SIGMA205 : Prédiction d'une série temporelle localement stationnaire

Thomas EBOLI et Amaury DURAND

Télécom ParisTech

30 juin 2016

Plan

1. Rappels sur les processus AR
    - Construction d'une solution stationnaire au second ordre
    - Génération à partir de Levinson-Durbin
    - Densité spectrale de puissance
2. Processus TVAR
    - Construction d'une solution stable
    - Génération
    - Prédiction
    - Agrégation des prédicteurs
3. Implémentations
    - Prédiction par agrégation
    - Estimation DSP parole

Plan

1. Rappels sur les processus AR
   - Construction d'une solution stationnaire au second ordre
   - Génération à partir de Levinson-Durbin
   - Densité spectrale de puissance
2. Processus TVAR
   - Construction d'une solution stable
   - Génération
   - Prédiction
   - Agrégation des prédicteurs
3. Implémentations
   - Prédiction par agrégation
   - Estimation DSP parole

Equation AR

$$X_t = \sum_{i=1}^{p} \theta_i X_{t-i} + \epsilon_t \qquad \text{(AR)}$$

$p \geq 1$, $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un processus aléatoire à valeurs dans $\mathbb{C}$,
$\theta_1, \cdots, \theta_p \in \mathbb{C}$ et $\epsilon \sim BB(0, \sigma^2)$

Théorème

Soit $\Theta(z) = 1 - \sum_{k=1}^{p} \theta_k z^k$. Si $\forall |z| = 1, \Theta(z) \neq 0$
Alors il existe une solution stationnaire au second ordre

Plan

1. Rappels sur les processus AR
   - Construction d'une solution stationnaire au second ordre
   - Génération à partir de Levinson-Durbin
   - Densité spectrale de puissance
2. Processus TVAR
   - Construction d'une solution stable
   - Génération
   - Prédiction
   - Agrégation des prédicteurs
3. Implémentations
   - Prédiction par agrégation
   - Estimation DSP parole

Algorithme 1.1 : Construction des θ à partir des κ

Data : $(\kappa_1, \cdots, \kappa_d) \in \left]-1, 1\right[^d$

Result : $(\theta_{i,p})_{p \in [\![1,d]\!], i \in [\![1,p]\!]}$

Initialization :

  for $p = 1, \cdots, d$ **do**

    $\theta_{p,p} = \kappa_p$;

for $p = 2, \cdots, d$ **do**

  for $m = 1, \cdots, p-1$ **do**

    $\theta_{m,p} = \theta_{m,p-1} - \kappa_p \theta_{p-m,p-1}$;

Théorème

Soit $d \geq 1$. Alors quels que soient $(\kappa_1, \cdots, \kappa_d) \in \left]-1, 1\right[^d$, $\forall p \in [\![1, d]\!]$, les coefficients $(\theta_{1,p}, \cdots, \theta_{p,p})$ construits par l'algorithme 1.1 sont les coefficients d'un processus $AR(p)$ causal i.e

$$1 - \sum_{k=1}^{p} \theta_{k,p} z^k \neq 0 \ \forall |z| \leq 1$$

Plan

1. Rappels sur les processus AR
   - Construction d'une solution stationnaire au second ordre
   - Génération à partir de Levinson-Durbin
   - Densité spectrale de puissance
2. Processus TVAR
   - Construction d'une solution stable
   - Génération
   - Prédiction
   - Agrégation des prédicteurs
3. Implémentations
   - Prédiction par agrégation
   - Estimation DSP parole

Définition (DSP d'un AR(p))

La DSP est définie pour $\lambda \in [-\pi, \pi[$ $S_x(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi\left|\Theta\left(e^{-i\lambda}\right)\right|^2}$ où $\Theta(z) = 1 - \sum_{k=1}^{p} \theta_k z^k$

Proposition

Considérons $z_1, \cdots, z_p$ les inverses des racines de $\Theta(z)$ alors en notant $\forall n \in [\![1, p]\!], z_n = \rho_n e^{i\phi_n}$ avec $0 < \rho_n < 1$ et $\phi_n \in [-\pi, \pi[$ on a, si $\forall n \in [\![1, p]\!], \rho_n$ est assez proche de 1

$$S_x(\lambda) \text{ admet un pic en } \lambda \iff \exists n \in [\![1, p]\!] \; \lambda = \phi_n$$

Plan

1. Rappels sur les processus AR
   - Construction d'une solution stationnaire au second ordre
   - Génération à partir de Levinson-Durbin
   - Densité spectrale de puissance
2. Processus TVAR
   - Construction d'une solution stable
   - Génération
   - Prédiction
   - Agrégation des prédicteurs
3. Implémentations
   - Prédiction par agrégation
   - Estimation DSP parole

Equation TVAR et stabilité

Equation TVAR :

$$X_t = \sum_{i=1}^{p} \theta_i(t) X_{t-i} + \sigma(t)\epsilon_t \qquad \text{(TVAR)}$$

où $\epsilon \overset{\text{iid}}{\sim} BB(0,1)$.

critère de stabilité :

$$\sup_{t\in\mathbb{Z}} \mathbb{E}\left[|X_t|^2\right] < +\infty \qquad \text{(S)}$$

Cas où p=1 : $X_t = \theta(t)X_{t-1} + \sigma(t)\epsilon_t$

Proposition

Si $\sup_t |\theta(t)| < 1$ *et* $\sup_t |\sigma(t)| < +\infty$ *alors il existe un unique processus* $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *vérifiant à la fois* (TVAR) *et la condition de stabilité* (S)

Démonstration : On suppose (TVAR) et (S). En itérant k fois l'équation $\forall k \geq 0$

$$X_t = \left(\prod_{j=0}^{k} \theta(t-j)\right) X_{t-k-1} + \sum_{j=0}^{k} \left(\prod_{i=0}^{j-1} \theta(t-i)\right) \sigma(t-j)\epsilon_{t-j}$$

But : $k \to +\infty$

$M = \sup_t \mathbb{E}\left[|X_t|^2\right]$, $\theta_{\max} = \sup_t |\theta(t)|$ et $\sigma_{\max} = \sup_t |\sigma(t)|$

$$\left\| \left(\prod_{j=0}^{k} \theta(t-j) \right) X_{t-k-1} \right\|_2^2 \leq \theta_{\max}^{2(k+1)} M \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$$

De plus $\forall j \geq 0$

$$\left\| \left(\prod_{i=0}^{j-1} \theta(t-i) \right) \sigma(t-j) \epsilon_{t-j} \right\|_2 \leq \theta_{\max}^{j} \sigma_{\max} \Rightarrow \text{ série convergente}$$

On fait tendre k vers $+\infty$:

$$X_t = \sum_{j=0}^{+\infty} c_j \epsilon_{t-j} \text{ avec } c_j = \left(\prod_{i=0}^{j-1} \theta(t-i) \right) \sigma(t-j)$$

Réciproque : ok

Contre exemple pour p=2 : GRAPHIQUE A METTRE

Cas général :

Définition (Nouvelle définition TVAR)

$\theta_1, \cdots, \theta_p$ et σ définies sur $]-\infty, 1]$ et $(\epsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}} \overset{\text{iid}}{\sim} BB(0,1)$. $T \geq 1$

$$\forall -\infty < t \leq T, X_{t,T} = \sum_{i=1}^{p} \theta_i\left(\frac{t}{T}\right) X_{t-i,T} + \sigma\left(\frac{t}{T}\right)\epsilon_t \quad \text{(TVAR')}$$

$$\sup_{-\infty<t\leq T} \mathbb{E}\left[\left|X_{t,T}\right|^2\right] < +\infty \qquad \text{(S')}$$

Théorème

Hypothèses :

- $\forall i \in [\![1, p]\!], \theta_i$ uniformément continue sur $]-\infty, 1]$
- σ bornée sur $]-\infty, 1]$.
- $\exists \delta \in]0, 1[, \Theta(z; u) \overset{\text{def}}{=} 1 - \sum_{i=1}^{p} \theta_i(u) z^i \neq 0 \, \forall |z| < \delta^{-1}, u \in [0, 1]$

Alors il existe $T_0 \geq 1$ tel que $\forall T \geq T_0$ il existe un unique processus $(X_{t,T})_{t \leq T}$ vérifiant (TVAR') et (S').

Plan

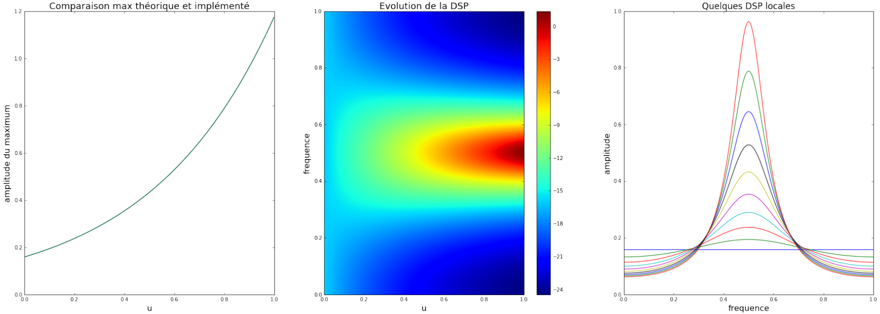
1. Rappels sur les processus AR
   - Construction d'une solution stationnaire au second ordre
   - Génération à partir de Levinson-Durbin
   - Densité spectrale de puissance
2. Processus TVAR
   - Construction d'une solution stable
   - Génération
   - Prédiction
   - Agrégation des prédicteurs
3. Implémentations
   - Prédiction par agrégation
   - Estimation DSP parole

horizon de temps fini : $t \in [\![0, T]\!]$
Processus AR abstraits associés A $t \in [\![0, T]\!]$ fixé
$(\theta_1(t/T), \cdots, \theta_p(t/T))$ sont les coefficients d'un AR(p) causal

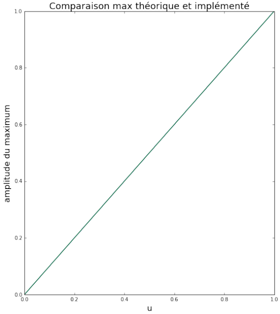
Théorème

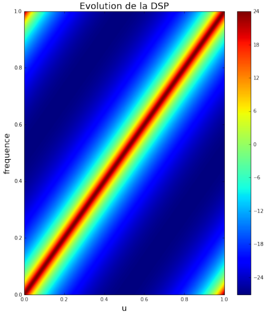
$\forall \kappa_1, \cdots, \kappa_p$ continues de $[0,1] \to]-1,1[$, les fonctions $\theta_{1,p}, \cdots, \theta_{p,p}$ obtenues par l'algorithme 1.1 à chaque instant u sont les coefficients d'un processus TVAR(p) stable

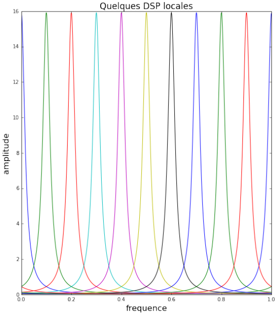
Implémentation TVAR(1) à partir de la racine : module variable



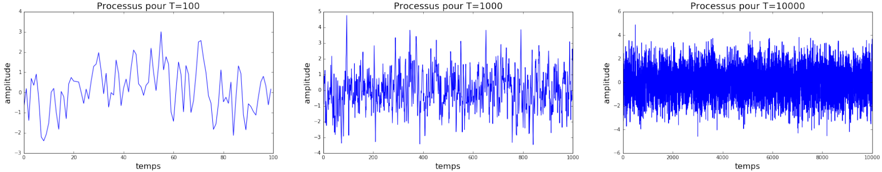
Implémentation TVAR(1) à partir de la racine : phase variable



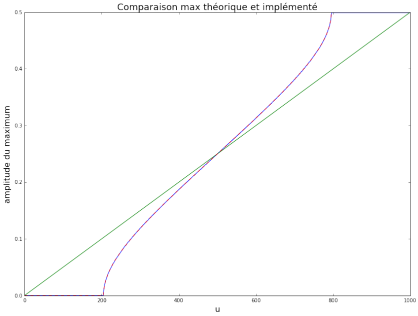


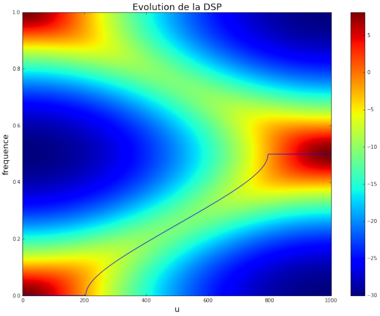


Implémentation TVAR(2) à partir des racines : racines réelles



Implémentation TVAR(2) à partir des racines : racines réelles





Implémentation TVAR(..) à partir des κ GRAPHIQUE A METTRE

Plan

1. Rappels sur les processus AR
   - Construction d'une solution stationnaire au second ordre
   - Génération à partir de Levinson-Durbin
   - Densité spectrale de puissance
2. Processus TVAR
   - Construction d'une solution stable
   - Génération
   - Prédiction
   - Agrégation des prédicteurs
3. Implémentations
   - Prédiction par agrégation
   - Estimation DSP parole

$$\mathbf{X}_{t,T} = [X_{t,T}, X_{t-1,T}, \cdots, X_{t-p+1,T}]^T$$
$$\boldsymbol{\theta}_{t,T} = \left[\theta_1\left(\tfrac{t}{T}\right), \theta_2\left(\tfrac{t}{T}\right), \cdots, \theta_p\left(\tfrac{t}{T}\right)\right]^T, \ \sigma_{t,T} = \sigma\left(\tfrac{t}{T}\right)$$

Critère : $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{t,T} = \arg\min_{\boldsymbol{\theta}\in\mathbb{C}^p} \mathbb{E}\left[\left|X_{t+1,T} - \boldsymbol{\theta}^T\mathbf{X}_{t,T}\right|^2\right]$

Définition (Estimateur NLMS de $\boldsymbol{\theta}$)

On se donne un pas μ, l'estimateur est le suivant :

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{0,T}(\mu) = 0$$
$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{t+1,T}(\mu) = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{t,T}(\mu) + \mu(X_{t+1,T} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_{t+1,T}(\mu)^T\mathbf{X}_{t,T})\frac{\mathbf{X}_{t,T}}{1+\mu\left\|\mathbf{X}_{t,T}\right\|^2}$$

Prédicteur associé : $\hat{X}_{t,T}(\mu) = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{t-1,T}(\mu)^T\mathbf{X}_{t-1,T}$

Influence de μ : GRAPHIQUE A METTRE

Plan

1. Rappels sur les processus AR
   - Construction d'une solution stationnaire au second ordre
   - Génération à partir de Levinson-Durbin
   - Densité spectrale de puissance
2. Processus TVAR
   - Construction d'une solution stable
   - Génération
   - Prédiction
   - Agrégation des prédicteurs
3. Implémentations
   - Prédiction par agrégation
   - Estimation DSP parole

Définition (Agrégation)

$$\forall t \in [\![1, T]\!], \hat{X}_{t,T} = \sum_{i=1}^{N} \alpha_{i,t} \hat{X}_{t,T}^{(i)}$$

où $\alpha_t = (\alpha_{1,t}, \cdots, \alpha_{N,t}) \in S_N = \left\{\alpha \in \mathbb{R}_+^N, \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1\right\}$

Stratégie 1 : à partir du gradient de l'erreur quadratique

$\forall i \in [\![1, N]\!], \forall t \in [\![1, T]\!]$

$$\hat{\alpha}_{i,t} = \frac{\exp\left(-2\eta \sum_{s=1}^{t-1} \left(\sum_{j=1}^{N} \hat{\alpha}_{j,s} \hat{X}_{s,T}^{(j)} - X_{s,T}\right) \hat{X}_{s,T}^{(i)}\right)}{\sum_{k=1}^{N} \exp\left(-2\eta \sum_{s=1}^{t-1} \left(\sum_{j=1}^{N} \hat{\alpha}_{j,s} \hat{X}_{s,T}^{(j)} - X_{s,T}\right) \hat{X}_{s,T}^{(k)}\right)}$$

Stratégie 2 : à partir de l'erreur quadratique

$\forall i \in [\![1, N]\!], \forall t \in [\![1, T]\!]$

$$\hat{\alpha}_{i,t} = \frac{\exp\left(-\eta \sum_{s=1}^{t-1} \left(\hat{X}_{s,T}^{(i)} - X_{s,T}\right)^2\right)}{\sum_{k=1}^{N} \exp\left(-\eta \sum_{s=1}^{t-1} \left(\hat{X}_{s,T}^{(k)} - X_{s,T}\right)^2\right)}$$

Théorème (Performances)

$(X_{t,T})_{1\leq t\leq T}$ TVAR stable + régularité des prédicteurs :
$\mathcal{E}(T) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\mathbb{E}[(\hat{X}_{t,T} - X_{t,T})^2]$

Stratégie 1 : Si $\sup_{t\in\mathbb{Z}}\mathbb{E}\left[|\epsilon_t|^4\right] < +\infty$

$$\mathcal{E}(T) \leq \inf_{\alpha\in S_N}\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\mathbb{E}[(\hat{X}_{t,1}^{[\alpha]} - X_{t,T})^2] + \frac{\log(N)}{T\eta} + 2\eta C_4$$

Stratégie 2 : Si il existe $p \geq 2$ tel que $\sup_{t\in\mathbb{Z}}\mathbb{E}\left[|\epsilon_t|^p\right] < +\infty$

$$\mathcal{E}(T) \leq \min_{1\leq i\leq N}\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\mathbb{E}[(\hat{X}_{t,T}^{(i)} - X_{t,T})^2] + \frac{\log(N)}{T\eta} + (2\eta)^{p/2-1}C_p$$

Plan

1. Rappels sur les processus AR
   - Construction d'une solution stationnaire au second ordre
   - Génération à partir de Levinson-Durbin
   - Densité spectrale de puissance
2. Processus TVAR
   - Construction d'une solution stable
   - Génération
   - Prédiction
   - Agrégation des prédicteurs
3. Implémentations
   - Prédiction par agrégation
   - Estimation DSP parole

A REMPLIR

Plan

1. Rappels sur les processus AR
   - Construction d'une solution stationnaire au second ordre
   - Génération à partir de Levinson-Durbin
   - Densité spectrale de puissance
2. Processus TVAR
   - Construction d'une solution stable
   - Génération
   - Prédiction
   - Agrégation des prédicteurs
3. Implémentations
   - Prédiction par agrégation
   - **Estimation DSP parole**

A REMPLIR