PREDIKSI SOAL & PEMBAHASAN

TKA & US 2025

PAKET 2

MATEMATIKA TINGKAT LANJUT

PAKET 2

PREDIKSI SOAL **MATEMATIKA TINGKAT LANJUT**

1. Nilai dari $\dfrac{(4)^{\frac{3}{2}}\cdot(27)^{\frac{2}{3}}}{(64)^{\frac{5}{6}}\cdot(36)^{\frac{1}{2}}} = ...$
   A. $\dfrac{74}{26}$
   B. $\dfrac{72}{26}$
   C. $\dfrac{54}{26}$
   D. $\dfrac{34}{26}$
   E. $\dfrac{14}{26}$

2. Bentuk sederhana dari $\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{5}+7} = ...$
   A. $\dfrac{3}{2}\sqrt{15}+\dfrac{3}{2}\sqrt{21}$
   B. $\dfrac{3}{2}\sqrt{21}-\dfrac{3}{2}\sqrt{15}$
   C. $\dfrac{3}{2}\sqrt{15}-\dfrac{3}{2}\sqrt{21}$
   D. $-\dfrac{3}{2}\sqrt{15}-\dfrac{3}{2}\sqrt{21}$
   E. $-\dfrac{3}{2}\sqrt{10}-\dfrac{3}{2}\sqrt{15}$

3. Nilai dari $\left(\dfrac{{}^{3}\log 5\,.{}^{25}\log 81+{}^{3}\log 9}{{}^{2}\log 36-{}^{2}\log 9}\right)^{2} = ...$
   A. 1
   B. 2
   C. 3
   D. 4
   E. 5

4. HOTS Sebuah perusahaan ingin merancang wadah silinder tertutup untuk produk cair mereka dengan volume tetap 1 liter (1000 cm³). Buatlah model matematika menggunakan kalkulus untuk menentukan dimensi jari-jari (r) dan tinggi (h) silinder agar bahan yang digunakan untuk membuat wadah (luas permukaan total) seminimal mungkin.
   A. r = 10 cm, $h=\dfrac{10}{\pi}$cm
   B. $r=\sqrt[3]{\left(\dfrac{500}{\pi}\right)}$cm, $h=2\times\sqrt[3]{\left(\dfrac{500}{\pi}\right)}$cm
   C. r = 5 cm, $h=\dfrac{40}{\pi}$cm
   D. $r=\sqrt[3]{\left(\dfrac{1000}{\pi}\right)}$cm, $h=\sqrt[3]{\left(\dfrac{1000}{\pi}\right)}$cm
   E. $r=2\times\sqrt[3]{\left(\dfrac{500}{\pi}\right)}$cm, $h=\sqrt[3]{\left(\dfrac{500}{\pi}\right)}$cm

5. Akar-akar persamaan $x^2-(a+2)x-8=0$ adalah α dan β. Jika $\alpha\beta^2+\alpha^2\beta=16$, nilai a yang memenuhi adalah ....
   A. 1
   B. 2
   C. -5
   D. -4
   E. -2

6. Diketahui fungsi $f(x)=(a+1)x^2-2ax+(a-2)$ definit negatif. Nilai a yang memenuhi adalah ....
   A. $-2<a<-1$
   B. $-2<a<1$
   C. $a<-2$
   D. $a<-1$
   E. $a<2$

7. Ratih membeli 2 kg jeruk dan 3 kg mangga dengan harga Rp130.000. Fani membeli 4

kg jeruk dan 2 kg mangga dengan harga Rp140.000. Di toko yang sama, Fifi membeli 2 kg jeruk dan 3 kg mangga. Jika Fifi membayar dengan uang Rp150.000, uang kembalian yang diterima Fifi adalah ....

A. Rp15.000
B. Rp20.000
C. Rp30.000
D. Rp40.000
E. Rp45.000

8. HOTS Lahan parkir seluas 600 m^2 hanya mampu menampung 58 mobil besar dan mobil kecil. Tiap mobil besar membutuhkan 24 m^2 dan mobil kecil membutuhkan 6 m^2 untuk parkir. Biaya parkir setiap mobil besar Rp3.000/jam dan setiap mobil kecil Rp2.000/jam. Jika dalam 1 jam tempat parkir terisi penuh dan tak ada kendaraan yang pergi dan datang, pendapatan maksimum dari jasa parkir tersebut selama 1 jam adalah ....

A. Rp100.000
B. Rp120.000
C. Rp130.000
D. Rp145.000
E. Rp150.000

9. HOTS Sebuah segitiga di bidang koordinat memiliki titik sudut A(1, 1), B(3, 1), dan C(2, 4). Segitiga ini dikenakan transformasi linear yang direpresentasikan oleh matriks $M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Analisis perubahan luas dan keliling segitiga setelah transformasi!

A. Luas dan keliling segitiga tetap sama.
B. Luas segitiga menjadi 2 kali lipat, keliling tetap sama.
C. Luas segitiga menjadi 4 kali lipat, keliling berubah.
D. Luas segitiga menjadi 2 kali lipat, keliling juga menjadi 2 kali lipat.
E. Luas segitiga menjadi 4 kali lipat, keliling tetap sama.

10. Diketahui fungsi $f(x) = \dfrac{5x-3}{x+2}; x \neq -2$ dan $g(x) = 6x - 2$. Invers dari $(f \circ g)(x)$ adalah ....

A. $(f \circ g)^{-1}(x) = \dfrac{-13}{6x-30}; x \neq 5$
B. $(f \circ g)^{-1}(x) = \dfrac{-13}{6x+30}; x \neq -5$
C. $(f \circ g)^{-1}(x) = \dfrac{13}{6x-30}; x \neq 5$
D. $(f \circ g)^{-1}(x) = \dfrac{14}{6x+30}; x \neq -5$
E. $(f \circ g)^{-1}(x) = \dfrac{14}{6x-30}; x \neq 5$

11. Diketahui $f(x) = 3x^3 + ax^2 - 7x + 4$. Jika f(x) dibagi $(3x-1)$ bersisa 2. Jika f(x) dibagi $(x+2)$ hasil baginya adalah ....

A. $3x^2 - 4x - 1$
B. $3x^2 - 4x + 1$
C. $3x^2 - 10x + 13$
D. $3x^2 - 10x - 13$
E. $3x^2 + 10x + 13$

12. Diketahui $(x-1)$ dan $(x+3)$ adalah faktor dari persamaan suku banyak $x^3 - ax^2 - bx + 12 = 0$. Jika $x_1, x_2,$ dan x_3 adalah akar–akar persamaan tersebut dan $x_1 < x_2 < x_3$, nilai $x_1 + x_2 + x_3$ adalah ....

A. -5
B. -3
C. 2
D. 3
E. 5

13. Diketahui persamaan matriks

$$3\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 10 & 3 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & y \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nilai dari $2y - 3x = ...$

A. 11
B. 8
C. -2
D. -7
E. -9

14. Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Matriks C berordo 2x2 memenuhi $AC = B$, determinan matriks C adalah ....

A. 1
B. 6
C. 9
D. 11
E. 12

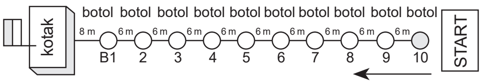
15. Diberikan tiga titik A, B, dan C dengan vektor posisi masing-masing **a**, **b**, dan **c**. Titik P terletak pada ruas garis AB sehingga AP : PB = 2 : 1, dan titik Q terletak pada perpanjangan garis BC sehingga BC : CQ = 3 : 2. Evaluasi apakah titik P, Q, dan titik tengah AC (sebut titik M) kolinear (terletak pada satu garis lurus)?

HOTS

A. Ya, P, Q, dan M selalu kolinear untuk semua posisi A, B, dan C.
B. Tidak, P, Q, dan M tidak pernah kolinear.
C. Kolinearitas P, Q, dan M bergantung pada posisi relatif A, B, dan C, dan dalam kasus ini mereka kolinear.
D. Kolinearitas P, Q, dan M bergantung pada posisi relatif A, B, dan C, dan dalam kasus ini mereka tidak kolinear.
E. Tidak dapat ditentukan kolinearitas P, Q, dan M hanya dengan informasi vektor posisi.

16. Aturan main:

HOTS



Dalam kotak tersedia 10 bendera dan harus dipindahkan ke dalam botol yang tersedia satu demi satu (tidak sekaligus). Semua peserta lomba mulai bergerak (start) dari botol nomor 10 untuk mengambil bendera dalam kotak. Jarak tempuh yang dilalui peserta lomba adalah ....

A. 164 meter
B. 880 meter
C. 920 meter
D. 1.020 meter
E. 1.200 meter

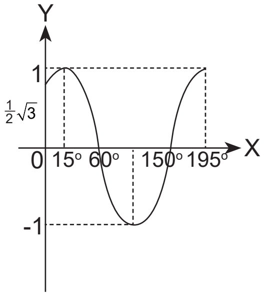
17. Seutas tali dipotong-potong menjadi 5 bagian dengan panjang bagian-bagian tersebut membentuk barisan geometri dengan rasio 2. Jika panjang bagian terpendek 3 cm, panjang tali sebelum dipotong adalah ....

A. 33 cm
B. 63 cm
C. 93 cm
D. 100 cm
E. 121 cm

18. Himpunan penyelesaian dari persamaan trigonometri $\cos 2x + 7\sin x - 4 = 0$ untuk $0° \le x \le 360°$ adalah ....

A. $\{0°, 180°, 360°\}$
B. $\{0°, 270°\}$
C. $\{30°, 180°\}$
D. $\{30°, 150°\}$
E. $\{30°, 120°\}$

19. *Perhatikan gambar berikut!*



Persamaan grafik fungsi trigonometri adalah ....

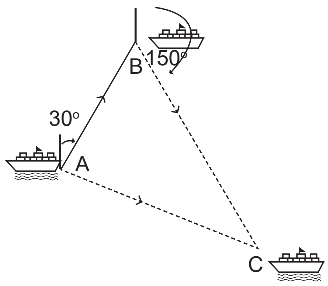
A. $y = \sin(2x + 60°)$
B. $y = -\sin(2x + 60°)$
C. $y = \sin(2x - 60°)$
D. $y = \cos(2x + 60°)$
E. $y = \cos(2x - 60°)$

20. Nilai dari $\dfrac{\sin 100° + \sin 20°}{\cos 250° + \cos 190°}$ adalah ....

A. -1
B. $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$
C. $\frac{1}{3}\sqrt{3}$
D. $\sqrt{3}$
E. $\sqrt{2}$

21. *Perhatikan gambar berikut!*

HOTS



Sebuah kapal mulai bergerak dari pelabuhan A pada pukul 05.00 dengan arah 30° dan tiba di pelabuhan B setelah 10 jam bergerak. Pukul 16.00 kapal bergerak kembali dari pelabuhan B menuju pelabuhan C dengan memutar haluan 150° dan tiba di pelabuhan C pukul 24.00. Kecepatan rata–rata kapal 50 mil/jam. Jarak tempuh dari pelabuhan C ke pelabuhan A adalah ....

A. 500 mil
B. 250 mil
C. 100 mil
D. $100\sqrt{21}$ mil
E. $100\sqrt{3}$ mil

22. Diketahui kubus ABCD.EFGH memiliki panjang rusuk 4 cm. Jarak titik A ke diagonal FH adalah ....

A. $4\sqrt{2}$ cm
B. $3\sqrt{2}$ cm
C. $3\sqrt{6}$ cm
D. $2\sqrt{6}$ cm
E. $2\sqrt{2}$ cm

23. Balok ABCD.EFGH dengan panjang $AB = BC = 3\text{ cm}$ dan $AE = 5\text{ cm}$. Titik P terletak pada AD sehingga $AP : PD = 1 : 2$ dan titik Q terletak pada FG sehingga $FQ : QG = 2 : 1$. Tangen sudut antara garis PQ dengan bidang alas ABCD adalah ....

A. $\frac{1}{2}\sqrt{5}$
B. $\frac{1}{2}\sqrt{10}$
C. $\frac{1}{10}\sqrt{5}$
D. $\frac{1}{10}\sqrt{10}$
E. $\frac{1}{5}\sqrt{5}$

24. Persamaan bayangan kurva $y = 2x - 6$ oleh pencerminan terhadap sumbu X dilanjutkan dengan rotasi pusat O sejauh 90° adalah ....

A. $x - 2y + 6 = 0$
B. $x - 2y - 6 = 0$
C. $x + 2y + 6 = 0$
D. $2x + y - 6 = 0$
E. $2x - y + 6 = 0$

25. Persamaan garis singgung pada lingkaran $L = x^2 + y^2 - 2x + 6y - 10 = 0$ yang sejajar garis $2x - y + 4 = 0$ adalah ....
HOTS

A. $2x - y = 14$
B. $2x - y = 10$
C. $2x - y = 5$
D. $2x - y = -5$
E. $2x - y = -6$

26. Nilai dari $\lim_{x \to \infty} \sqrt{25x^2 - 9x - 16} - 5x + 3$ adalah ....

A. $\frac{1}{10}$
B. $\frac{11}{10}$
C. $\frac{21}{10}$
D. $\frac{13}{11}$
E. $\frac{21}{11}$

27. Nilai dari $\lim_{x \to 0} \frac{2x^2 + x}{\sin x}$ adalah ....
HOTS

A. 0
B. 1
C. 2
D. 3
E. 4

28. Turunan pertama dari $y = \sin^2(3x - \pi)$ adalah ....
HOTS

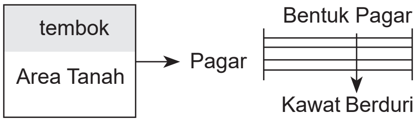
A. $y' = 6\sin(3x - \pi)$
B. $y' = 6\sin(3x - \pi)$
C. $y' = -6\sin(3x - \pi)$
D. $y' = 3\sin(6x - 2\pi)$
E. $y' = -3\sin(6x - 2\pi)$

29. Persamaan garis singgung kurva $y = 6\sqrt{x}$ yang melalui titik berabsis 4 adalah ....
HOTS

A. $y = 3x + 6$
B. $y = x + 12$
C. $y = \frac{3}{2}x + 6$
D. $y = \frac{3}{2}x + 12$
E. $y = \frac{3}{2}x - 12$

30. Sebidang tanah akan dibatasi oleh pagar dengan menggunakan kawat berduri seperti pada gambar.

HOTS



Batas tanah yang dibatasi pagar adalah yang tidak bertembok. Kawat yang tersedia 800 meter. Berapakah luas maksimum yang dapat dibatasi oleh pagar yang tersedia?

A. 2.500 m^2
B. 5.000 m^2
C. 6.000 m^2
D. 10.000 m^2
E. 15.000 m^2

31. Dalam sebuah permainan melempar koin sebanyak 5 kali, seorang pemain menang jika mendapatkan setidaknya 3 sisi gambar (H). Jika permainan ini diulang sebanyak 10 kali, analisis probabilitas pemain menang tepat 7 kali dari 10 permainan tersebut!

HOTS

A. ${}_{10}C_7 \times \left(P(\text{menang})\right)^7 \times (1 - P(\text{menang}))^3$
B. ${}_{10}P_7 \times \left(P(\text{menang})\right)^7 \times (1 - P(\text{menang}))^3$
C. ${}_5C_3 \times 0{,}5^3 \times 0{,}5^2$
D. ${}_{10}C_7 \times 0{,}5^7 \times 0{,}5^3$
E. ${}_5C_3 \times 0{,}5^5$

32. Sebuah bola udara dipompa sehingga volumenya bertambah dengan laju 50 cm³/detik. Evaluasi laju perubahan jari-jari bola udara tersebut terhadap waktu ketika jari-jari bola udara mencapai 10 cm. (Volume bola $V = \frac{4}{3}\pi r^3$).

HOTS

A. $\frac{1}{8\pi}$ cm/detik
B. $\frac{1}{2\pi}$ cm/detik
C. $\frac{1}{4\pi}$ cm/detik
D. $\frac{1}{16\pi}$ cm/detik
E. $\frac{1}{32\pi}$ cm/detik

33. Hasil dari $\int \sin^5 2x \cos 2x \, dx = ...$

A. $-\frac{1}{5}\sin^6 2x + C$
B. $-\frac{1}{10}\sin^6 2x + C$
C. $-\frac{1}{12}\sin^6 2x + C$
D. $\frac{1}{12}\sin^6 2x + C$
E. $\frac{}{10}\sin\ 2x\quad C$

34. Hasil dari $\int (6x^2 - 4x)\sqrt{x^3 - x^2 - 1}\, dx$ adalah ....

A. $\frac{2}{3}\sqrt{x^3 - x^2 - 1} + C$
B. $\frac{2}{3}\sqrt{(x^3 - x^2 - 1)^2} + C$
C. $\frac{2}{3}\sqrt{(x^3 - x^2 - 1)^3} + C$
D. $\frac{4}{3}\sqrt{(x^3 - x^2 - 1)^3} + C$
E. $\frac{4}{3}\sqrt{(x^3 - x^2 - 1)^2} + C$

35. Luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = 4x - x^2$; sumbu X; garis x = 1 dan x = 3 adalah ....

A. $7\frac{1}{3}$ satuan luas
B. $8\frac{1}{3}$ satuan luas
C. $9\frac{2}{3}$ satuan luas
D. $10\frac{2}{3}$ satuan luas
E. $11\frac{1}{3}$ satuan luas

36. Dalam kantong terdapat 4 bola merah dan 5 bola biru. Jika dari kantong tersebut diambil dua bola sekaligus, peluang mendapat bola satu warna merah dan satu warna biru adalah ....

HOTS

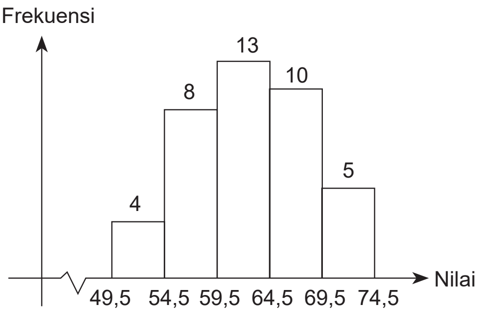
A. $\frac{5}{4}$
B. $\frac{5}{9}$

C. $\frac{11}{9}$

D. $\frac{1}{6}$

E. $\frac{1}{3}$

37. *Perhatikan histogram berikut!*



Modus dari data yang ditunjukkan pada histogram adalah ....

A. 61,1
B. 62,2
C. 62,6
D. 63,2
E. 63,5

38. *Perhatikan data pada tabel berikut!*

Nilai	Frekuensi
40−48	4
49−57	12
58−66	10
67−75	8
76−84	4
85−93	2

Kuartil atas dari data pada tabel tersebut adalah ....

A. 66,5
B. 68,5
C. 70,0
D. 71,0
E. 71,5

39. Diberikan angka 1, 2, 3, 4, 5, dan 6. dari angka-angka tersebut akan disusun bilangan ratusan yang kurang dari 400 dan tidak boleh berulang. Banyak cara penyusunan yang mungkin adalah ....

A. 60
B. 120
C. 140
D. 160
E. 210

40. HOTS Dalam sebuah ujian terdapat 10 soal, dari nomor 1 sampai nomor 10. Peserta ujian wajib mengerjakan soal nomor 1, 3, dan 5 serta hanya mengerjakan 8 dari 10 soal yang tersedia. Banyak cara peserta ujian memilih soal yang dikerjakan adalah ....

A. 21
B. 28
C. 45
D. 48
E. 56

PAKET 2

PEMBAHASAN PREDIKSI SOAL **MATEMATIKA PEMINATAN**

1. $$\frac{(4)^{\frac{3}{2}}\cdot(27)^{\frac{2}{3}}}{(64)^{\frac{5}{6}}\cdot(36)^{\frac{1}{2}}}=\frac{\left(2^2\right)^{\frac{3}{2}}\cdot\left(3^3\right)^{\frac{2}{3}}}{\left(2^6\right)^{\frac{5}{6}}\cdot\left(6^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{(4)^{\frac{3}{2}}\cdot(27)^{\frac{2}{3}}}{(64)^{\frac{5}{6}}\cdot(36)^{\frac{1}{2}}}=\frac{2^3\cdot 3^2}{2^5-6}$$

$$=\frac{8\cdot 9}{32-6}$$

$$=\frac{72}{26}$$

Jawaban: B

2. $$\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{5}+7}=\frac{3\sqrt{3}}{\left(\sqrt{5}+7\right)}\cdot\frac{\left(\sqrt{5}-\sqrt{7}\right)}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{7}\right)}$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{5}+7}=\frac{3\sqrt{15}-3\sqrt{21}}{5-7}$$

$$=\frac{3\sqrt{15}-3\sqrt{21}}{-2}$$

$$=\frac{3}{2}\sqrt{21}-\frac{3}{2}\sqrt{15}$$

Jawaban: B

3. $$\left(\frac{{}^3\log 5\cdot{}^{25}\log 81+{}^3\log 9}{{}^2\log 36-{}^2\log 9}\right)^2=\left(\frac{{}^3\log 5\cdot{}^{5^2}\log 3^4+{}^3\log 3^2}{{}^2\log\frac{36}{9}}\right)^2$$

$$\left(\frac{{}^3\log 5\cdot{}^{25}\log 81+{}^3\log 9}{{}^2\log 36-{}^2\log 9}\right)^2=\left(\frac{\frac{4}{2}\cdot{}^3\log 5\cdot{}^5\log 3+2\cdot{}^3\log 3}{{}^2\log 4}\right)^2$$

$$=\left(\frac{2\cdot{}^3\log 3+2\cdot{}^3\log 3}{2\cdot{}^2\log 2}\right)^2$$

$$=\left(\frac{2+2}{2}\right)^2=4$$

Jawaban: D

4. Soal ini menguji kemampuan kreasi peserta didik dalam membuat model matematika dan menerapkan kalkulus untuk masalah optimasi dalam konteks desain produk.
   - Formulasi fungsi luas permukaan (yang akan diminimalkan):
     Luas permukaan silinder tertutup (A) terdiri dari luas alas dan tutup (2 lingkaran) dan luas sisi tegak (persegi panjang):
     $$A=2\pi r^2+2\pi rh$$
   - Batasan volume tetap:
     Volume silinder (V) = $\pi r^2 h$ = 1000 cm³ (konstan).
     Dari batasan volume, kita dapat menyatakan h dalam r:
     $$h=\frac{1000}{\pi r^2}$$
   - Substitusi h ke fungsi luas permukaan:
     Substitusikan ekspresi untuk h ke dalam persamaan luas permukaan A untuk mendapatkan A sebagai fungsi dari r saja:
     $$A(r)=2\pi r^2+2\pi r\times\left(\frac{1000}{\pi r^2}\right)$$
     $$A(r)=2\pi r^2+\frac{2000}{r}$$
   - Cari turunan pertama dan titik kritis:
     $$\frac{dA}{dr}=4\pi r-\frac{2000}{r^2}$$
     Untuk mencari titik kritis, set $\frac{dA}{dr}=0$:

$$4\pi r - \frac{2000}{r^2} = 0$$

$$4\pi r = \frac{2000}{r^2}$$

$$4\pi r^3 = 2000$$

$$r^3 = \frac{2000}{4\pi} = \frac{500}{\pi}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$$

- Uji turunan kedua untuk memastikan minimum:

$$\frac{d^2A}{dr^2} = 4\pi + \frac{4000}{r^3}$$

Untuk r > 0, $\frac{d^2A}{dr^2}$ selalu positif (4π > 0 dan $\frac{4000}{r^3} > 0$) sehingga $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$ memberikan nilai minimum untuk luas permukaan.

- Hitung tinggi (h):

$$h = \frac{1000}{\pi r^2} = \frac{1000}{\pi \times \left(\sqrt[3]{\left(\frac{500}{\pi}\right)}\right)^2}$$

$$h = \frac{1000}{\pi \times \left(\frac{500}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}}}$$

$$h = \frac{1000}{\pi^{\frac{1}{3}} \times 500^{\frac{2}{3}}}$$

$$h = \frac{2 \times 500}{\pi^{\frac{1}{3}} \times 500^{\frac{2}{3}}}$$

$$h = \frac{(2 \times 500)^{\frac{1}{3}}}{\pi^{\frac{1}{3}}}$$

$$h = 2 \times \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$$

Jadi, dimensi yang meminimalkan luas permukaan adalah $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$ cm dan $h = 2 \times \sqrt[3]{\left(\frac{500}{\pi}\right)}$ cm

Jawaban: B

5. Diketahui: $x^2 - (a+2)x - 8 = 0$ akar-akarnya α dan β

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = a + 1$$

$$\alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} = -8$$

Jika diketahui pers $\alpha\beta^2 + \alpha^2\beta = 16$:

$$\alpha \cdot \beta(\beta + \alpha) = 16$$

$$-8(a+2) = 16$$

$$a + 2 = -2$$

$$a = -4$$

Jadi, nilai a yang memenuhi adalah -4.

Jawaban: D

6. Diketahui: $f(x) = (a+1)x^2 - 2ax + (a-2)$ definit negatif $\Rightarrow a + 1 < 0; D < 0$

$$a + 1 < 0$$

$$a < -1$$

Jika $D = b^2 - 4ac$ maka

$$D < 0$$

$$\Leftrightarrow (-2a)^2 - 4(a+1)(a-2) < 0$$

$$\Leftrightarrow (-2a)^2 - 4(a^2 - a - 2) < 0$$

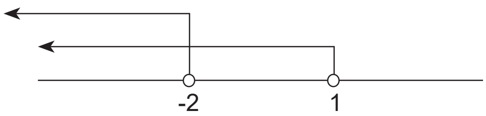
$$\Leftrightarrow 4a^2 - 4a^2 + 4a + 8 < 0$$

$$\Leftrightarrow 4a + 8 < 0$$

$$\Leftrightarrow 4a < -8$$

$$\Leftrightarrow a < -2$$

Garis bilangan:



Jadi, nilai a yang memenuhi adalah $a < -2$

Jawaban: C

7. Misalkan: 1 kg jeruk = x; 1 kg mangga = y

Fani: $4x + 2y = 140.000$ ...(i)

Ratih: $2x + 3y = 130.000$ ...(ii)

Eliminasi persamaan (i) dan $2 \times (ii)$:

$$\begin{array}{r} 4x + 2y = 140.000 \\ 4x + 6y = 260.000 \; - \\ \hline -4y = -120.000 \\ y = 30.000 \end{array}$$

Maka

$$2x + 3(30.000) = 130.000$$
$$2x + 90.000 = 130.000$$
$$x = \frac{130.000 - 90.000}{2}$$
$$x = 20.000$$

Jumlah belanja Fifi:

$$2x + 3y = 2(20.000) + 3(30.000) = 130.000$$

Jika Fifi membayar Rp150.000, kembaliannya adalah Rp20.000.

Jawaban: B

8. Misalkan: Lahan mobil besar = x; lahan mobil kecil = y

Syarat batas fungsi:

$$24x + 6y \le 600 \Leftrightarrow 4x + y \le 100 \quad ...(i)$$
$$x + y \le 58 \quad ...(ii)$$
$$x \ge 0; y \ge 0$$

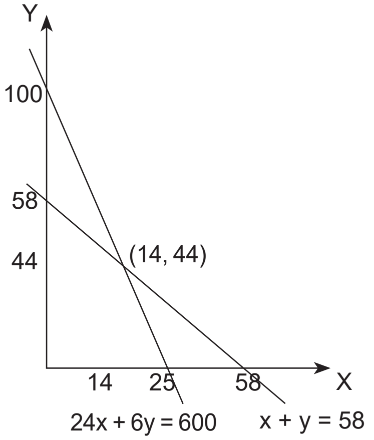
Titik potong garis (i) dan (ii):

$$\begin{array}{l} 4x + y = 100 \\ \underline{x + y = 58 \quad -} \\ 3x = 42 \Rightarrow x = 14 \end{array}$$

maka

$$x + y = 58$$
$$14 + y = 58$$
$$y = 44$$

Grafik:



Pendapatan maks ditentukan fungsi sasaran:

$$3.000x + 2.000y$$

Maka

$$(25,0) \Rightarrow 3.000(25) + 2.000(0) = 75.000$$
$$(14,44) \Rightarrow 3.000(14) + 2.000(44) = 130.000$$
$$(0,58) \Rightarrow 3.000(0) + 2.000(58) = 116.000$$

Jadi, pendapatan maksimum tempat parkir tersebut adalah Rp130.000.

Jawaban: C

9. **Luas segitiga awal**: Menggunakan rumus determinan atau metode lainnya, luas segitiga ABC:

$$\text{Luas awal} = \frac{1}{2} \times |1(1-4) + 3(4-1) + 2(1-1)|$$
$$= \frac{1}{2} \times |(-3 + 9 + 0)|$$
$$= \frac{1}{2} \times |6|$$
$$= 3 \text{ satuan luas}$$

Transformasi titik sudut: Aplikasikan matriks transformasi M pada setiap titik sudut:

$$A'(x',y') = M \times A(x,y)$$
$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A'(3,2)$$

$$B'(x',y') = M \times B(x,y)$$
$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow B'(7,2)$$

$$C'(x',y') = M \times C(x,y)$$
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \ \\ \ \end{bmatrix} \Rightarrow C'(8,8)$$

Luas segitiga setelah transformasi: Luas segitiga A'B'C':

$$\text{Luas baru} = \frac{1}{2}\times\left|3(2-8)+7(8-2)+8(2-2)\right|$$
$$= \frac{1}{2}\times\left|-18+42+0\right|$$
$$= \frac{1}{2}\times\left|24\right|$$
$$= 12 \text{ satuan luas}$$

Perbandingan luas: $\dfrac{\text{Luas baru}}{\text{Luas awal}} = \dfrac{12}{3} = 4$.

Luas menjadi 4 kali lipat.

Keliling segitiga awal: Hitung panjang sisi AB, BC, CA:

$$AB = \sqrt{(3-1)^2+(1-1)^2} = \sqrt{4} = 2$$
$$BC = \sqrt{(2-3)^2+(4-1)^2} = \sqrt{10}$$
$$CA = \sqrt{(1-2)^2+(1-4)^2} = \sqrt{10}$$

Keliling awal = $2+\sqrt{10}+\sqrt{10} = 2+2\sqrt{10}$

Keliling segitiga setelah transformasi: Hitung panjang sisi A'B', B'C', C'A':

$$A'B' = \sqrt{(7-3)^2+(2-2)^2} = \sqrt{16} = 4$$
$$B'C' = \sqrt{(8-7)^2+(8-2)^2} = \sqrt{37}$$
$$C'A' = \sqrt{(3-8)^2+(2-8)^2} = \sqrt{25+36} = \sqrt{61}$$

Keliling baru = $4+\sqrt{37}+\sqrt{61}$

Keliling berubah karena keliling awal ≠ keliling baru yaitu $2+2\sqrt{10} \neq 4+\sqrt{37}+\sqrt{61}$.

Berdasarkan analisis, luas segitiga menjadi 4 kali lipat dan keliling berubah.

Jawaban: C

10. Diketahui: $f(x) = \dfrac{5x-3}{x+2}; x \neq -2;\ g(x) = 6x-2$

$$(f\circ g)(x) = f\left(g(x)\right)$$
$$= f(6x-2)$$
$$= \frac{5(6x-2)-3}{(6x-2)+2}$$
$$= \frac{30x-13}{6x}$$

Maka, $(f\circ g)^{-1}(x)$:

$$y = \frac{30x-13}{6x}$$
$$6xy = 30x-13$$
$$x(30-6y) = 13$$
$$x = \frac{13}{(30-6y)} = \frac{-13}{(6y-30)}$$

Jadi, invers dari $(f\circ g)(x)$ adalah $\dfrac{-13}{6x-30}$

Jawaban: A

11. Diketahui: $f(x) = 3x^3+ax^2-7x+4$

$f\left(\dfrac{1}{3}\right) = 2; f(-2) = ...$

Maka,

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = 3\left(\frac{1}{3}\right)^3 + a\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 7\left(\frac{1}{3}\right) + 4$$
$$2 = \frac{1}{9}+\frac{a}{9}-\frac{7}{3}+4$$
$$2 = \frac{1+a-21+36}{9}$$
$$18 = 16+a$$
$$a = 2$$

Artinya: $f(x) = 3x^3+2x^2-7x+4$

Jika f(x) dibagi $(x+2)$ maka

Horner:

$$\begin{array}{r|rrrrl}
 & x^3 & x^2 & x^1 & x^0 & \\
-2 & 3 & 2 & -7 & 4 & \\
 & & -6 & 8 & -2 & + \\
\hline
 & 3 & -4 & 1 & 2 \rightarrow s(x) & \\
 & x^2 & x^1 & x^0 & &
\end{array}$$

Jadi, hasil baginya (g(x)) adalah $3x^2-4x+1$

Jawaban: B

12. Diketahui: $P(x) = x^3-ax^2-bx+12$ faktornya $(x-1)$ dan $(x+3)$

Jika faktornya $x=1$ maka

$$P(1) = 0$$
$$\Leftrightarrow (1)^3 - a(1)^2 - b(1) + 12 = 0$$
$$\Leftrightarrow -a-b+13 = 0$$
$$\Leftrightarrow a+b = 13 \quad ...(i)$$

Jika faktornya $x = -3$ maka

$P(-3) = 0$

$\Leftrightarrow (-3)^3 - a(-3)^2 - b(-3) + 12 = 0$

$\Leftrightarrow -27 - 9a + 3b + 12 = 0$

$\Leftrightarrow -9a + 3b = 15$

$\Leftrightarrow 3a - b = -5$ **...(ii)**

Eliminasi persamaan (i) dan (ii):

$$\begin{array}{l} 3a - b = -5 \\ \underline{a + b = 13} \quad + \\ 4a = 8 \Rightarrow a = 2 \end{array}$$

Substitusi nilai a:

$a + b = 13$

$2 + b = 13 \Rightarrow b = 11$

Artinya: $P(x) = x^3 - 2x^2 - 11x + 12$

Faktor lain P(x) dicari menggunakan Horner dengan $(x - 1) \Rightarrow x = 1$

	x^3	x^2	x^1	x^0	
1	1	–2	–11	12	
		1	–1	–12	+
	1	–1	–1	0 $\rightarrow$ S(x)	
	x^2	x^1	x^0		

$(x^2 - x - 12) \Rightarrow (x - 4)(x + 3)$

Maka faktor selain $(x - 1)$ dan $(x + 3)$ adalah $(x - 4)$

Karena $x_1 < x_2 < x_3$ maka

$x_1 = -3; x_2 = 1; x_3 = 4$

Jadi, $x_1 + x_2 + x_3 = -3 + 1 + 4 = 2$

Jawaban: C

13. $3\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 10 & 3 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & y \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -12 & 6 \\ 30 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -8 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 4x & y + x \\ 24 & 2y + 5 \end{pmatrix}$$

Maka

$-12 + 2 = 2 + 4x$

$-12 = 4x$

$x = -3$

$9 - 2 = 2y + 5$

$y = \dfrac{7 - 5}{2} = 1$

Jadi, $2y - 3x$ adalah

$2(1) - 3(-3) = 2 + 9 = 11$

Jawaban: A

14. Diketahui: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$AC = B$ maka $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{(1 \cdot 3) - (1 \cdot 2)}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 11 & -7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Maka, determinan C adalah

$|C| = (11 \cdot 1) - (-7 \cdot 0) = 11$

Jawaban: D

15. Vektor posisi titik P:

Karena AP : PB = 2 : 1 maka vektor posisi P adalah $p = \dfrac{1a + 2b}{2 + 1} = \dfrac{a + 2b}{3}$

Vektor posisi titik Q:

Karena BC : CQ = 3 : 2 dan Q terletak pada perpanjangan BC maka vektor posisi Q adalah:

$$q = c + \frac{2}{3}BC$$

$$= c + \frac{2}{3}(c - b)$$

$$= c + \frac{2}{3}c - \frac{2}{3}b$$

$$= \frac{5}{3}c - \frac{2}{3}b$$

$$= \frac{5c - 2b}{3}$$

Vektor posisi titik tengah M dari AC:

$$m = \frac{a + c}{2}$$

Uji kolinearitas P, Q, dan M**:** Tiga titik P, Q, M kolinear jika vektor PQ sejajar dengan vektor PM (atau QM). Periksa apakah vektor PQ adalah kelipatan skalar dari vektor PM.

$$\text{Vektor } PQ = q - p$$
$$= \left[\frac{5c-2b}{3}\right] - \left[\frac{a+2b}{3}\right]$$
$$= \frac{5c-2b-a-2b}{3}$$
$$= \frac{5c-a-4b}{3}$$

Periksa apakah PQ = k × PM untuk suatu skalar k:

$$\text{Vektor } PM = m - p$$
$$= \left[\frac{a+c}{2}\right] - \left[\frac{a+2b}{3}\right]$$
$$= \left[\frac{3(a+c)-2(a+2b)}{6}\right]$$
$$= \left[\frac{3a+3c-2a-4b}{6}\right]$$
$$= \frac{a+3c-4b}{6}$$

$$\frac{5c-a-4b}{3} = k \times \frac{a+3c-4b}{6}$$

Kalikan kedua sisi dengan 6:

2(5c – a – 4b) = k (a + 3c – 4b)

10c – 2a – 8b = ka + 3kc – 4kb

Koefisien **a**: -2 = k → k = -2

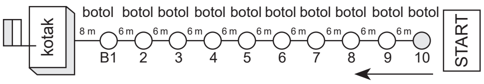
Koefisien **b**: -8 = -4k → k = 2

Koefisien **c**: 10 = 3k → $k = \frac{10}{3}$

Karena nilai k tidak konsisten, vektor PQ bukan kelipatan skalar dari vektor PM. Oleh karena itu, titik P, Q, dan M tidak kolinear.

Jawaban: D

16. Misalkan: Lintasan dihitung mulai dari kotak hingga ke B10 sehingga didapatkan sebuah deret aritmatika dari jarak tempuh: $10, 18, 26, 34, ...$



Deret jarak kotak hingga B10:
a = 10; b = 8; n = 10

$$U_n = a + (n-1)b$$

$$U_{10} = 10 + (10-1)\cdot 8$$
$$= 10 + 9 \cdot 8 = 82$$

Jumlah deret jarak tempuh kotak—B10:

$$S_n = \frac{n}{2}(a + U_n)$$

$$S_{10} = \frac{10}{2}(a + U_{10})$$
$$= 5(10 + 82)$$
$$= 5 \cdot 92 = 460$$

Perhatikan bahwa permainan dimulai dari START-mengambil bendera di kotak-meletakkan bendera di B1 hingga B10! Maka jarak lintasan setiap peserta:

$$\text{Jarak tempuh} = 2 \times S_{10}$$
$$= 2 \times 460$$
$$= 920$$

Jadi, jarak yang ditempuh setiap peserta lomba adalah 920 meter.

Jawaban: C

17. Diketahui: barisan geometri a = 3; n = 5; r = 2
Jumlah seluruh suku barisan geometri:

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r-1}$$

$$S_5 = \frac{3(2^5 - 1)}{2-1}$$
$$= 3(32 - 1)$$
$$= 93$$

Jadi, panjang tali sebelum dipotong adalah 93 cm.

Jawaban: C

18. Diketahui:

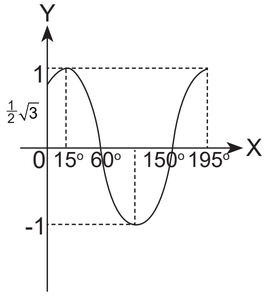
$$\cos 2x + 7\sin x - 4 = 0, 0° \le x \le 360°$$

$$(1 - 2\sin^2 x) + 7\sin x - 4 = 0$$
$$2\sin^2 x - 7\sin x + 3 = 0$$
$$(2\sin x - 1)(\sin x - 3) = 0$$
$$2\sin x = 1$$
$$\sin x = \frac{1}{2}$$

Jadi, himpunan penyelesaiannya $\{30°, 150°\}$.

Jawaban: D

19. Diketahui: Grafik fungsi trigonometri



Misalkan persamaan grafik fungsi $y = \sin(2x + 60°)$ maka

Untuk x = 0

$y = \sin(2 \cdot 0 + 60°) = \sin 60° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

Untuk $x = 15°$

$y = \sin(2 \cdot 15° + 60°) = \sin 90° = 1$

Untuk $x = 60°$

$y = \sin(2 \cdot 60° + 60°) = \sin 180° = 0$

Maka didapatkan titik potong $\left(0, \frac{1}{2}\sqrt{3}\right); (15°, 1); (60°, 0)$ yang sesuai dengan grafik.

Jadi, persamaan grafik fungsi trigonometri tersebut adalah $y = \sin(2x + 60°)$

Jawaban: A

20. $\frac{\sin 100° + \sin 20°}{\cos 250° + \cos 190°} = \frac{2\sin 60° \cdot \cos 40°}{2\cos 220° \cdot \cos 60°}$

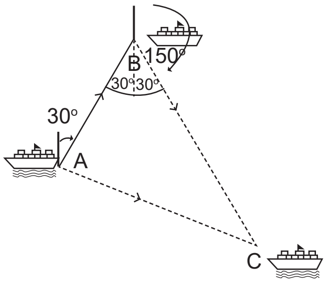
$$\frac{\sin 100° + \sin 20°}{\cos 250° + \cos 190°} = \frac{\sin 60° \cdot \cos 40°}{\cos(180° + 40°) \cdot \cos 60°}$$

$$= \frac{\sin 60°}{\cos 60°}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

Jawaban: D

21. Diketahui: Perjalanan kapal di antara 3 pelabuhan dengan $v = 50 \text{ mil / jam}$



Jarak A ke B (AB):

$$s = v \cdot t$$
$$= 50 \frac{\text{mil}}{\text{jam}} \cdot 10 \text{jam}$$
$$= 500 \text{ mil}$$

Jarak B ke C (BC):

$t = \text{pukul } 16.00 - 24.00 = 8 \text{ jam}$

$$s = v \cdot t$$
$$= 50 \frac{\text{mil}}{\text{jam}} \cdot 8 \text{jam}$$
$$= 400 \text{ mil}$$

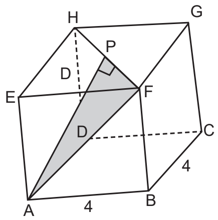
Maka, jarak AC dapat dicari dengan aturan kosinus:

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cos 60°}$$
$$= \sqrt{(500)^2 + (400)^2 - 2 \cdot (500) \cdot (400) \cdot \frac{1}{2}}$$
$$= \sqrt{25 \cdot 10^4 + 16 \cdot 10^4 - 20 \cdot 10^4}$$
$$= \sqrt{21 \cdot 10^4} = 100\sqrt{21}$$

Jadi, jarak tempuh dari pelabuhan C ke pelabuhan A adalah $100\sqrt{21}$ mil.

Jawaban: D

22. Diketahui: Kubus ABCD.EFGH, r = 4 cm



Perhatikan bahwa AF adalah diagonal sisi, maka

$FH = AF = 4\sqrt{2}$

$FP = \frac{1}{2}FH = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

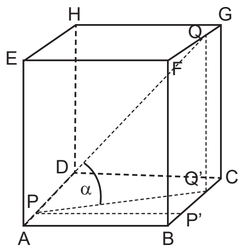
Jika jarak titik A ke garis FH adalah PA maka

$$PA = \sqrt{AF^2 - FP^2}$$
$$= \sqrt{\left(4\sqrt{2}\right)^2 - \left(2\sqrt{2}\right)^2}$$
$$= \sqrt{32 - 8}$$
$$= \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

Jadi, jarak titik A ke diagonal FH adalah $2\sqrt{6}$

Jawaban: D

23. Diketahui: Balok ABCD.EFGH



Jika $AP : PD = 1 : 2$ dan $FQ : QG = 2 : 1$ maka

$P'Q' = 3 - BP' - CQ' = 3 - 1 - 1 = 1$

$PQ' = \sqrt{(PP)^2 + (P'Q')^2} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$

Jika $\tan\alpha = \dfrac{QQ'}{PQ'}$ maka

$\tan\alpha = \dfrac{5}{\sqrt{10}} = \dfrac{5}{10}\sqrt{10} = \dfrac{1}{2}\sqrt{10}$

Jawaban: B

24. Diketahui: garis $y = 2x - 6$

Jika pencerminan terhadap sumbu X

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Rotasi (0,90°) = $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Maka

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$x' = y \Rightarrow y = x'$

$y' = x \Rightarrow x = y'$

Jadi, bayangan garis $y = 2x - 6$:

$x' = 2y' - 6 \Rightarrow x - 2y + 6 = 0$

Jawaban: A

25. Diketahui: Lingkaran

$L = x^2 + y^2 - 2x + 6y - 10 = 0$ sejajar garis $2x - y + 4 = 0$

Karena $y = mx + c$ dan garis sejajar garis singgung, gradiennya:

$2x - y + 4 = 0 \Leftrightarrow y = 2x + 4$

$m_g = m = 2$

Jari-jari lingkaran $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ dapat dicari dari persamaan L:

$x^2 + y^2 - 2x + 6y - 10 = 0$

$\Leftrightarrow (x - 1)^2 - 1 + (y + 3)^2 - 9 = 10$

$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 10 + 10$

$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 20$

Maka, persamaan garis singgung pada lingkaran L

$y - b = m(x - a) \pm r\sqrt{1 + m^2}$

$y - 3 = 2(x + 1) \pm \sqrt{20} \cdot \sqrt{1 + (2)^2}$

$y - 3 = 2x + 2 \pm 10$

$y = 2x + 5 \pm 10$

atau

$y = 2x - 5 \Leftrightarrow 2x - y = 5$

$y = 2x + 15 \Leftrightarrow 2x - y = -15$

Jawaban: C

26. $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{25x^2 - 9x - 16} - 5x + 3 = \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{25x^2 - 9x - 16} - \sqrt{(5x - 3)^2}$

$\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{25x^2 - 9x - 16} - 5x + 3 = \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{25x^2 - 9x - 16} - \sqrt{25x^2 - 30x + 9}$

Jika a = p maka

$\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{ax^2 + bx + c} - \sqrt{px^2 + qx + r}\right) = \dfrac{b - q}{2\sqrt{a}}$

Jadi,

$\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{25x^2 - 9x - 16} - \sqrt{25x^2 - 30x + 9} = \dfrac{-9 + 30}{2\sqrt{25}}$

$= \dfrac{21}{2 \cdot 5} = \dfrac{21}{10}$

Jawaban: C

27. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2+x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\cdot 2x\cdot\left(\dfrac{x}{\sin x}\right)+\left(\dfrac{x}{\sin x}\right)$

$$\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x^2+x}{\sin x}=(2)(0)(1)+(1)$$
$$=1$$

Jawaban: B

28. Diketahui: $y=\sin^2(3x-\pi)$

Jika $\cos 2A=1-2\sin^2 A$ maka

$$\sin^2 A=\frac{1-\cos 2A}{2}$$

sehingga

$$y=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2(3x-\pi)$$
$$y=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(6x-2\pi)$$

Turunan y:

$$y'=0-\frac{1}{2}\left[6\cdot-\sin(6x-2\pi)\right]$$
$$y'=3\sin(6x-2\pi)$$

Jawaban: D

29. Diketahui: Kurva $y=6\sqrt{x}$; titik singgung x = 4

Koordinat titik singgung (x,y):

$x=4$ maka $y=6\sqrt{x}=6\sqrt{4}=12$

Gradien garis singgung:

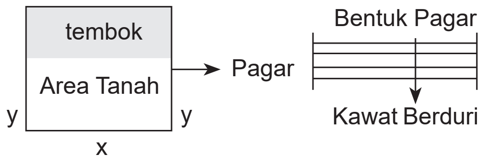
$$f'(x)=m$$
$$f'(x)=\frac{3}{\sqrt{x}}$$
$$f'(4)=\frac{3}{\sqrt{4}}=\frac{3}{2}$$

Persamaan garis singgung di titik (4,12) dengan $m=\dfrac{3}{2}$:

$$y-y_1=m(x-x_1)$$
$$\Leftrightarrow y-12=\frac{3}{2}(x-4)$$
$$\Leftrightarrow 2y-24=3x-12$$
$$\Leftrightarrow y=\frac{3}{2}x+6$$

Jawaban: C

30. Misalkan: Panjang area tanah = x; lebar area tanah = y



Perhatikan bentuk pagar yang terdiri dari 4 lapis. Artinya:

$800\text{ m} : 4\text{ lapis} = 200\text{ m / lapis}$

Maka tanah yang dipagari dapat dinyatakan:

$x+2y=200 \Leftrightarrow x=200-2y$

Jika $\text{Luas tanah}=xy$ maka

$$L=(200-2y)\cdot y$$
$$=200y-2y^2$$

Luas maksimum tanah:

$$L'=0$$
$$\Leftrightarrow 200-4y=0$$
$$\Leftrightarrow 4y=200$$
$$\Leftrightarrow y=50$$

Jadi, luas maksimum tanah yang dipagari (dalam m^2) adalah

$$L=200y-2y^2$$
$$=200(50)-2(50)^2$$
$$=10.000-5.000$$
$$=5.000$$

Jawaban: B

31. Probabilitas menang dalam satu permainan:

Permainan melempar koin 5 kali. Menang jika setidaknya 3 gambar (H).

Probabilitas mendapatkan gambar (p) = 0,5, probabilitas mendapatkan angka (q) = 0,5.

Jumlah lemparan (n) = 5.

Menang jika X ≥ 3, di mana X adalah jumlah gambar.

P(Menang) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)

$$P(X=3)={}_5C_3\times 0{,}5^3\times 0{,}5^2=10\times 0{,}5^5$$
$$P(X=4)={}_5C_4\times 0{,}5^4\times 0{,}5^1=5\times 0{,}5^5$$
$$P(X=5)={}_5C_5\times 0{,}5^5\times 0{,}5^0=1\times 0{,}5^5$$

$$P(\text{menang})=(10+5+1)\times 0{,}5^5$$
$$=16\times 0{,}5^5$$
$$=\frac{16}{32}$$
$$=0{,}5$$

Permainan diulang 10 kali: Kita sekarang memiliki percobaan binomial baru, di mana "sukses" adalah "menang dalam satu permainan", dan "gagal" adalah "kalah dalam satu permainan".

Jumlah percobaan (n') = 10 (jumlah permainan diulang).

Probabilitas sukses (p') = P(Menang) = 0,5.

Kita ingin mencari probabilitas menang tepat 7 kali dari 10 permainan.

Misalkan Y adalah jumlah kemenangan dalam 10 permainan, cari P(Y = 7).

Distribusi binomial untuk jumlah kemenangan:

Y ~ B(10, 0,5)

$$P(Y=7) = {}_{10}C_7 \times (p')^7 \times (1-p')^{10-7}$$

$$P(Y=7) = {}_{10}C_7 \times (0{,}5)^7 \times (1-0{,}5)^3$$

$$P(Y=7) = {}_{10}C_7 \times (0{,}5)^7 \times (0{,}5)^3$$

Jawaban: A

32. Diketahui:

$\frac{dV}{dt} = 50\,cm^3\ /\ detik$ (laju perubahan volume terhadap waktu)

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$ (volume bola)

Dicari $\frac{dr}{dt}$ ketika r = 10 cm (laju perubahan jari-jari terhadap waktu ketika jari-jari 10 cm).

Turunkan volume terhadap waktu (t): Gunakan aturan rantai (*chain rule*) untuk menurunkan V terhadap t, dengan r sebagai fungsi dari t.

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)$$

$$= \frac{4}{3}\pi \times \frac{d}{dt}(r^3)$$

$$= \frac{4}{3}\pi \times 3r^2 \times \frac{dr}{dt}$$

$$= 4\pi r^2 \times \frac{dr}{dt}$$

Substitusi nilai diketahui dan cari $\frac{dr}{dt}$:

$\frac{dV}{dt} = 50$ dan r = 10.

Substitusikan nilai-nilai ini ke persamaan laju perubahan:

$$50 = 4\pi(10) \ \times \frac{dr}{dt}$$

$$50 = 4\pi(100) \times \frac{dr}{dt}$$

$$50 = 400\pi \times \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dr}{dt} \quad \frac{50}{400}$$

$$\frac{dr}{dt} \quad \frac{1}{8}$$

Jadi, laju perubahan jari-jari bola udara ketika jari-jari mencapai 10 cm adalah $\frac{1}{8\pi}$ cm/detik.

Jawaban: A

33. $\int \sin^5 2x \cos 2x \, dx = ...$

Misal: $u = \sin 2x$

$$\frac{du}{dx} = 2\cos 2x \Leftrightarrow dx = \frac{du}{2\cos 2x}$$

$$\int u^5 \cos 2x \frac{du}{2\cos 2x} = \frac{1}{2}\int u^5 \, du$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}u^6\right) + C$$

$$= \frac{1}{12}\sin^6 2x + C$$

Jawaban: D

34. $\int (6x^2 - 4x)\sqrt{x^3 - x^2 - 1}\,dx = \int 2(3x^2 - 2x)\sqrt{x^3 - x^2 - 1}\,dx$

Misalkan: $u = x^3 - x^2 - 1 \Rightarrow du = (3x^2 - 2x)\,dx$

$$\int 2(3x^2 - 2x)\sqrt{x^3 - x^2 - 1}\,dx = \int 2\sqrt{u}\,du$$

$$= 2 \cdot \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{4}{3}\sqrt{(x^3 - x^2 - 1)^3} + C$$

Jawaban: D

35. Diketahui: daerah antara $y = 4x - x^2$; sumbu X; garis x = 1 dan x = 3

$$L = \int_1^3 (-x^2 + 4x)dx$$
$$= -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 \Big|_1^3$$
$$= \left(-\frac{1}{3}\cdot 3^3 + 2\cdot 3^2\right) - \left(-\frac{1}{3}\cdot 1^3 + 2\cdot 1^2\right)$$
$$= (-9 + 18) - \left(-\frac{1}{3} + 2\right)$$
$$= 9 - \frac{5}{3} = 7\frac{1}{3}$$

Jawaban: A

36. Diketahui: bola m = 4; b = 5; m + b = 9

Jika $C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ maka

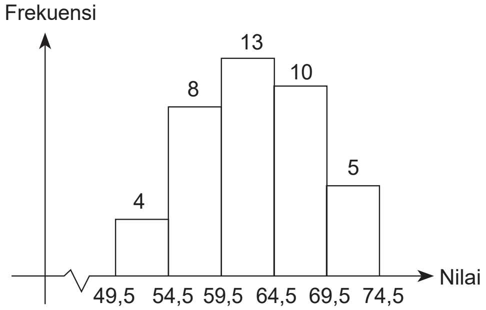
Banyak cara mengambil 2 bola secara acak:
$$n(S) = C_2^9 = \frac{9!}{2!(9-2)!} = \frac{9\cdot 8\cdot 7!}{2\cdot 7!} = 36$$

Banyak cara mengambil 1 merah dan 1 biru:
$$n(A) = C_1^4 \cdot C_1^5$$
$$= \frac{4!}{1!(4-1)!}\cdot\frac{5!}{1!(5-1)!}$$
$$= \frac{4\cdot 3!}{3!}\cdot\frac{5\cdot 4!}{4!}$$
$$= 4\cdot 5 = 20$$

Peluang terambilnya 1 merah dan 1 biru dari 9 bola:
$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$$

Jawaban: B

37. Diketahui: data pada histogram



Modus = interval f terbesar = nilai 59—64
$\Rightarrow f = 13$
$d_1 = 13 - 8 = 5$
$d_2 = 13 - 10 = 3$
$Tb = 59,5$
$L = 64,5 - 59,5 = 5$

Nilai modus:
$$M_o = T_b + \left(\frac{d_1}{d_1 + d_2}\right)\cdot L$$
$$= 59,5 + \left(\frac{5}{5+3}\right)\cdot 5$$
$$= 59,5 + 3,125$$
$$= 62,625 \approx 62,6$$

Jawaban: C

38. Diketahui: data pada tabel

Nilai	Frekuensi
40—48	4
49—57	12
58—66	10
67—75	**8**
76—84	4
85—93	2
$\sum f$	40

Letak kuartil atas (K_3):
$$f_{K3} = \frac{3}{4}\cdot n = \frac{3}{4}\cdot 40$$
$$= 30 \Rightarrow \text{interval } 67 - 75$$

maka $f_{K3} = 8$; $f_{ks} = 4 + 12 + 10 = 26$

$T_b = 67 - 0,5 = 66,5$

$c = 75,5 - 66,5 = 9$

Jadi, kuartil atas dari data tersebut adalah
$$K_3 = T_b + \frac{\left(\frac{3}{4}n - f_{ks}\right)}{f_{K3}}\cdot c$$
$$= 66,5 + \frac{(30 - 26)}{8}\cdot 9$$
$$= 66,5 + 4,5 = 71$$

Jawaban: D

39. Diketahui: angka 1 hingga 6 = 6 angka; disusun menjadi bilangan 3 angka ≤ 400
Syarat: tidak berulang
- Ratusan:
  Karena syarat ≤ 400: Angka yang mungkin = 1,2,3 = 3 angka $\Rightarrow n_1 = 3$
- Puluhan:
  Angka yang mungkin = 1 atau 2, 3, 4, 5, 6 = 5 angka $\Rightarrow n_3 = 5$
- Satuan:
  Angka yang mungkin = 3, 4, 5, 6 = 4 angka $\Rightarrow n_4 = 4$

Maka kemungkinan cara penyusunan bilangan:

$$\begin{aligned} n &= n_1 \times n_2 \times n_3 \\ &= 3 \times 5 \times 4 \\ &= 60 \end{aligned}$$

Jawaban: A

40. Diketahui: pengerjaan soal = tanpa urutan = kombinasi
Jumlah soal = 10; yang dikerjakan = 8 soal
Soal yang harus dipilih untuk dikerjakan (selain no. 1,3,5) = 7 soal
Soal yang harus dipilih lagi (dari 8 soal selain no. 1,3,5) = 5 soal

$$\begin{aligned} C_5^7 &= \frac{7!}{(7-5)!5!} \\ &= \frac{7 \cdot 6 \cdot 5!}{1 \cdot 2 \cdot 5!} = 21 \end{aligned}$$

Jadi, banyak cara peserta ujian memilih soal yang dikerjakan adalah 21.

Jawaban: A