

## Lista II - Métodos Numéricos

EPGE - 2018

Professor: César Santos

Aluno: Raul Guarini Riva

**Problema 1.** O problema no planejador consiste em escolher recursivamente quanto consumir no presente e quanto poupar na forma de capital para o próximo período, tendo por base o estado da economia formado pelo estoque de capital atual e a produtividade atual.

A função utilidade das famílias não leva em consideração o lazer. Desta forma, ofertarão trabalho inelasticamente. Normalizando a dotação de trabalho para uma unidade, a equação funcional com a qual o planejador se defronta é a seguinte:

$$V(K, z) = \max_{c, K'} \{u(c) + \beta \mathbb{E}[V(K', z')|z]\}$$
$$\text{s.t. } c + K' \leq zK^\alpha + (1 - \delta)K$$

A hipótese de  $u$  estritamente crescente implica que a restrição de recursos será satisfeita com igualdade em todo instante do tempo. Daí, reescreve-se:

$$V(K, z) = \max_{K'} \{u(zK^\alpha + (1 - \delta)K - K') + \beta \mathbb{E}[V(K', z')|z]\}$$

**Problema 2.** Supondo não haver incerteza, normaliza-se o valor da produtividade para a média incondicional do processo:

$$\log(z) = 0 \implies z = 1$$

A equação de Euler é dada por

$$\beta \mathbb{E} \left[ \left( \frac{c'}{c} \right)^{-\mu} (z' \alpha K'^{\alpha-1} + 1 - \delta) | z \right] = 1$$

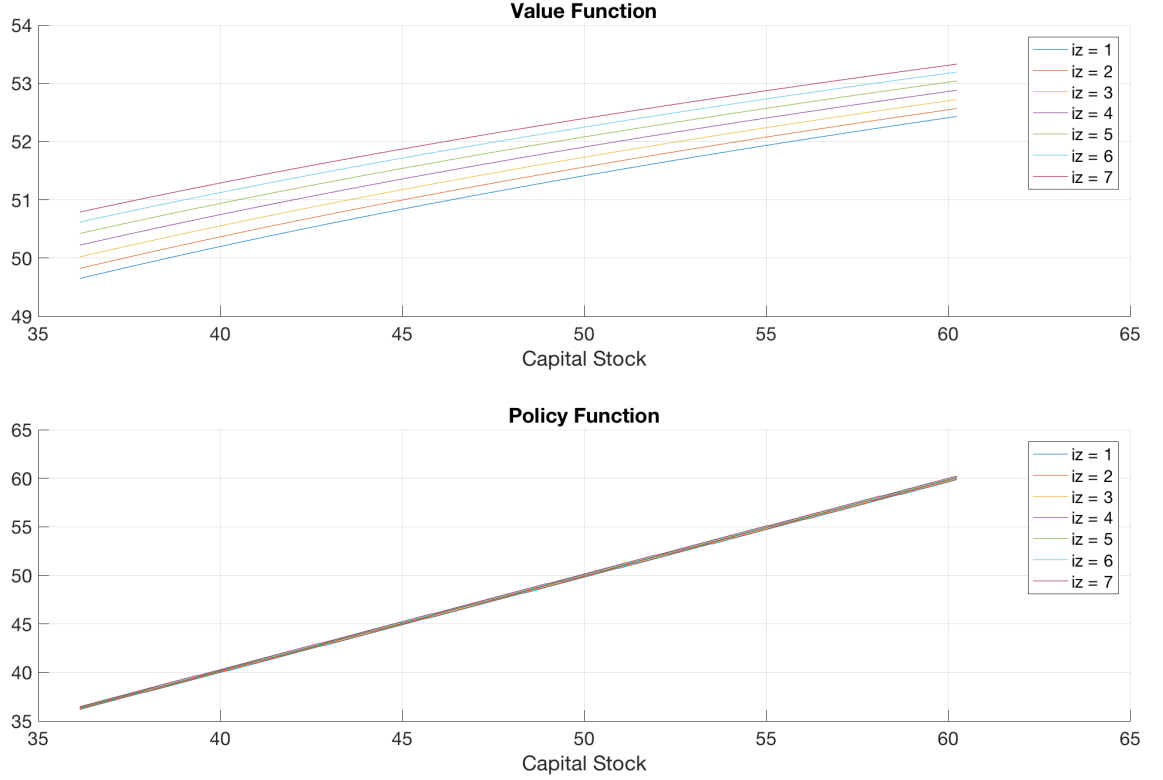
Sem incerteza e já resolvendo para o estado estacionário:

$$\beta \alpha K_{ss}^{\alpha-1} = 1 - \beta(1 - \delta)$$
$$K_{ss} = \left( \frac{\alpha \beta}{1 - \beta(1 - \delta)} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Com a calibração sugerida na lista, temos  $K_{ss} = 48.1905$ .

**Problema 3.** Para esta primeira implementação, explorei a monotonicidade da função política e a concavidade do funcional sendo otimizado. O código está no formato de uma função chamada `VFinder_Iterated.m`, devidamente documentada através do próprio `help` do MATLAB.

A primeira iteração foi feita através de força bruta e as próximas seguiram explorando os aspectos teóricos do problema. Abaixo, a função valor e a função política (como esperado, crescente!!!):



Obtive o resultado, também esperado, de que a função valor, para um valor de  $k$  fixo, é crescente na TFP. A legenda  $iz = 4$ , por exemplo, indica que determinada curva foi computada com o valor da TFP correspondente ao quarto ponto do grid do choque  $\log(z)$ .

Para comparar o desempenho desta abordagem (que não utiliza nenhum tipo de vetorização), implementei o método de “força bruta vetorizada”. Isto é, operar maximizações ao longo das dimensões de arrays do MATLAB evitando criar “for loops”. Esta abordagem está no script `brute_force.m`.

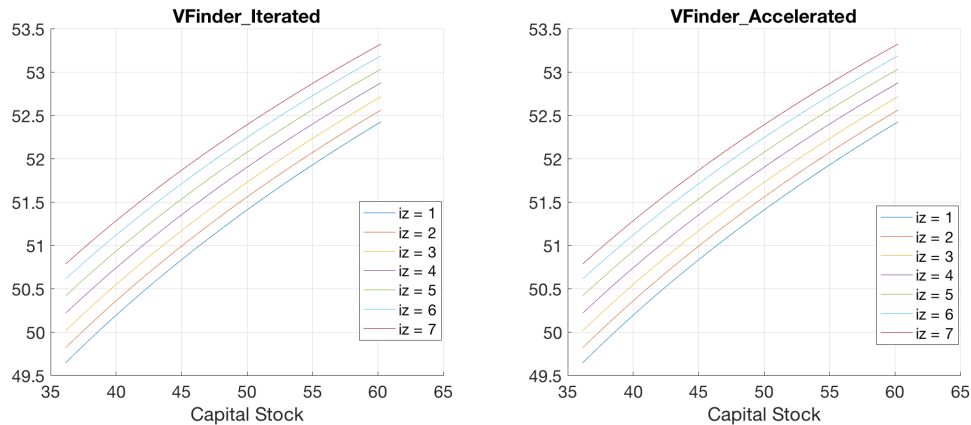
Houve um ganho de desempenho considerável. O método de força bruta vetorizada computou a função valor e a função política em 9.96 segundos. O método que utiliza a função `VFinder_Iterated.m` resolveu o mesmo problema em 7.84 segundos. Isto representa um ganho de quase 22%, o que considero expressivo.

Nota-se, entretanto, que o método de força bruta é mais geral que seu concorrente, em vista do fato que funcionaria igualmente bem para um problema em que não tivéssemos um resultado teórico garantindo a monotonicidade da função política ou a concavidade do funcional em questão. Uma performance pior é o preço a ser pago pela maior versatilidade.

**Problema 4.** A função `VFinder_Accelerated` implementa o mesmo algoritmo do problem anterior, se valendo da técnica do acelerador, contudo. Seu último argumento, `pct`, informa à função qual a frequência em que deve ser utilizada uma otimização completa: atualização da função política e da função valor. Por exemplo, `pct = 0.1` faz com que em 10% das iterações só façamos a atualização da função valor, utilizando a função política de anterior.

Nas 50 primeiras iterações do algoritmo, otimizações completas são feitas, com o objetivo de colocar o processo “na rota de convergência” (isto é controlado através do parâmetro `safety_net` no escopo da função).

Abaixo, uma comparação das funções valor encontradas. Como esperado, temos a mesma solução (a menos de erros de aritmética de ponto flutuante):



A função `VFinder_Accelerated` resolveu o modelo em 7.66 segundos, cerca de 3% mais rápido do que `VFinder_Iterated`. O ganho de velocidade não foi expressivo, em minha visão, porque o algoritmo rival já não usa, a não ser na primeira iteração, o operador `max()`, em vista da maneira como a concavidade do funcional foi explorada. Isto reduz o ganho de performance potencial do acelerador. Quando comparamos esta solução com a implementação de força bruta, entretanto, notamos um ganho de performance de mais de 3 segundos, mais de 30%!<sup>1</sup>

**Problema 5.** O método do multigrid mostrou-se poderoso. Analisando o formato da função valor encontrada através dos outros dois métodos e em vista da facilidade/rapidez de sua implementação, optei pelo uso da interpolação linear. A curvatura de  $V$  ao redor do estado estacionário não parece tão grande.

Dado um chute inicial para a função valor, resolvi o problema funcional num grid inicial com 100 pontos, interpolei os valores encontrados num grid mais fino de 500 pontos e utilizei o interpolante como um novo chute inicial para resolver o problema no grid mais fino. Esta interpolação ocorreu linearmente para cada valor de  $z$  fixo. Resolvido o problema no grid de 500 pontos, repeti o processo visando resolver a equação funcional num grid de 5000 pontos para  $k$ . O algoritmo levou ao redor de 73 segundos para convergir.

Claro, este problema é mais complicado do que o problema anterior uma vez que multiplicamos por 10 o número de pontos no grid de  $k$ . Como discretizamos também a variável de controle, aumentamos em 100 vezes o número de pontos considerados.

Para comparar o desempenho do multigrid com os dois outros métodos implementados acima, através de `VFinder_Iterated` e `VFinder_Accelerated`, resolvi o problema com uma sequência de grids de

<sup>1</sup>Estes resultados foram computados com base na sugestão da lista de usar `pct = 0.1`.

100, 250 e, finalmente, 500 pontos. O tempo de execução foi de 0.58 segundos, isto é, mais de 10x mais rápido do que os outros dois métodos!

