Simulating Over Multiple-Day-Horizon

I. 估计 Return

· 为什么要这样做呢？

以前我们学了 GARCH & NGARCH 模型，得到了 daily data → 这样我们能够比较容易地得到明日的 VaR / ES

— 但假如我们有 daily data，而我们要预测一个月的 VaR 怎么办？
或是要给 option 定价，又没有可利用 implied volatility

首先介绍一下预测 return 的模型：

$$\sigma^2_{t+1:t+K} \equiv E_t\left(\sum_{k=1}^{K} R_{t+k}\right)^2 = \sum_{k=1}^{K} E_t\left[\sigma^2_{t+k}\right]$$

我们还有更简单的模型：

$$\sigma^2_{t+1:t+K} = \sum_{k=1}^{K} \sigma^2_{t+1} = K\sigma^2_{t+1}$$ ⇒ 更简单，但是更蠢

→ 假设没有 mean-reversion，只适用于较短的时间段

用 GARCH Model，又如何呢？

$$\sigma^2_{t+1:t+K} = K\sigma^2 + \sum_{k=1}^{K}(\alpha+\beta)^{k-1}(\sigma^2_{t+1}-\sigma^2) \neq K\sigma^2_{t+1}$$

证明：

$$\sigma^2_{t+1} - \sigma^2 = (\alpha+\beta)(\sigma_t^2 - \sigma^2)$$

$$\sigma^2_{t+1:t+K} = \sigma^2_{t+1} + \sigma^2_{t+2} + \cdots + \sigma^2_{t+K}$$

$$= \sigma^2 + (\alpha+\beta)^0(\sigma^2_{t+1}-\sigma^2) + \left[\sigma^2 + (\alpha+\beta)^1(\sigma^2_{t+1}-\sigma^2)\right]$$

$$+ \left[\sigma^2 + (\alpha+\beta)^2(\sigma^2_{t+1}-\sigma^2)\right] + \cdots + \left[\sigma^2 + (\alpha+\beta)^{K-1}(\sigma^2_{t+1}-\sigma^2)\right]$$

$$= K\sigma^2 + \sum_{k=1}^{K}(\alpha+\beta)^{k-1}(\sigma^2_{t+1}-\sigma^2)$$

— 并不能估计 distribution，只能估方差

有一件事我们还是要注意，有关 mean

以前时间维度比较短，mean 是0 无伤大雅，但如果我们做一个月的 mean，应该就不是0了

但为了简单接下来 mean 还是0

每一天的 return 都是一个不同的 normal distribution：

$$R_{t+1} = \sigma_{t+1} z_{t+1}, \quad z_{t+1} \overset{i.i.d}{\sim} N(0,1)$$

$$\sigma_{t+1}^2 = \omega + \alpha R_t^2 + \beta \sigma_t^2$$

我们用 MC 做 10000 个 z_{t+1}，10000 个 z_{t+2}，…

是个10000个的第一个　　每个10000个的第一个　　K次

one Monte Carlo trial：

$$\begin{array}{lllll}
 & \check{z}_{1,1} \rightarrow \check{R}_{1,t+1} \rightarrow \check{\sigma}^2_{1,t+2} & \check{z}_{1,2} \rightarrow \check{R}_{1,t+2} \rightarrow \check{\sigma}^2_{1,t+3} & \cdots & \check{z}_{1,K} \rightarrow \check{R}_{1,t+K} \\
\nearrow & \check{z}_{2,1} \rightarrow \check{R}_{2,t+1} \rightarrow \check{\sigma}^2_{2,t+2} & \check{z}_{2,2} \rightarrow \check{R}_{2,t+2} \rightarrow \check{\sigma}^2_{2,t+3} & \cdots & \check{z}_{2,K} \rightarrow \check{R}_{2,t+K} \\
\sigma^2_{t+1} \longrightarrow & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\searrow & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & \check{z}_{MC,1} \rightarrow \check{R}_{MC,t+1} \rightarrow \check{\sigma}^2_{MC,t+2} & \check{z}_{MC,2} \rightarrow \check{R}_{MC,t+2} \rightarrow \check{\sigma}^2_{MC,t+3} & \cdots & \check{z}_{MC,K} \rightarrow \check{R}_{MC,t+K}
\end{array}$$

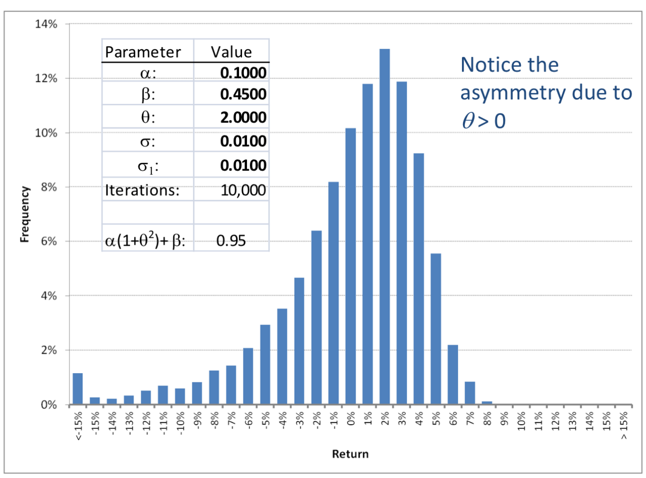
第10000个中的第10000个

然后我们求一下均值就好了

当然也可以用 NGARCH model

$$\sigma_{t+1}^2 = \sigma^2 (1 - \alpha(1+\theta^2) - \beta) + \alpha(R_t - \theta\sigma_t)^2 + \beta\sigma_t^2$$

我们来看看结果 (θ>0)：



关于这张图，由于可看作 R 向右平移，所以 R为正的频率更高

Q! 但为什么是偏的呢？

只有 R_t 小的时候（负值），σ_{t+1} 才会大

e.g. $R_t=-5\%$，σ_{t+1} 才会是 10%（例子），$\sigma_{t+1} z_{t+1}$ 才会是 -10% 或 0

$R_t=5\%$，σ_{t+1} 会是 1%（e.g.） $\sigma_{t+1} z_{t+1}$ 才会是 4% 或 6%

θ 为 0 时就是对称的了

→ 牢记条件（conditional）

即使我们用的是正态分布，但也可以是 t-distribution，也可以用任何 GARCH model

II、估计 Joint Distribution

之前是 univariate model（GARCH & NGARCH），但我们往往是用 portfolio 来衡量各种指标的，所以我们需要一个多变量的模型

我们还是估计长时间维度，注意我们假设 constant correlations across assets

下面来举一个栗子🌰：Structured equity products

Aggregate principal amount:	$3,818,000
Stated principal amount:	$10 per security
Issue price:	$10 per security
Pricing date:	May 22, 2015
Original issue date:	May 28, 2015 (3 business days after the pricing date)
Maturity date:	May 25, 2018
Early redemption:	The securities are not subject to automatic early redemption until May 2016. If, on any redemption determination date, the determination closing price of **each underlying stock** is greater than or equal to its respective initial share price, the securities will be automatically redeemed for an early redemption payment on the third business day following the related redemption determination date. No further payments will be made on the securities once they have been redeemed. 如果 $\rho=-1$，either 个这个概率会很小 **The securities will not be redeemed early following any redemption determination date if the determination closing price of either underlying stock is below its respective initial share price on such redemption determination date.**
Early redemption payment:	The early redemption payment will be an amount equal to (i) the stated principal amount for each security you hold *plus* (ii) the contingent quarterly coupon with respect to the related determination date.
Determination closing price:	With respect to each underlying stock, the closing price of such underlying stock on any determination date other than the final determination date, *times* the adjustment factor on such determination date

这个 note 包括了很多种 underlying assets，所以计算它们的 return 和 ρ 是非常关键的

所以具体怎么做呢？核心还是使用 simulation ：$r_{t+1} = \underbrace{D_{t+1}}_{\text{from GARCH}} \underbrace{z_{t+1}}_{\text{correlated shocks}}$

我们已经估计出了 correlation matrix

$$r_{t+1} = D_{t+1} \underline{z_{t+1}}$$

用的是 square root of correlation matrix 的方法

我们先生成一串 uncorrelated z → 很好算

注意：先介绍一点数学背景

covariance matrix $= D_{t+1} \Upsilon D_{t+1}$ 二维的 Υ 长这样：$\begin{bmatrix} 1 & \rho_{1,2} \\ \rho_{1,2} & 1 \end{bmatrix}$

引入 Υ 是想要 $\Upsilon^{\frac{1}{2}}$.

二维的 $\Upsilon^{\frac{1}{2}}$ 长这样 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \rho_{1,2} & \sqrt{1-\rho_{1,2}^2} \end{bmatrix}$

用 Cholesky decomposition 来计算二维以上的 $\Upsilon^{\frac{1}{2}}$

有什么好处呢？

$$z_{1,t+1} = z^u_{1,t+1}$$

$$z_{2,t+1} = \rho_{1,2} z^u_{1,t+1} + \sqrt{1-\rho_{1,2}^2}\, z^u_{2,t+1}$$

保证了 $z_{1,t+1}$ 和 $z_{2,t+1}$ 的相关系数是 $\rho_{1,2}$. 用这种方式来预测很多 r_{t+1}

Υ 到底怎么估呢？用 DCC 的办法

Ⅲ Filtered Historical Simulation

GREAT：结合了 FHS 不用估计 model 的优点和 GARCH & NGARCH 捕捉 dynamic risk 的优点

→ 我们就应该用这个

现在我们有了一串 return，先用 MLE 估计 GARCH 的系数，再利用每天的 R 算下一天的 σ

$$z_{t+1-\tau} = \frac{R_{t+1-\tau}}{\sigma_{t+1-\tau}}$$

我们从 z 的范围中抽取想要的数量（例如我们想要未来一个月的数据就抽 21 个 z，注意 with replacement ）

抽出来的还可以再抽

standard normal

不是用随机数生成的 而是从数据库中来的

$$
\begin{array}{lllll}
 & \hat{z}_{1,1} \rightarrow \boxed{\hat{R}_{1,t+1}} \rightarrow \hat{\sigma}^2_{1,t+2} & \hat{z}_{1,2} \rightarrow \hat{R}_{1,t+2} \rightarrow \hat{\sigma}^2_{1,t+3} & \cdots & \hat{z}_{1,K} \rightarrow \hat{R}_{1,t+K} \\
\nearrow & \hat{z}_{2,1} \rightarrow \hat{R}_{2,t+1} \rightarrow \hat{\sigma}^2_{2,t+2} & \hat{z}_{2,2} \rightarrow \hat{R}_{2,t+2} \rightarrow \hat{\sigma}^2_{2,t+3} & \cdots & \hat{z}_{2,K} \rightarrow \hat{R}_{2,t+K} \\
\sigma^2_{t+1} \longrightarrow & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\searrow & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & \hat{z}_{FH,1} \rightarrow \hat{R}_{FH,t+1} \rightarrow \hat{\sigma}^2_{FH,t+2} & \hat{z}_{FH,2} \rightarrow \hat{R}_{FH,t+2} \rightarrow \hat{\sigma}^2_{FH,t+3} & \cdots & \hat{z}_{FH,K} \rightarrow \hat{R}_{FH,t+K}
\end{array}
$$

还是用这个经典的图解释一切

有了 z 就有了 R，然后就有了下一个 σ，又有了下一个 R（利用再抽的 z）

一次抽 K 个 z

把每天的 Return 加在一起 → 长时间维度的 Return，然后取均值就可以了

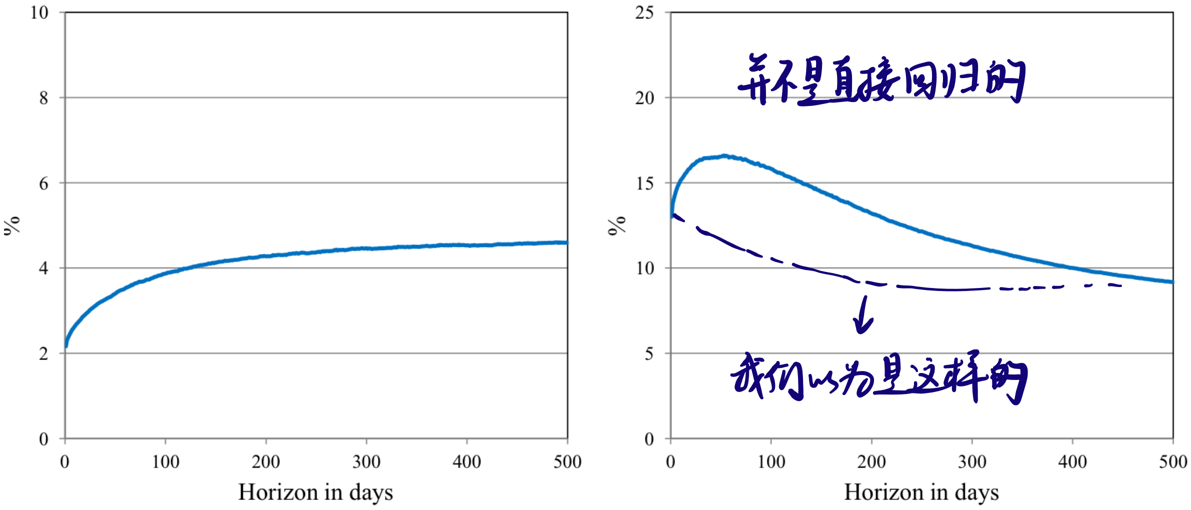
注意！非常奇妙的是 FHS 会出现很大的 loss 为什么呢？

（即使 Historical Data 中没有很大的 loss）

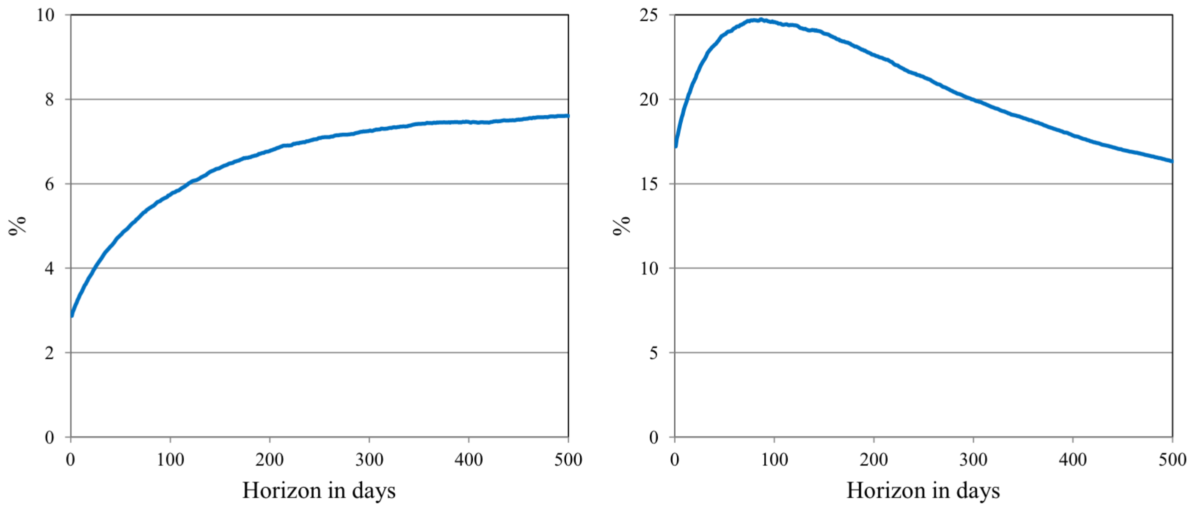
抽取 z 的时候 $\frac{R_i}{\sigma_i}$ 如果 σ_i 恰好特别小，当天的 $|z_i|$ 会很大。

在我们预测的时候却可能把这个 z_i 和很大的 $\hat{\sigma}_i$（预测值）组合，导致很大的 loss

下面我们来看几张图：



Notes to Figure: The left panel shows the S&P 500 VaR per day across horizons when the current volatility is one half its long run value. The right panel assumes the current volatility is 3 times its long run value



Notes to Figure: The left panel shows the S&P 500 ES per day across horizons when the current volatility is one half its long run value. The right panel assumes the current volatility is 3 times its long run value

如何在FHS中解决多变量的情况呢？

不是生成一个 z，而是生成一列 z（比如30个asset 有30个 z）

然后一次抽一列 z（保存了历史数据的 correlation）

接下来的方法都是一样的

IV 估计 DCC Model

我们还是要看长时间维度的情况

$r_{t+1} = D_{t+1} z_{t+1}$

r_{t+1} : vector of returns

z_{t+1} : vector of shocks

D_{t+1} : diagonal matrix containing the GARCH s.d. on the diagonal

$Var_t(t+1) = D_{t+1} \Upsilon_{t+1} D_{t+1}$

* mvrnorm 可以用来生成 correlated r.v.

At the end of day *t* the GARCH and DCC models provide us with D_{t+1} and Υ_{t+1}

Therefore a random return for day *t*+1 is

$$\breve{r}_{i,t+1} = D_{t+1}\Upsilon_{t+1}^{1/2}\breve{z}_{i,1}^{u} = D_{t+1}\breve{z}_{i,t+1}$$

where $\breve{z}_{i,t+1} = \Upsilon_{t+1}^{1/2}\breve{z}_{i,1}^{u}$

Drawing a new vector of uncorrelated shocks, $\breve{z}_{i,2}^{u}$, enables us to simulate the return for the second day ahead as

$$\breve{r}_{i,t+2} = \breve{D}_{i,t+2}\breve{\Upsilon}_{i,t+2}^{1/2}\breve{z}_{i,2}^{u} = \breve{D}_{i,t+2}\breve{z}_{i,t+2}$$

where $\breve{z}_{i,t+2} = \breve{\Upsilon}_{i,t+2}^{1/2}\breve{z}_{i,2}^{u}$

然后从 t+1 到 t+k 重复此过程

有了 Return 我们还可以算 VaR 和 ES

可以利用 FHS 实现此过程