

高维概率

High-Dimensional Probability

九、随机矩阵基础

@滕佳烨

- 之前说了啥

1. 随机向量的Concentration（次高斯）
2. 随机向量的Isotropy性质
3. 格罗滕迪克不等式及其应用

- 这一章要说啥

1. 什么是随机矩阵，随机矩阵的模和各项同
2. 随机矩阵的Concentration，以及证明的思路
(covering number，又是连续和离散的桥梁)
3. 应用：error coding(略讲)；community detection

这一章结束后，相信你会大概了解什么是Concentration，包括随机变量、随机向量和随机矩阵的初步知识。

所以我们会**断更一段时间**（换个课来聊，初步打算是因果推断，因为我滞留在上海的书发回来啦！），第一部分一共更了**12节课**（最后加个**总结课**），就把它当作是高维概率的**上卷**吧~之后等休整一下我会继续填好坑的。

- 矩阵的Concentration?

1. 随机变量 $\rightarrow P(|X| > t) \leq u$
2. 随机向量 $\rightarrow P(\|X\| > t) \leq u$
3. 随机矩阵 $\rightarrow ?$

- 随机矩阵

1. 奇异值（矩阵的模）

$$s_i(A) = \sqrt{\lambda_i(AA^\top)} = \sqrt{\lambda_i(A^\top A)}. \quad s_1(A) = \|A\|.$$

$$\|A\| := \|A : \ell_2^n \rightarrow \ell_2^m\| = \max_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \max_{x \in S^{n-1}} \|Ax\|_2 = \max_{x \in S^{n-1}, y \in S^{m-1}} \langle Ax, y \rangle$$

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |A_{ij}|^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^r s_i(A)^2 \right)^{1/2}.$$

和特征值的关系：特征值只对方阵成立，奇异值对任意矩阵

- 随机矩阵

2. Isometries (对标向量的isotropic, 代数中的1)

Exercise 4.1.4 (Isometries). ☕ Let A be an $m \times n$ matrix with $m \geq n$. Prove that the following statements are equivalent.

1. $A^\top A = I_n$.
2. $P := AA^\top$ is an *orthogonal projection*¹ in \mathbb{R}^m onto a subspace of dimension n .
3. A is an *isometry*, or isometric embedding of \mathbb{R}^n into \mathbb{R}^m , which means that

$$\|Ax\|_2 = \|x\|_2 \quad \text{for all } x \in \mathbb{R}^n.$$

4. All singular values of A equal 1; equivalently

$$s_n(A) = s_1(A) = 1.$$

- 随机矩阵

2. Isometries性质

Lemma 4.1.5 (Approximate isometries). *Let A be an $m \times n$ matrix and $\delta > 0$. Suppose that*

$$\|A^{\top}A - I_n\| \leq \max(\delta, \delta^2).$$

Then

$$(1 - \delta)\|x\|_2 \leq \|Ax\|_2 \leq (1 + \delta)\|x\|_2 \quad \text{for all } x \in \mathbb{R}^n. \quad (4.6)$$

近似各向同等价于矩阵的模的Concentration!

- 随机矩阵

2. Isometries性质

Lemma 4.1.5 (Approximate isometries). *Let A be an $m \times n$ matrix and $\delta > 0$. Suppose that*

$$\|A^{\top}A - I_n\| \leq \max(\delta, \delta^2).$$

Then

$$(1 - \delta)\|x\|_2 \leq \|Ax\|_2 \leq (1 + \delta)\|x\|_2 \quad \text{for all } x \in \mathbb{R}^n. \quad (4.6)$$

近似各向同等价于矩阵的模的Concentration!

1. 随机矩阵的奇异值? \rightarrow 特征值的推广
2. 随机矩阵的模? \rightarrow 2-norm, F-norm
3. 随机矩阵的各项同? \rightarrow 和concentration的联系

谢谢!

@滕佳烨