SIGMA205 : processus TVAR

1 Révisions processus AR

Equation AR(p) :

$$X_t = \sum_{i=1}^{p} a_i X_{t-i} + \epsilon_t \tag{AR}$$

où ϵ est un bruit blanc centré de variance unitaire.

1.1 Construction d'une solution stationnaire au second ordre

Théorème 1.1. *Soit $P(z) = 1 - \sum_{k=1}^{p} a_k z^k$, supposons que $\forall |z| = 1, P(z) \neq 0$*
Alors il existe une solution stationnaire au second ordre de (AR)

Démonstration. Pour prouver cela on a besoin du lemme suivant :

Lemme 1. *Pour $\alpha \in \ell^1$ et X un processus tel que $\sup_t \mathbb{E}\left[|X_t|\right] < +\infty$ on appelle filtrage de X le processus :*

$$F_\alpha(X) = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k X_{t-k}\right)_{t\in\mathbb{Z}}$$

Alors si $\alpha, \beta \in \ell^1$ on a $F_\alpha(F_\beta(X)) = X$ si $\alpha \star \beta = \delta$
De plus $\alpha \star \beta = \delta \iff \forall |z| = 1 \left(\sum_{z\in\mathbb{Z}} \alpha_k z^k\right)\left(\sum_{z\in\mathbb{Z}} \beta_k z^k\right) = 1$
Enfin si X est stationnaire au second ordre $F(X)$ l'est aussi.

Remarque. $F_\alpha = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_i B^k$ où B est l'opérateur de shift $B : (x_t)_{t\in\mathbb{Z}} \mapsto (x_{t-1})_{t\in\mathbb{Z}}$

Le polynôme P peut s'écrire : $P(z) = \prod_{k=1}^{p}(1 - u_k z)$ où les u_k sont les inverses des racines de P. L'équation (AR) s'écrit $P(B)(X) = \epsilon$. Or avec la factorisation obtenue on a :

$$P(B) = (1 - u_1 B) \circ \cdots \circ (1 - u_p B) = F_{\alpha^{(1)}} \circ \cdots \circ F_{\alpha^{(p)}}$$

où $\alpha_k^{(l)} = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ -u_l & k = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Le but désormais est de chercher pour tout $l \in [\![1, p]\!]$ un $\beta^{(l)}$ tel que $\alpha^{(l)} \star \beta^{(l)} = \delta$ pour pouvoir inverser la relation.
On sait d'après la remarque qu'il suffit de trouver $\beta^{(l)}$ tel que $\frac{1}{1-u_l z} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \beta_k z^k$ pour tout $|z| = 1$
On sait de plus que $\forall l \in [\![1, p]\!]$ $|u_l| \neq 1$ par hypothèse sur les racines de P.
Prenons $l \in [\![1, p]\!]$ alors deux cas sont possibles :

- si $|u_l| < 1$ on a $\forall |z| = 1$ $\frac{1}{1-u_l z} = \sum_{k\geq 0} u_l^k z^k$ il suffit donc de prendre $\beta_k^{(l)} = \begin{cases} u_l^k & k \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
- si $|u_l| > 1$ on a $\forall |z| = 1$ $\frac{1}{1-u_l z} \frac{-u_l^{-1} z^{-1}}{1-u_l^{-1} z^{-1}} = \sum_{k\leq -1} -u_l^k z^k$ il suffit donc de prendre $\beta_k^{(l)} = \begin{cases} -u_l^k & k \leq -1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Finalement prenons $F = F_{\beta^{(p)}} \circ \cdots \circ F_{\beta^{(1)}}$, on prends alors

$$X = F(\epsilon)$$

□

2 Prédiction

Proposition 2.1. *On se donne X stationnaire au second ordre vérifiant (AR). On suppose de plus que X est causal i.e $P(z) \neq 0$ pour tout $|z| \leq 1$ On note $\mathcal{H}_t^X = \overline{\text{Vect}\{X_s, s \leq t\}}$. Alors*

$$\hat{X}_{t+1} = proj(X_{t+1}|\mathcal{H}_t^X) = \sum_{k=1}^{p} a_k X_{t+1-k}$$

Démonstration. $X_{t+1} = \sum_{k=1}^{p} a_k X_{t+1-k} + \epsilon_{t+1}$ de plus $\forall k \in [\![1,p]\!]\ X_{t+1-k} \in \mathcal{H}_t^X$ donc

$$\hat{X}_{t+1} = \sum_{k=1}^{p} a_k X_{t+1-k} + proj(\epsilon_{t+1}|\mathcal{H}_t^X)$$

Or X est causal donc dans la construction de X (cf preuve d'avant) on a $P(z) = \prod_{l=1}^{p}(1 - u_l z)$ où $\forall l |u_l| < 1$ ainsi les $\beta^{(l)}$ correspondants sont tous à support dans $\mathbb{N}$ ce qui entraine que $\psi = \beta^{(p)} \star \cdots \star \beta^{(1)}$ est aussi à support dans $\mathbb{N}$ et donc

$$X_t = \sum_{k=0}^{+\infty} \psi_k \epsilon_{t-k}$$

On en déduit que $\mathcal{H}_t^X = \mathcal{H}_t^\epsilon$ et donc comme ϵ est un bruit blanc $proj(\epsilon_{t+1}|\mathcal{H}_t^X) = proj(\epsilon_{t+1}|\mathcal{H}_t^\epsilon) = 0$ d'où la solution □

3 TVAR

Equation TVAR :

$$X_t = \sum_{i=1}^{p} a_i(t) X_{t-i} + \sigma(t)\epsilon_t \tag{TVAR}$$

Condition de stabilité : Le critère qui nous intéresse est d'avoir une solution de (TVAR) vérifiant la condition de stabilité suivante :

$$\sup_{t\in\mathbb{Z}} \mathbb{E}\left[|X_t|^2\right] < +\infty \tag{S}$$

3.1 Cas simple

On considère ici $\sigma(t) = 1\, \forall t \in \mathbb{R}$ et $a_i(t) = \left\{\begin{array}{ll} 0 & t < 0 \\ a_i & t \geq 0 \end{array}\right.$.

Proposition 3.1. *Dans ce cas particulier, l'équation (TVAR) admet une unique solution*

Démonstration. Tout d'abord pour $t < 0$ on a $X_t = \epsilon_t$

Pour $t \geq 0$, notons $\mathbf{X}_k = [X_k, \cdots, X_{k-p+1}]^T$, $\mathbf{e}_1 = [1, 0, \cdots, 0]^T$ et $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & a_p \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Alors l'équation (TVAR) s'écrit :

$$\mathbf{X}_t = A\mathbf{X}_{t-1} + \epsilon_t \mathbf{e}_1$$

En itérant pour $t-1, t-2$ etc, on obtient

$$\forall k \geq 0\, \mathbf{X}_t = A^{k+1}\mathbf{X}_{t-k-1} + \sum_{j=0}^{k} \epsilon_{t-j} A^j \mathbf{e}_1$$

Considérons $k \geq t$ alors $\mathbf{X}_{t-k-1} = [\epsilon_{t-k-1}, \cdots, \epsilon_{t-k-p}]^T$. Ainsi

$$\forall k \geq t\, \mathbf{X}_t = A^{k+1} \begin{pmatrix} \epsilon_{t-k-1} \\ \vdots \\ \epsilon_{t-k-p} \end{pmatrix} + \sum_{j=0}^{k} \epsilon_{t-j} A^j \mathbf{e}_1 \tag{1}$$

ce qui fournit une définition $X_t = \mathbf{e}_1^T \mathbf{X}_t$ unique □

On cherche alors une condition sur les $(a_i)_{i=1}^{p}$ pour cette solution vérifie la condition de stabilité (S)

3.1.1 Cas où p=1

Proposition 3.2. *Si $p = 1$ on note $a(t) = \left\{\begin{array}{ll} 0 & t < 0 \\ a & t \geq 0 \end{array}\right.$ et (TVAR) devient $X_t = a(t)X_{t-1} + \sigma(t)\epsilon_t$. La solution de l'équation vérifie la condition de stabilité (S) si et seulement si $|a| < 1$*

Démonstration. Si $t < 0$ $X_t = \epsilon_t$ donc $\sup_{t<0} \mathbb{E}\left[|X_t|^2\right] = 1$. Si $t \geq 0$, la formule de X_t donnée par (1) se traduit pour $p = 1$ par $\forall k \geq t$ $X_t = a^{k+1}\epsilon_{t-k-1} + \sum_{j=0}^{k} a^j \epsilon_{t-j}$ i.e $\forall k \geq t$ $X_t = \sum_{j=0}^{k+1} a^j \epsilon_{t-j}$. Ainsi

$$\forall t \in \mathbb{N}, \forall k \geq t\, \mathbb{E}\left[|X_t|^2\right] = \sum_{i=0}^{k+1} \sum_{j=0}^{k+1} a^i \overline{a}^j \mathbb{E}\left[\epsilon_{t-i}\epsilon_{t-j}\right] = \sum_{i=0}^{k+1} |a|^{2i}$$

Ainsi en faisant tendre k vers $+\infty$ on obtient

$$\forall t \in \mathbb{N},\, \mathbb{E}\left[|X_t|^2\right] = \sum_{i=0}^{+\infty} |a|^{2i} = \left\{\begin{array}{ll} +\infty & |a| \geq 1 \\ \frac{1}{1-|a|^2} & |a| < 1 \end{array}\right.$$

Ce qui donne $\sup_{t\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left[|X_t|^2\right] < +\infty \iff |a| < 1$ et comme sur $\sup_{t<0} \mathbb{E}\left[|X_t|^2\right] = 1$ la condition est valable pour le sup sur $t \in \mathbb{Z}$ $\square$

3.1.2 Cas p quelconque

Pour prouver ce cas, quelques lemmes d'algèbre linéaire sont nécessaires

Lemme 2. *La matrice A définie dans la preuve de la propriété 3.1 a pour polynôme caractéristique :*

$$\chi_A(X) = \det(A - XI_p) = (-1)^p \left(X^p - \sum_{i=1}^{p} a_i X^{p-i}\right)$$

Conséquence : Les valeurs propres de A sont les inverses des racines de $P = 1 - \sum_{i=1}^{p} a_i X^i$ car $\chi_A = (-1)^p X^p P\left(\frac{1}{X}\right)$

Lemme 3. *Soit $A \in \mathbb{C}^{p\times p}$ alors, on rappelle la définition de la norme subordonnée associée à une norme $\|.\|$ sur $\mathbb{C}^p$:*

$$|||A||| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

On rappelle aussi la définition du rayon spectral $\rho(A) = \max_{\lambda\in spec(A)} |\lambda|$. On a la propriété suivante :
Pour tout $A \in \mathbb{C}^{p\times p}$, pour tout $\epsilon > 0$ il existe une norme sur $\mathbb{C}^p$ dépendant de ϵ et de A telle que la norme subordonnée correspondante $|||.|||_{\epsilon,A}$ vérifie

$$|||A|||_{\epsilon,A} \leq \rho(A) + \epsilon$$

Proposition 3.3 (Condition suffisante)**.** *Dans ce cas particulier, en notant $P(z) = 1 - \sum_{i=1}^{p} a_i z^i$, si $\forall |z| \leq 1$ $P(z) \neq 0$ (i.e les racines de P sont hors du disque unité fermé) alors la solution de l'équation (TVAR) vérifie la condition de stabilité (S)*

Démonstration. On part de la définition de $\mathbf{X}_t$ pour $t \in \mathbb{N}$ donnée par (1)

De plus $X_t = \mathbf{e}_1^T \mathbf{X}_t$ donc $\mathbb{E}\left[|X_t|^2\right] = \mathbb{E}\left[X_t \overline{X}_t^T\right] = \mathbf{e}_1^T \mathbb{E}\left[\mathbf{X}_t \mathbf{X}_t^T\right] \mathbf{e}_1$ avec $\forall k \geq t$, comme ϵ est un bruit blanc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\mathbf{X}_t\mathbf{X}_t^T\right] &= \sum_{j=0}^{k} \sum_{l=0}^{k} A^j \mathbf{e}_1 \mathbb{E}\left[\epsilon_{t-j}\epsilon_{t-l}\right] \mathbf{e}_1^T \left(A^l\right)^T + A^{k+1} \mathbb{E}\left[\begin{pmatrix} \epsilon_{t-k-1} \\ \vdots \\ \epsilon_{t-k-p} \end{pmatrix} \left[\epsilon_{t-k-1}, \cdots, \epsilon_{t-k-p}\right]\right] \left(A^{k+1}\right)^T \\ &= \sum_{j=0}^{k} A^j \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^T \left(A^j\right)^T + A^{k+1} \left(A^{k+1}\right)^T \end{aligned}$$

Or on a supposé que les racines de P sont de module strictement supérieur à 1 donc les valeurs propres de A sont de module strictement inférieur à 1. Ainsi $\rho(A) < 1$, il existe donc $\epsilon > 0$ tel que $\rho(A) + \epsilon < 1$. En appliquant le lemme 3 à ϵ et A on obtient (en notant juste $|||A|||$ au lieu de $|||A|||_{A,\epsilon}$ pour alléger les notations) $|||A||| < 1$.
Ceci implique dans un premier temps $|||A^k||| \leq |||A|||^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ donc $A^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ et ainsi $A^{k+1}(A^{k+1})^T \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$
De plus $\forall j \in \mathbb{N}$ $\left|\left|\left|A^j \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^T \left(A^j\right)^T\right|\right|\right| \leq |||A|||^{2j} |||\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^T|||$ qui est terme général d'une série convergence dans $\mathbb{R}$ car $|||A||| < 1$

donc la série des $A^j \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^T (A^j)^T$ est absolument convergente donc convergente dans $\mathbb{R}^{p\times p}$.
En faisant donc tendre k vers $+\infty$ dans l'expression de $\mathbb{E}\left[\mathbf{X}_t \mathbf{X_t}^T\right]$ on obtient :

$$\mathbb{E}\left[\mathbf{X}_t \mathbf{X_t}^T\right] = \sum_{j=0}^{+\infty} A^j \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^T (A^j)^T \in \mathbb{R}^{p\times p}$$

Ainsi $\mathbb{E}\left[|X_t|^2\right]$ étant le premier coefficient de cette matrice, $\mathbb{E}\left[|X_t|^2\right] < +\infty$ □

3.2 Cas général avec p=1

L'équation (TVAR) devient $X_t = a(t)X_{t-1} + \sigma(t)\epsilon_t$

Proposition 3.4. *Si* $\sup_t |a(t)| < 1$ *et* $\sup_t |\sigma(t)| < +\infty$ *alors il existe un unique processus* $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *vérifiant à la fois* (TVAR) *et la condition de stabilité* (S)

Démonstration. En itérant k fois l'équation on obtient

$$\forall k \geq 0 \, X_t = \left(\prod_{j=0}^{k} a(t-j)\right) X_{t-k-1} + \sum_{j=0}^{k} \left(\prod_{i=0}^{j-1} a(t-i)\right) \sigma(t-j)\epsilon_{t-j} \tag{2}$$

- Supposons que X vérifie la condition de stabilité et appelons $M = \sup_t \mathbb{E}\left[|X_t|^2\right]$, $a_{\max} = \sup_t |a(t)|$ et $\sigma_{\max} = \sup_t |\sigma(t)|$ alors on a $\forall k \geq 0$:

$$\left\| \left(\prod_{j=0}^{k} a(t-j)\right) X_{t-k-1} \right\|_2^2 = \left(\prod_{j=0}^{k} |a(t-j)|^2\right) \mathbb{E}\left[|X_{t-k-1}|^2\right] \leq a_{\max}^{2(k+1)} M$$

  Ainsi $\lim_{k\to+\infty} \left\| \left(\prod_{j=0}^{k} a(t-j)\right) X_{t-k-1} \right\|^2 = 0$ car on a pris $a_{\max} < 1$.
  De plus $\forall j \geq 0$

$$\left\| \left(\prod_{i=0}^{j-1} a(t-i)\right) \sigma(t-j)\epsilon_{t-j} \right\|_2^2 = \left(\prod_{i=0}^{j-1} |a(t-i)|^2\right) |\sigma(t-j)|^2 \mathbb{E}\left[|\epsilon_{t-j}|^2\right] = \left(\prod_{i=0}^{j-1} |a(t-i)|^2\right) |\sigma(t-j)|^2 \leq a_{\max}^{2j} \sigma_{\max}^2 \tag{3}$$

  Ce qui donne

$$\left\| \left(\prod_{i=0}^{j-1} a(t-i)\right) \sigma(t-j)\epsilon_{t-j} \right\|_2 \leq a_{\max}^{j} \sigma_{\max}$$

  Encore une fois, parce qu'on a pris $a_{\max} < 1$, on a à droite de l'inégalité le terme général d'une série convergente.
  Ainsi en notant $c_j = \left(\prod_{i=0}^{j-1} a(t-i)\right) \sigma(t-j)$ la série de terme général $c_j \epsilon_{t-j}$ est absolument convergente donc convergente.
  On peut alors faire tendre k vers $+\infty$ dans (2), on obtient

$$X_t = \sum_{j=0}^{+\infty} c_j \epsilon_{t-j} \text{ avec } c_j = \left(\prod_{i=0}^{j-1} a(t-i)\right) \sigma(t-j) \tag{4}$$

- Définissons maintenant X comme dans l'équation (4) et montrons qu'elle vérifie l'équation TVAR et la condition de stabilité.
  Tout d'abord pour tout $t \in \mathbb{Z}$ on a

$$\begin{aligned}
a(t)X_{t-1} + \sigma(t)\epsilon_t &= a(t) \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\prod_{i=0}^{j-1} a(t-1-i)\right) \sigma(t-1-j)\epsilon_{t-1-j} + \sigma(t)\epsilon_t \\
&= \sum_{j=-1}^{+\infty} \left(\prod_{i=-1}^{j-1} a(t-1-i)\right) \sigma(t-1-j)\epsilon_{t-1-j} \\
&\underset{(j\leftarrow j+1)}{=} \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\prod_{i=-1}^{j-2} a(t-1-i)\right) \sigma(t-j)\epsilon_{t-j} \\
&\underset{(i\leftarrow i+1)}{=} \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\prod_{i=0}^{j-1} a(t-i)\right) \sigma(t-j)\epsilon_{t-j} \\
&= X_t
\end{aligned}$$

- Remarquons tout d'abord que (3) prouve que $(c_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$. On a alors $\forall t \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[|X_t|^2\right] &= \mathbb{E}\left[\left|\lim_{k\to+\infty}\sum_{j=0}^{k} c_j\epsilon_{t-j}\right|^2\right] \\
&= \lim_{k\to+\infty}\mathbb{E}\left[\left|\sum_{j=0}^{k} c_j\epsilon_{t-j}\right|^2\right] \text{ (par continuité de l'espérance)} \\
&= \lim_{k\to+\infty}\sum_{j=0}^{k}|c_j|^2\mathbb{E}\left[|\epsilon_{t-j}|^2\right] \text{ (car } \epsilon \text{ est un bruit blanc)} \\
&= \lim_{k\to+\infty}\sum_{j=0}^{k}|c_j|^2 \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}|c_j|^2
\end{aligned}$$

Ce résultat étant indépendant de t on a bien

$$\sup_t \mathbb{E}\left[|X_t|^2\right] = \sum_{k=0}^{+\infty}|c_j|^2 < +\infty$$

□

3.3 Contre-exemple avec p=2

On va montrer que la condition obtenue pour le cas $p = 1$ n'est plus suffisante pour $p = 2$.
Pour ce contre-exemple, on va considérer le TVAR(2) définit comme ceci :

$$\begin{aligned}
X_{2t} &= aX_{2t-1} + \epsilon_{2t} \\
X_{2t+1} &= b_1X2t + b_2X_{2t-1} + \epsilon_{2t+1}
\end{aligned}$$

pour $t > 0$ sinon $X_t = \epsilon_t$.
On a alors :

$$\forall t > 0, X_{2t+1} = (ab_1 + b_2)X_{2t-1} + b_1\epsilon_{2t} + \epsilon_{2t+1} \tag{5}$$

On a alors que le processus $Y_t = X_{2t+1}$ suit l'équation d'un AR(1) dont la condition de stabilité implique :

$$|ab_1 + b_2| < 1(*) \tag{6}$$

D'autre part, le polynôme caractéristique associé est $P(z) = 1 - b_1z - b_2z^2$. Posons $P(z) = (1 - bz)^2$. On a alors $b_1 = 2b$ et $b_2 = -b^2$. La condition $(*)$ donne :

$$|2ba - b^2| < 1(*) \tag{7}$$

Avec $a = -b$, celle-ci devient :

$$3b^2 < 1 \tag{8}$$

Or ceci peut être faux. Il suffit de prendre $b = \frac{1}{\sqrt{(2)}}$ par exemple.

On a donc trouvé une sous-suite Y_t du processus X_t qui diverge. Donc la condition initiale, à savoir $sup_t|a_i(t)| < 1$, n'est plus suffisante pour assurer la stabilité d'un TVAR(2).

3.4 Cas général

On introduit une nouvelle définition du modèle TVAR :

Définition 3.1. Soient $p \geq 1$, $a_1, \cdots, a_p$ et σ des fonctions définies sur $]-\infty, 1]$ et $(\epsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ une suite i.i.d de variables aléatoires avec moyenne nulle et variance unitaire. Pour tout $T \geq 1$ on dit que $(X_{t,T})_{t\leq T}$ est un processus TVAR s'il vérifie les deux conditions suivantes

(i) $\forall -\infty < t \leq T$

$$X_{t,T} = \sum_{i=1}^{p} a_i\left(\frac{t}{T}\right)X_{t-i,T} + \sigma\left(\frac{t}{T}\right)\epsilon_t \tag{TVAR'}$$

(ii)

$$\sup_{-\infty<t\leq T} \mathbb{E}\left[|X_{t,T}|^2\right] < +\infty \tag{S'}$$

Proposition 3.5. *Supposons que les coefficients* a_i *de l'équation* (TVAR) *sont uniformément continus sur* $]-\infty,1]$ *et que* σ *est bornée sur* $]-\infty,1]$. *Supposons de plus qu'il existe* $\delta \in]0,1[$ *tel que* $A(z;u) \neq 0 \, \forall |z| < \delta^{-1}, u \in [0,1]$ *où*

$$A(z;u) = 1 - \sum_{i=1}^{p} a_i(u) z^i$$

Alors il existe $T_0 \geq 1$ *tel que* $\forall T \geq T_0$ *il existe un unique processus* $(X_{t,T})_{t\leq T}$ *vérifiant* (**??**) *et* (**??**)