{\delta t}}}_{(e^{2\sigma\sqrt{\delta t}})^2}-1}$$

$$= \frac{1}{e^{2\sigma\sqrt{\delta t}}+1}$$

原来的 q 是 $\frac{1}{e^{\sigma\sqrt{\delta t}}+1}$ 说明什么？$\sigma\uparrow$ $q\downarrow$，可看作 discount factor 了

即在二叉树中，



虽然看上去 V_u 和 V_d 相同，实际

由于 q 不同，其结果 V 是不同的，u、d 替我们 discount 掉了风险

因此在二叉树中 stock 的 μ 对我们来说没有太大意义，那么情境换成 continuous 之后 μ 依然没有太大意义

- $rS\frac{\partial V}{\partial S}$ → 可看作是从 $\mu S\frac{\partial V}{\partial S}$ 来的 risk-neutral probability

把 risk compensate 掉之后 stock 的 return（已经没有风险了）一定是 r

(PS4 Q5)

下面我们把 dividend 引入我们的公式中：

Quiz: dividend 会 ↓ stock price，但是 shareholder 不是很在乎发不发 dividend

这个 Quiz 引入了什么问题呢？我们上面一直在搞 replicating portfolio：

在 $\Pi=0$ 时，我们有

$$dV = \Delta dS + \beta dB$$

在 option 中，发股息引起的股价波动是会影响 option price 的。但在replicating portfolio 中发不发股息无所谓，这就让左右两边不等：

$$D_t = \int_0^t \delta S_\tau d\tau, \quad \delta \geq 0, \ t \geq 0$$

$$dD = \underbrace{\delta}_{} S dt \qquad \delta \geq 0, \ t \geq 0$$

↳ annualized dividend yield

Every time period we receive proportional dividend

$$\begin{aligned} dS &= \mu S dt + \sigma S dX - dD \\ &= \mu S dt + \sigma S dX - \delta S dt \\ &= (\mu - \delta) S dt + \sigma S dX \end{aligned}$$

$$\Pi = -V + \Delta S + \beta B$$

$$d\Pi = -dV + \Delta (dS + \boxed{\delta S dt}) + \beta dB$$

→ 一定注意这个地方

为什么要加上呢？因为我们是持有 stock，dividend 会发到我们手上

$$\int_0^t d\Pi_\tau = \int_0^t \alpha_\tau dV_\tau + \int_0^t \Delta_\tau dS_\tau + \int_0^t \Delta_\tau dD_\tau + \int_0^t \beta_\tau dB_\tau$$

$$\Downarrow$$

$$d\Pi = (\alpha dV + \Delta dS + \beta dB) + ((V+dV)d\alpha + (S+dS)d\Delta + (B+dB)d\beta)$$

$$\Downarrow$$

这个东西我们认为是 $\Delta S \delta dt = \Delta dD$

$$d\Pi = -\frac{\partial V}{\partial t}dt - \frac{\partial V}{\partial S}((\mu-\delta)S dt + \sigma S dX) - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}dt + \Delta(\mu S dt + \sigma S dX) + \beta dB$$

这两项消不掉了

但我们核心是消 dX

$$d\Pi = \left(-\frac{\partial V}{\partial t} - (\mu-\delta)S\frac{\partial V}{\partial S} - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \beta r B + \Delta \mu S\right)dt + \underbrace{\left(-\sigma S\frac{\partial V}{\partial S} + \sigma S \Delta\right)}dX$$

$\Rightarrow \Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$ $\quad \beta B = V - \Delta S$ （从 $\Pi = -V + \Delta S + \beta B$ ，$\Pi = 0$ 而得）

$$0 = \left(-\frac{\partial V}{\partial t} - (\mu-\delta)S\frac{\partial V}{\partial S} - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + r\left(V - \frac{\partial V}{\partial S}S\right) + \frac{\partial V}{\partial S}\mu S\right)dt + 0\,dX$$

$$0 = \frac{\partial V}{\partial t} + \underbrace{(r-\delta)}_{\text{risk-neutral return}}S\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV$$

dividend 只改变了和 S 有关的 V