Lista 2 - Macroeconomia III 2017

Alunos: Raul Guarini e Alexandre Machado

Monitora: Kátia Alves

26 de outubro de 2017

Exercício 1

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3 e^{-x^2}$. Queremos encontrar o máximo global desta função. Como temos uma função diferenciável definida num aberto, podemos buscar os pontos críticos da função e analisar se são pontos de máximo ou não. Para esta tarefa, buscaremos as raízes da derivada:

$$f'(x) = e^{-x^2} x^2 (3 - 2x^2)$$

A) Pelo formato de f, é fácil notar que o máximo estará na parte positiva do domínio. Ainda, $x = 0$ não pode ser um ponto de máximo. Afinal, $f(1) > f(0) = 0$. Diante disso, empregamos o método da bisseção com condições iniciais 0.5 e 5. Programamos uma função para implementar o algoritmo chamada *bissection_ root*. Com 22 iterações, nosso método encontrou um máximo global em $x = 1.2247$, sendo que $f(1.2247) \approx 0.4099$. O tempo de execução foi desprezível, menor que mum segundo.

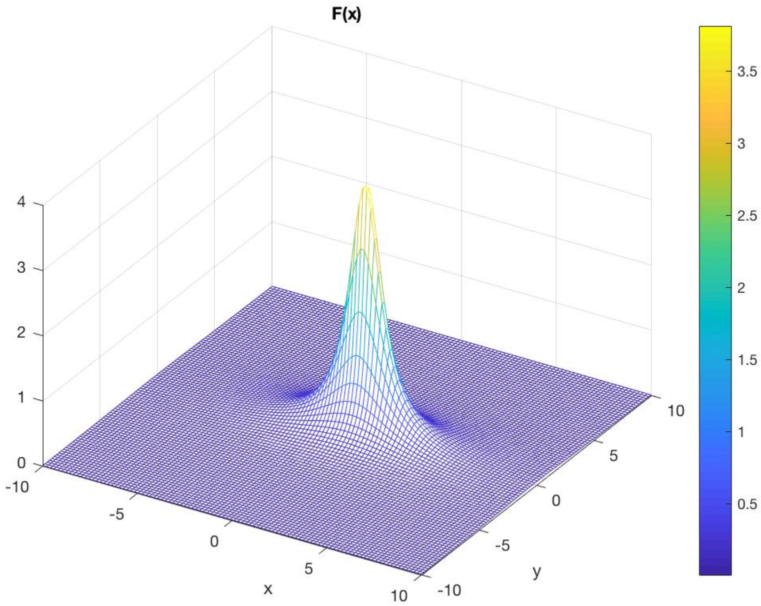
B) A função *np_ univariate* implementa o método de Newton-Raphson num intervalo fechado $[a, b]$. Sabemos que, se houver raiz neste intervalo, o método necessariamente converge. Quando a iteração chega em uma das extremidades, fazemos um sorteio de uma nova condição inicial para que o método prossiga. Foram necessárias 122 iterações para a convergência, feitas em menos de um quarto de segundo. Notamos, contudo, que frente à randomização introduzida, a cada vez que testamos o código podemos ter resultados diferentes com relação ao número de iterações[1]. Os valores encontrados para o ponto de máximo e o valor máximo da função foram sempre os mesmos.

C) O segundo método mostrou-se mais rápido, apesar de necessitar de mais iterações. O provável motivo é o fato de que este método utiliza informação sobre a curvatura da função durante a iteração, ao passo que o método da bisseção se vale apenas da continuidade. Em contrapartida, não precisamos de uma função diferenciável com o primeiro método.

Exercício 2

O código deste exercício está em *q2_ .m*. A função é bem comportada e admite máximo global. Analiticamente, pode ser calculado igualando as derivadas parciais a zero, o que nos dá $(x^*, y^*) = (1, 0)$. De fato, podemos fazer um análise visual do problema:

[1] Em nossos testes, o menor número de iterações necessárias foi 28 e o maior 130.



A grande desvantagem do método de Newton-Raphson é que a condição inicial escolhida afeta de sobremaneira a solução do problema, interferindo na convergência. Então empregamos duas técnicas diferentes.

A primeira consistiu em encontrar uma condição inicial suficientemente próxima ao ponto de máximo e tentar fazer o método convergir. Obtivemos sucesso para $(x, y) = (1,3; -0,1)$. As iterações estão reportadas abaixo:

Iteração	x_k	y_k	$f(x_k, y_k)$
1	1.300000000000000	-0.100000000000000	3.539823008849558
2	0.744262295081967	0.085245901639344	3.654739571567482
3	1.134856839880570	-0.044952279960190	3.897612839867663
4	0.984617411598269	0.005127529467244	3.998633306083921
5	1.000021052061707	-0.000007017353902	3.999999997439351
6	0.999999999999946	0.000000000000018	4.000000000000000
7	1.000000000000000	0	4.000000000000000

A segunda técnica é inspirada em nossa implementação estocástica da condição inicial, já utilizada no exercício anterior. Definimos um retângulo no plano xy e impomos que sempre que o método indicar um novo valor para (x, y) que escapa deste conjunto compacto, sortearemos segundo uma distribuição uniforme uma nova condição inicial que não esteja "out of bounds". Isto garante que o método converge com probabilidade 1.

Mais uma vez, a cada vez que executamos o código temos um novo número de iterações pois é comum que tenhamos de usar uma condição inicial estocástica. Em nossos testes, nos restringindo a um quadrado centrado na origem de lado 5. O número mínimo de iterações necessárias para convergência foi de 8 e o número máximo foi de 45, sempre começando a partir da origem, de maneira determinística.

Exercício 3