Modelling Joint Distribution of Default
— Gaussian Copula Model

我们将介绍三个理论框架，今天要讲的是最简单的
(modelling correlated default)

有什么方法来估计这种多元的 Default 呢？

1. Use a particular distribution
   比如 multivariate normal distribution / multivariate t distribution
   模型的选择是没有限制的 → 你甚至可以选 asymmetric t distribution
   — more flexible, but 需要估计更多参数

2. 另一种办法就是 Copula functions
   — 这时我们只需要估计 univariate distribution for each risk factor，然后用 copula function 将它们复合起来

举个案例：例如我们有一个服从某个分布（非正态）的 return of S&P 500，还有一个服从另一个分布的 changes in 10-year CMT yield
我们可以用 Sklar Theorem（以后讲）和 Copula functions 来 combine the two univariate distributions to create the joint distribution

— Widely useful!
很广泛的应用于 modelling correlated default

Gaussian Copula 是用来 valuing CDO's of corporates，它是用来估计 joint distribution of the default times
(most commonly used method)

所以今天的内容是什么呢？

1) 先看一下 default rates

2) 再讨论 modelling default dependence 的问题

3) 最后讨论 one-factor Gaussian copula model of correlated default times

1) default rates

我们先来看一张图：

Global Corportate Default Rates by S&P Rating Category

(%)	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC/C
1981	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	2.27	0.00
1982	0.00	0.00	0.21	0.34	4.22	3.13	21.43
1983	0.00	0.00	0.00	0.32	1.16	4.55	6.67
1984	0.00	0.00	0.00	0.66	1.14	3.39	25.00
1985	0.00	0.00	0.00	0.00	1.48	6.44	15.38
1986	0.00	0.00	0.18	0.33	1.31	8.33	23.08
1987	0.00	0.00	0.00	0.00	0.37	3.08	12.28
1988	0.00	0.00	0.00	0.00	1.04	3.62	20.37
1989	0.00	0.00	0.00	0.60	0.71	3.37	31.58
1990	0.00	0.00	0.00	0.58	3.55	8.54	31.25
1991	0.00	0.00	0.00	0.55	1.67	13.84	33.87
1992	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	6.99	30.19
1993	0.00	0.00	0.00	0.00	0.69	2.62	13.33
1994	0.00	0.00	0.14	0.00	0.27	3.08	16.67
1995	0.00	0.00	0.00	0.17	0.98	4.58	28.00
1996	0.00	0.00	0.00	0.00	0.67	2.89	4.17
1997	0.00	0.00	0.00	0.25	0.19	3.47	12.00
1998	0.00	0.00	0.00	0.41	0.96	4.59	42.86
1999	0.00	0.17	0.18	0.19	0.94	7.28	32.35
2000	0.00	0.00	0.26	0.37	1.24	7.73	34.12
2001	0.00	0.00	0.35	0.33	3.22	11.23	44.55
2002	0.00	0.00	0.00	1.00	2.78	8.10	44.12
2003	0.00	0.00	0.00	0.22	0.56	3.97	33.13
2004	0.00	0.00	0.08	0.00	0.52	1.55	15.11
2005	0.00	0.00	0.00	0.07	0.20	1.71	8.87
2006	0.00	0.00	0.00	0.00	0.29	0.80	13.08
2007	0.00	0.00	0.00	0.00	0.19	0.24	14.81
2008	0.00	0.38	0.38	0.47	0.76	3.82	26.53

Annual default rates vary a lot

Source: Standard & Poors, *Default, Transition, and Recovery: 2008 Annual Global Corporate Default Study And Rating Transitions*, April 2, 2009, Table 2.

Note the elevated default rates during recession periods

大家都是在 recession 违约的

They are correlated !

另一个 default 是 correlated 的证据：

Summary Statistics for Global Corportate Default Rates by Rating Category

(%)	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC/C
Minimum	0	0	0	0	0	0.24	0
Maximum	0	0.38	0.38	1	4.22	13.84	44.55
Weighted long-term average	0	0.03	0.08	0.24	$\boxed{0.99}$	4.51	25.67
Median	0	0	0	0.21	0.85	3.72	22.25
Standard deviation	0	0.08	0.11	0.27	$\boxed{1.08}$	3.17	12.15

1%

根据 law of large number, weighted average 应该稳定在 1% 左右. 但是从数据上看, it varies a lot. 从侧面说明不是 independent

要注意的一个问题是要注意 default rate：5年的 default rate 是用指数运算做的：

例如 一年的 default rate 是 d 的话，那么 5年的 default rate 是 $1-(1-d)^5$

2) modelling default dependence

如何估计 default dependence 可不是很容易：我们先看一下一个正常的想法：

如果只有一个 obligor A，那么只有两种情况：

Obligor A	
Obligor A survives	Obligor A defaults

如果有两个 obligor A & B，会有四种情况：

	Obligor A	
Obligor B	Obligor A survives Obligor B survives	Obligor A defaults Obligor B survives
	Obligor A survives Obligor B defaults	Obligor A defaults Obligor B defaults

A 和 B 如果 correlated，那么它们都 survive & default 的可能性就很大

一切看起来都很直观，但这样有什么问题呢？

有 N 个 obligor 怎么办？ — 有 2^N outcomes，过于多维我们搞不出来

— 这也是为什么我们没有多元变量的二项分布的原因

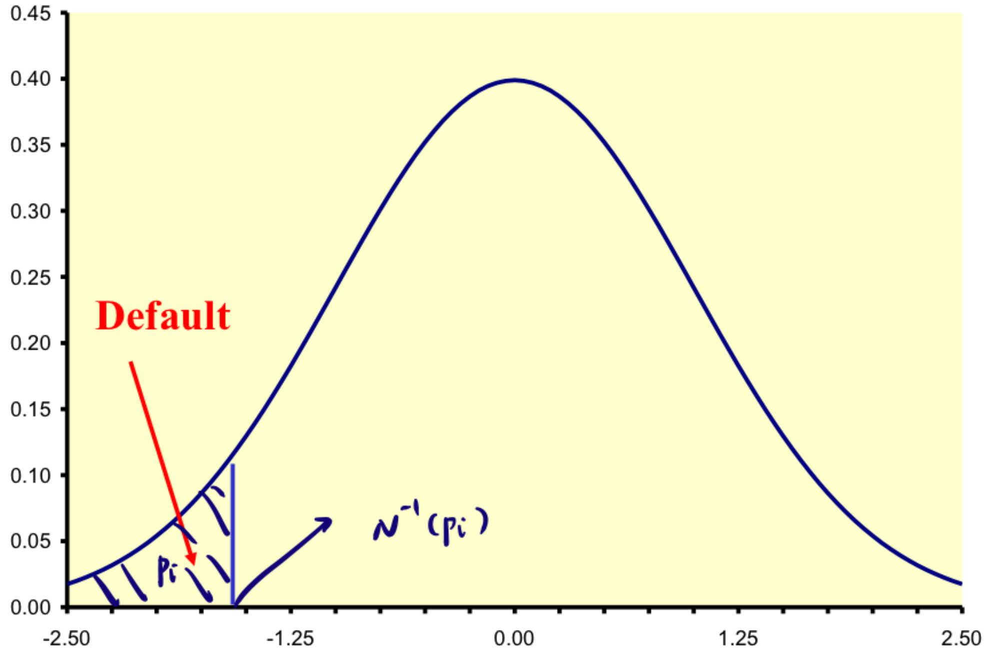
所以我们只能换一种方法：

对于每个 obligor，default event is driven by Gaussian (normal) r.v. Z_i

$i \to$ obligor i

如果 Z 在正态分布的左尾，那这个 obligor 就会 default

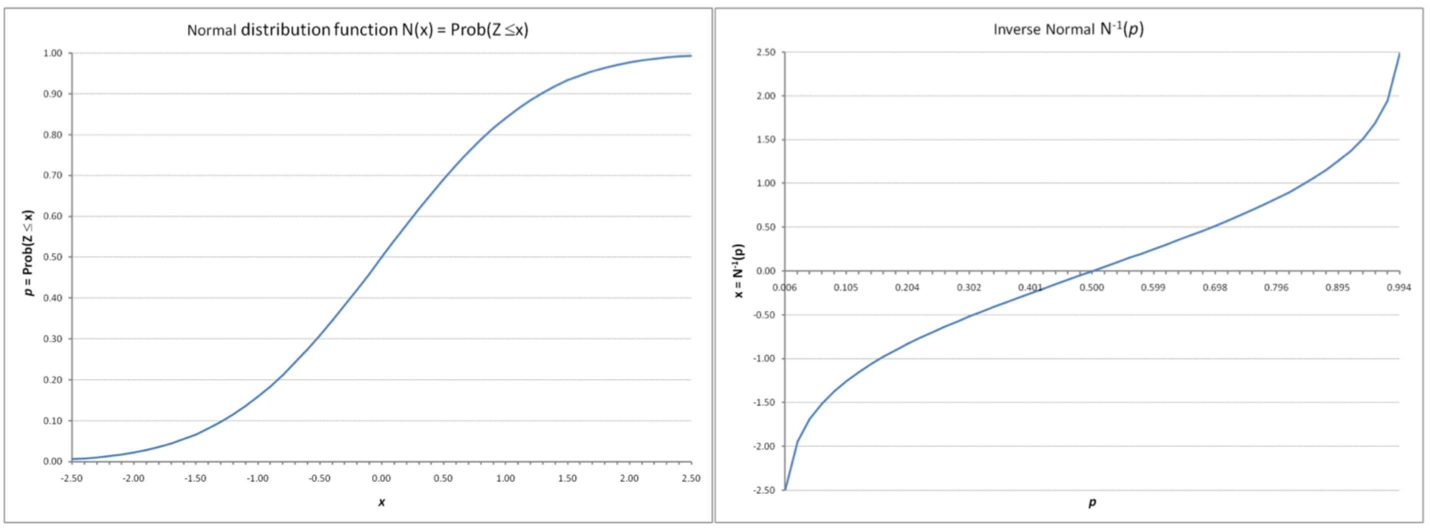
用下面这个图可以很好的说明：



补充一下基础知识：

Normal distribution function $p=N(x)$ converts a quantile x to a probability p. e.g. $0.05=N(-1.645)$

同样的，有逆函数 $x=N^{-1}(p)$，converts a probability p to a quantile x. e.g. $-1.645=N^{-1}(0.05)$，见下图：



If we want to simulate a default event that has a probability of 0.05, we can simulate the normal r.v. Z, and then say that default occurs if $Z \le -1.645 = N^{-1}(0.05)$.

接下来介绍一下本节课比较困难的地方：

$p = N(x)$ converts a quantile x to a probability p.

e.g. $0.05 = N(-1.645)$

Consider $x, y \in R$, $p = N(x)$, $q = N(y)$ 则 $p, q \in [0,1]$

Also consider a r.v. $U = N(Z)$, where $Z \sim N(0,1)$

因为 $prob(Z \in [x,y]) = N(y) - N(x)$，那么一定有

$$prob(U \in [p,q]) = q - p$$

U在[p,q]这个区间内的概率就是区间长度 $q-p$. 所以 $U = N(Z)$ is uniformly distributed on the interval $[0,1]$

- The transformation $U = N(Z)$ converts Normal r.v. Z to a uniform r.v. U
- The transformation $Z = N^{-1}(U)$ converts a uniform r.v. U to a Normal r.v. Z

那么有：For any distribution function F: The transformation $U = F(X)$ converts r.v. X to a uniform r.v. U. The transformation $X = F^{-1}(U)$ converts a uniform r.v. U to an r.v. with the given distribution function F

Q: 所以这里要懂么？

如果F不是连续函数怎么办？其实是无所谓的，U都是在 $[0,1]$ 的区间内，因为F作为一个函数，其自变量和因变量永远是一一对应关系

我们来看一个简单的例子：

Z_i 和 Z_j 服从标准正态分布，$Z_i = -1.82$，$Z_j = 0.37$

$$U_i = N(Z_i) = N(-1.82) = 0.03438$$

$$U_j = N(Z_j) = N(0.37) = 0.64431$$

U_i, U_j are uniformly distributed on $[0,1]$

$$-1.82 = N^{-1}(0.03438)$$

$$0.37 = N^{-1}(0.64431)$$

所以这个设置对我们来说到底有什么帮助呢？

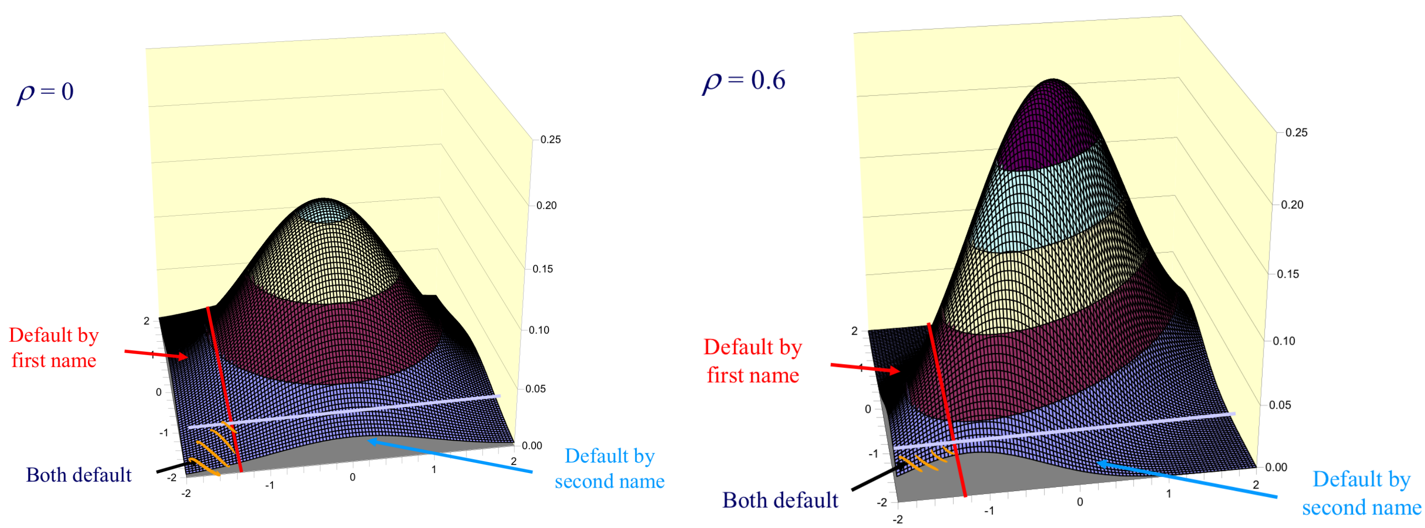
— Z_i 和 Z_j 可以是相关的

If we have two obligors i and j with default prob. p_i and p_j, then

- Obligor i defaults when Z_i is in tail, i.e. if $Z_i \le N^{-1}(p_i)$
- Obligor j defaults when Z_j is in tail, i.e. if $Z_j \le N^{-1}(p_j)$

Default dependence is determined by correlation ρ between Z_i and Z_j

我们用两张图示意一下：



上面的两张图适用于 a single period，虽然我们可以反复利用这种方法来解决 multiple periods 的问题，但我们还有更好的方法：

→ Gaussian Copula，directly model default times

我们令 τ 是 default time：$\tau \le t \rightarrow$ default

$\tau > t \rightarrow$ survive

接下来是比较讨厌的定义环节：

如果 h 是一小段时间，在这段时间内 default 的概率是 λh，那么 survive prob. 就是 $1-\lambda h$ （one period）

那么 multiple periods 的存活概率就是 $(1-\lambda h)^n$

令 $h=\frac{t}{n}$，那么 $Pr(\tau>t)=(1-\frac{\lambda t}{n})^n$

令 $h\rightarrow 0$，即 $n\rightarrow\infty$，那么 $Pr(\tau>t)=\lim_{n\to\infty}(1-\frac{\lambda t}{n})^n=e^{-\lambda t}$

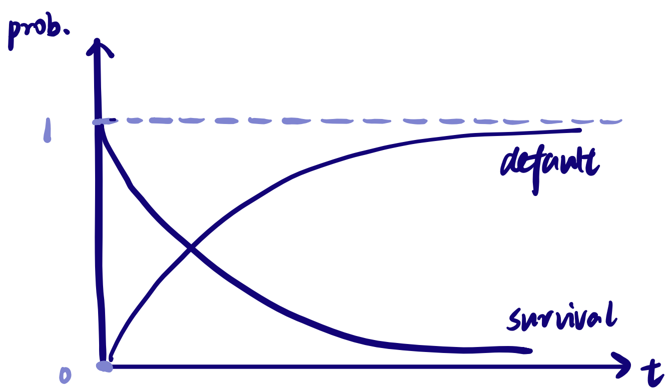
这样我们得到了两个公式

$$Pr(\tau\le t)=1-e^{-\lambda t}=F(t)$$

以及它的逆函数

$$\tau=F^{-1}(u)=-\frac{\ln(1-u)}{\lambda}$$

这里我们要注意一点：



从时间维度上看，所有的公司都会 default，但我们只想要一段时间

对于 multiple obligors, default time model 是什么样子呢？

Two obligors i and j with default times τ_i and τ_j

Probabilities that i and j default before t are

$$P_i = \Pr(\tau_i \le t) = 1 - e^{-\lambda_i t} = F_i(t_i)$$

$$P_j = \Pr(\tau_j \le t) = 1 - e^{-\lambda_j t} = F_j(t_j)$$

我们引入两个 standard Normal r.v.'s Z_i and Z_j

Then:

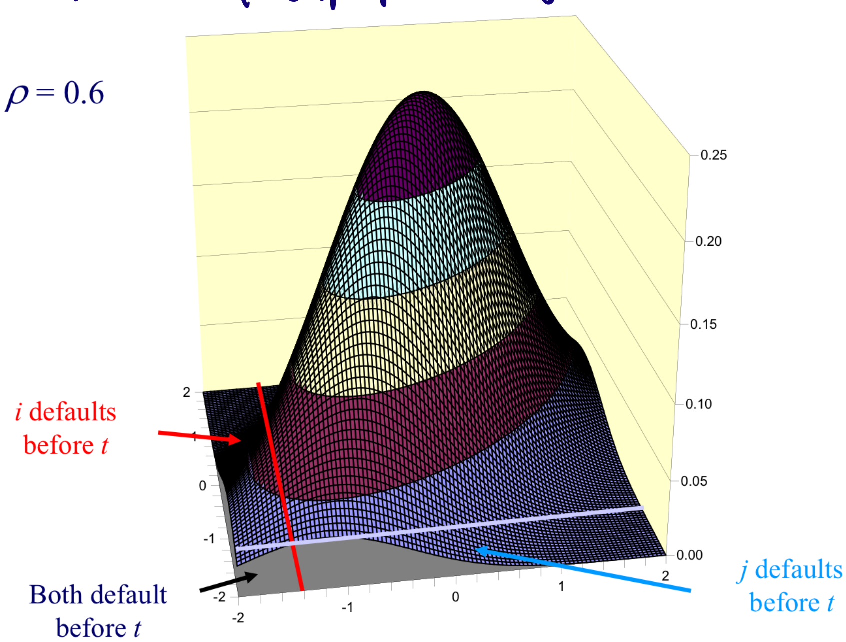
$\tau_i \le t_i$ (i defaults before t_i) when Z_i is in tail, i.e. if $Z_i \le N^{-1}(P_i)$

$\tau_j \le t_j$ (j defaults before t_j) when Z_j is in tail i.e. if $Z_j \le N^{-1}(P_j)$

Default dependence is determined by correlation ρ between Z_i and Z_j

这句话是什么意思呢？我们最终是 simulate correlated ρ's.

下面来看一个我们非常熟悉的图：



在这个图中我们的坐标轴变成了 default time

真正计算 correlated default 的机制是非常简单的，我们来举一个例子：

Let $\lambda_i = \lambda_j = 0.05$

首先，我们模拟出 z_i 和 z_j，例如 $z_i = -1.82$，$z_j = 0.37$

第二步是将其转换为 uniform r.v.'s：

$$U_i = N(z_i) = N(-1.82) = 0.03438$$

$$U_j = N(z_j) = N(0.37) = 0.64431$$

然后用前面得到的第二个公式算出 default times

$$\tau_i = -\frac{\ln(1-U_i)}{\lambda_i} = 0.69969$$

$$\tau_j = -\frac{\ln(1-U_j)}{\lambda_j} = 20.6738$$

同样的，default dependence 是由 z_i 和 z_j 的相关系数 $\rho_{i,j}$ 决定的

这样做有什么问题呢？ each obligor 都有不一样的 ρ

ρ 怎么估呢？ 我们估不出来

一个很正常的做法是用 One-factor Gaussian Copula Model 解决

$$z_i = \rho^{\frac{1}{2}} m + (1-\rho)^{\frac{1}{2}} \varepsilon_i$$

其中 m is a common factor.

ε_i is an idiosyncratic factor for obligor i

这个 ρ 会在下节课讲如何校正

所以我们怎么做呢？ ① 生成一个 standard normal $m \sim N(0,1)$

② 生成 Obligor-specific components $\varepsilon_i \sim N(0,1)$，for $i = 1, \dots, N$

③ 用 $\rho^{\frac{1}{2}} m + (1-\rho)^{\frac{1}{2}} \varepsilon_i$，就是我们需要的 z_i

④ 用 $N(z_i)$，得到 U_i

⑤ $\tau_i = -\frac{\ln(1-U_i)}{\lambda_i}$，得到 default times

我们还可以用 multi-factor model

$$z_i = \beta_1 m_1 + \beta_2 m_2 + \cdots + \beta_k m_k + \nu \varepsilon_i, \quad \text{where } \beta_1^2 + \beta_2^2 + \cdots + \beta_k^2 + \nu^2 = 1$$

$m_1, m_2, \cdots m_k$ 是 common factors，它们和 ε_i 可以服从非正态分布

接下来我们引入 random LGD：在我们之前的假设中，LGD 是固定的。

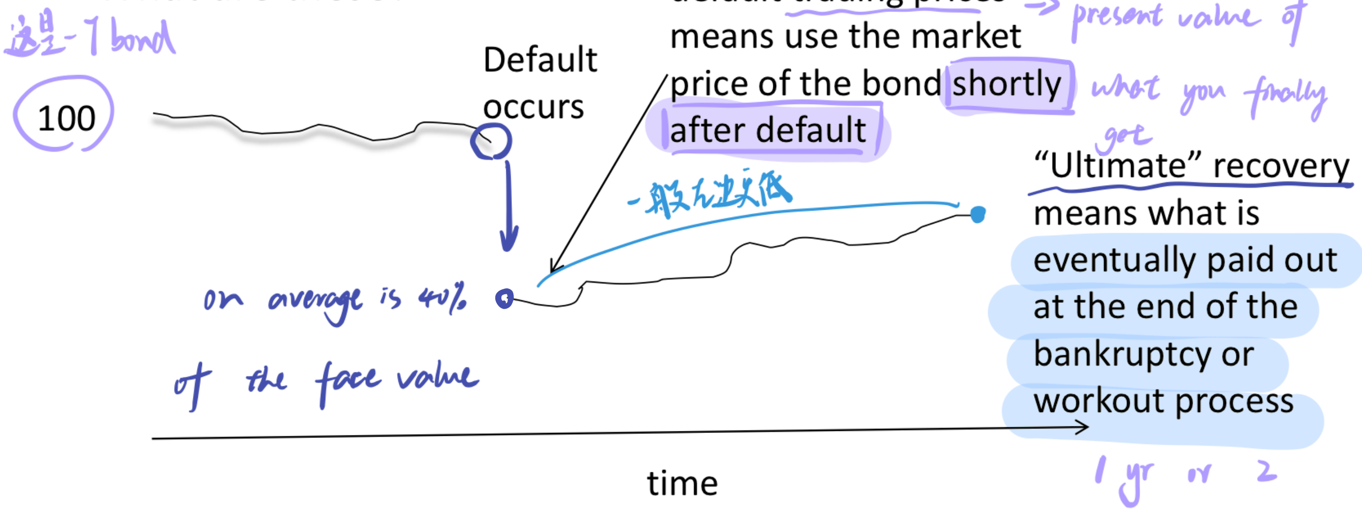
Copula correlation rho:	10.00%
Common factor m:	-1.1084
Constant LGD:	60.00%
discount rate:	2.00%
time horizon T:	5
Number of simulation trials (<= 10,000):	5,000

LGD = 60% is equivalent to recovery = 40%

There are two ways to think about recovery

- Recovery based on post-default trading prices → used in credit default swaps
- Ultimate recovery

What are these?



由于 60% LGD 是一个均值，而且两种计算 LGD 的方式得到的结果还不一样

So we allow for random LGD：

一种比较随意的方法是生成 $[0, 1]$ 内的随机数 a

$LGD = 0.4 + 0.4 \times (a - 0.5)$ 这种方法保留了均值的特性，但是这个方法不是很严谨。

另一种比较好的方法是用 Beta Distribution（见 HW9）

所以 ρ 如何调整呢？ Calibrating the Copula Correlation

- 为了使用 Gaussian Copula Model，我们需要
  1) 估计 default probabilities
  2) 估计 copula correlation

在上面的内容中，我们知道估计 ρ 是很关键的，因为 z_i 的生成是由 ρ 决定的。
但我们的公式中并没有用到 default probabilities，它是干什么用的呢？
用来校准 ρ 的。

For risk management purposes, it is common to use historical default probabilities (or rating agency "idealized" default probabilities) by rating category or rating modifier.

估计 copula correlation is more problematic. 我们的 model 是 artificial device to create default dependence in a tractable way. 我们很难解释 common factor m，也很难去 think about how the default time of an obligor should be related to m
— 我们并不知道 m 的实际意义

接下来我们先介绍 Default Correlation 的定义

如果有两个 obligor：α and β 假如 A 和 B 分别是 r.v. for the default event

$$A = \begin{cases} 1, & \alpha \text{ defaults} \\ 0, & \alpha \text{ does not default} \end{cases} \qquad B = \begin{cases} 1, & \beta \text{ defaults} \\ 0, & \beta \text{ does not default} \end{cases}$$

那么：

$$\text{Default Correlation}(\alpha \text{ and } \beta) = \frac{\operatorname{cov}(A, B)}{\operatorname{sd}(A)\cdot \operatorname{sd}(B)}$$

由于 A 和 B 是 binomial r.v.'s，有

$$sd(A) = \sqrt{P(A) \times (1-P(A))}$$，B 同理

$$cov(A,B) = E[A \times B] - E[A] \times E[B]$$

由于 A, B are binomial r.v.'s，$E[A] = P[A]$，$E[B] = P[B]$

那么 $cov(A,B) = P[A \text{ and } B] - P[A] \times P[B]$

我们有：

$$\text{Default Correlation} = \frac{P(A \text{ and } B) - P(A) \times P(B)}{\sqrt{P(A) \times (1-P(A))} \times \sqrt{P(B) \times (1-P(B))}}$$

这里要注意 default correlation 和 copula correlation 不是一回事

还要注意的一个问题是对于整个 portfolio，知道每一对 obligator 的 correlation 并不意味着我们掌握了所有的信息 — 但我们先不管这个

上面的式子是利用历史数据来算 default correlation

假如我们想计算 default correlation of two B-rated companies over one year，那我们可以将 P(A) 和 P(B) 设置为 historic average one-year default rate for B-rated companies

P(A) 和 P(B) 是很好得出，但 P(A and B) 怎么得到呢？

$$\text{joint probability} = \frac{\frac{X(X-1)}{2}}{\frac{Y(Y-1)}{2}} = \frac{X(X-1): \#\text{ of defaulting pairs}}{Y(Y-1): \#\text{ of possible pairs}}$$

其中 X is the number of B-rated companies defaulting in a year

Y is the number of B-rated companies available to default

* joint probability 是 sample period 的均值 — 这就是 P(A and B)

时间维度不一定要选一年的，也可以选多年的

我们会发现：1) 评级↓ default correlation ↑

2) 随着时间↑ default correlation 先↑再↓

— 注意这个观测结果非常有趣

1) ## Default Correlation Estimates from Lucas

Exhibit 22. Historic Default Correlations

	Aaa	Aa	A	Baa	Ba	B
One-Year Default Correlations * 100						
Aaa	0					
Aa	0	$\boxed{0}$				
A	0	0	0			
Baa	0	0	0	0		
Ba	0	0	0	0	2	
B	0	1	0	1	4	7
Two-Year Default Correlations * 100						
Aaa	0					
Aa	0	0				
A	0	0	0			
Baa	0	0	0	0		
Ba	0	1	1	1	6	
B	0	1	1	2	10	16
Three-Year Default Correlations * 100						
Aaa	0					
Aa	0	0				
A	0	1	1			
Baa	0	0	0	0		
Ba	0	2	2	1	9	
B	0	2	3	3	17	$\boxed{22}$
Four-Year Default Correlations * 100						
Aaa	0					
Aa	0	0				
A	0	1	1			
Baa	0	1	1	0		
Ba	0	2	3	3	13	
B	0	2	4	5	22	27
Five-Year Default Correlations * 100						
Aaa	0					
Aa	0	0				
A	0	1	1			
Baa	0	1	1	0		
Ba	0	3	4	3	15	
B	0	4	6	7	25	29

→本就不default

default corr. 比较低

从上到下↑

本来就是high-leveraged

default是因为business cycle

Our conclusions from studying the results in Exhibit 22 are:

- default correlations increase as ratings decrease;
- default correlations initially increase with time and then decrease with time.

We guess that default correlations increase as ratings decrease because lower-rated companies are relatively more susceptible to problems in the *general economy* while higher-rated companies are relatively more suscept… Low-ra… fault al… into def… turn. As economic conditions affect all low-rated credits simultaneously, defaults among these credits are likely to be correlated. In contrast, defaults of highly-rated companies, besides being rare, are typically the result of company-specific problems. As these problems are by definition isolated to individual

Correlation estimates are multiplied by 100, e.g. 22 means 22%

我们看到default correlation 是比较低的

这种情况背后的原因是什么呢？

通常的解释是 low-rated company default 是因为 business cycle，而 high-rated company default 是因为 company-specific problem

2) 的原因是什么呢？

先↑ 是由于我们选取的 joint prob. 是两家公司在同一时间内同时违约的事件，极端一点说，A 和 B 几乎不可能在同一天 default，但会在同一年内 default.

两家公司在 2018～2020 年都违约要比它们在 2019～2020 年内都违约发生的可能性更大一些

我们再来看 default correlation. 它和 copula correlation 不是一个东西

我们可以怎么搞呢？

Default Correlation 是基于历史数据得出的. Copula correlation 是在 simulation 中使用的

我们可以直接把 default correlation 拿来用

但这个方法是错误的！

为什么是错的呢？有以下两个原因：

1. joint probability 用到的 x 和 y 实际是不知道的
   — 这个数据我们没有 (very demanding for data) need rating agency data
2. 如果我们有一个 diversified portfolio, 我们可能不在乎 P (A and B), 而只在乎 variability of annual default rates
   只在乎 1% of the portfolio 还是 2% of the portfolio 违约了. 至于这 1% 到底是哪个 obligor 我们不在乎

Default Rates by S&P Rating Category

Risk management 在意的是 BB 那一列的 variability — 变化很大

Global Corportate Default Rates by S&P Rating Category

(%)	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC/C
1981	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	2.27	0.00
1982	0.00	0.00	0.21	0.34	4.22	3.13	21.43
1983	0.00	0.00	0.00	0.32	1.16	4.55	6.67
1984	0.00	0.00	0.00	0.66	1.14	3.39	25.00
1985	0.00	0.00	0.00	0.00	1.48	6.44	15.38
1986	0.00	0.00	0.18	0.33	1.31	8.33	23.08
1987	0.00	0.00	0.00	0.00	0.37	3.08	12.28
1988	0.00	0.00	0.00	0.00	1.04	3.62	20.37
1989	0.00	0.00	0.00	0.60	0.71	3.37	31.58
1990	0.00	0.00	0.00	0.58	3.55	8.54	31.25
1991	0.00	0.00	0.00	0.55	1.67	13.84	33.87
1992	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	6.99	30.19
1993	0.00	0.00	0.00	0.00	0.69	2.62	13.33
1994	0.00	0.00	0.14	0.00	0.27	3.08	16.67
1995	0.00	0.00	0.00	0.17	0.98	4.58	28.00
1996	0.00	0.00	0.00	0.00	0.67	2.89	4.17
1997	0.00	0.00	0.00	0.25	0.19	3.47	12.00
1998	0.00	0.00	0.00	0.41	0.96	4.59	42.86
1999	0.00	0.17	0.18	0.19	0.94	7.28	32.35
2000	0.00	0.00	0.26	0.37	1.24	7.73	34.12
2001	0.00	0.00	0.35	0.33	3.22	11.23	44.55
2002	0.00	0.00	0.00	1.00	2.78	8.10	44.12
2003	0.00	0.00	0.00	0.22	0.56	3.97	33.13
2004	0.00	0.00	0.08	0.00	0.52	1.55	15.11
2005	0.00	0.00	0.00	0.07	0.20	1.71	8.87
2006	0.00	0.00	0.00	0.00	0.29	0.80	13.08
2007	0.00	0.00	0.00	0.00	0.19	0.24	14.81
2008	0.00	0.38	0.38	0.47	0.76	3.82	26.53

Data summaries like these are freely available, but the underlying default data are not. This is not a big issue if you care only about the variability of annual default rates.

Source: Standard & Poors, *Default, Transition, and Recovery: 2008 Annual Global Corporate Default Study And Rating Transitions*, April 2, 2009, Table 2.

Note the elevated default rates during recession periods

所以我们怎么做呢？

Summary Statistics for Default Rates by S&P Rating Category

Recall this table from an earlier set of slides

这种行为和我们算 implied volatility 很像

— 校正关键变量以捕捉 key feature of data

Summary Statistics for Global Corportate Default Rates by Rating Category

(%)	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC/C
Minimum	0	0	0	0	0	0.24	0
Maximum	0	0.38	0.38	1	4.22	13.84	44.55
Weighted long-term average	0	0.03	0.08	0.24	0.99	4.51	25.67
Median	0	0	0	0.21	0.85	3.72	22.25
Standard deviation	0	0.08	0.11	0.27	$\boxed{1.08}$	3.17	12.15

我们非常在意这个数字 → for risk management purpose

我们就想搞出这个

Rather than calibrate the model to P(A and B), you can calibrate the model to the variability of annual default rates. E.g., if your portfolio is BB, then calibrate to match the std. dev. of 1.08

Source: Standard & Poors, *Default, Transition, and Recovery: 2008 Annual Global Corporate Default Study And Rating Transitions*, April 2, 2009, Table 3.

Copula correlation rho:	20.00%		Standard deviation of simulated default rate:		1.68%	这样这个会被调整至 1.08%			Default Rate
Common factor m:	-1.2522							Totals:	0.00%
Time horizon T:	1		我们调整这个						$\frac{\Sigma \text{ defaulted } \#}{\Sigma \text{ principal } \#}$
Number of simulation trials (<= 5,000):	5,000								
Obligor	Principal Amount	S&P Rating	1-year Default Probability	1-year Survival Probability	Annualized Default Rate (continuous)	Idiosyncratic factor ε_i	Correlated Normal r.v. Z_i	Default Time	Defaulted Amount
1	$10,000,000	BB	0.990%	99.010%	0.0099	-0.6413	-1.1336	13.82	$0
2	$10,000,000	BB	0.990%	99.010%	0.0099				$0
			0.990%	99.010%	0.0099				$0
			0.990%	99.010%	0.0099				$0
			0.990%	99.010%	0.0099				$0
			0.990%	99.010%	0.0099				$0
			0.990%	99.010%	0.0099	-0.2389	-0.7737	24.92	$0
			0.990%	99.010%	0.0099	-1.1365	-1.5765	5.95	$0
			0.990%	99.010%	0.0099	0.5862	-0.0357	66.85	$0
			0.990%	99.010%	0.0099	0.8242	0.1771	84.90	$0

First tab (and the macro) calculates default rate

First tab (and the macro) simulate defaults given probability and copula correlation. First tab also calculates annual default rates.