Introduction to Value-at-Risk
& Historical Simulation Method

- Value-at-Risk

  有三种方法计算它：Historical Simulation → 本课内容
  Delta-Normal
  Monte Carlo

最基本的衡量 risk 的方式是什么？→ Partial Derivative (Δ, Γ, θ)

但是在 aggregate level 很难直观描述，因为要考虑的 factor 太多了。我们需要一个数据直观反映一切：Value-at-Risk

现实生活中需要面对一个问题：worst case 是什么？ VaR 是一个 "tricky" answer. 这体现了 VaR 的特质：① 反映了 aggregate portfolio 的情况
② 是统计 / 概率的问题
— "最坏的情况是，我们明天就破产了 =w="

那么如何衡量 VaR 呢：我们先从 Profit / Loss 开始

We try to estimate the distribution of P/L

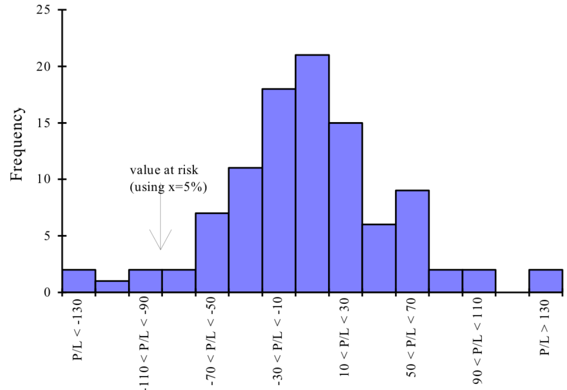
How to calculate? $P/L = V_{t+1} - V_t$ (± cash) Value 就是 market value 也可以是 model 算出来的

* Sometimes we ignore the cash because it's too small

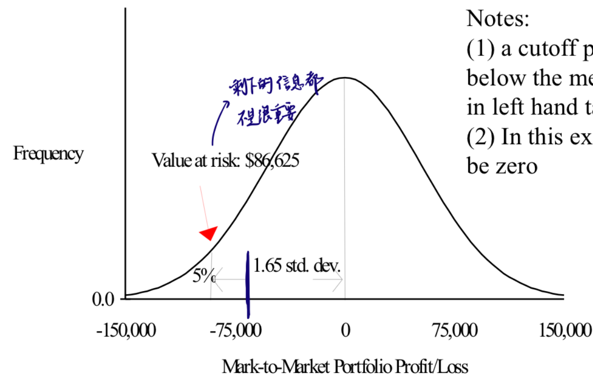
然后我们找一个 one-day horizon，用我们喜欢的 5% 概率来康康亏多少钱

实际上是找 5% quantile 如果用正态分布，就是 $\mu - 1.65\sigma$ 的值

最关键的是我们如何 Estimate the distribution.



Hypothetical Daily Mark-to-Market Profit/Loss on a Portfolio Consisting of a Single Forward Contract (in $thousands)



Notes:
(1) a cutoff point 1.65 standard deviations below the mean leaves 5% of probability in left hand tail (for Normal distribution);
(2) In this example mean is assumed to be zero

做出上面的图需要大量工作. 然后只提供 $86,625 一个数字

(Only x% quantile matters)

VaR 是起的一个漂亮名字. 实际上只是一个 quantile

	Date	Profit/Loss	
1	18-May-94	170,477	
2	28-Jan-94	154,823	
3	10-Jan-94	151,698	
4	7-Mar-94	129,852	
5	16-May-94	101,727	
6	23-Mar-94	95,477	
7	22-Apr-94	89,227	
8	27-Apr-94	82,977	
9	26-Apr-94	79,852	
10	10-May-94	73,602	
.	.	.	
.	.	.	
.	.	.	
91	18-Apr-94	-104,523	
92	24-Mar-94	-107,320	
93	9-May-94	-110,773	
94	3-Jan-94	-113,927	
95	17-Feb-94	-118,094	
96	23-May-94	$\boxed{-120,148}$	→ Value at Risk
97	18-Feb-94	-131,250	
98	4-Apr-94	-179,523	
99	6-May-94	-204,523	
100	28-Apr-94	-210,445	

这是 P/L on $10 million of par value of 30-yr. US Treasury bond, held during first 100 days of 1994

这种方式非常简单 — "Naive" approach

— "你们啊, too young, too simple, sometimes naive"

我们要注意的一点是 100 个数据太少了, 这使我们很难估计数据的 tail. 而 VaR 本身就是 tail. 在实际操作中, 我们需要 2000 + 的数据. 而这已经是 8 年前的数据了. 相关性会非常差

存在的另一个问题就是时间. 上面用的是30年的 bond

← 这两个时间点的 risk 差不多 →

29年6个月

29年10.5个月

May 1994

BUT: bank portfolio 一般比较短 (Short-term instruments)

我们不能用这6个月的 P/L ——×——> 来估计 1 month 的 risk

6 months　　Risk 差的很多！　　1 month (remaining to maturity)

像上面的图，follow the bond 是正确的选择，因为 30 年很长

follow stock 也可以，因为 stock 的 maturity 是无限期的，但是 short-term instruments 太短了，此时我们 follow one-month interest rate，用历史数据中的 one-month r 来用在 one-month bond 里

接下来我们用一个例子来理解一下：这是更为高明的方法

e.g. Long THB face value 5 billion, semi-annual 22.5%

Borrowing USD face value 50 million, semi-annual 6%

Market Value (In USD):

$$\underline{S_{THB}} \times \left[\frac{\text{THB } 562.5 \text{ million}}{1+0.5\,\underline{r_{THB,6}}} + \frac{\text{THB } 5.5625 \text{ billion}}{1+\underline{r_{THB,16}}}\right] - \left[\frac{\text{USD } 1.5 \text{ million}}{1+0.5\,\underline{r_{USD,6}}} + \frac{\text{USD } 51.5 \text{ million}}{1+\underline{r_{USD,12}}}\right]$$

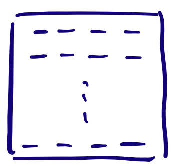
(exchange rate)

* 5 billion × 0.5 × 22.5% = 0.5625 billion

受到 5 个因素的影响（用蓝线标出）

（这是我们站在 1998年1月30日）

Jan 30

（手上有过去 250 天的 data base）

现在我们用 database 的 % change 来 simulate 今天的变化：Δ from day 1 to day 2 in database = Δ from today to tmr 为什么呢？理论上可以用绝对值，log return，但这个更简单

然后我们用同样的道理算 5 个因子，再算 portfolio value　* 利率的时间有变化

我们再重复 250 次　注意：我们的 % Δ 都是在同一天记录的，所以如果五个 factor 间有什么 correlation 会自动包含于数据中，我们也不用对 distribution 做出任何假设，因为只是照搬了 database 的 distribution。

再对 250 个数据从小到大排列，取 5% 的最大损失

这里我们不是用 random walk 生成，而是用上了所有的历史数据

接下来我们讨论一个现实问题：

有一个 30年的 interest rate swap，如果我们用 treasury bonds/notes 对冲，每天（共 252×30 =7560 天）都需要计算 cash flow，所有的 cash flow 都需要对应的 interest rate 来求折现，我们只能利用 market quote.

e.g. 若有一个 8-month cash flow，需要线性预测：

$$r_{USD,8} = \frac{2}{3} r_{USD,6} + \frac{1}{3} r_{USD,12}$$

实际上没这个东西，只是一种标记

如果有 5-year 的 maturity，我们应该用 government bond rate，interest rate AAA rate，还是别的什么？ 取决于你的 portfolio

假设 portfolio 里面有 BBB，不能用 AAA rate 来折现，但我们用的是差值

我们拥有的如果是 well-diversified common stock，就很容易算了

如果 long junk bond，hedge interest rate using swap

→ 需要很多 term structure （junk bonds, interest swap, 用于对冲的产品）

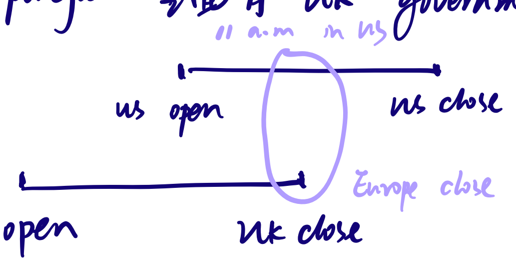
— 我们的 portfolio 可能很复杂，这要求我们有更简单的计算方式

从概念上一切都很简单，但数据是哪来的？

比如 Alibaba，以前还没有上市，我们需要类似公司的数据来估计，which is hard.

再比如，your portfolio 里面有 uk government bond，但假如英国这天放假怎么办？

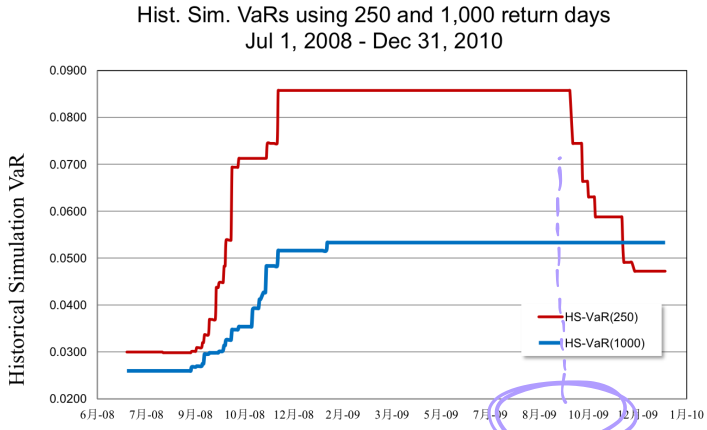
或者



对于香港，新加坡，东京...的市场呢？

—没有办法

Historical Simulation Method



• Historical Simulation 是有一些问题的，它的数据量的大小很难控制，如果数据太大了可能有 irrelavent 的问题，但数据太小了会有其他的问题：

我们来看右侧的图，08年9月到10月的loss如果以250 days的维度衡量，VaR的值会非常大，这影响一直持续到09年9月，一次 Loss 不应该有如此长时间的影响，所以250 days 不是一个好的 measure

• 那么 Goldman Sachs 是怎么解决这一问题的呢？ — They weight

R_{t-2} R_{t-1} R_t G & S 施加了不同的权重

γ γ γ ：我们之前在每个时间点上的赋权是相等的

$t+1-\tau$

--- $t-2$ $t-1$ $(\tau=2)$ t $(\tau=1)$

Goldman Sachs 对 Returns 进行了排序：

5.1%	0.0006
3.9%	0.00008
⋮	
-4.5%	0.0004
-4.7%	0.002
-5.9%	0.0012

赋予了每个 return 一个权重，然后 Normalize 使其相加为1，这个值可以看作 probability

VaR

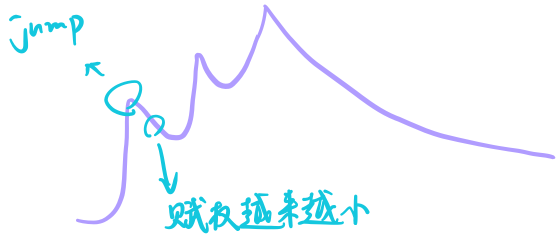
$\boxed{-3.8\%}$ 0.0009

-5.9% 0.0012

$\Sigma = 0.01$

接着我们从下到上找到 weight sum to 1% 的情况，比如加完是很有可能加不出来 1%，这时候用 interpolation 就可以了

• 这种方法可以看作 "Smaller Sample"，因为 More Recent Data 被赋予了 Higher Weight



→ more reasonable

- Goldman Sachs 每年会看到 12 个 exceptions 左右 (252×5%)

  但为什么我们只看到了 0 个, 2 个呢? 不是模型估错了. 是什么被 capture 的问题

  We observe the portfolio: $t \longrightarrow t+1$

  然后 we measure the risk of the fixed portfolio

  如果 Goldman Sachs makes portfolio trade, profits 不会记在 VaR 中. 但是会被 recognized as profit. 显然 GS 挣钱的时候比较多, 所以可能 fixed portfolio 本身在亏损. 但是一番操作之后靠 trade 让当日的 loss 减少了. 因此 P/L 一般都高于 VaR

  在上面的理论中有一点要提及: 因为 profit 是立刻记录的, 所以会反映在当日的 P/L 中

  如果有延迟的话那当日的 portfolio loss 还是会落在 VaR 下面

  GS 喜欢这样, 如果实际上 exception 是 5%, 但 by chance 可能一年有 17 天 exception, 数字看起来就不好看 —— 一切都是为了 "Good Number"

Estimating Variances

- 有几句话要讲. 首先是方法:

Unbiased : $\frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}(r_t-\bar{r})^2$

Maximum Likelihood : $\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(r_t-\bar{r})^2$

? : $\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}r_t^2$ → for daily return financial data

* $\bar{r}=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}r_t$ is the sample mean

$\sigma^2 = E[r_t^2] - \mu^2$

当我们讨论 daily return 时，μ 一般是 0.0004，那么它的平方 1.6×10^{-7} 更小，几乎可以忽略不计了 error will be very small

但是这里 r_t 难道不是很小么？维度小比例也小么？

Why don't we do the optimal thing？我们做了什么假设？

我们假设我们不知道 μ 才用前两种方法

08年 9月，10月，11月 average return is -1% per day

在 9月初我们知道这一点么？我们不知道，但我们知道 average 一定不是 -1%

这时候如果我们用第一、二种方法，我们就错了

Delta - Normal Method

- 我们要做一些假设：

  I：我们看到什么 market factor 都是正态分布的

  —"你一定就是正态分布了吧""不，我不是正态分布，我是 Jason""好的正态分布"

  II：我们 replace the values by delta / linear approximation

  Why？returns ~ N( )，linear combinations of N~( ) is still N~( )，这样所有的 porfolio value 也是 ~N( ) 算出来它的 μ 和 σ，我们就知道 VaR 了

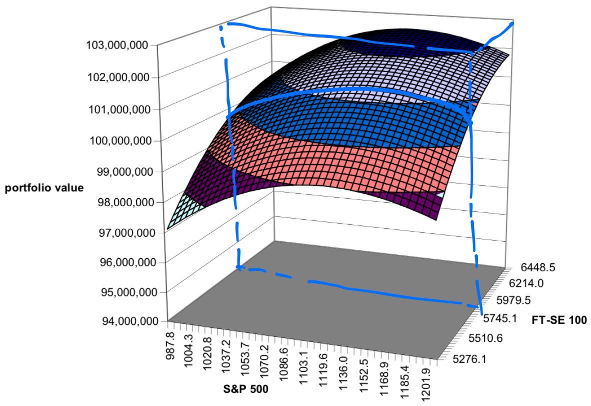
- 下面来举一个案例：构建一个理想化的 Equity Porfolio

- $110 million in well-diversified portfolio of large cap. U.S. equities, perfectly correlated with S&P 500
- 500 FT-SE 100 index futures contracts
- Short 200 S&P 500 futures contracts
- 600 written FT-SE 100 index call options with strike level of 5,875
- 800 written S&P 500 index calls with strike level of 1,100
- Net value = 110 million – value of written options
  = USD 101,485,220

注意 future contract 的 value 是 0

所以我们 porefolio 的 value 取决于我们 cash position 的 value（因为我们用 cash 去买了）

什么意思呢？position in actual stocks



negative Γ on S & P 500

In this figure, the exchange rate is held fixed at level of USD 1.6271/GBP

(非常复杂)

- Portfolio A: 50,000 Google option ($\Delta = 1$), ignore the Γ
  Portfolio B: 50,000 Google stocks

> risk should be same

两个 portfolio 的 Δ 是一样的 → 但是我们认为 A 和 B risk 一样的. B 的 risk 是非常好算的

- 举一个简单的案例: FF 3-factor model

Stock V = 1.2 × market − 0.7 SMB + 0.3 HML

risk是什么呢?

— 可以看作投了 \$1.2 的 mkt index, −\$0.7 的 SMB portfolio, +\$0.3 的 HML portfolio

ignore the residual

太多了!

- 假如 JP Morgan 有 700,000 interest swaps

我们怎么想呢? Replace the portfolio with zero-coupon bond portfolio with the same risk (same partial derivative)

- 我们再回到上面的 portfolio 中来, 来估计 market factor. 时间有限, 先来康:

- S & P 500
- FT-SE

> 2 exposures

↳ 不是太复杂, 只有5个 positions, 但我们要将它减至2 exposures, 然后计算简化后 portfolio 的 VaR

- Portfolio delta with respect to S & P 500 is $\boxed{4,864}$ 哪来的呢?
(4,864 units of index)

- 110 million cash position :

$$\frac{110,000,000}{1097.6} = 100,218.7 \text{ indexes}$$

(S & P 500 Index Price)

那么 delta 是 $\boxed{100,219}$ (我们约为整数了)

- CHEAT HERE ! 我们接下来要 overlook the distinction of futures & forward

$S_0 \rightarrow S_T - F$ ※ 这里我们是想看 S & P 500 future 的 Δ (0部分)

$t \qquad T$

相当于 you pay late , you need to pay extra money

$F = Se^{(r-d)(T-t)}$ — " cost of carry " formula

pay late

you miss the dividends

$(r=0.05, d=0.014, T-t=0.3836)$

$e^{(r-d)(T-t)} > 1$ 因为 $r>d$ → 算出来是 1.01391 : index 变化 1 futures 变化 1.01391

(traditional)

我们需要 quantity 正常 multiplier 是 250，那么 futures position 的变化是 253.48

我们 short 了 200 S & P 500 index futures ，那么 futures delta 是

$-200 \times 253.48 = \boxed{-50695}$

- Options Position

"per index" basis , delta is 0.55825 → 用 B-S formula 算出来的 . 因为 option 是欧式的

multiplier 是 100 有 -800 S & P 500 options ，那么 delta 是

$-800 \times \underbrace{55.825}_{100 \times 0.55825} = \boxed{-44660}$

$4864 = 100219 - 50695 - 44660$

VaR 是多少呢? s.d. of index return 1% per day

1.65% × 5.339 million

由于 index is 1097.6 , 4864 × 1097.6 = USD 5.339 million 投在了 index 里

下面讨论 porefolio delta with respect to FT-SE : $\boxed{1,734}$

- Futures Position

$F = Se^{(r-d)(T-t)}$ d = 0.0163,   F = 1.0131

multiplier is 10 和 US 不一样，是 exchange 定下来的. US 是吸引 institution 的

delta of futures position is $500 \times 10 \times 1.0131 = \boxed{5066}$

- Options Position

" per index " basis, delta is 0.553

multiplier is 10, 有 -600 FTSE index options, 那么 option delta 是

$-600 \times 5.553 = \boxed{-3332}$

1734 = 5066 - 3332 ✓

由于 index = 5862, 1734 × 5862 = GBP 10.165 million in index

把它换成 USD 1.6271 × 10.165 = 16.541 million in index

综 ★○△□▽ 所述，这个 porefolio 相当于："equivalent"

- USD 5.339 million in S & P 500 index
- USD 16.541 million in FT-SE 100 index

我们要用 whole-period : one month （因为我们在 money management 的角度）（对冲基金用的是 one day） 我们用 dollar position，需要 s.d. of two index 我们还必须知道 correlation 当 horizon 变长，expected return 是非常重要的，用 $u_1 = 1\%$，$u_2 = 1.25\%$

U.S. stocks 有 dividends，但 futures / options 没有. 那怎么办呢？有两种方法：

1. 把 dividend 加进去 （上面的 1% 和 1.25% 是没有 dividends 的）
2. 用包含了 dividend 的 return，再把 dividend 减去

最后的 Wrap up：计算 VaR，根据 Normal Distribution 只需 $\mu + \sigma$

μ:

$$E[OV] = X_1 \overset{\uparrow\, 0.01}{\mu_1} + X_2 \overset{\uparrow\, 0.0125}{\mu_2} + D = \overset{0.38848}{0.388} \text{ million}$$

$X_1 \downarrow 5.339$, $X_2 \downarrow 16.341$, $D \downarrow 110\,(0.014/12)$ dividends to be received

是 position

σ:

$$Var[OV] = X_1^2 \sigma_1^2 + X_2^2 \sigma_2^2 + 2 X_1 X_2 \rho_{12} \sigma_1 \sigma_2 = 1.647 \text{ million}^2$$

$\sigma_1 \downarrow 0.061$, $\sigma_2 \downarrow 0.065$, $\rho_{12} \downarrow 0.55$

1.647221

1.2834411

$\sigma = 1.283$ million

$$VaR = |\mu - 1.645 \times \sigma| = 1.722535$$

1.734?

Delta - Normal Method

- 有关 futures 和 forward 的比较问题：

  用黄金举一个案例：

Suppose 12:49 pm today you established a long position in gold future contract. 我们不考虑 margin，所以 zero CF today.

Futures Price		Cash Flow
F_t	有人在这里进入contract	$F_t - F_t$
F_{t+1}		$F_{t+1} - F_t$
F_{t+2}	A B	$F_{t+2} - F_{t+1}$
$\vdots$	从这天开始，他们的 CF 是完全一样的	$\vdots$
$F_T = S_T$		$F_T - F_{T-1} + S_T - F_T$

加在一起，如果不考虑时间，$S_T - F_t$ 是 CF 的加总

以上是 future 的情况，接下来我们讨论 Forward

Time	Cash Flow
t	0
$\vdots$	$\vdots$
T	$S_T - F_t$

为什么我们用 future，即使 Cash flow 和 forward 差不多？有两个原因：

① 不同时间进入，price 是不一样的，所以 forward contract 也是不一样的

→ 因此我们没有 forward 的二级市场

② future CF 最大是 one day price change. forward 有很大的 credit risk.（单付的最多的钱）

因为价差很大（3个月的累积与每天的变化）

- Forward Contract 是非常自然的，我们买东西提前付款实际上是一种 forward contract 而 future 的 cash flow is a mess 但我们还是喜欢 future
- Future Contract 限制了现金的流出

• 接下来我们回顾一下 Value-at-Risk，有时它的单位是 \$，有时是 %

VaR 不一定选 5%，也可能选 2.5%，1%

$VaR = \mu - k \cdot \sigma$

5%： $k = 1.645$ 2.5%： $k = 1.96$ 1%： $k = 2.33$

$k \downarrow$ VaR $\uparrow$

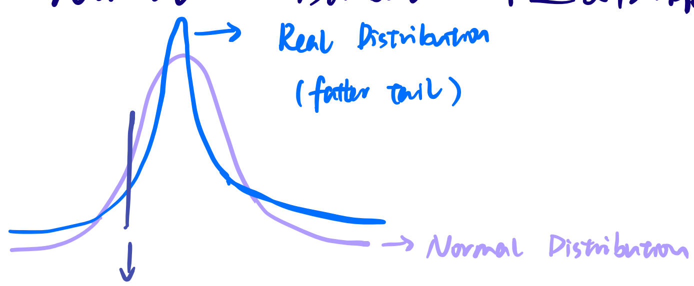
如果 holding period $\downarrow$ s.d. $\downarrow$，VaR $\downarrow$

• 上节课的做法有什么问题吗？

I： Based on Linear / Delta approximation, portfolio value is not a linear function of the underlying market factors.

指 Delta 虽然相当了，但是 Γ 可能不为 0，所以 portfolio 的 delta 在变化之中

II： Normal Distribution 不是很准确



III： Delta is partial derivative，但我们只在 beginning of the period 算了一下并假设它长时间不变，而事实上它是变化的，有时候会有极端情况

e.g.： at the money call option $\Delta = \frac{1}{2}$，但在这一天结束时，Δ 可能是 0 或 1，这就有了很大的差距

IV：我们对 exchange rate 的 treatment 是有一些问题的

e.g. 另 A established a long position in FT-SE future contract position

另 B 不喜欢 future，B 用 USD 换成 GBP，买 British Stock，一个月后卖掉，换$

A 的 position 不需要 CF，持有一个月

假如一个月的时间里 UK stock 没有什么变化，我们做一下简单的假设

stay constant (x Interest rate or dividends) (future price 也不变)

A 既不亏钱也不赚钱，但 B 可能由于 exchange rate 变化有比较大的 P/L

- In some ways future stock 和 stock position 是一样的，但是并不完全准确，因为存在 exchange rate 的变化问题，接下来我们试图解决这个问题：

We need to consider the exchange rate as an additional market factor.

- 我们重新审视一下我们的 portfolio：

- ★ \$110 million in well-diversified portfolio of large cap. U.S. equities, perfectly correlated with S&P 500
- ▣ 500 FT-SE 100 index futures contracts
- ● Short 200 S&P 500 futures contracts
- ▽ 600 written FT-SE 100 index call options with strike level of 5,875
- △ 800 written S&P 500 index calls with strike level of 1,100
- Net value = 110 million – value of written options
  = USD 101,485,220

US position 没有 exchange rate 的变化，它的 (★,○,△) Delta 依然是 4864.

我们来看 FT-SE 的部分，option 比较简单我们先思考这里

▽
- UK option position，我们是用 B-S model 算出来的，value is in GBP，想换成 USD 需要乘 exchange rate

$$\frac{\partial \nabla_{(USD)}}{\partial S_2} = \frac{\boxed{e} \cdot \partial \nabla (GBP)}{\partial S_2} = e \times (-3332) = \boxed{-5421}$$

可以看作是一个常数，把它提出来

和 Lecture 4 是一样的

可以看作是 $\frac{\partial eV}{\partial S_2} = e\frac{\partial V}{\partial S_2}$

- 我们还需要 exchange rate delta 易市易见，其结果是 Quantity of GBP

可以看作是 $\frac{\partial e V}{\partial e} = V$

V是怎么算出来的？

应该是 B-S 算得的

- UK futures position：没有 exchange rate risk. 因为 value of futures contract is 0.（注意 future price 不是 0）

注意！Futures contract 有 daily resettlement position！

这里我们是想解决两个问题：

$\partial\left(\text{USD value of daily resettlement payments}\right)/\partial S_2$

& $\partial\left(\text{USD value of daily resettlement payments}\right)/\partial e$

我们接下来想搞出这个东西的表达式：

$$\boxed{} = \underbrace{500 \times 10 \times e}_{\substack{\text{convert to USD} \\ \text{(including contract multiplier)}}} \{ \underbrace{S_2 \exp[(r_2-d_2)(T_2-t)]}_{\text{New futures price}} - \underbrace{5862.3 \exp[(r_2-d_2)T_2]}_{\text{Initial futures price}} \}$$

e: exchange rate

in GBP

$$\frac{\partial \boxed{}}{\partial S_2} = \partial\left(500 \times 10 \times e \{ S_2 \exp[(r_2-d_2)(T_2-t)] \}\right)/\partial S_2$$

(Initial future price 是固定的，直接在求导中消失了)

这里的 2 一律指 FT-SE 的各项参数，用于区别 S&P 500 Index

$$= \boxed{5066\ e}$$

future position 的 Δ，因为 " = " 部分是 Δ 的定义，用的是 future price 的公式

$$\frac{\partial \boxed{}}{\partial e} = 500 \times 10 \times \{ S_2 \exp[(r_2-d_2)(T_2-t)] - 5862.3 \exp[(r_2-d_2)T_2] \} = 0$$

Initial time doesn't change

为什么是0呢？这是偏导数的定义，我们只对 e 求导，这就意味着其他参数是不变的，

那么 future contract 的价值是从头到尾都不变的，所以为 0

↑这里解释的不太清楚，就算 e 让其他参数固定住，future contract 的前后端点值仍相同？

另了解释是没有 investment in futures，这个道理比较好理解，在于我们补 Margin 都是用的 GBP，跟 exchange rate 没啥关系   post margin 会包括在 fixed income portfolio 里？

Ignore it ，忽略了什么？

• 下面总结一下 Portfolio 的 Delta：

$\frac{\partial V}{\partial S_1} = 4864$ $\frac{\partial V}{\partial S_2} = 5066e - 3332e = 2821.5$ $\frac{\partial V}{\partial e} = 0 - 2127725 = -2127725$

"之□"

$$\text{change in } V \approx 4863.7 \times (\text{change in } S_1) + 2821.5 \times (\text{change in } S_2) - 2127725 \times (\text{change in } e)$$

所以算出来的单位有影响

现在还不是大功告成的时候，why？

因为我们算 volatility 的时候，不是基于 USD 的变化，而是基于 rate of return，即 percentage 的变化，我们需要换成 % $x_1^2 \sigma_1^2$ ↳ 放进去的 dollar amount

$$V = 5{,}338{,}397 \times \left(\frac{S_{1,t}-S_{1,0}}{1097.6}\right) + 16{,}540{,}479 \times \left(\frac{S_{2,t}-S_{2,0}}{3862.3}\right) - 3{,}462{,}021 \times \left(\frac{e_t-e_0}{1.6271}\right)$$

$+ \underline{83{,}068{,}365}$ 这个截距是为了凑出什么来的？→ V 在 1097.6，3862.3，1.6271 三个值处都是切点

现在我们可以看 μ 和 σ 了

$$E[\text{change in } V] = x_1\mu_1 + x_2\mu_2 + x_3\mu_3 + D = 0.388 \text{ million}$$

但 x_2 还是 us million 为单位的？ μ_3 ↳ 0.0 (这时 US 和 UK 的 interest rate 是一样的)

$$\text{var}[\Delta V] = x_1^2\sigma_1^2 + x_2^2\sigma_2^2 + x_3^2\sigma_3^2 + 2x_1x_2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 + 2x_1x_3\rho_{13}\sigma_1\sigma_3 + 2x_2x_3\rho_{23}\sigma_2\sigma_3$$

σ_1 ↓ 0.061 σ_2 ↓ 0.065 σ_3 ↓ 0.029 ρ_{12} ↓ 0.55 ρ_{13} ↓ 0.05 ρ_{23} ↓ -0.3

(本应该不一样的，因为基于 pound)

$= 1.719 \text{ million}^2$ (USD) → $\sigma = 1.311$

$$VaR = |0.388 - 1.645 \times 1.311| = 1.78 \text{ million}$$

The Monte Carlo Simulation

- MC method 和 historical simulation 很像
  把 historical 的数据换成了 random number

所以我们放弃了 history database，用电脑的 random number generator 生成 pseudo-random variables. Recompute the value of the portfolio

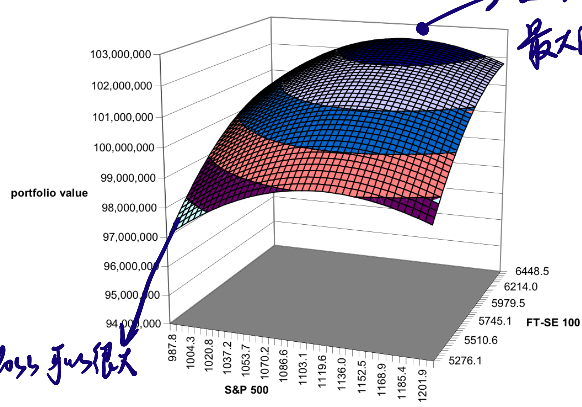
并不是真正的随机数，否则就不叫“伪随机”了 XD.

算很多很多很多…次，得到 simulation

注：→ 这不是 preferred 方法，因为我们直接假设了 distribution. 第二个问题是现实中 option market maker 一般的 portfolio 会有 1,000,000 个不同的 options，用 Binomial 根本没时间算出来

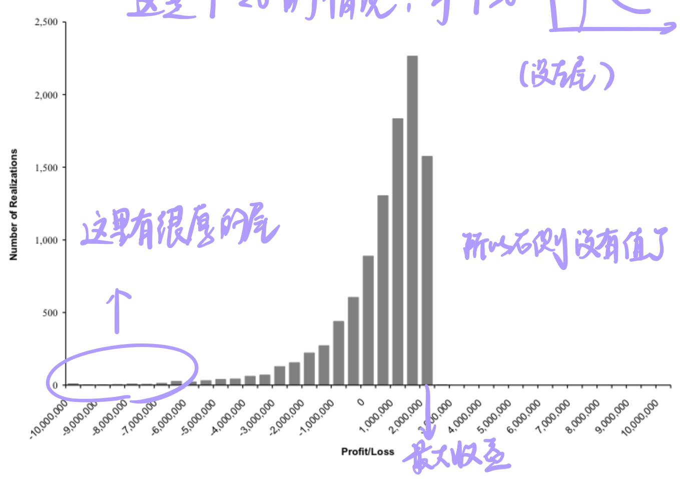
- $110 million in well-diversified portfolio of large cap. U.S. equities, perfectly correlated with S&P 500
- 500 FT-SE 100 index futures contracts
- Short 200 S&P 500 futures contracts
- 600 written FT-SE 100 index call options with strike level of 5,875
- 800 written S&P 500 index calls with strike level of 1,100
- Net value = 110 million – value of written options
  = USD 101,485,220

我们又双叒叕用这个案子



这里有最大值

但是 loss 预期很大



这是 $\Gamma < 0$ 的情况，若 $\Gamma > 0$

(没左尾)

这里有很厚的尾

所以右侧没有值了

最大收益

· 一定程度上 Δ 和 Γ 如此有用的原因，我们得以粗略的看到 risk 是什么样的

· 下面来看 MC Method 的 Steps

- Step 1: identify basic market factors
- Step 2: find formula giving portfolio value in terms of market factors (formula models) 最困难是 simulation — formula might be really simple: $S_{t+1} = S_t(1+r_{t+1})$
- Step 3: select a statistical distribution from which to draw psuedo-random changes in market factors (including estimate parameters) → normal 和 t-distribution 都有可能
- Step 4: apply these psuedo-random changes in the market factors to the current portfolio
- Step 5: identify the value-at-risk

对于我们的案例 这些步骤是怎么应用的呢？

1. • Basic market factors are:

  % change in S&P 500 (currently at 1,097.6)

  % change in FT-SE 100 (currently at 5,862.3)

  % change in exchange rate (currently at USD 1.6271/GBP

但其实不该用 %，应该用 log return

如果 % 是 ~N( )，很容易出现 −100% 的情况

2. • "Cash" S&P position: An investment of USD 110 million in a portfolio that underlies the S&P 500 is equivalent to

  $110{,}000{,}000/1097.6 = 100{,}219$

  units of the index, with a value of USD $100{,}219 S_1$

- S&P options: 800 written S&P 500 index call options has a value of $-800C_1(S_1,t)$, where the function C_1 gives the value of an index call option as a function of the index level and time*

*The function C_1 includes the effect of the multiplier of 100. In this example we use the Black-Scholes-Merton Formula with a continuous dividend.

- FT-SE options: 600 written FT-SE call options has a GBP value of $-600C_2(S_2,t)$ and a dollar value of USD $-600eC_2(S_2,t)$, where the function C_2 gives the GBP value of an index call option as a function of the index level and time*

这些都比较简单

但是衡量 future contracts 的 value 就比较烦了，因为每天都有 daily settlement

一个月就有 21 个，需要把它们全加起来

CHEAT AGAIN ! + cash flow early 也不计 reinvestment

- cash flow early 也不计 extra borrowing > 不搞这一套

为什么 Goldman Sachs 用 one-day horizon 呢? We can avoid so many problems

就没有 intermediation cash flow

- FT-SE 100 futures: GBP value of sum of daily resettlement payments:

$$\begin{pmatrix}\text{FT-SE settlement}\\ \text{payments}\end{pmatrix} =$$

$$-500(10)\sum_{k=1}^{K}\{S_2(t_k)\exp[(r_2-d)(T_2-t_k)]-S_2(t_{k-1})\exp[(r_2-d_2)(T_2-t_{k-1})]\}$$

$$=-500(10)\{S_2(t_K)\exp[(r_2-d)(T_2-t_K)]-5{,}862.3\exp[(r_2-d_2)(T_2-t_0)]\},$$

where 10 is the multiplier for the FT-SE 100 index contract and we have used the fact that $S_2(t_0) = 5{,}862.3$

我们直接 ignore daily resettlement

否则工作量是21倍.

Simulate all the daily change of index for the entire month

- S&P 500 futures: futures contracts affect P/L throughdaily resettlement payments, which are determined by the changes in futures prices
- Sum of daily resettlement payments:

$$\begin{pmatrix}\text{S \& P settlement}\\ \text{payments}\end{pmatrix} =$$

$$-200(250)\sum_{k=1}^{K}\{S_1(t_k)\exp[(r_1-d)(T_1-t_k)]-S_1(t_{k-1})\exp[(r_1-d_1)(T_1-t_{k-1})]\}$$

$$=-200(250)\{S_1(t_K)\exp[(r_1-d)(T_1-t)]-1097.6\exp[(r_1-d_1)(T_1-t_0)]\},$$

所以 MC 是都加起来么?

The Monte Carlo Simulation

- 这节课讲一下 MC Method 剩下的步骤：

第三步是选择合适的 statistical distribution：

一般情况下，我们认为 % Δ 是符合正态分布的，然后直接把相应的系数代入进去算的随机。但是有一些值得注意的地方：

1、是否是 ~N 的问题：我们可以选择 lognormal distribution，因为更符合 B-S 的假设

2、如果我们想要有厚尾的分布，可以用 t-distribution

但是总体来讲我们还是倾向于 normal / lognormal

第四步就是生成随机数了！

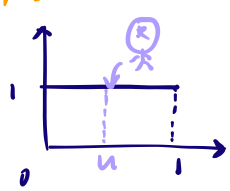
模拟 market factor，然后放到模型里替换掉，计算出 P/L

这里要注意一下生成随机数的方式：我们想生成 market factor 且符合 μ、σ、和 ρ 的条件。现实中我们是如何做的呢？

我们想得到 $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix}$ 满足 $\mathrm{cov}[x_i, x_j] = \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}$，现在我们利用 $e = \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_k \end{bmatrix}$

其中 $e_i \sim$ i.i.d. $N(0,1)$

这里要提一下，我们常用 $N(x_1)$ 即 distribution function，实际上是没这个函数的，在电脑中使用的是 $\int_{-\infty}^{x_1} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$，那我们如何生成符合 std. normal 的随机数呢？



有这样一个 uniform distribution，R 生成一个随机数 u，然后通过 $N^{-1}(u)$ 找到唯一对应的 x → 得到了符合 ~N 的 r.v. 这种方法显然对任何分布都适用

— "就是价了！"

通过上面的方法，我们找到了e，但是e不满足x中协方差的限制条件，所以我们要进行一下处理：

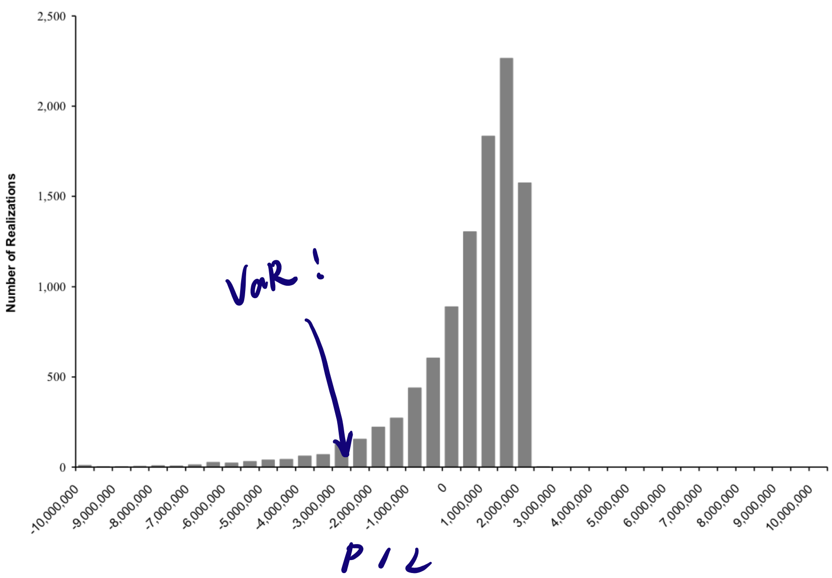
$x = Ae$ 会有 covariance matrix，那么：

$$E[xx^T] = E[Ae(Ae)^T] = E[Aee^TA^T] = AE[ee^T]A^T = AIA^T = AA^T = \Sigma$$

所以 A 是 square root of covariance matrix

※ 上面的 x 的均值还是0，要加上 $\begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_i \\ \vdots \\ \mu_k \end{bmatrix}$

最后一步是找出 VaR：



我们可以看到 distribution is asymmetric，是因为 written options：High prob. of small profit + Low prob. of large loss

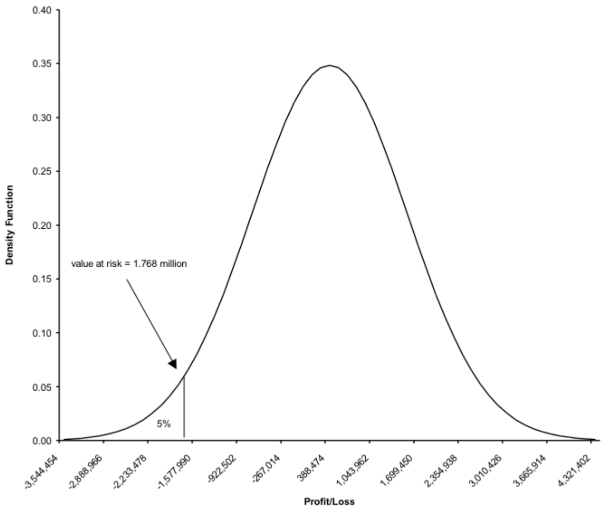
— Due to negative Γ

- Monte Carlo 有什么好处呢？
    - 能够 capture the nonlinearities in the portfolio value.

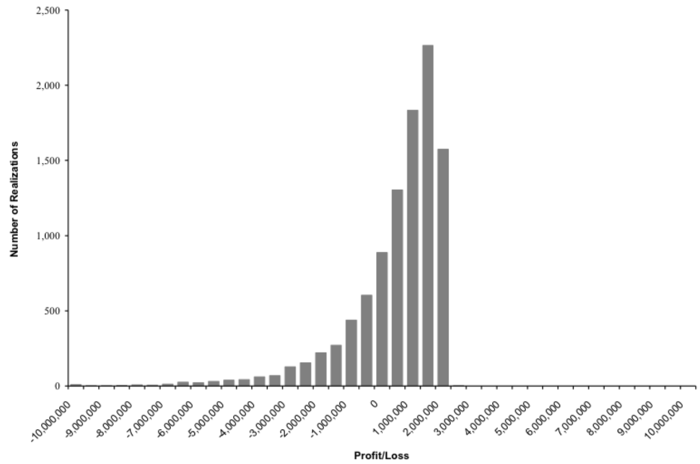
    这是 main advantage，这样对于有 significant options positions 的 portfolio 尤为关键，也能捕捉到 asymmetry

相较之下，Delta-Normal 基于 linear approximation，它对于分布的估计是对称的

Distribution of P/L used in Δ-Normal VaR



Distribution of P/L used in Monte Carlo VaR



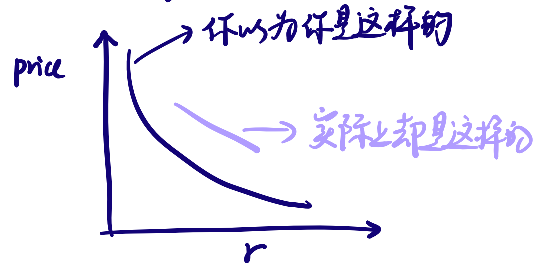
$VaR_{\Delta\text{-Normal}} = 1768081$　　　$VaR_{\text{Monte-Carlo}} = 2582663$

BUT！对于 Short holding period 来说也没那么重要. 因为

(i) 时间短本身变化量就小

(ii) 对于变量的微小变化 linear approximation 是好的

——"啊?! 我明明是一段弧，我是一段弧啊!!!"



• 为什么大家不都用 Monte Carlo 呢？

— 理论上没问题，用起来很头疼，计算量太大了：

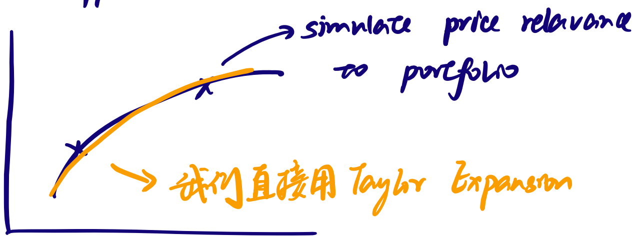
$N \times K \times M$

# of hypothetical future scenarios　# of market factors　# of instruments in portfolio

最简单，最有效的方法是减少 M：Δ，Γ，Θ approximation

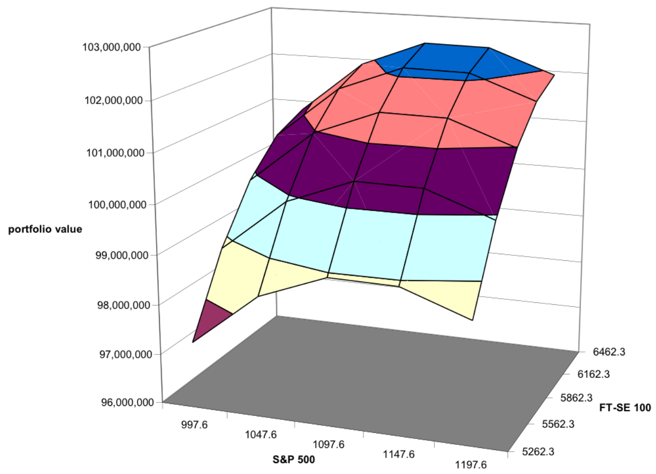
$$V^{\text{approx}}(S_1,S_2,t) = 101{,}485{,}220 + \frac{\partial V}{\partial S_1}(S_1-1{,}097.6) + \frac{\partial V}{\partial S_2}(S_2-5{,}862.3) + \frac{\partial V}{\partial e}(e-1.6271)$$
$$+\frac{\partial V}{\partial t}(t-t_0) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S_1^2}(S_1-1{,}097.6)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S_2^2}(S_2-5{,}862.3)^2$$
$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial e^2}(e-1.6271)^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial S_1 \partial S_2}(S_1-1{,}097.6)(S_2-5{,}862.3)$$
$$+\frac{\partial^2 V}{\partial S_1 \partial e}(S_1-1{,}097.6)(e-1.6271) + \frac{\partial^2 V}{\partial S_2 \partial S_2}(S_2-5{,}862.3)(e-1.6271),$$

只需把固定的偏导算出来
↓
一定是固定的



2. Grid approximation:

网格法 — 只适用三维及以下的情形



II. 也可以减少 K，但我们不讨论这了 principal components

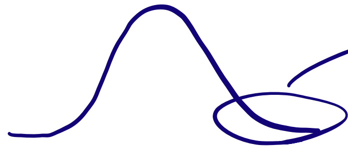
III. 也可以减少 N — 也不讨论 antithetic variates; control variates ...

Monte Carlo Practice Guide

· 有关 HW3：

如果我们认为 return follows normal distribution, then:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}$$



如果认为 return follows t-distribution, then:

e.g. df = 4 → very fat tails   * df 可以是任何实数

$$\text{rmvt}(\underbrace{n}_{\text{trials}},\ \underbrace{\text{sigma}}_{\text{not cov. matrix}},\ \text{df},\ \underbrace{\text{delta}}_{\text{location}})$$

而是 dispersion matrix

$\nu = d.f.$

$$\underline{D} = \underbrace{\frac{\nu-2}{\nu}}_{<1}\ \underbrace{\Sigma}_{\text{cov. matrix}}$$

* 如果 $\nu<2$，D就不存在

· 算 Binomial 的时候用 Binomial 的 package

initial value (call binomial function)

for i = 1 to 11,000, compute new stock prices

$$\underbrace{S(i)}_{\text{new stock price}} = S_0 e^{r(t)}$$

Then compute new portfolio value (call binomial functions)

P/L = new portfolio value − initial value

* A little tip: B-S model 中的 underlying asset 可以看作是 forward price.

t - Distribution

- Standard t distribution

p.d.f. : $f(t;\nu) = \dfrac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})\sqrt{\nu\pi}} \left(1+\frac{t^2}{\nu}\right)^{-\frac{1+\nu}{2}}$, for $\nu > 0$

If $\nu > 1$ then $E[T] = 0$

If $\nu > 2$ then $E[(T-E(T))^2] = E[T^2] = \dfrac{\nu}{\nu-2}$

- Non - standard t distribution

T : r.v. ~ standard t distribution

$X = \mu + \sigma T$

$$f(x;\nu) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})\sqrt{\nu\pi}\,\sigma}\left(1+\frac{1}{\nu}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)^{-\frac{1+\nu}{2}}, \text{ for } \nu>0$$

μ 和 σ 是 location and scale parameters

- 下面是有关作业的一些提示：

我们用 column simulated stock price：

$S[i,1] = 101.17 \times \exp(r[i,1])$

$S[i,2] = 148.97 \times \exp(r[i,2])$

compute initial portfolio value $V_0 = f(101.17, 148.97)$ + other inputs

```
for ( i in 1:10000 ) {
    simulated portfolio value : V[i] = f( S[i,1], S[i,2], other inputs )
}
```

$PL[i] = V[i] - V_0$

$10000 \times 1 \quad 10000 \times 1$

$VaR = -\text{quantile}(PL, 0.01)$

When you calculate the initial value $\tau = \frac{21}{252}$

一天之后 $\downarrow$

对于 Q1 来说 $\tau = \frac{20}{252}$

Q_2: options have expired, $V[i]$ = combination of 4 payoffs

第三题 VaR 应该比 Q_1 大

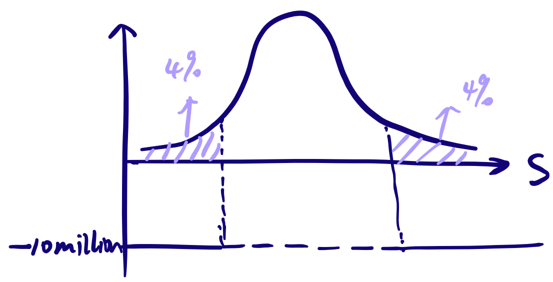
Coherent Risk Measures

- 所以 VaR 有没有什么问题呢?

我们先看一个案例:

- Portfolio A:
  - $400,000 in cash
  - written digital put with a notional amount of $10 million, a 4% probability of being exercised
  - time to expiration = time horizon of VaR estimate
- Portfolio B:
  - $400,000 in cash
  - written digital call with a notional amount of $10 million, 4% probability of being exercised
  - time to expiration = time horizon of VaR estimate

这里我们假设没有 interest rate



显而易见, A和B的95% VaR都是0。

× —"去你的显而易见!"

对A和B来说 $P/L = \begin{cases} 400{,}000, & \text{prob.} = 96\% \\ -9{,}600{,}000, & \text{prob.} = 4\% \end{cases}$ 95% VaR落在上面

所以认为VaR是0。

BUT!

- Consider the aggregate portfolio consisting of the sum of portfolios A and B:

$$\text{profit of aggregate portfolio} = \begin{cases} \$800{,}000 & \text{with prob. } 0.92, \\ -\$10{,}000{,}000 & \text{with prob. } 0.08, \end{cases}$$

95% VaR = $10,000,000

Diversified 之后，VaR 反而变大了，这怎么可能呢？

- And consider the diversified portfolio consisting of 1/2 of A and 1/2 of B:

$$\text{profit of diversified portfolio} = \begin{cases} \$400{,}000 & \text{with prob. } 0.92, \\ -\$5{,}000{,}000 & \text{with prob. } 0.08. \end{cases}$$

95% VaR = $5,000,000

— 这个例子看起来很简单 — 但其中反映的特性：$\begin{cases} \text{high prob. no loss} \\ \text{small prob. large loss} \end{cases}$

是有可能真实存在的，比如 Out-of-the-money written options 或 Corporate bonds and Loans

- 有一群数学家：Artzner，Delbaen，Eber，Heath (1997, 1999) 提出 Coherent Risk Measures。这需要满足一些条件：

假如有 K states of the world

$$\begin{array}{cc} x & y \\ \begin{bmatrix} 99 \\ 56 \\ -21 \\ \vdots \\ 6 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 97 \\ 53 \\ -7 \\ \vdots \\ -13 \end{bmatrix} \end{array}$$

条件如下：

- Sub-additivity: $\rho(x+y) \le \rho(x) + \rho(y)$ (相关性问题)
- Homogeneity: $\rho(ax) = a\rho(x)$
- Monotonicity: $\rho(x) \ge \rho(y)$, if $x \le y$ x是 payoff，ρ(x)是 risk measures
- Risk-free condition: $\rho(x + b(1+r)) = \rho(x) - b$ → Always good to receive cash

- 根据上面的例子，VaR 不满足第一条

- 然而，如果 price changes of all instruments are described by a multivariate Normal Distribution，那么就会符合第一条

• ADEH(1999)的一个重要结论: all coherent risk measures can be represented in terms of "generalized scenarios"

$$\overbrace{\begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix} \quad \cdots \quad \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}}^{N \text{ scenarios}}$$

$$\left.\begin{array}{cccc} \frac{1}{N} & \frac{1}{N} & \cdots & \frac{1}{N} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ P_1 & P_2 & \cdots & P_N \end{array}\right\} \text{把每个loss都算出来 找最大的}$$

Coherent Risk Measures

- 继续上节课的内容

N scenarios

假设这两个有5%的prob.

$\frac{1}{40}$ $\frac{1}{80}$ $\frac{1}{80}$

$\frac{1}{N}$ $\frac{1}{N}$ $\frac{1}{N}$ $\frac{1}{N}$ $\frac{1}{N}$ ... $\frac{1}{N}$ $\frac{1}{N}$ $\frac{1}{N}$

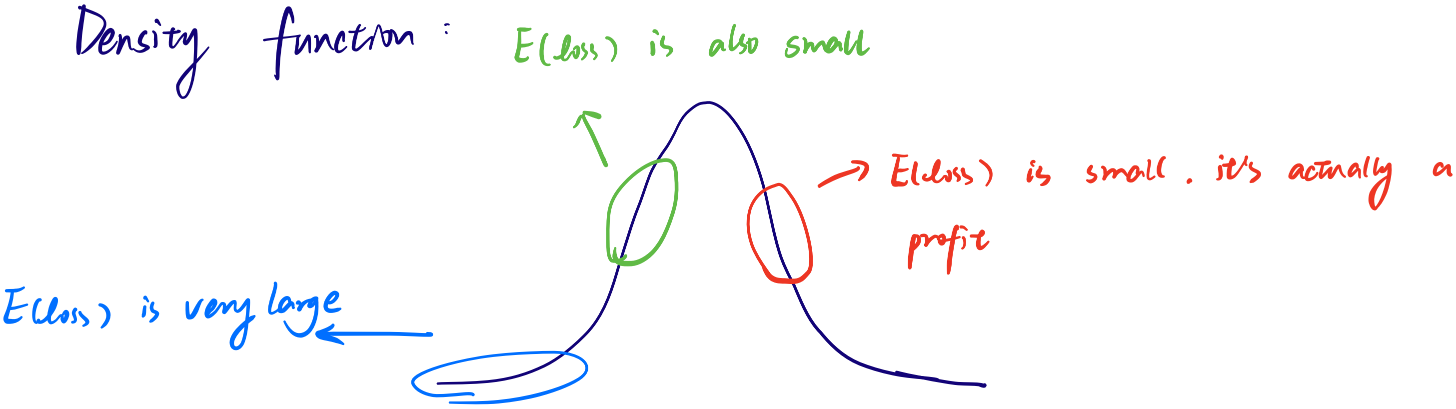
1 0 0 0 0 ... 0 0 0

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$ 条件概率.用于算E(loss)

⋮

P_1 P_2 ... P_N

Density function:



The biggest expected loss → 是"◯"部分的 E(loss) → Expected shortfall (也叫CVaR)

$E[\text{loss} \mid \text{loss} \geq VaR_{1-\alpha}]$

- 计算 E(loss) in the tail of the distribution. 可应用于 generalized scenarios. 又符合 Coherent Risk Measure

- Expected Shortfall 看起来是非常高级的做法. 那我们为什么还用 VaR 呢?

$VaR = -\text{quantile}(PL, 0.05)$ $ES = -\text{mean}(PL\underbrace{[PL \leq (-VaR)]}_{\text{picks the loss}})$

⇒ 计算量也不大