

SIGMA205 : Prédiction d'une série temporelle localement stationnaire

Thomas EBOLI et Amaury DURAND

Télécom ParisTech

30 juin 2016

Plan

- ① Rappels sur les processus AR
 - Construction d'une solution stationnaire au second ordre
 - Génération à partir de Levinson-Durbin
 - Densité spectrale de puissance
- ② Processus TVAR
 - Construction d'une solution stable
 - Génération
 - Prédiction
 - Agrégation des prédicteurs
- ③ Implémentations
 - Prédiction par agrégation
 - Estimation DSP parole

Plan

- 1 Rappels sur les processus AR
 - Construction d'une solution stationnaire au second ordre
 - Génération à partir de Levinson-Durbin
 - Densité spectrale de puissance
- 2 Processus TVAR
 - Construction d'une solution stable
 - Génération
 - Prédiction
 - Agrégation des prédicteurs
- 3 Implémentations
 - Prédiction par agrégation
 - Estimation DSP parole

Equation AR

$$X_t = \sum_{i=1}^p \theta_i X_{t-i} + \epsilon_t \quad (\text{AR})$$

$p \geq 1$, $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ un processus aléatoire à valeurs dans \mathbb{C} ,
 $\theta_1, \dots, \theta_p \in \mathbb{C}$ et $\epsilon \sim BB(0, \sigma^2)$

Théorème

Soit $\Theta(z) = 1 - \sum_{k=1}^p \theta_k z^k$. Si $\forall |z| = 1, \Theta(z) \neq 0$
Alors il existe une solution stationnaire au second ordre

Plan

- 1 Rappels sur les processus AR
 - Construction d'une solution stationnaire au second ordre
 - Génération à partir de Levinson-Durbin
 - Densité spectrale de puissance
- 2 Processus TVAR
 - Construction d'une solution stable
 - Génération
 - Prédiction
 - Agrégation des prédicteurs
- 3 Implémentations
 - Prédiction par agrégation
 - Estimation DSP parole

Algorithme 1.1 : Construction des θ à partir des κ

Data : $(\kappa_1, \dots, \kappa_d) \in]-1, 1[^d$

Result : $(\theta_{i,p})_{p \in \llbracket 1, d \rrbracket, i \in \llbracket 1, p \rrbracket}$

Initialization :

```
┌   for  $p = 1, \dots, d$  do
├        $\theta_{p,p} = \kappa_p$ ;
└
for  $p = 2, \dots, d$  do
┌   for  $m = 1, \dots, p - 1$  do
├        $\theta_{m,p} = \theta_{m,p-1} - \kappa_p \theta_{p-m,p-1}$ ;
└
```

Théorème

Soit $d \geq 1$. Alors quels que soient $(\kappa_1, \dots, \kappa_d) \in]-1, 1[^d$, $\forall p \in \llbracket 1, d \rrbracket$, les coefficients $(\theta_{1,p}, \dots, \theta_{p,p})$ construits par l'algorithme 1.1 sont les coefficients d'un processus $AR(p)$ causal i.e

$$1 - \sum_{k=1}^p \theta_{k,p} z^k \neq 0 \quad \forall |z| \leq 1$$

Plan

- 1 Rappels sur les processus AR
 - Construction d'une solution stationnaire au second ordre
 - Génération à partir de Levinson-Durbin
 - Densité spectrale de puissance
- 2 Processus TVAR
 - Construction d'une solution stable
 - Génération
 - Prédiction
 - Agrégation des prédicteurs
- 3 Implémentations
 - Prédiction par agrégation
 - Estimation DSP parole

Définition (DSP d'un AR(p))

La DSP est définie pour $\lambda \in [-\pi, \pi[$ $S_x(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi|\Theta(e^{-i\lambda})|^2}$ où
 $\Theta(z) = 1 - \sum_{k=1}^p \theta_k z^k$

Proposition

Considérons z_1, \dots, z_p les inverses des racines de $\Theta(z)$ alors en notant $\forall n \in \llbracket 1, p \rrbracket, z_n = \rho_n e^{i\phi_n}$ avec $0 < \rho_n < 1$ et $\phi_n \in [-\pi, \pi[$ on a, si $\forall n \in \llbracket 1, p \rrbracket, \rho_n$ est assez proche de 1

$$S_x(\lambda) \text{ admet un pic en } \lambda \iff \exists n \in \llbracket 1, p \rrbracket \lambda = \phi_n$$

Plan

- 1 Rappels sur les processus AR
 - Construction d'une solution stationnaire au second ordre
 - Génération à partir de Levinson-Durbin
 - Densité spectrale de puissance
- 2 Processus TVAR
 - Construction d'une solution stable
 - Génération
 - Prédiction
 - Agrégation des prédicteurs
- 3 Implémentations
 - Prédiction par agrégation
 - Estimation DSP parole

Equation TVAR et stabilité

Equation TVAR :

$$X_t = \sum_{i=1}^p \theta_i(t) X_{t-i} + \sigma(t) \epsilon_t \quad (\text{TVAR})$$

où $\epsilon \stackrel{\text{iid}}{\sim} BB(0, 1)$.

critère de stabilité :

$$\sup_{t \in \mathbb{Z}} \mathbb{E} [|X_t|^2] < +\infty \quad (\text{S})$$

Cas où $p=1$: $X_t = \theta(t)X_{t-1} + \sigma(t)\epsilon_t$

Proposition

Si $\sup_t |\theta(t)| < 1$ et $\sup_t |\sigma(t)| < +\infty$ alors il existe un unique processus $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ vérifiant à la fois (TVAR) et la condition de stabilité (S)

Démonstration : On suppose (TVAR) et (S). En itérant k fois l'équation $\forall k \geq 0$

$$X_t = \left(\prod_{j=0}^k \theta(t-j) \right) X_{t-k-1} + \sum_{j=0}^k \left(\prod_{i=0}^{j-1} \theta(t-i) \right) \sigma(t-j) \epsilon_{t-j}$$

But : $k \rightarrow +\infty$

$$M = \sup_t \mathbb{E} [|X_t|^2], \theta_{\max} = \sup_t |\theta(t)| \text{ et } \sigma_{\max} = \sup_t |\sigma(t)|$$

$$\left\| \left(\prod_{j=0}^k \theta(t-j) \right) X_{t-k-1} \right\|_2^2 \leq \theta_{\max}^{2(k+1)} M \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$$

De plus $\forall j \geq 0$

$$\left\| \left(\prod_{i=0}^{j-1} \theta(t-i) \right) \sigma(t-j) \epsilon_{t-j} \right\|_2 \leq \theta_{\max}^j \sigma_{\max} \Rightarrow \text{série convergente}$$

On fait tendre k vers $+\infty$:

$$X_t = \sum_{j=0}^{+\infty} c_j \epsilon_{t-j} \text{ avec } c_j = \left(\prod_{i=0}^{j-1} \theta(t-i) \right) \sigma(t-j)$$

Réciproque : ok

Contre exemple pour $p=2$: GRAPHIQUE A METTRE

Cas général :

Définition (Nouvelle définition TVAR)

$\theta_1, \dots, \theta_p$ et σ définies sur $] -\infty, 1]$ et $(\epsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}} \stackrel{\text{iid}}{\sim} BB(0, 1)$. $T \geq 1$

$$\forall -\infty < t \leq T, X_{t,T} = \sum_{i=1}^p \theta_i \left(\frac{t}{T} \right) X_{t-i,T} + \sigma \left(\frac{t}{T} \right) \epsilon_t \quad (\text{TVAR}')$$

$$\sup_{-\infty < t \leq T} \mathbb{E} \left[|X_{t,T}|^2 \right] < +\infty \quad (\text{S}')$$

Théorème

Hypothèses :

- $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \theta_i$ uniformément continue sur $] - \infty, 1]$
- σ bornée sur $] - \infty, 1]$.
- $\exists \delta \in]0, 1[, \Theta(z; u) \stackrel{\text{def}}{=} 1 - \sum_{i=1}^p \theta_i(u) z^i \neq 0 \forall |z| < \delta^{-1}, u \in [0, 1]$

Alors il existe $T_0 \geq 1$ tel que $\forall T \geq T_0$ il existe un unique processus $(X_{t,T})_{t \leq T}$ vérifiant (TVAR') et (S').

Plan

- 1 Rappels sur les processus AR
 - Construction d'une solution stationnaire au second ordre
 - Génération à partir de Levinson-Durbin
 - Densité spectrale de puissance
- 2 Processus TVAR
 - Construction d'une solution stable
 - **Génération**
 - Prédiction
 - Agrégation des prédicteurs
- 3 Implémentations
 - Prédiction par agrégation
 - Estimation DSP parole

horizon de temps fini : $t \in \llbracket 0, T \rrbracket$

Processus AR abstraits associés A $t \in \llbracket 0, T \rrbracket$ fixé

$(\theta_1(t/T), \dots, \theta_p(t/T))$ sont les coefficients d'un AR(p) causal

Théorème

$\forall \kappa_1, \dots, \kappa_p$ continues de $[0, 1] \rightarrow]-1, 1[$, les fonctions $\theta_{1,p}, \dots, \theta_{p,p}$ obtenues par l'algorithme 1.1 à chaque instant u sont les coefficients d'un processus TVAR(p) stable

Implémentation TVAR(2) à partir des racines GRAPHIQUE A METTRE

Implémentation TVAR(..) à partir des κ GRAPHIQUE A METTRE

Plan

- 1 Rappels sur les processus AR
 - Construction d'une solution stationnaire au second ordre
 - Génération à partir de Levinson-Durbin
 - Densité spectrale de puissance
- 2 **Processus TVAR**
 - Construction d'une solution stable
 - Génération
 - **Prédiction**
 - Agrégation des prédicteurs
- 3 Implémentations
 - Prédiction par agrégation
 - Estimation DSP parole

$$\mathbf{X}_{t,T} = [X_{t,T}, X_{t-1,T}, \dots, X_{t-p+1,T}]^T$$

$$\boldsymbol{\theta}_{t,T} = [\theta_1(\frac{t}{T}), \theta_2(\frac{t}{T}), \dots, \theta_p(\frac{t}{T})]^T, \sigma_{t,T} = \sigma(\frac{t}{T})$$

Critère : $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{t,T} = \arg \min_{\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{C}^p} \mathbb{E} \left[|X_{t+1,T} - \boldsymbol{\theta}^T \mathbf{X}_{t,T}|^2 \right]$

Définition (Estimateur NLMS de $\boldsymbol{\theta}$)

On se donne un pas μ , l'estimateur est le suivant :

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{0,T}(\mu) = 0$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{t+1,T}(\mu) = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{t,T}(\mu) + \mu(X_{t+1,T} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_{t+1,T}(\mu)^T \mathbf{X}_{t,T}) \frac{\mathbf{X}_{t,T}}{1 + \mu \|\mathbf{X}_{t,T}\|^2}$$

Prédicteur associé : $\hat{X}_{t,T}(\mu) = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{t-1,T}(\mu)^T \mathbf{X}_{t-1,T}$

Influence de μ : GRAPHIQUE A METTRE

Plan

- 1 Rappels sur les processus AR
 - Construction d'une solution stationnaire au second ordre
 - Génération à partir de Levinson-Durbin
 - Densité spectrale de puissance
- 2 **Processus TVAR**
 - Construction d'une solution stable
 - Génération
 - Prédiction
 - **Agrégation des prédicteurs**
- 3 Implémentations
 - Prédiction par agrégation
 - Estimation DSP parole

Définition (Agrégation)

$$\forall t \in \llbracket 1, T \rrbracket, \hat{X}_{t,T} = \sum_{i=1}^N \alpha_{i,t} \hat{X}_{t,T}^{(i)}$$

où $\alpha_t = (\alpha_{1,t}, \dots, \alpha_{N,t}) \in \mathcal{S}_N = \left\{ \alpha \in \mathbb{R}_+^N, \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1 \right\}$

Stratégie 1 : à partir du gradient de l'erreur quadratique

$\forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket, \forall t \in \llbracket 1, T \rrbracket$

$$\hat{\alpha}_{i,t} = \frac{\exp \left(-2\eta \sum_{s=1}^{t-1} \left(\sum_{j=1}^N \hat{\alpha}_{j,s} \hat{X}_{s,T}^{(j)} - X_{s,T} \right) \hat{X}_{s,T}^{(i)} \right)}{\sum_{k=1}^N \exp \left(-2\eta \sum_{s=1}^{t-1} \left(\sum_{j=1}^N \hat{\alpha}_{j,s} \hat{X}_{s,T}^{(j)} - X_{s,T} \right) \hat{X}_{s,T}^{(k)} \right)}$$

Stratégie 2 : à partir de l'erreur quadratique

$\forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket, \forall t \in \llbracket 1, T \rrbracket$

$$\hat{\alpha}_{i,t} = \frac{\exp \left(-\eta \sum_{s=1}^{t-1} \left(\hat{X}_{s,T}^{(i)} - X_{s,T} \right)^2 \right)}{\sum_{k=1}^N \exp \left(-\eta \sum_{s=1}^{t-1} \left(\hat{X}_{s,T}^{(k)} - X_{s,T} \right)^2 \right)}$$

Théorème (Performances)

$(X_{t,T})_{1 \leq t \leq T}$ TVAR stable + régularité des prédicteurs :

$$\mathcal{E}(T) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbb{E}[(\hat{X}_{t,T} - X_{t,T})^2]$$

Stratégie 1 : Si $\sup_{t \in \mathbb{Z}} \mathbb{E}[|\epsilon_t|^4] < +\infty$

$$\mathcal{E}(T) \leq \inf_{\alpha \in S_N} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbb{E}[(\hat{X}_{t,1}^{[\alpha]} - X_{t,T})^2] + \frac{\log(N)}{T\eta} + 2\eta C_4$$

Stratégie 2 : Si il existe $p \geq 2$ tel que $\sup_{t \in \mathbb{Z}} \mathbb{E}[|\epsilon_t|^p] < +\infty$

$$\mathcal{E}(T) \leq \min_{1 \leq i \leq N} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbb{E}[(\hat{X}_{t,T}^{(i)} - X_{t,T})^2] + \frac{\log(N)}{T\eta} + (2\eta)^{p/2-1} C_p$$

Plan

- 1 Rappels sur les processus AR
 - Construction d'une solution stationnaire au second ordre
 - Génération à partir de Levinson-Durbin
 - Densité spectrale de puissance
- 2 Processus TVAR
 - Construction d'une solution stable
 - Génération
 - Prédiction
 - Agrégation des prédicteurs
- 3 Implémentations
 - Prédiction par agrégation
 - Estimation DSP parole

A REMPLIR

Plan

- 1 Rappels sur les processus AR
 - Construction d'une solution stationnaire au second ordre
 - Génération à partir de Levinson-Durbin
 - Densité spectrale de puissance
- 2 Processus TVAR
 - Construction d'une solution stable
 - Génération
 - Prédiction
 - Agrégation des prédicteurs
- 3 Implémentations
 - Prédiction par agrégation
 - Estimation DSP parole

A REMPLIR