金融工程

人工智能系列（二）

次优理论下的组合配置与策略构建——人工智能再出发

分析师：包赞 S1230518090006
baozan@stocke.com.cn TEL: 021-80108127

—人工智能—

◆研究背景

优化问题是金融中基础、不可避免的问题，从均值方差的二次规划开始，优化问题已经深入到金融领域的方方面面，从大类资产配置到组合优化、从理论模型下的效用最大化再到实战模型的参数优化，都用到优化技术。而很多优化问题较为复杂，**非凸、不连续、不可导、高维、随机、约束过多等问题给数值计算带来困扰**，本文提出次优理论并且介绍差分进化算法，通过展示差分进化算法的良好效果，希望给广大投资者的量化建模带来一丝启示。本文方法对组合优化、大类配置、FOF 组合构建、智能投顾等领域都会有所帮助。

◆次优战胜最优

作者在长期建模的经验中斗胆提出金融次优理论，其实金融没有次优理论，运筹学也没有，只有福利经济学中有过次优理论的描述，文中提出的次优理论和经济学中的次优理论有一点类似，我们把这个概念借来。其实很简单：当期优化的最优解不一定是下一期的最优，而**样本内的次优在样本外可能战胜样本内的最优**。所以，从金融投资角度看，优化问题下的最优解不一定是我们想要的，因为我们的目标是获得较好的样本外收益表现。

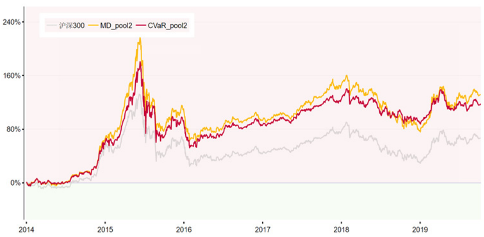
◆差分进化算法

差分进化 Differential Evolution（DE）由 Storn 等人于 1995 年提出，和其它演化算法一样，DE 是一种模拟生物进化的随机模型，通过反复迭代，使得那些适应环境的个体被保存了下来。但相比于遗传算法，DE 保留了基于种群的全局搜索策略，采用实数编码、基于差分的简单变异操作和一对一的竞争生存策略，降低了遗传操作的复杂性。同时，DE 特有的记忆能力使其可以动态跟踪当前的搜索情况，以调整其搜索策略，具有较强的全局收敛能力和稳健性，且不需要借助问题的特征信息，**适于求解一些利用常规的数学规划方法所无法求解的复杂优化问题。**

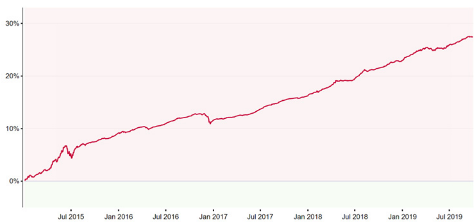
◆组合构建与回测

我们构建了两个组合，第一个是利用各类指数构建一个季度调仓的组合，回测显示，14 年以来，**组合年化收益 15%以上，同期沪深 300 年化 9.64%，如果配合我们之前 AI 下的指数增强策略，年化超额收益可达 10%左右。**鉴于近年来货基收益下降，且互联网平台 FOF 组合兴起，我们构建第二个组合——**货币基金收益增强组合，随机选取货币型、短债以及一级债基进行回测，结果显示，该组合年化收益 4%以上，且可以做到年度调仓，近两年来最大回撤在 0.5%以下。**

最小风险组合回测(季度调仓)：



货币基金收益增强组合(年度调仓)：



证券研究报告

正文目录

图表目录

Portfolio Optimization and Strategy Design under Second Best Theory —— Differential Evolution Approach

Abstract

The aim of this paper is to introduce the combination of AI and finance in a compact way. Differential Evolution (DE) is a simple but powerful evolutionary optimization algorithm with many successful applications. In this report, we propose Differential Evolution for financial Optimization – a new approach to tackle non-convex optimization based on DE. To testify the performance of this powerful method, we construct two minimization problems. One objective function is CVaR, another is max Drawdown. The annualized excess return of the backtested portfolio is about 6%.

1. 引言

优化问题是金融中基础、不可避免的问题，从均值方差的二次规划开始，优化问题已经深入到金融领域的方方面面，从大类资产配置到组合优化、从理论模型的效用最大化再到实战模型的参数优化，都用到优化技术。而很多优化问题较为复杂，非凸、约束过多等问题给数值计算带来困扰，本文提出次优理论并且介绍差分进化算法，希望给广大投资者的量化建模带来一丝启示。

作者在文中斗胆提出金融次优理论，其实金融没有次优理论，运筹学也没有，只有福利经济学中有过次优理论的描述，下文提出的次优理论和经济学中的次优理论有一点类似，我们把这个概念借来，其实很简单：当期优化的最优解不一定是下一期的最优，而样本内的次优在样本外可能战胜样本内的最优，所以，从金融投资角度看，优化问题下的最优解不一定是我们想要的，因为我们的目标是获得样本外的收益表现。

人工智能算法在很多工程领域显示强大威力毋庸置疑，但是在金融投资上的运用尚在探索中，目前尚未有成熟稳健的分析范式可循。无论如何，人工智能下的很多优化算法还是值得研究与尝试的，只有我们对各种算法的优缺点都很熟悉后才能根据实际问题选出有效的算法。但是对各种算法都了如指掌是不现实的，但多知道、多理解，会使你的选择集更大，找出最好算法的概率越大。

关于人工智能与金融的结合，作者也曾研究数年，在此谈些微不足道的感悟。首先，作者认为生搬硬套人工智能算法行不通，因为任何算法都有适用的范围，尤其是人工智能下的很多算法并不是为"随机"序列服务，他们只是为特定范围下的高维数据服务，直接拿到金融中来，势必会"极度的不适应"，导致策略失效。AlphaGo能够成功，是因为围棋的规则确定，凭借算法情景模拟的优势，势必"机智过人"，而金融中的情景要复杂的多，也没有特定的"对错准则"。其次，金融有金融的逻辑，金融学作为日趋成熟的学科，有自己的分析范式、方法论，无论人工智能多么发达，也无法磨灭和否定JF、JFE中一篇篇逻辑严密、论证严谨的金融学逻辑。作者强调这些，并不是否定人工智能在金融中的运用，而恰恰强调二者的有机融合，作者认为二者的关系是：金融逻辑开道，人工智能辅助。

本文首先介绍金融中的次优理论，虽然是作者多年经验的总结，并没有严格的理论证明，但是，相信对广大投资者的建模仍然具有一定的启发性；然后介绍差分进化算法，本文的一个贡献就是发现该算法尤其适合金融优化问题；随后用两个案例来证明该算法具备优越性，第一个是股票指数的最小风险组合，我们利用差分进化算法对组合进行最大回撤最小化、CVaR最小化，发现季度调仓下，组合能产生年化5%的超额收益；第二个实证是利用货币基金、短债、一级债基来构建货币基金收益增强组合，结果显示，年度调仓下组合年化收益能够稳定在4%左右，且回撤较小，基本满足货币基金收益增强的需求。本文的模型算法不仅对股票投资建模具备指导意义，对FOF组合构建、互联网平台的智能投顾也具备一定的参考价值。

2. 金融中的优化与人工智能算法

2.1. 金融与人工智能算法思考

人工智能算法在解决分类、优化等方面具有很大的优势，可以说是加强版的运筹学与统计学，金融中时刻都会用到优化等算法，著名的有效前沿也是二次规划。所以，理解好人工智能算法，把合适的算法与合适的问题相

匹配，势必能产生一定的效果。作者之前的研报《“指数增强”新思维——人工智能+传统金融》，发现模仿组合问题，如果不采用传统的优化算法，用人工智能中的“稀疏优化”算法，能够带来大概率的超额收益，且在沪深 300、标普 500 指数上都得到很好的验证。本文还是延续这个思路范式，利用人工智能中的合适的算法，来解决优化问题，试图通过二者的良好匹配来达到我们预期的结果。

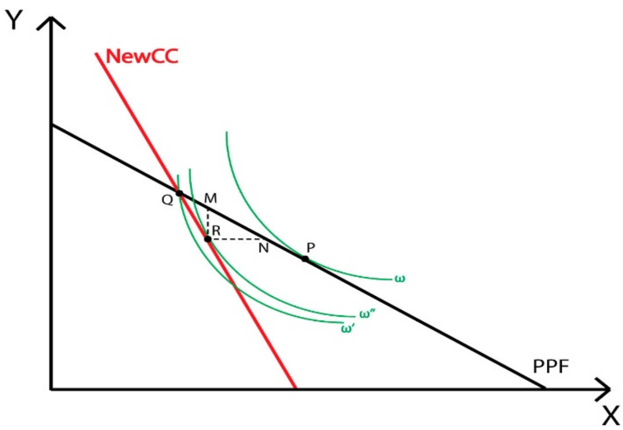
作者坚持金融问题与智能算法的“耦合”来发挥人工智能算法的奇效,这样既不破坏金融学本身的逻辑体系，而且又能发挥人工智能的长出。作者不否定智能算法能够和金融逻辑的深度融合，因为二者有共同的理论基础，资产定价从线性空间理论出发，智能算法也用到线性空间理论，只是作者尚未有这个能力，能让二者在“根上”融合起来。

2.2. 经济学中的次优理论

作者在下文斗胆提出金融次优理论，其实金融没有次优理论，运筹学也没有，只有福利经济学中有过次优理论的描述，下文提出的次优理论和经济学中的次优理论有一点类似，我们把这个概念借来，具体的金融优化的次优理论我们下文描述。我们首先描述一下经济学中的次优理论。

经济学中，我们学习过次优理论，通俗而言，次优理论的含义是：“假设达到帕累托最优状态需要满足十个假设条件，如果这些条件至少有一个不能满足，即被破坏掉了，那么，满足全部剩下来的九个条件而得到的次优状态，未必比满足剩下来的九个条件中一部分（如满足四个或五个）而得到的次优状态更加接近于十个条件都得到满足的帕累托最优状态。”次优理论的基本思想可以用一个简单的图形来说明。如下图所示。

图 1：福利经济学中“次优”的演示



资料来源：浙商证券研究所

假设社会的生产可能性曲线由图中的 PPF 表示，偏好由无差异曲线给定。又假定经济系统中存在一个约束条件 NewCC，使得最优点 P 无法达到。设这个约束条件由直线 NewCC 表示。由于存在着这一约束，经济难以达到直线右上方的商品组合。社会最优化问题是在 NewCC 线的约束下争取（由无差异曲线表示的）福利最大化。图中清楚地显示这一最优点不一定在生产可能性边界 PPF 线上。点 R 明显地比技术上有效的点 Q 更优。这显然否定了这样的论点，即如果帕累托最优的所有条件不能全部满足，则满足某一部分就是最好的政策。

其实，福利经济学中的次优理论可以用这样一句通俗易懂的话来解释：**如果求优化的问题中，有一些条件不**

能满足，那么剩下条件下的次优可能比最优解要更好，固执的求最优解可能南辕北辙。

2.3. 金融中的次优大于最优

上文中经济学的次优理论指的是，如果优化中的有些条件不满足，那么用剩下的条件得到的最优解可能还不如次优解。作者提出的金融次优理论和经济学中的次优理论结构类似，就是：由于当期优化的权重是为下一期使用的，在金融投资中，当期的最优解可能在下一期不是最优的，当期的次优解可能会带来更好的样本外结果。

我们首先拿最大夏普组合的例子，来阐述金融次优理论。如果我们做组合配置，组合里有某个股票近期走势良好，稳定向上，那么在二次规划下，势必会在这个股票上配有很高的权重，但是，如果该股票将来出现大幅回撤，会大幅拖累组合净值。从样本外来看，二次规划下的最优解，对未来来说不是最优的。所以，如果能够有一种算法，得出的解不那么“极端”，那么虽然在运筹学上看，这个解是次优的，但是从金融学来看，这个结果仍然是最优的，因为金融的优化大多是为样本外服务的，样本内的最优解显得“极端而又毫无意义”。

再比如，构建货币基金收益增强 FOF 组合，基金池中包含：货币基金，短债，一级债基，目标函数为最小化最大回撤。传统算法下，会大比例的配置货币基金，或者是近期走势强势的一级债基，如果 95%以上配置货币基金，回撤虽小，但是收益无法得到增强，如果大比例配置近期强势的一级债基，如果市场不好，组合在未来可能会大幅回撤。其实，这些算法的解都是没错的，只是在金融上，可能会有更合理、样本外表现更好的解。比如，一级债基的某种线性组合，也会得到较小回撤的情形，且收益表现比货币基金更好。所以，运筹学上的最优组合未来不一定好，我们需要的是未来最优，而样本内的次优恰好可能是未来的最优。

2.4. 次优的数学讨论

我们以最大回撤最小化组合为例，其实就是求解下面问题：

$$\text{Min max Drawdown}\left(\sum \omega_{\mathrm{i}} \cdot \mathrm{r}_{\mathrm{T}_1}\right)$$

其中，收益率矩阵如下，

$$\begin{array}{c} T_1\left\{\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right. \\ T_2\left\{\begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\right. \end{array}\left[\begin{array}{cccc} r_{1,1} & r_{1,2} & \cdots & r_{1,k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{m,1} & r_{m,2} & \cdots & r_{m,k} \\ \hline \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{n,1} & r_{n,2} & \cdots & r_{n,k} \end{array}\right]$$

最优解我们记为 ω_{i}^{*}，但实际上我们希望得到的是下面问题的最优解：

$$\text{Min}\max \text{Drawdown}\left(\sum \omega_{\text{j}} \cdot \text{r}_{\text{T}_2}\right)$$

解记为 ω_{j}^{*}。所以，之前的最优解 ω_{i}^{*} 是不是最优解并不重要，重要的是，他符不符合下面性质：

$$\left\|\omega_{\text{i}}^{*} - \omega_{\text{j}}^{*}\right\| \le \varepsilon$$

这个就是我们之前论述的次优问题，本文只是发现了这个现象，并且在实证层面验证与运用。由于精力、能力有限，尚未在理论上对该方向进行充分的证明与研究，欢迎有兴趣的同行合作研究。

3. 差分进化算法

3.1. 为什么差分进化

解决实际的问题，要建模型，再求解。求解需要选择算法，只有我们对各种算法的优缺点都很熟悉后才能根据实际问题选出有效的算法。但是对各种算法都了如指掌是不现实的，但多知道、多理解，会使你的选择集更大，找出最好算法的概率越大。大自然是神奇的，它造就了很多巧妙的手段和运行机制。受大自然的启发，人们从大自然的运行规律中找到了许多解决实际问题的方法。对于那些受大自然的运行规律或者面向具体问题的经验、规则启发出来的方法，人们常常称之为启发式算法（Heuristic Algorithm）。现在的启发式算法也不是全部来自自然的规律，也有来自人类积累的工作经验。

前文我们论述了次优大于最优的金融问题，所以，问题转而成为，如何快速寻找次优解，当然，不能为了寻找次优而找次优，优化问题肯定是为了寻找最优而去的，如果，在寻找的过程中，能够有次优的“副产品”，且能够满足我们实证的需求，那将是极好的。所以，在无数次试算过程中，我们发现了“差分进化”算法。差分进化算法是一种启发式算法，启发式算法是一种技术，这种技术使得在可接受的计算成本内去搜寻最好的解，但不一定能保证所得的可行解是最优解，甚至在多数情况下，无法阐述所得解同最优解的近似程度。该算法具有极强的“数值性”，就是我们无法从理论上去论证其精确度与收敛速度，这也是一个遗憾。所以，本文后面的回测部分，也都是从实证角度出发，来论述该算法运用在金融上的合适性。

其实，作者在本文中研究的思路，完全是从工程学的角度出发，工程学科在解决工程类问题时常采取一种根据经验规则进行发现的方法。其特点是在解决问题时,利用过去的经验,选择已经行之有效的方法，而不是系统地、以确定的步骤去寻求答案。启发式解决问题的方法是与其它优化类算法相对立的。很多运筹学中的算法是把各种可能性都一一进行尝试，最终能找到问题的答案，但它是在很大的问题空间内，花费大量的时间和精力才能求得答案。启发式方法则是在有限的搜索空间内，大大减少尝试的数量，能迅速地达到问题的解决。科学家的许多重大发现，常常是利用极为简单的启发式规则。但由于这种方法具有尝试错误的特点，所以也有失败的可能性。本文的撰写也是这个思路，不去系统性地阐述人工智能在金融中的良好运用，而是我们发现了这个差分进化算法，效果不错，就介绍出来，也不代表该方法就是最优的，各位同行未来可能有更好的发现。

3.2. 差分进化简介

差分进化 Differential Evolution（DE）由 Storn 等人于 1995 年提出，和其它演化算法一样，DE 是一种模拟生物进化的随机模型，通过反复迭代，使得那些适应环境的个体被保存了下来。但相比于进化算法，DE 保留了基于种群的全局搜索策略，采用实数编码、基于差分的简单变异操作和一对一的竞争生存策略，降低了遗传操作的复杂性。同时，DE 特有的记忆能力使其可以动态跟踪当前的搜索情况，以调整其搜索策略，具有较强的全局收敛能力和鲁棒性，且不需要借助问题的特征信息，适于求解一些利用常规的数学规划方法所无法求解的复杂环境中的优化问题。

目前，DE 已经在人工神经元网络、化工、电力、电磁、机械设计、机器人、信号处理、生物信息、经济学、现代农业、食品安全、环境保护和运筹学等许多领域得到了应用。例如：在神经网络训练中，有研究将差分进化方法作为前馈神经网络的候选全局优化方法，用于验证已达到的最优值，以及用于开发不一定提供梯度信息的正则项和非常规传递函数；在电磁学中，差分进化被用于解决以非凸函数和连续空间为特征、涉及大量未知数的优化问题，有研究提出了电磁学中与天线合成和逆散射有关的基于差分进化的方法；在电力系统中，差分进化算法用于解决电力系统中经济负荷分配（ELD）问题，与其他现有技术相比，基于差分进化算法的方案更有效；在机器学习中，差分进化算法在大型未标记数据集自动聚类中取得了应用，与大多数现有的聚类技术相比，基于差分进化所提出的算法不需要先验知识就可以对数据进行分类，并通过与两种最新开发的分区聚类技术和一种流行的分层聚类算法进行比较可以证明基于 DE 的新方法的优越性。

3.3. 差分进化与遗传算法区别

进化类算法（Evolutionary Algorithm）是一种受生物进化启发的基于总体的通用优化算法，通常采用繁殖，变异，重组和选择等机制。看似简单的进化类算法可以轻松解决复杂度很高的问题。其中，差分进化算法（Differential Evolution）与遗传算法（Genetic Algorithm）均是进化类算法的子集，但它们的内涵有一定的差别，各有不同的侧重点。

首先，遗传算法采用传统的 DNA 概念，种群采用二进制编码，需解码到实际参数，而差分进化可直接采用实数生成种群，使用更为方便；因此，遗传算法的进化主要依靠非父即母的 DNA 信息生成新的子代，而差分进化引入了进化强度和进化方向的概念，直接对父代自身进行进化；此外，由于表现较差个体可能携带部分有效 DNA，遗传算法会给其生存概率，而差分进化则只保留最优者；最后，由于算法侧重不同，差分进化拥有更强的鲁棒性与更快的收敛速度，但会受局部最优解的影响收敛，遗传算法则反之。

因此，两者差异可以归结如下：

表 1：遗传算法与差分进化算法的区别

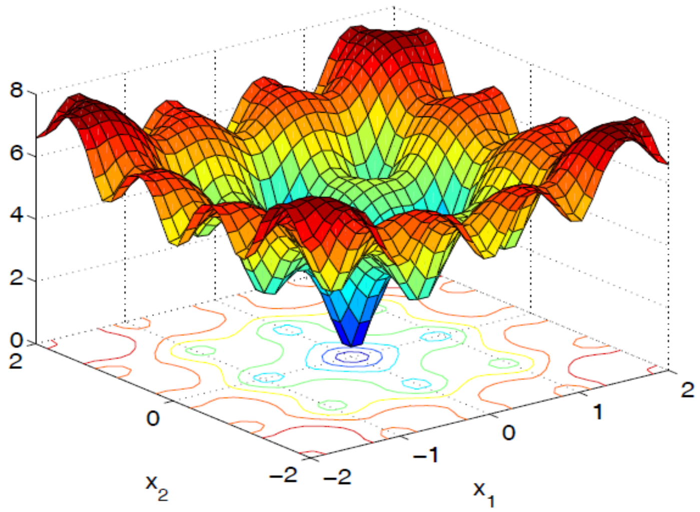
	遗传算法	差分进化算法
编码方式	01 二进制编码	实数编码
种群迭代	父代生产新子代	父代自身进化
淘汰方式	劣者依概率淘汰	劣者绝对淘汰
算法核心	交叉	变异
鲁棒性	一般	强
收敛速度	一般	快
全局最优搜索能力	强	较强

3.4. 差分进化算法流程

差分进化算法（Differential Evolution algorithm)是的一种针对连续函数、基于种群的启发式优化技术。该算法通过加、减和交叉来更新解向量的种群，然后在原始和更新的种群中选择最合适的解。我们通过最小化 Ackley 函数来说明算法的工作原理（Ackley,1987）。

$$f\left(x_1,x_2\right)=-20e^{-0.2\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2}{2}}}-e^{\frac{\cos\left(2\pi x_1\right)+\cos\left(2\pi x_2\right)}{2}}+20+e$$

图 2：Ackley 函数

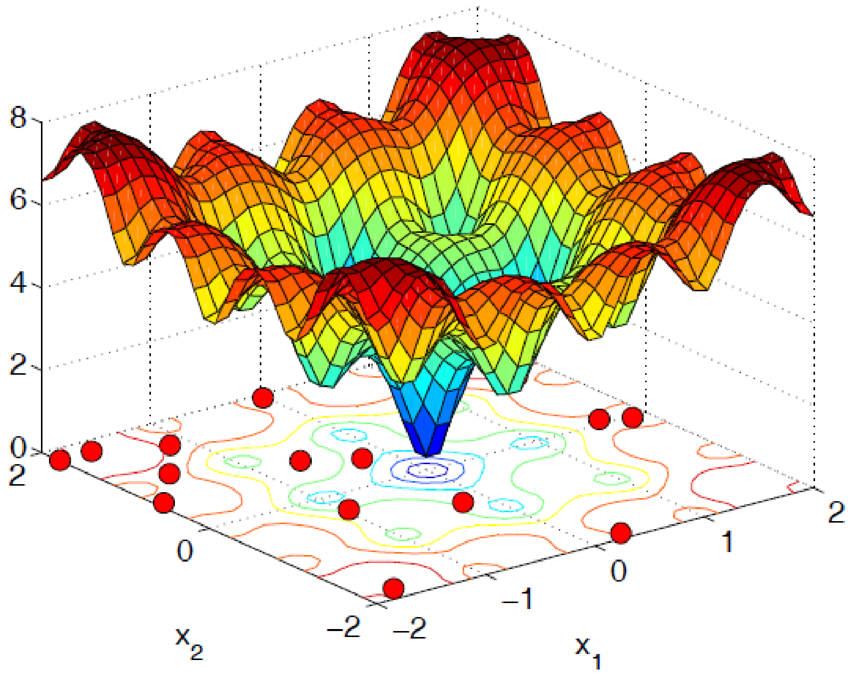


资料来源：浙商证券研究所

（一）初代种群

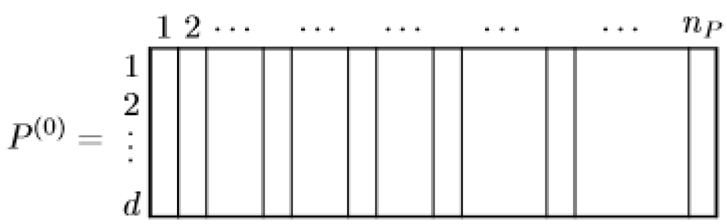
该算法首先选择 n_P 个随机选择的解。

图 3：初代种群示意



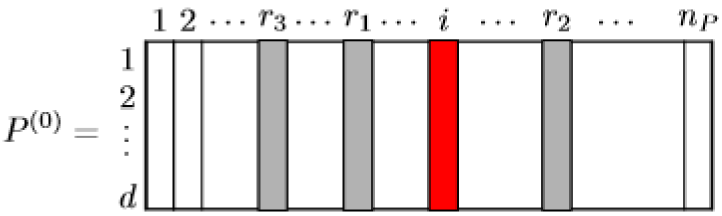
资料来源：浙商证券研究所

初始种群的 n_P 个解由 $d \times n_P$ 维矩阵 $P^{(0)}$ 表示，d 是函数域的维数。



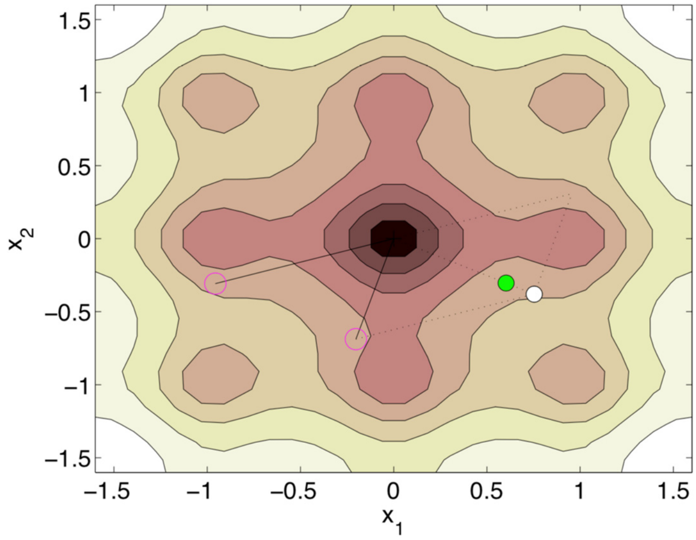
（二）新解的构建

对于由矩阵 $P^{(0)}$ 的列表示的每个解 $i, i = 1, \ldots, n_P$，该算法从三个随机选择的列（解）r_1, r_2, r_3 构造一个新解。

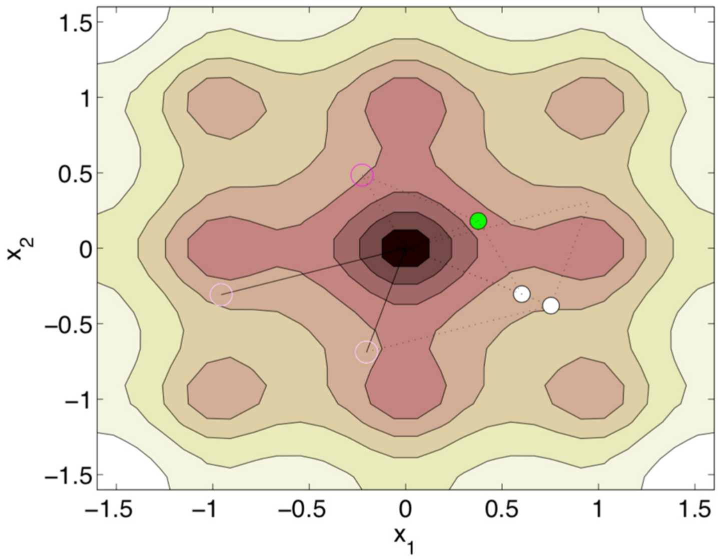


这一过程由四个步骤完成：

第一步：构建向量 $F \times \left(P_{\bullet,r_2}^{(0)} - P_{\bullet,r_3}^{(0)}\right)$，其中 F 是给定的缩放因子



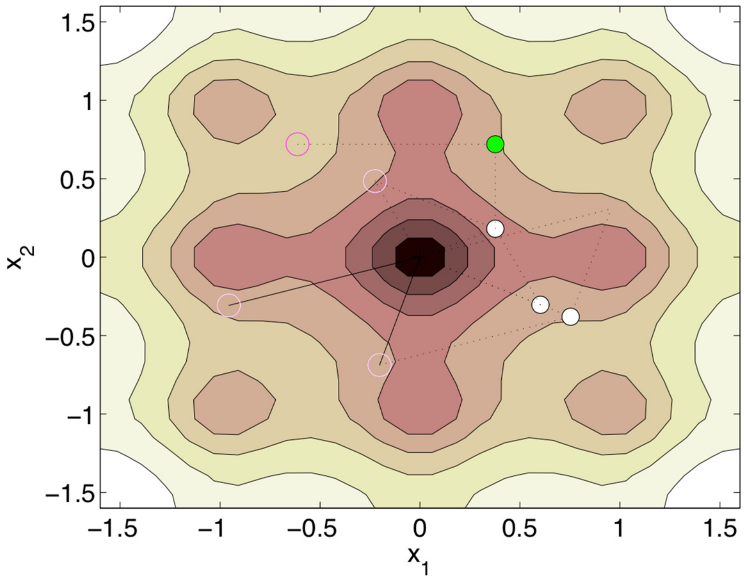
第二步：构建向量 $P_{\bullet,i}^{(v)} = P_{\bullet,r_1}^{(0)} + F \times \left(P_{\bullet,r_2}^{(0)} - P_{\bullet,r_3}^{(0)}\right)$



第三步：按以下规则组合 $P_{\bullet,i}^{(0)}$ 和 v 来构造 $P_{\bullet,i}^{(u)}$

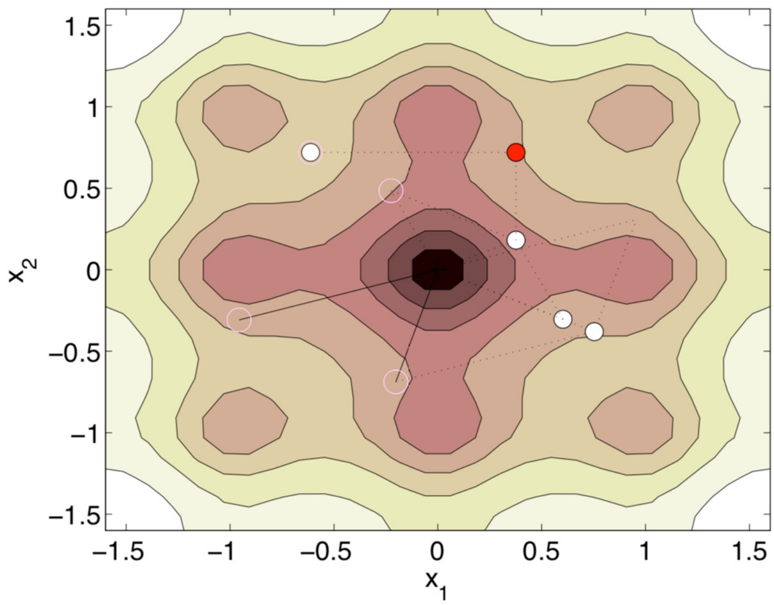
$$P_{j,i}^{(u)} = \begin{cases} P_{j,i}^{(v)} & \text{if } u \le \text{CR} \\ P_{j,i}^{(0)} & \text{if } u > \text{CR} \end{cases}$$

值得注意的是，向量$P_{j,i}^{(u)}$ 中至少有一个元素j是来自于$P_{\bullet,i}^{(v)}$。



第四步：新种群中第i个解由下决定：

$$P_{\bullet,i}^{(1)} = \begin{cases} P_{\bullet,i}^{(u)} & \text{if } f\left(P_{\bullet,i}^{(u)}\right) < f\left(P_{\bullet,i}^{(0)}\right) \\ P_{\bullet,i}^{(0)} & \text{else} \end{cases}$$



DE 算法伪代码：

1: 初始化参数 $n_{\mathrm{P}}, n_{\mathrm{G}}, \mathrm{F}$ and CR
2: 初始化种群 $P_{j,i}^{(1)}, j=1,\ldots,d, i=1,\ldots,n_{\mathrm{P}}$
3: for $k=1$ to n_{G} do
4: $P^{(0)}=P^{(1)}$
5: for $i=1$ to n_{P} do
6: 生成 $r_1,r_2,r_3 \in \{1,\ldots,n_{\mathrm{P}}\}, r_1 \neq r_2 \neq r_3 \neq i$
7: 计算 $P_{\bullet,i}^{(v)} = P_{\bullet,r_1}^{(0)} + \mathrm{F} \times \left(P_{\bullet,r_2}^{(0)} - P_{\bullet,r_3}^{(0)}\right)$
8: for $j=1$ to d do
9: if $u<\mathrm{CR}$ then $P_{j,i}^{(u)}=P_{j,i}^{(1)}$ else $P_{\bullet,i}^{(1)}=P_{\bullet,i}^{(0)}$
10: end for
11: if $f\left(P_{\bullet,i}^{(u)}\right) < f\left(P_{\bullet,i}^{(0)}\right)$ then $P_{\bullet,i}^{(1)}=P_{\bullet,i}^{(u)}$ else $P_{\bullet,i}^{(1)}=P_{\bullet,i}^{(0)}=P_{\bullet,i}^{(0)}$
12: end for
13: end for

资料来源：浙商证券研究所

在陈述 9 中 u 指标准正态分布的随机数。

3.5. 差分进化算法的金融领域运用

首先，在期权定价方面，差分进化算法能帮助复杂的模型优化参数来更好的拟合市场实际情况。传统的 BSM 模型有着优秀的理论基础以及解析解的可能，但它的诸多假设条件却与市场实情不符，比如假设恒定不变的波动率与标的资产价格服从几何布朗运动便是理想情况，而现实中的波动率曲面与价格跳跃便会严重影响定价的准确性，并且难以得出解析解。一种可行的办法是直接建立参数方程来逼近实际的期权价格，如 Daniel 提出的局部波动率模型：

$$C_M\left(t_0, S_0, B(0,T), R(0,T), D(0,T); K, T\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i(T) F_i\left(t_0, S_0, P_T, R_T, D_T; K, T\right)$$

行权价格为 K，到期时间为 T，期权费为 C 的期权受无风险利率 B，再投资利率 R，分红率 D 与掉期率 D 多个随机过程影响，这里采用 n 个对数正态分布的近似方程 F 按各自权重 a 加权得到期权价格的逼近。为了保持价格函数的凸性（保证价格唯一）以及满足无套利定价，还需对该问题加以如下限制，

$a_i(t) \geq 0$ 来保证价格函数凸性

$\sum_{i=1}^{n} a_i(t) = 1$ 来保证正态的风险中性概率

$\sum_{i=1}^{n} a_i(t)\mu_i(t) = 0$ 来保证风险中性的累计密度函数满足鞅过程

$\mu_i(t) \geq -1$ 来保证函数时非退化的

在众多的限制条件下,传统优化算法很难在可行域内寻找最优解,而网格搜索等枚举算法又缺乏足够的效率,此时使用差分进化算法可以有效解决该问题。将目标函数设置为:

$$H(X)=\sum_{m=1}^{P} w_m f_m(X)-C_m$$

对于约束条件:

$$g_i(X) \leq 0, i=1,..,p$$
$$h_j(X)=0, j=1,..,q$$

将等式约束转化为不等式约束:

$$\left|h_j(X)\right|-\epsilon \leq 0$$

其中ε是容忍度。尽管该优化问题存在不可导,不连续,非线性,高纬度及存在局部最优等数值解难题,差分进化算法还是能简单有效的解决该问题并极大的提升了模型的表现。

其次,实际投资组合在实践中的关键问题之一是,投资组合经理很少只有一个目标或只有几个简单目标组合。对于许多目标组合,没有唯一的全局最优值,并且目标和约束会导致非凸的搜索空间。因此,有必要引入DE算法来解决金融中的实际问题。

Boudt et al. (2010)提出使用对投资组合CVaR的贡献作为投资组合优化问题的输入,以创建CVaR贡献百分比与CVaR风险分散的期望水平一致的投资组合,以寻找回报与风险集中度之间的最佳平衡。在正态假设下,资产i的CVaR贡献百分比由权重向量w .= (w1,...,wd)',平均向量μ .= (μ1,...,μd)'和协方差矩阵Σ得出:

$$\frac{w_i\left[-\mu_i+\frac{(\Sigma w)_i}{\sqrt{w'\Sigma w}}\frac{\phi(z_\alpha)}{\alpha}\right]}{-w'\mu+\sqrt{w'\Sigma w}\frac{\phi(z_\alpha)}{\alpha}}$$

其中,zα为标准正态分布的α-分位数,φ(·)为标准正态密度函数。R中的DEoptim包非常适合解决这一问题,与R中可用的基于梯度的优化方法相比,DEoptim产生的结果更好。

具体来讲,使用DEoptim包可以找到一种投资组合权重,使得组合具有最低的CVaR,并且给每项投资设置CVaR贡献百分比上限。为此,定义目标函数以使其最小化。 DEoptim的当前实现允许对域空间进行约束。为了包含风险预算约束,我们通过惩罚函数将它们添加到目标函数中。因此,我们允许搜索算法考虑不可行的解决方案。投资者不可接受的投资组合必须受到足够的惩罚,使得被最小化过程拒绝,并且对约束的违反越大,目标函数的价值增长就越大。这些惩罚的标准表达式是:

$$\alpha \times |\,\text{violation}\,|^p$$

Crama和Schyns(2003)描述了几种校准比例因子α和p的方法。如果α和p太小,那么惩罚将不会发挥预

期的作用，最终的解决方案可能是不可行的；另一方面，如果α和p太大，则CVaR项在惩罚方面可忽略不计。因此，w的小变化会导致惩罚项的大变化，从而掩盖了对投资组合CVaR的影响。通常设置参数值α= 1000，p = 1。

4. 各种股票指数下的最小风险组合

4.1. 目标函数介绍

我们考虑两个风险优化目标，分别是最大回撤（MD）最小化，预期损失（CVaR）最小化。具体来讲，需要实现的是：

（1） **最大回撤（MD）最小化**

$$\begin{aligned} \min \quad & \text{maxDrawdown}\left(\sum w_i r_i\right) \\ \text{subject to} \quad & \sum w_i = 1 \\ & 0 \le w_i \le 1 \end{aligned}$$

最大回撤率是指统计周期内的最大产品净值的时点往后推，当产品净值回落到最低点时，产品收益率的回撤幅度。

以上公式中，w_i 为资产 i 的权重，r_i 为其收益率时间序列。为了找到组合收益序列中的最大回撤，需要首先计算累计收益时间序列（r_{cum}）和截至每个时刻的最大累计收益（$r_{cum\_\max}$）。 每当累计收益（r_{cum}）跌至最大累计收益（$r_{cum\_\max}$）以下时，就称为回撤。跌幅以最大累计收益的百分比来衡量。

（2） **预期损失（CVaR）最小化**

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{w_i\left[-\mu_i + \frac{(\Sigma w)_i}{\sqrt{w'\Sigma w}}\frac{\phi(z_\alpha)}{\alpha}\right]}{-w'\mu + \sqrt{w'\Sigma w}\frac{\phi(z_\alpha)}{\alpha}} \\ \text{subject to} \quad & \sum w_i = 1 \\ & 0 \le w_i \le 1 \end{aligned}$$

CVaR（conditional value at risk）直译为条件风险价值，通常也称预期损失（Expected shortfall），其含义为在投资组合的损失超过某个给定VaR值的条件下，该投资组合的平均损失值。

以上最小化目标即为CVaR的公式表述，其中 w_i 为资产 i 的权重，μ 和 Σ 代表资产的平均收益率向量及协

方差矩阵。z_α 为标准正态分布的α-分位数，在这里取 0.05，$\phi(\cdot)$ 为标准正态密度函数。

4.2. 宽基指数下的回测

在综合考虑规模和上市日期后，我们选取 7 只规模 10 亿以上的规模类 ETF 作为基金池一，它们是市场上跟踪同个指数的 ETF 中上市日期较早且规模最大的。

表 2：经筛选后的市场指数 ETF 概况（基金池一）

ETF 代码	ETF 名称	跟踪指数代码	跟踪指数简称	规模（亿）	上市日期
510050.SH	50ETF	000016.SH	上证 50	492.59	2005-02-23
510500.SH	500ETF	000905.SH	中证 500	481.42	2013-03-15
510300.SH	300ETF	000300.SH	沪深 300	364.68	2012-05-28
159915.SZ	创业板	399006.SZ	创业板指	229.86	2011-12-09
510180.SH	180ETF	000010.SH	上证 180	198.22	2006-05-18
159901.SZ	深 100ETF	399330.SZ	深证 100	67.14	2006-04-24
159902.SZ	中小板	399005.SZ	中小板指	23.10	2006-09-05

图 4：2014 至 2019 不同优化目标下的组合累计收益表现（基金池一）

注：回测窗口为 125 日；季度调仓；MD 代表最大回撤最小化，CVaR 代表预期损失最小化

表 3：2014 至 2019 不同优化目标下的组合表现（基金池一）

	沪深 300	MD_pool1	CVaR_pool1
累计收益率	67.14%	100.26%	120.09%
年化收益率	9.64%	13.25%	15.19%
年化夏普比	0.40	0.51	0.61
最大回撤	46.70%	46.01%	47.86%
超额收益	-	3.61%	5.54%
信息比率	-	0.46	0.75
月度胜率	-	53.52%	54.93%

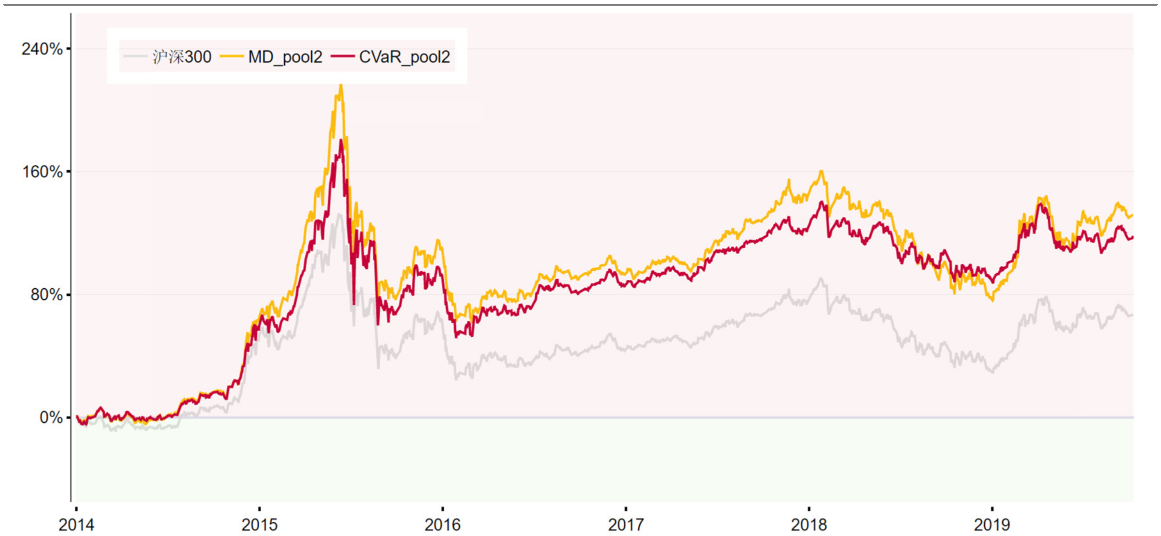
4.3. 各类代表性指数下的回测

取所有上市日期早于 2016 年，且规模在 10 亿以上的股票类 ETF（包含规模类、行业类、策略类 ETF），追踪同个指数的 ETF 中保留规模最大的一个 ETF，筛选后得到共 15 只 ETF 组成基金池二。

表 4：经筛选后的股票类 ETF 概况（基金池二）

ETF 代码	ETF 名称	跟踪指数	跟踪指数简称	规模	上市日期
510050.SH	50ETF	000016.SH	上证 50	492.59	2005/2/23
510500.SH	500ETF	000905.SH	中证 500	481.42	2013/3/15
510300.SH	300ETF	000300.SH	沪深 300	364.68	2012/5/28
159915.SZ	创业板	399006.SZ	创业板指	229.86	2011/12/9
510180.SH	180ETF	000010.SH	上证 180	198.22	2006/5/18
159901.SZ	深 100ETF	399330.SZ	深证 100	67.14	2006/4/24
510230.SH	金融 ETF	000018.SH	180 金融	59.93	2011/5/23
159928.SZ	消费 ETF	000932.SH	中证消费	32.26	2013/9/16
510880.SH	红利 ETF	000015.SH	上证红利	27.3	2007/1/18
159938.SZ	广发医药	000991.SH	全指医药	23.46	2015/1/8
159902.SZ	中小板	399005.SZ	中小板指	23.1	2006/9/5
512070.SH	非银 ETF	h30035.CSI	300 非银	18.84	2014/7/18
159939.SZ	信息技术	000993.SH	全指信息	12.97	2015/2/5
159905.SZ	深红利	399324.SZ	深证红利	12.97	2011/1/11
159910.SZ	深 F120	399702.SZ	深证 F120	11.93	2011/9/27

图 5：2014 至 2019 不同优化目标下的组合累计收益表现（基金池二）



注：回测窗口为 125 日；季度调仓；MD 代表最大回撤最小化，CVaR 代表预期损失最小化

表 5：2014 至 2019 不同优化目标下的组合表现（基金池二）

	沪深 300	MD_pool2	CVaR_pool2
累计收益率	67.14%	131.67%	118.22%
年化收益率	9.64%	16.25%	15.01%
年化夏普比	0.40	0.67	0.64
最大回撤	46.70%	46.21%	46.10%
超额收益	-	6.61%	5.37%
信息比率	-	0.78	0.56
月度胜率	-	61.97%	61.97%

5. 货币基金收益增强组合

5.1. 样本介绍

由于要求是货币基金增强，所以，在回撤较小的情景下尽量兼顾收益。为了解决这个问题，我们采取回撤最小化的算法，因为只要回撤控制好了，短债、一级债券基金的收益天然高于货币基金。所以，在严控回撤的配置体系下，得到的组合自然会有比货币基金好的收益。下文回测会展示差分进化算法的优势，该算法可以做到半年度甚至年度的调仓，这极大的方便了 FOF 的操作。

为了展示算法的性能，我们在货币基金、短债、一级债基中随机选取下面基金，如果优选基金，后文的回测组合可能会有更好的表现。

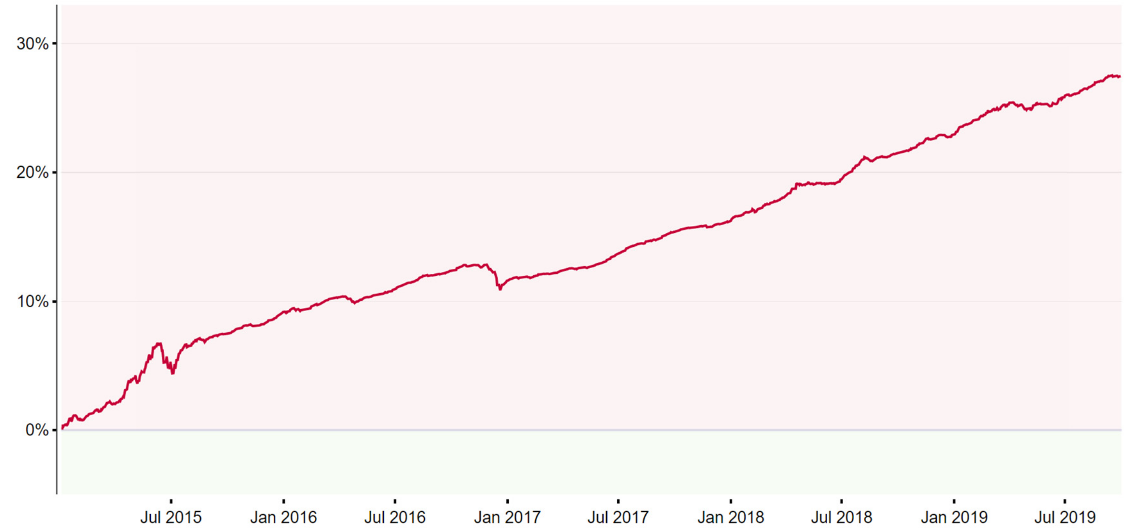
表 6：样本基金及其表现

代码	简称	成立日	基金类型	2015 收益率	2016 收益率	2017 收益率	2018 收益率	2019 收益率到 0930
200003.OF	长城货币 A	2005-05-30	货币市场型基金	3.93%	2.60%	3.58%	3.46%	1.93%
200013.OF	长城积极增利 A	2011-04-12	混合债券型一级基金	11.29%	1.90%	1.00%	4.78%	2.30%
000084.OF	博时安盈 A	2013-04-23	短期纯债型基金	6.54%	2.02%	2.07%	5.94%	2.76%
000128.OF	大成景安短融 A	2013-05-24	短期纯债型基金	6.97%	1.45%	4.94%	4.61%	2.34%
320004.OF	诺安优化收益	2006-07-17	混合债券型一级基金	9.92%	0.34%	2.67%	-2.70%	15.39%
160602.OF	鹏华普天债券 A	2003-07-12	混合债券型一级基金	14.43%	-0.01%	1.19%	7.74%	4.59%
100018.OF	富国天利增长债券	2003-12-02	混合债券型一级基金	11.18%	2.91%	0.88%	7.45%	5.03%

5.2. 年度调仓回测

参数为：年度调仓，历史250交易日样本

图 6：20150101-20190930 回测累积收益曲线与回撤情况（2014 年开始，用历史 250 天样本数据）



资料来源：浙商证券研究所

表 7：FOF 组合收益情况（年度调仓，历史 250 交易日样本）

	20150101-20190930	2015 年	2016 年	2017 年	2018 年	2019 年到 0930
累计收益率	27.47%	9.17%	2.23%	4.15%	5.76%	3.69%
年化收益率	4.44%	-	-	-	-	-
最大回撤	2.22%	2.22%	1.76%	0.12%	0.27%	0.49%

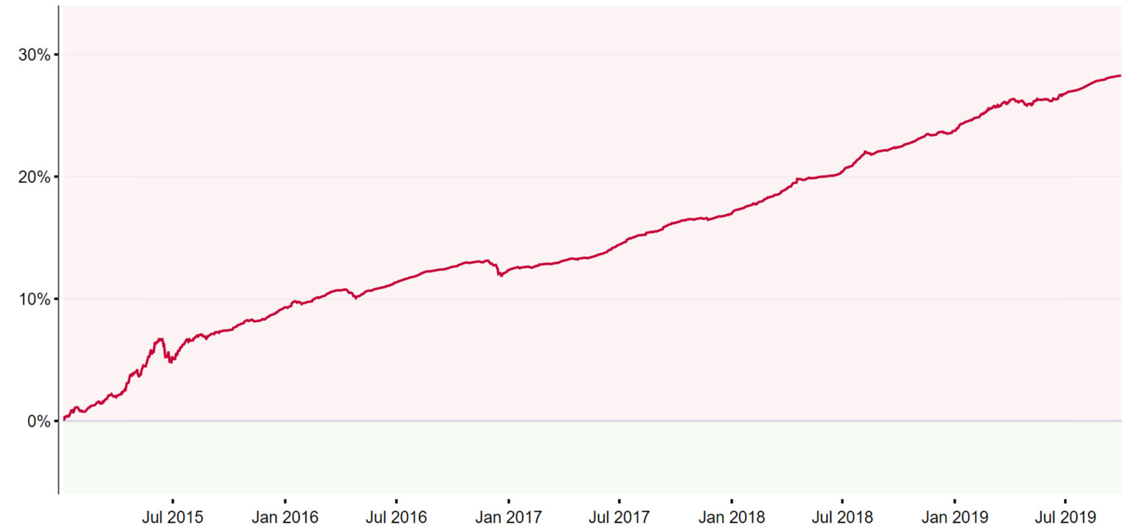
表 8：每期组合权重（年度调仓，历史 250 交易日样本）

	长城货币 A	长城积极增利 A	博时安盈 A	大成景安短融 A	诺安优化收益	鹏华普天债券 A	富国天利增长债券
2014-12-31	22.97%	3.32%	10.51%	27.30%	0.46%	10.89%	24.57%
2015-12-31	12.25%	4.73%	23.29%	43.46%	1.33%	14.32%	0.66%
2016-12-30	38.43%	5.64%	12.55%	31.42%	5.21%	5.04%	1.74%
2017-12-29	15.06%	12.35%	30.46%	16.75%	7.91%	9.88%	7.62%
2018-12-28	21.55%	34.60%	16.42%	14.92%	5.81%	2.65%	4.04%

5.3. 半年度调仓回测

参数为：半年度调仓，历史125交易日样本

图 7：20150101-20190930 回测累积收益曲线与回撤情况（2014 年开始，用历史 125 天样本数据）



资料来源：浙商证券研究所

表 9：FOF 组合收益情况（半年度调仓，历史 125 交易日样本）

	20150101-20190930	2015 年	2016 年	2017 年	2018 年	2019 年到 0930
累计收益率	28.29%	9.31%	2.77%	4.13%	5.79%	3.67%
年化收益率	4.56%	-	-	-	-	-
最大回撤	1.91%	1.91%	1.15%	0.13%	0.20%	0.43%

表 10：每期组合权重（半年度调仓，历史 125 交易日样本）

	长城货币 A	长城积极增利 A	博时安盈 A	大成景安短融 A	诺安优化收益	鹏华普天债券 A	富国天利增长债券
2014-06-30	17.76%	5.32%	31.54%	27.89%	5.13%	5.86%	6.50%
2014-12-31	22.97%	3.32%	10.51%	27.30%	0.46%	10.89%	24.57%
2015-06-30	12.25%	4.73%	23.29%	43.46%	1.33%	14.32%	0.66%
2015-12-31	13.51%	25.07%	16.74%	37.93%	0.33%	0.48%	5.90%
2016-06-30	57.92%	5.70%	7.62%	9.67%	1.32%	12.54%	5.18%
2016-12-30	38.43%	5.64%	12.55%	31.42%	5.21%	5.04%	1.74%
2017-06-30	27.55%	1.25%	21.36%	34.72%	0.30%	9.48%	5.31%
2017-12-29	20.47%	10.87%	20.41%	35.87%	4.35%	2.24%	5.80%
2018-06-29	10.75%	36.91%	6.43%	18.82%	3.99%	6.27%	16.82%
2018-12-28	37.77%	7.93%	1.85%	25.51%	5.15%	8.79%	13.02%
2019-06-28	18.43%	12.10%	7.31%	48.21%	0.21%	3.01%	10.78%

附录

1、参考文献

[1] Storn, R. and Price, K. (1997), Differential Evolution - A Simple and Efficient Heuristic for Global Optimization over Continuous Spaces, Journal of Global Optimization, 11, pp. 341 – 359.

[2] Pfaff, B. (2013) , Financial Risk Modelling and Portfolio Optimization with R, Wiley, Chichester, UK.

[3] Michaud, R.O. (1989) ,The Markowitz Optimization Enigma: is 'Optimized' optimal? Financial Analysts Journal, January/February 1989, Vol. 45, No.1 : pp. 31-42

[4] Rockafellar, R. T., and S. Uryasev, (2002) ,Conditional Value-at-Risk for General Loss Distributions. Journal of Banking and Finance, 26(7), 1443-1471.

[5] Zabarankinm M, K. Pavlikov, and S. Uryasev, (2014) , Capital Asset Pricing Model (CAPM) with drawdown measure, European Journal of Operational Research, 234, 508-517.

[6] Jagannathan, R., and T. Ma, (2003) ,Risk Reduction in Large Portfolios: Why Imposing the Wrong Constraints Helps, Journal of Finance, 58:1651_84.

[7] Choueifaty Y., Froidure T. and J. Reynier, (2011) ,Properties of the most diversified portfolio, Working paper, TOBAM.

[8] DeMiguel, V., L. Garlappi, and R. Uppal, (2009), Optimal versus naïve diversification: how inefficient is the 1\N portfolio diversification strategy? Review of Financial Studies, 22, 5: 1915-1953.

[9] Chan, L. K. C., J. Karceski, and J. Lakonishok, (1999), On Portfolio Optimization: Forecasting Covariances and Choosing the Risk Model, The Review of Financial Studies, 12:937_74.

股票投资评级说明

以报告日后的 6 个月内，证券相对于沪深 300 指数的涨跌幅为标准，定义如下：
1、买入 ：相对于沪深 300 指数表现 ＋20％以上；
2、增持 ：相对于沪深 300 指数表现 ＋10％～＋20％；
3、中性 ：相对于沪深 300 指数表现－10％～＋10％之间波动；
4、减持 ：相对于沪深 300 指数表现－10％以下。

行业的投资评级：

以报告日后的 6 个月内，行业指数相对于沪深 300 指数的涨跌幅为标准，定义如下：
1、看好 ：行业指数相对于沪深 300 指数表现＋10%以上；
2、中性 ：行业指数相对于沪深 300 指数表现－10%～＋10%以上；
3、看淡 ：行业指数相对于沪深 300 指数表现－10%以下。
我们在此提醒您，不同证券研究机构采用不同的评级术语及评级标准。我们采用的是相对评级体系，表示投资的相对比重。
建议：投资者买入或者卖出证券的决定取决于个人的实际情况，比如当前的持仓结构以及其他需要考虑的因素。投资者不应仅仅依靠投资评级来推断结论

法律声明及风险提示

本报告由浙商证券股份有限公司（已具备中国证监会批复的证券投资咨询业务资格，经营许可证编号为：Z39833000）制作。本报告中的信息均来源于我们认为可靠的已公开资料，但浙商证券股份有限公司及其关联机构（以下统称“本公司”）对这些信息的真实性、准确性及完整性不作任何保证，也不保证所包含的信息和建议不发生任何变更。本公司没有将变更的信息和建议向报告所有接收者进行更新的义务。

本报告仅供本公司的客户作参考之用。本公司不会因接收人收到本报告而视其为本公司的当然客户。

本报告仅反映报告作者的出具日的观点和判断，在任何情况下，本报告中的信息或所表述的意见均不构成对任何人的投资建议，投资者应当对本报告中的信息和意见进行独立评估，并应同时考量各自的投资目的、财务状况和特定需求。对依据或者使用本报告所造成的一切后果，本公司及/或其关联人员均不承担任何法律责任。

本公司的交易人员以及其他专业人士可能会依据不同假设和标准、采用不同的分析方法而口头或书面发表与本报告意见及建议不一致的市场评论和/或交易观点。本公司没有将此意见及建议向报告所有接收者进行更新的义务。本公司的资产管理部门、自营部门以及其他投资业务部门可能独立做出与本报告中的意见或建议不一致的投资决策。

浙商证券研究所

上海市杨高南路 729 号陆家嘴世纪金融广场 1 号楼 29 层
邮政编码：200120
电话：(8621)80108518
传真：(8621)80106010
浙商证券研究所：http://research.stocke.com.cn