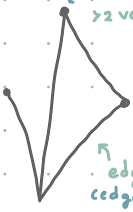
Graphs

การเชื่อมจุดยอดด้วยเส้นเชื่อม

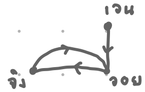
E.g.

Vertex
>2 vertices

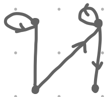


edge
(edges)

ไม่ระบุทิศทาง



เวนชอบจอย
จอยชอบจิ๋ง
จิ๋งชอบจอย
เอ่าอิเวน น. ก

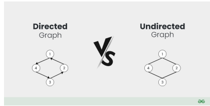


ระบุทิศทาง

└ เป็น direct g
└ มี 2 loop
└

เรียน 2 part

- terminology of graph
  → vocab ของ graph
- application
  → โจทย์พิสูจน์



terminology

E.g.

edge : e
vetices : a b

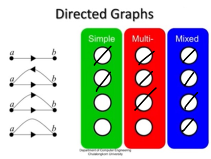
เส้น e อยู่บน a, b
e is incident with a and b

a เป็น end point ของ e
a is an end point of e

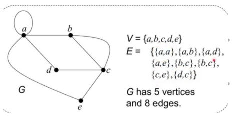
b เป็นอีก end point ของ e
b is the other end point of e

ติดกัน
a is adjacent to b   a ติดอยู่กับ b
: มีเส้นเชื่อมกัน

b is also adjacent to a



undirected graph
3 types



$G : (V, E)$

$V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$

$E : \{e_1, e_2, \dots, e_k\}$

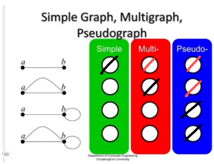
set of edges

set of vertices

- simple graph
  - มีแค่ 1 edge ต่อ 1 คู่ vertex
    (อาจไม่มี edge เลยก็ได้)
  - ไม่มี loop

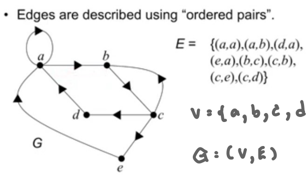
multigraph
- ยอมให้มีมากกว่า 1 edge
- ห้ามมี loop

Psedograph
- เอ็ดหยังก็เอ็ด



a   b   /   /   /
แม้ไม่มี edge ก็ตาม

Directed graphs 3 types



$V : \{a, b, c, d, e\}$

$G : (V, E)$

Simple direct.
- ห้ามมีเส้นเชื่อมที่มีทิศทางเดียวกันซ้ำ
- ไม่มี loop

Directed Multigraph
- มีเส้นซ้ำได้ มี loop ได้

Mixed graph
- ทำไรก็ทำ edge จะมีทิศหรือไม่ก็ได้

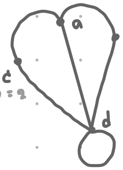
นิยาม จำนวนครั้งที่ vertex นั้นเป็น end point ของ edge

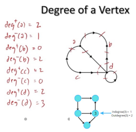
Degree of vertex

v, $\deg(v)$

- number of edges incident with v.
- loop contributes twice to the degree of vertex.

E.g.





- $\deg(v)$ จำนวนเส้นเชื่อมใน vertex
- out-degree of v, $\deg^+(v)$ จำนวน edge ที่พุ่งออก vertex นั้น
- in-degree of v, $\deg^-(v)$ จำนวน edge ที่พุ่งเข้า vertex นั้น
  end vertex

loop นับ 1 in-degree + 1 out-degree

How many edges are there in a graph with 10 vertices each of degree 6?

(1 เส้นเชื่อมให้ 2 degrees)

มี 10 vertex แต่ละ ver มี 6 degree

Σ degree $= 10 \cdot 6$

$\therefore$ edges $= \frac{10 \cdot 6}{2} = 30$ edges

undirected graph

The Handshaking Theorem

Let $G = (V,E)$ be an undirected graph with e edges, then

$$\underset{\text{2 เท่าของ edges}}{2e} = \underbrace{\sum_{v \in V} \deg(v)}_{\text{ผลรวม deg ทุก v.}}$$

vertex ที่ degree เป็นคี่มีคู่ตัวเสมอ

พิสูจน์ In an undirected graph, there must be an even number of vertices with odd degrees.

proof.

by contradiction proof.

สมมุติแย้งว่า vertex wich degree มีเลขคี่ มีเป็นจำนวน n ตัว ซึ่ง n เป็นคี่

$\therefore n = 2k+1$; $k \in \mathbb{Z}$

ผลรวมดีกรี vertex ที่เป็นเลขคี่ทั้งหมดคือ

$$\sum_{i=1}^{n} (2c_i+1) = \sum_{i=1}^{n} 2c_i + \sum_{i=1}^{n} 1$$

$$= \underbrace{2\sum_{i=1}^{n} c_i}_{\text{2×อะไรก็คู่}} + \underset{\text{เลขคี่}}{n}$$

คู่ + คี่ = คี่

ส่วน vertex ที่เหลือดีกรีเป็นเลขคู่ ให้มี m ตัว มีผลรวมดีกรีคือ $\sum_{i=1}^{m} 2d_i = \underbrace{2\sum_{i=1}^{m} d_i}_{\text{เลขคู่ชัวร์}}$

① $\therefore$ ผลรวม degree ของทุก vertex จึงเป็นเลขคี่

② จาก HST ผลรวม degree ของทุก vertex ต้องเป็นเลขคู่

① ไม่สมมูล ②

$\therefore$ Q.E.D

directed graph

In-degree = Out-degree

Let $G = (V,E)$ be a directed graph, then

$$\underbrace{\sum_{v \in V} \deg^-(v)}_{\text{ผลรวม in-de}} = \underbrace{\sum_{v \in V} \deg^+(v)}_{\text{ผลรวม out}} = |E|$$

ผลรวม in-de = ผลรวม out = |E| จำนวนเส้นเชื่อม

Simple graph (undirected path)

คือsimple graph ด้วยแบบมาจำแนกประเภทต่อ

Special simple graph

↳ Complete graphs (K_n)

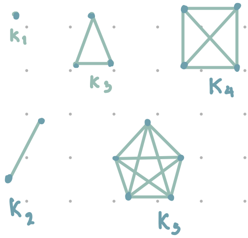
จำนวนvertex

- ทุก vertex เชื่อมหากันได้
- มีเส้นเชื่อม $\binom{n}{2} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

Eg. $K_3 = \frac{3!}{2!(3-2)!}$

$= \frac{3 \cdot \cancel{2!}}{\cancel{2!}(1)!}$

$= 3$ #



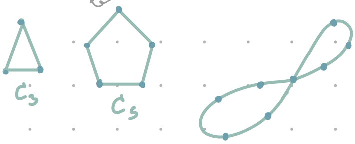
K_1 K_3 K_4

K_2 K_5

↳ Cycles (C_n)

กราฟที่เชื่อมเป็นวง

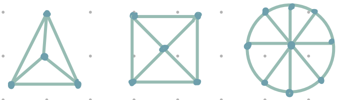
จำนวนvertex



C_3 C_5 C_8

↳ Wheels (W_n)

- เป็นcycleที่มีvertexตรงกลาง



W_3 W_4 W_8

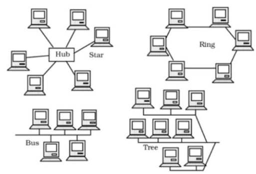
- vertex = n+1
- edge = 2n

หนังสือบางเล่มนับตรงกลางด้วย

W_4 W_5 W_9

การนำไปใช้

Eg. Lan topology



↳ n-Dimensional Hypercube (Q_n)

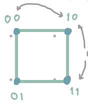
บอกถึงอะไร??

ต่างกัน1bit

Q_1

edge = 1

$v = 2^1 = 2$



Q_2

vertex $= 2^2$

$= 4$

e = 4

$v = 2^2 = 4$

- vertex $= 2^n$
- $\deg(v) = n$

จำนวน vertex

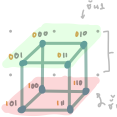
$\sum_{i=0}^{n^2} \deg(v_i) = 2^n \cdot n = 2e$

- edge $2e = 2^n \cdot n$

$e = \frac{2^n \cdot n}{2}$

$e = n \cdot 2^{n-1}$

ชั้น1



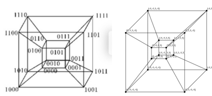
ต่างกัน1bit ด้านหน้า

ชั้น2

Q_3

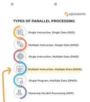
V = 8

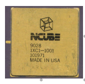
e = 12



Q_4 (Tesseract)

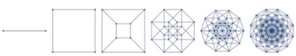
★ สำคัญใน paralrell processing





→ เวลาต้องการMIMD เชื่อมcpuหมดจนทายท่า ก็ใช้วิธีนี้ เพื่อลดcost

```
GraphicsRow@Table[GraphData[{"Hypercube", n}], {n, 6}]
```



Q_1 Q_2 Q_3 Q_4 Q_5 Q_6

Simple graph (undirected parth)

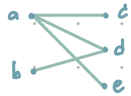
คือsimple graph ที่นำมาจำแนกประเภทต่อ

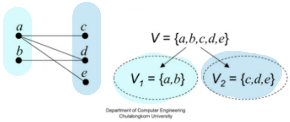
Bipartite Graphs

Bi + party

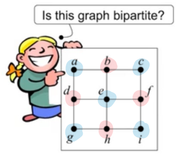
simple กราฟที่ vertex แบ่งได้เป็น 2 กลุ่ม V_1 V_2 โดย

ไม่มีเส้นเชื่อมระหว่างvertexในกลุ่มเดียวกัน





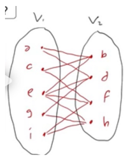
E.g.

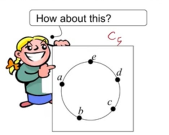


yes

$V_1 = \{a, c, e, g, i\}$

$V_2 = \{b, d, f, h\}$





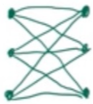
ไม่เป็น

Complete Bipartite graphs ($K_{m,n}$)

ทุกคู่ของvertexที่อยู่ต่างกลุ่มกันจะมีedge

เชื่อมกันเสมอ

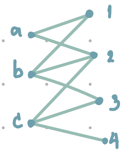
$K_{3,3}$



$K_{4,2}$

Complete matching

หาเส้นเชื่อมที่เชื่อมจาก $V_1 \to V_2$ แล้วไปโผล่ได้ทุก V_1



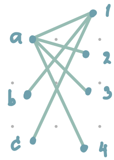
เป็น complete matching

เพราะ (a, 1) (b, 2) c ก็เชื่อม ไป 3 ได้ หรือจะไป 4 ก็ได้

$A = \{a, b\}$

$N(A) = \{1, 2, 3\}$

$|N(A)| > |A|$



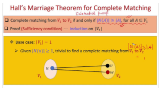
ไม่เป็น เพราะ a ไป 1 b ไป 1 ได้อย่างเดียว

แล้วถ้ากำหนด b ไป 1 c ก็ไป 1 ได้อย่างเดียวเสมอ

$A = \{b, c\}$

$N(A) = \{1\}$

$|N(A)| < |A|$



HALL'S MARRIAGE THEOREM The bipartite graph $G = (V, E)$ with bipartition (V_1, V_2) has a complete matching from V_1 to V_2 if and only if $|N(A)| \geq |A|$ for all subsets A of V_1.

graph Operations

มาสร้างgraphใหม่จากgraphที่มีอยู่แล้วกันเถอะ :)

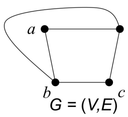
• Subgraphs

- $G = (V, E)$ graph $H = (W, F)$

  Where $W \subseteq V$ and $F \subseteq E$

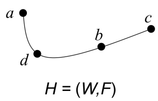
- A subgraph of H of G is a proper subgraph of G if $H \neq G$

e.g.



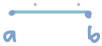
$V = \{a,b,c,d\}$
$E = \{\{a,b\},\{b,c\},\{c,d\},\{a,d\},\{b,d\}\}$

$W = \{a,b,c,d\}$
$F = \{\{b,c\},\{a,d\},\{b,d\}\}$



Department of Computer Engineering

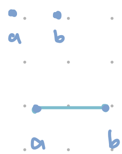
E.g. G



find subgraph ของ G

มี 1 vertex 2 ตัว

มี 2 vertex no edge 1 ตัว



มี 2 vertex มีedge 1 ตัว

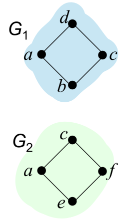
$\therefore$ subgraph G = 4 #

• Union

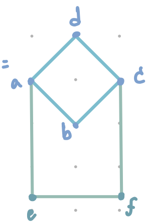
The **union** of two simple graphs $G_1=(V_1,E_1)$ and $G_2=(V_2,E_2)$ is the simple graph $H=(W,F)$ where $W = V_1 \cup V_2$ and $F = E_1 \cup E_2$

denoted by $G_1 \cup G_2$

E.g. find $G_1 \cup G_2$



$G_1 \cup G_2$ =



• Edge contraction

การหดเส้นเชื่อม

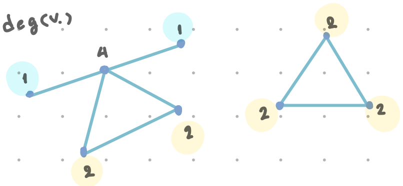
• Vertex Removal

การลบเส้นเชื่อม ต้องลบ edge ที่ติดกับ vertex นั้นออกด้วย

E g.

Show that a simple graph with at least 2 vertices has at least 2 vertices with the same degree.

deg(v.)



proof ใช้ contradiction proof สมมุติแย้งว่าแต่ละ vertex มี degree ต่างกันทั้งสิ้น ให้กราฟที่พิจารณาเป็น simple g. ที่มี n vertex โดย $n \geq 2$

simple g. n vertex
degree น้อยสุด 0
มากสุด $(n-1)$

$deg(v_1) = 0$
$deg(v_2) = 1$
$deg(v_3) = 2$
⋮
$deg(v_n) = n-1$

ขัดแย้งตรงนี้เพราะ v_n มี deg = n-1 แปลว่ามันบอกว่ามันเชื่อมกับทุก vertex แต่ v_1 มี deg = 0 แปลว่าไม่มีใครมาเชื่อมกับมัน

∴ ขัดแย้ง

∴ ขัดแย้ง Q.E.D

Show that a simple graph with at least 2 vertices has at least 2 vertices with the same degree.

ใช้ contradiction proof โดยสมมุติแย้งว่า แต่ละ vertex มี degree ต่างกันทั้งสิ้น ให้กราฟที่พิจารณาเป็น simple graph ที่มี n vertex โดย $n \geq 2$ ดังนั้น จึงหาได้ vertex i, $1 \leq i \leq n$ มี degree ดังนี้คือ $deg(v_i) = i-1$ แต่จากนี้ได้ว่า มี $deg(v_1) = 0$ คือ v_1 ไม่ adjacent กับ vertex อื่นเลย และมี $deg(v_n) = n-1$ คือ v_n adjacent กับ vertex อื่นทุกตัว ทั้งสองไม่สามารถเกิดพร้อมกันได้

□

How to

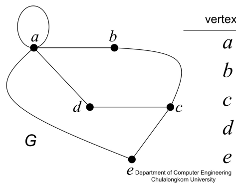
Representing Graph

ติดกัน

- **Adjacency** Lists

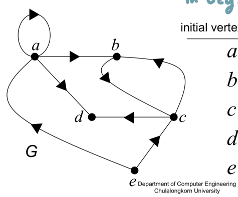
↳ ถ้า vertex ไหนมี multiple edges วิธีนี้บอกไม่ได้

undirect



vertex	adjacent vertices
a	a b d e
b	a c
c	b d e
d	a c
e	a c

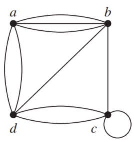
direct graph



in deg. initial vertex	out deg. terminal vertices
a	a b d
b	c
c	b d
d	-
e	a c

- **Adjacency** Matrices

undirect



ถ้ามีหลาย edge ใน vertex a และ b วิธีนี้บอกได้

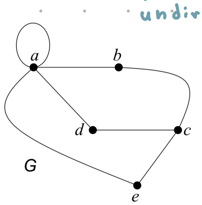
$$\begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & 0 & 3 & 0 & 2 \\ b & 3 & 0 & 1 & 1 \\ c & 0 & 1 & 1 & 2 \\ d & 2 & 1 & 2 & 0 \end{array}$$

$G = (V, E)$, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$

$A = [a_{ij}]$ ขนาด $n \times n$

a_{ij} แทนจำนวนเส้นเชื่อมจาก vertex $i \to j$

undirected g

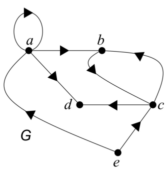


$A = A^T$

$$\begin{array}{c|ccccc} & a & b & c & d & e \\ \hline a & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ b & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ c & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ d & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ e & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

symmetric

directed g.



นับชี้หาคนอื่น

① ↓ ② →

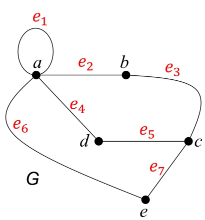
$$\begin{array}{c|ccccc} & a & b & c & d & e \\ \hline a & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ c & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

- **Incidence** Matrices

$G = (V, E)$, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $E = \{e_1, e_2, \dots e_n\}$

$M = m_{ij}$ $\begin{cases} 1 & e_j \text{ incident กับ } v_i \\ 0 & \text{ไม่ incident กัน} \end{cases}$

vertex edge



$$\begin{array}{c|ccccccc} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 \\ \hline a & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ d & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ e & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Isomophism of graphs

เหมือนกัน

รูปร่าง

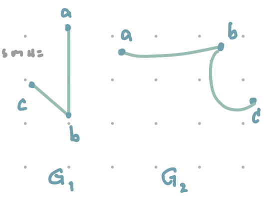
กราฟที่สมสัณฐาน

กราฟที่เหมือนกัน $G_1, G_2 : (V, E)$

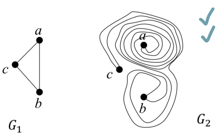
คนละอัน

กัน

isomorphismนะ

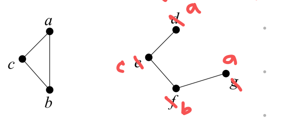


• มีedge กับ vertex ที่เชื่อมต่อเหมือนกันทุกประการ

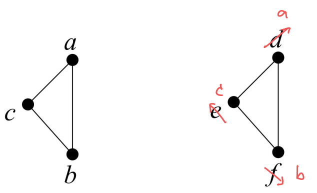


not one to one

ทำงี้ไม่ได้



นิยาม กราฟที่ isomorphism กัน ต่อเมื่อเราเปลี่ยนชื่อ vertex แล้วมีedge เชื่อมต่อกันได้เหมือนกัน



$G_1=(V_1,E_1)$ and $G_2=(V_2,E_2)$ are two simple graphs. G_1 and G_2 are **isomorphic** when:

There is a <u>1-to-1</u> and <u>onto</u> function f from V_1 to V_2 with the property that

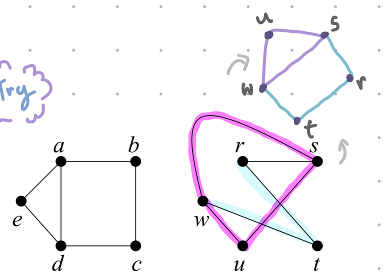
อยู่ติดกัน ก็ต่อเมื่อ

$\forall a,b \in V_1$ a and b are adjacent in G1 $\leftrightarrow$ f(a) and f(b) are adjacent in G2.

f is called an **isomorphism**.

แปลว่าเปลี่ยนชื่อแล้ว ยัง adjacent กันอยู่

Try



Isomorphism f

$f(a)=s$, $f(b)=r$

$f(c)=t$, $f(d)=w$

$f(e)=u$

$\{a,b\} \to \{r,s\}$

$\{b,c\} \to \{r,t\}$

$\{c,d\} \to \{t,w\}$

$\{d,a\}$ $\{u,w\}$

$\{d,e\}$ $\{s,u\}$

$\{a,e\}$ $\{s,w\}$

โจทย์ที่เจอบ่อย

→ แสดง2กราฟมันisomorphism
• หาให้เจอ

↳ แสดงว่า2กราฟนี้มันไม่ isomorphic
• vertexไม่เท่ากัน
• edge ไม่เท่ากัน
• vertexที่adjacent ไม่เหมือนกันตอนเปลี่ยนชื่อ

ไม่เป็น

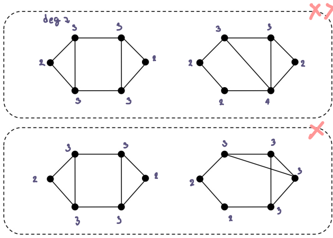
Isomorphism of graphs

Graph invariants

คุณสมบัติของกราฟเพื่อนำมา
พิจารณาว่ากราฟทั้งคู่ isomorphism ไหม

- Number of vertices
- Num ~~~ edge
- degees of vertices
- adjacency between vertices with specified degrees

XX ไม่เป็น



X X ไม่เป็น

{ try }

Suppose that G_1 and H_1 are isomorphic and that G_2 and H_2 are isomorphic. Prove or disprove that $G_1 \cup G_2$ and $H_1 \cup H_2$ are isomorphic.

G_1 G_2 นอกจากชื่อไม่มีอะไร
H_1 H_2 เชื่อมกันนะ

E.g. G_1 H_1 G_2 H_2

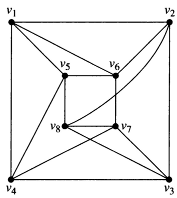
a b a c

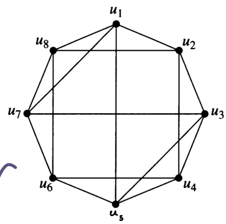
$G_1 \cup G_2$ $H_1 \cup H_2$

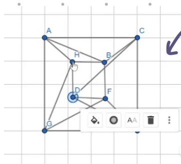
•a b• •c

!Try!

มาพิสูจน์กันเลย!!







ลงใน geogebra

ดาย ช่วยได้เยอะไอ่ต่าน

🥰🥰🥰🥰

Graph Connectivity

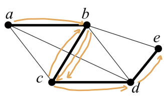
- **Path** → walk

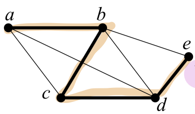
  ↳ทางเดินที่เชื่อมระหว่าง vertex ไปเรื่อยๆ

simple paths ไม่โดนใช้มากกว่า 1 ครั้ง

↳ trail

non-simple path : (a, b, c, b, c, d, e)





({a,b},{b,c},{c,d},{d,e}) is a path of length 4.

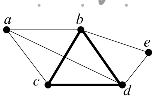
When there are no multiple edges (e.g., in simple graph), we can represent a path by the sequence of vertices it passes through.

← รูปย่อ

({a,b},{b,c},{c,d},{d,e}) ➡ (a,b,c,d,e)

circuit เดินวนกลับมาที่เดิม

↳ simple circuit
ไม่ใช้ edge ซ้ำ



circuit (b,c,d,b)

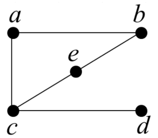
Graph Connectivity

Connectedness

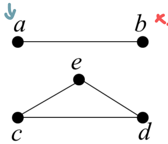
An <u>undirected graph</u> is called **connected** ↔ There is a path between every pair of distinct vertices of the graph.

- undirected graph

เมื่อหยิบ vertex คู่ไหนมา
จะมีทางเดินไปหากันได้เสมอ



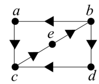
หยิบ b, d
b → a → c → d
✓✓ ∴ Connected



✗✗ หยิบ b d ไม่มี path ไปหากัน
∴ disconnected

- directed graph

↳ strongly connected : เมื่อ a b มีทางเดินไปกลับ (ไม่จำเป็นต้องเป็น edge เดียวกันก็ได้)



a → b : a → c → b
b → a : b → a

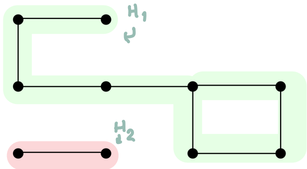
↳ weakly connected : ลบทิศทางออกแล้วยัง connect กันอยู่ก็เอาเลย

connected components

ดึงบล็อกออกมาได้เลย

Graph H มี 2 connected components

$H_1\ H_2 \subset H$



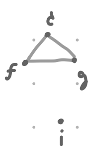
How many connected components are there in a simple graph with the following adjacency matrix?

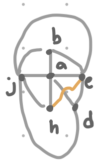
	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
a		1		1	1			1		1
b	1				1					1
c						1	1			
d	1				1					1
e	1	1		1				1		1
f			1				1			
g			1			1				
h	1				1					1
i										
j	1	1		1	1			1		

อีกอันเพื่อนไม่คบ

connected component = 3 ตัว
↳ i , abdehj , fgc

↳ turn to g.





มั่วจัดแต่ประมาณนี้

cut vertex, cut edge

cut vertex

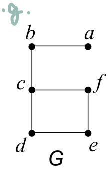
ดึง vertex (ต้องเอา edge ที่ติด vertex นั้นออกไปด้วย) พอดึง vertex นั้นออกแล้วจำนวน componet เพิ่ม

cut edge

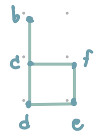
เหมือน vertex แต่เปลี่ยนเป็น edge

E.g.

vertex

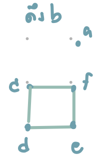


ดึง a



จำนวน cp = 1

ดึง b

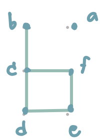


จำนวน cp = 2

∴ b เป็น cut vertex.

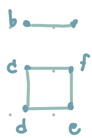
edge

cut ba



cp = 2

cut bc

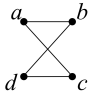


cp = 2

∴ ba, bc is cut edge

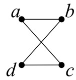
Graph Connectivity

Counting Paths Between vertices



$(a,b,a,b,d),(a,b,a,c,d),$
$(a,b,d,b,d),(a,b,d,c,d),$
$(a,c,a,c,d),(a,c,a,b,d),$
$(a,c,d,c,d),(a,c,d,b,d)$

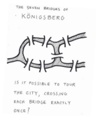
• สร้าง adj matrix แล้วถ้าต้องการหาทางเดินที่มีความยาวเท่ากับ r ให้ adj. m ไปยกกำลัง r แล้วจะได้ผลลัพธ์ว่าทางเดินที่มีความยาว r จาก $v_i \to v_j$ มีกี่ทางเดินจากสมาชิก แถว i หลัก j A^r



$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad r = 4 \qquad A^4 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 8 & 8 & 0 \\ 0 & 8 & 8 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \end{array}$$

หาจำนวน path จาก a → c ที่มีความยาว 4 ก็คือ 8

Euler graph

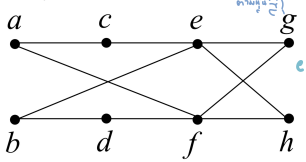


Euler circuit

simple circuit ที่มีทุกเส้นเชื่อมในกราฟนั้น

ต้องกลับมาvertexแรก

ใช้เส้นเชื่อมครบทุกเส้น + ห้ามใช้ซ้ำ ตามหุ้น



An euler circuit

eg. a c e g f h e b d f a

e g f h e b d f a c e

condition for euler circuit

A connected multigraph with at least two vertices has an Euler circuit ↔ each of its vertices has even degree.

→ มีอย่างน้อย 2 vertex และแต่ละ vertex มี degree เป็นเลขคู่

proof

Necessary condition

G has an Euler Circuit → each of its vertices must have even degree.

Sufficient condition

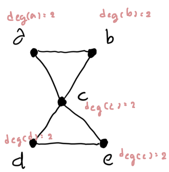
Each of the vertices in G has even degree → G has an Euler Circuit.

proof 1

G has an Euler Circuit → each of its vertices must have even degree.

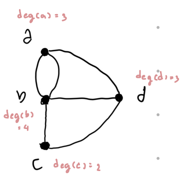
some vertex has odd degree

→ G doesn't have Euler circuit



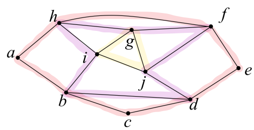
a

bcdea



proof 2

Each of the vertices in G has even degree → G has an Euler Circuit.



ahfedcb

hgfdbih

igj

→ ahgfdbigjhfedcb

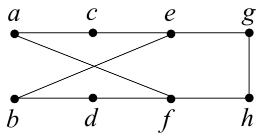
Euler graph

Euler Paths

ห้ามใช้edgeซ้ำเหมือนเดิม

simple paths ที่เก็บทุกedgeในgraph

* ไม่จำเป็นต้องกลับมาจุดเริ่มต้นเหมือนcircuit



Euler path = ebdfhgecaf

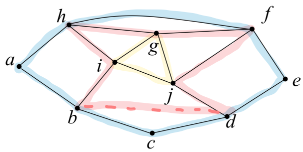
or facegh fdbe

condition for euler paths

A connected multigraph with at least two vertices has an Euler path but not an Euler circuit ↔ it has exactly 2 vertices with odd degree.

มีอย่างน้อย2vertex มีdegreeเป็นเลขคี่

แล้ว2vertexนั้นจะกลาย เป็นหัว,ท้าย euler paths ทันที



euler paths

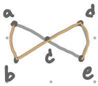
⇒ dcbahfedjgijfghib

Euler graph

William Rowan Hamilton

Hamilton Paths and Circuits

hamilton path simple path ไปทุกvertexไม่เดินvertexซ้ำ

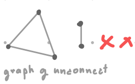


hamilton circuit → condition → ไม่มี necessary & sufficient

จำเป็น,สำคัญ เพียงพอ

hamilton pathที่ vertexสุดท้ายจะ แล้วvertexนั้นเชื่อมไปอันแรกได้ → แต่มีเงื่อนไขบางอยู่

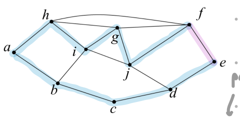
Eg. ถ้ามี Hamilton ciruits



✗✗ ∴ เป็น connect graph.

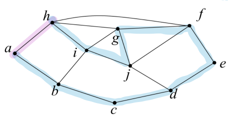
graph g unconnect

For $G=(V,E)$ and $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, the simple circuit $v_1,v_2,\ldots,v_n,v_1$ is a **Hamilton circuit** if $v_1,v_2,\ldots,v_n$ is a Hamilton path.

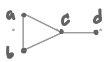


path

+ = circuit

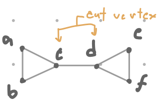


- มีvertexไหน deg =1



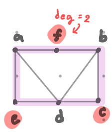
✗✗ hamilton ciruits

- ถ้ามี cut vertex

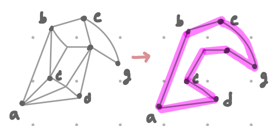


✗✗ hamilton ciruits

- vertexไหน deg = 2 แสดงว่าอยู่ใน hamilton ciruits แน่ๆ



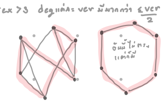
- เวลาสร้าง hamilton circuit ถ้าเลือกedgeไหนแล้ว vertex นั้นยังมีedge อีกก็ตัดทิ้งเลย



- Dirac's Theorem

If G is a simple graph with n vertices ($n\geq3$) such that the degree of every vertex in G is at least $n/2$, then G has a Hamilton circuit.

vertex ≥3 degแต่ละ ver มีมากกว่า $\frac{\Sigma ver}{2}$ มี hamiltonแน่นอน



- Ore's Theorem

If G is a simple graph with n vertices ($n\geq3$) such that $\deg(u)+\deg(v) \geq n$ for every pair of non-adjacent vertices u and v in G, then G has a Hamilton circuit.

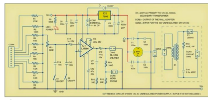
$\deg(u)+\deg(v) \geq n$ โดยที่ v, u ไม่ติดกัน

เป็น hamilton circuit ✓✓

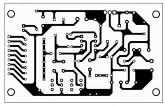
Planar Graph

การวาดกราฟลงบนระนาบโดยไม่มีเส้นเชื่อมตัดกันเลย

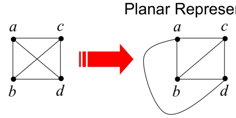
กราฟปกติ

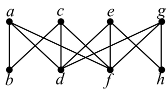


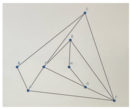
แปลงเป็น plannar



Planar Representation



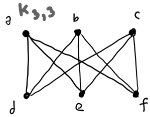




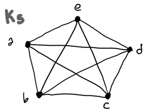
plannar representation

Not plannar

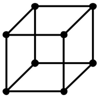
$K_{3,3}$

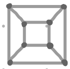


K_5



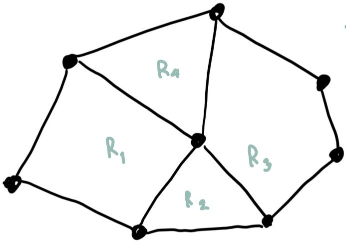
plannar representation





Q_3 Q_3

region บริเวณของกราฟที่โดนแบ่ง



R5

∴ region = 5

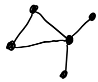
edges = 11

vertex = 8

Euler's Formular

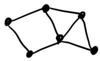
Let G be a connected planar simple graph with
e = Number of edges
v = Number of vertices
r = Number of regions in a planar representation of G.

$\boxed{r = e - v + 2}$ or $r - e + v = 2$



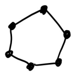
$r = 2$
$e = 5$
$v = 5$

$r - e + v = 2$



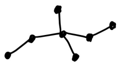
$r = 4$
$e = 8$
$v = 6$

$r - e + v = 2$



$r = 2$
$e = 6$
$v = 6$

$r - e + v = 2 - 6 + 6$
$= 2$



$r = 1$
$e = 6$
$v = 7$

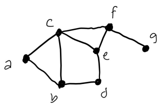
$r - e + v = 1 - 6 + 7$
$= 2$

เติมกราฟ ทำไม ไม่รู้ ~~แต่เติม~~

เพื่อพิสูจน์ euler formular

ถ้าเติม 2 วิธีนี้ยังไง euler formular ก็เป็นจริง

Simple planar connected graph G



$r = 1$
$e = 1$
$v = 2$

$r - e + v = 2$

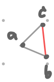
→ เติม 1 e 1 v

$r = 1$
$e = 2$
$v = 3$

$r - e + v$
$= 2$

เป็นจริง ✓✓

→ เติมแค่ 1 e

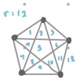


$r = 2$
$e = 3$
$v = 3$

$r - e + v = 2$
$2 - 3 + 3 = 2$
ก็ยังเป็นจริง ✓✓

If G is a connected planar simple graph with e edges and v vertices, where $v \geq 3$, then $e \leq 3v - 6$.

assume K_5



$v = 5$
$e = 10$

$r - e + v$
$= 12 - 10 + 5$
$= 7$

→ $10 \leq 3(5) - 6$

จริงไหม

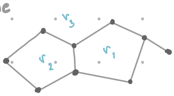
$10 \leq 9$

$=$ false

∴ K_5 ไม่เป็น plannar เพราะ $v \geq 3$ จริงแต่ $e \leq 3v - 6$ เท็จ

มาจากไหน ? มาจากนี้

assume



$r \quad e \geq \frac{3r}{2}$

มาจาก e จะถูกนับ 2 ครั้ง เวลานับ region

$\frac{2e}{3} \geq r$

euler

$r = e - v + 2$

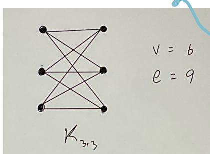
$\frac{2e}{3} \geq e - v + 2$

$0 \geq \frac{e}{3} - v + 2$

$e \leq 3v - 6$

If a connected planar simple graph has e edges and v vertices with $v \geq 3$ and no circuits of length three, then $e \leq 2v - 4$.

✓ (x) ✓



$K_{3,3}$ ไม่เป็น plannar g. พิสูจน์จากนี้

Planar Graph

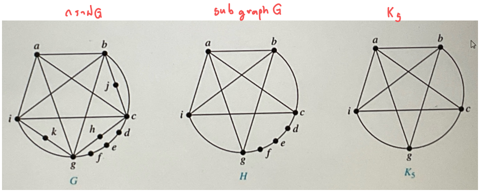
[ถ้าเป็น plannar g → $e \le 3v-6$

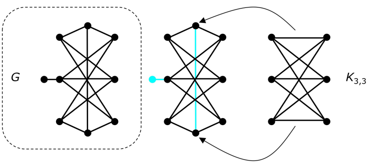
Kuratowski's Theorem

ถ้าไม่เป็น plannar g ↔ มี subgraph ที่ homeomorphic (หน้าตาคล้าย) กับ $K_{3,3}$ or K_5

→ แปล กราฟไหน subgraph หน้าตาคล้าย $K_{3,3}$ K_5 กราฟนั้นไม่ plannar

กราฟG　　sub graph G　　K_5



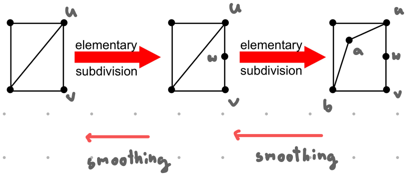


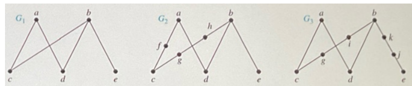
Homeomorphism

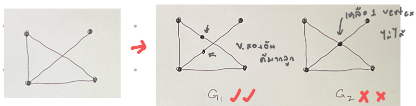
แปล, กราฟ G, H จะ homeomorphic กันถ้ามันสร้างจากกราฟเดียวกัน โดยวิธี elementar subdivisions

$G=(V,E)$ and $H=(W,F)$ are **homeomorphic** if they can be obtained from the same graph by a sequence of elementary subdivisions.

สร้าง v. ระหว่าง v. เดิมที่มี

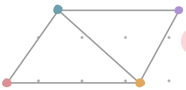




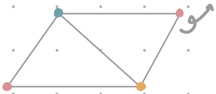


Graph Coloring

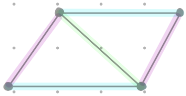
• ระบายสี vertex ที่ติดกันด้วยคนละสี แล้วใช้สีน้อยที่สุด กี่สี → Chromatic number การระบายสี edge or vertex ที่ใช้จำนวนสีน้อยสุด



3 สี



• edge ใช้วิธีเดียวกัน



find chromatic num of

C_n　vertex even　$= 2$ สี　　odd　$= 3$ สี

K_n　n

W_n　W_6

W_n = even　= odd
$= 2+1$ สี (ตรงกลาง; คือ มีรอบเหมือน c)　$= 3+1$ สี

Q_n　Q_3　001 ที่, 000 ติดคู่, 011, 101

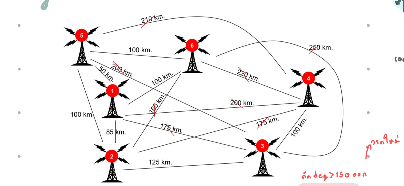
∴ สีติดได้แค่ กับคู่ (เพราะขยับทีละ 1 bits)

$= 2$ สี

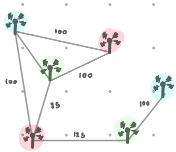
$K_{m,n}$

ใช้แค่ 2 สี

Eg. โจทย์



Two radio stations cannot use the same frequency channel when they are within 150 km. of each other. How many channels are needed?



Theorem

★ The Four Color Theorem ★

The chromatic number of a planar graph is no greater than 4.

plannar g มี k vertex ใดๆ สามารถใช้สีระบายได้ไม่เกิน 4 สี

Graph Coloring

Theorem

เหมือนๆ แค่เป็น 6 สี

The six color theorem

The chromatic number of a planar graph is no greater than 6.

$S(n)$: plannar graph with n vertices can be color using 6 color

Basis step : $S(6)$

Inductive step : $S(k) \rightarrow S(k+1)$ (เขียนอธิบายไว้นะ ถูกผิดว่าแต่เถอะ)

* หลักเวลา proof graph คือ มีอยู่ k+1 vertex +ไว้ดึงออก
เมื่อดึงออก 1 vertex (เป็น vertex พิเศษที่ดึงและทำให้ proof ได้) มันจะส่งผลให้ k เป็นจริง

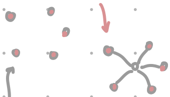
พิจารณา $S(k+1)$ ก่อน

1. $(k+1)=6$

$S(6)$

เอา vertex ที่มี deg < 6 ออก 1 อัน

ใช้แค่สีเดียว



ใช้สองสีก็ได้ หรือจะใช้ 6 เลยก็ได้

2. แต่ถ้าจะ proof แบบ ① ต้องมี 1 vertex ที่ deg < 6 ∴ ต้องพิสูจน์สิ่งนี้ด้วย

If G is a connected planar simple graph, then G has a vertex of degree not exceeding five.

contradiction proof โดยสมมุติแย้งให้แต่ละ vertex มี $deg \geq 6$

$\therefore\ 2e \geq 6v \rightarrow e \geq 3v$ —①

$e \geq 3v-6$ —②

จะได้ $3v \leq e \leq 3v-6$ ขัดแย้งกันเองนะ

∴ เป็นจริง :)

ส่งผลให้ ① เป็นจริง เย่ๆ

Tree

graph ประเภทหนึ่ง

def: connect graph ที่ไม่มี circuits

tree → connected g. no simple circuits

forest → graph ที่ไม่มี circuits but not necessarily connected

ไม่เชื่อมต่อกันทั้งหมด

undirect g. เป็น tree ก็ต่อเมื่อ มี unique path ระหว่าง 2 vertex

1 | 2

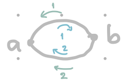
An undirected graph is a tree ↔ there is a unique path between any two of its vertices.

proof 1 → 2 , 2 → 1 → มาทำต่อเอง

contrapositive ¬2 → ¬1

มีทางเดิน > 1 ทางระหว่างคู่ vertex

∴ ทำให้เกิด circuit ผ่านคู่ vertex



∴ กราฟไม่เป็น vertex

vocab root trees

parent a is parent c

child c is child a

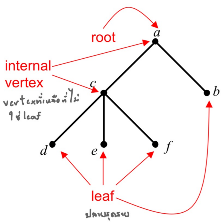
sibling c and b are sibling

บรรพบุรุษ

ancestor a is anc. ของ d,e,f

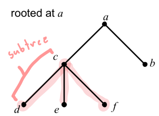
หลาน

descendant d,e,f desc. ของ a



subtree

The **subtree** with v as its root is the subgraph of the tree consisting of v and its descendants and all edges incident to these descendants.

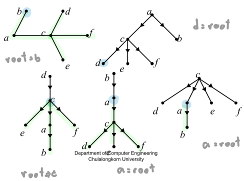


subtree ที่มี child, descendant, root เป็นลูกต่อของ root เดิม

Rooted trees

A **rooted tree** is tree in which one vertex has been designated as the root and every edge is directed away from the root.

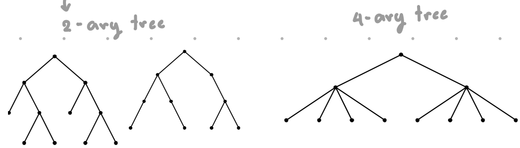
เอาvertexไหนก็ได้เป็นroot แล้วvertexที่มีedgeพุ่งออกจากrootจะกลายเป็น member root tree นั้น



m-ary tree

rooted tree ที่แต่ละ vertex มีลูกไม่เกิน m ตัว

An *m*-ary tree is a **rooted tree** whose every internal vertex has no more than *m* children



Full m-ary tree ⌐ ทุก vertex มีลูกครบ m vertex พอดี ไม่ขาดไม่เกิน

Full 5 ary tree 21 v ~

properties of tree

tree = plannar, region = 1

A tree with n vertices has n-1 edges.

A full m-ary tree with i internal vertices contains $n = mi+1$ vertices.

{ child, descendant   root

full m-ary

A full m-ary tree with
 (i) n vertices has $i = (n-1)/m$ internal vertices and $l = [(m-1)n+1]/m$ leaves,
 (ii) i internal vertices has $n = mi + 1$ vertices and $l = (m-1)i + 1$ leaves,
 (iii) l leaves has $n = (ml-1)/(m-1)$ vertices and $i = (l-1)/(m-1)$ internal vertices.

Q.1

A full 4-ary tree has 13 vertices. How many leaves are there?

$4i+1 = 13$

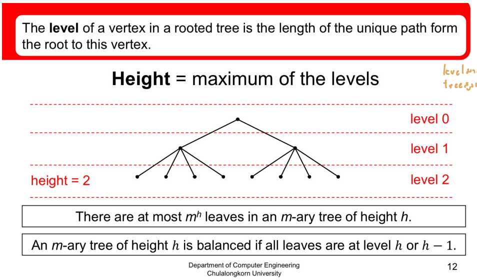
$\therefore i = \frac{(13-1)}{4}$

$i = 3$

$l = 13 - 3 = 10$

Tree

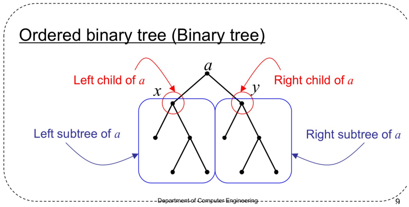
Level and Height



level มากสุดเท่าไหร่ tree สูงเท่านั้น

Ordered rooted trees

อย่าไปสลับสลับด้านเพราะ tree มี order จาก ซ้าย → ขวา



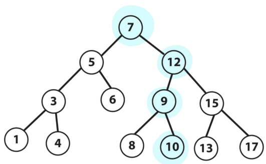
Applications tree

binary search trees

เก็บค่าไว้ใน vertex เรียก : key

key ต้องมีค่ามากกว่า key left vertex, sub tree

key ต้องมีค่าน้อยกว่า key right vertex, sub tree

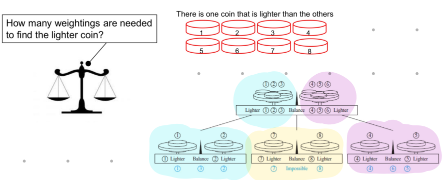


สมมุติหา 10

7 → 12 → 9 → 10

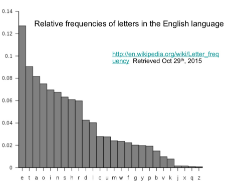
10 มากกว่าหรือน้อยกว่า
มากไปขวา
น้อยไปซ้าย

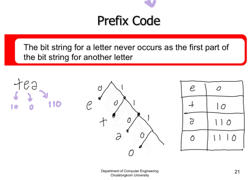
Decision trees



Character encoding : Prefix code

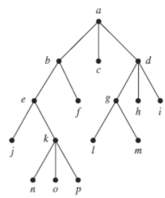
อันไหนถูกใช้บ่อยให้ใช้ bits น้อย เรียกใช้น้อย
ให้ใช้ bits เยอะๆ





Tree traversal

ไปหาทุก vertex อย่างเป็นระบบ 🥰🥰🥰🥰



- post order traversal (j n o p k e f b c l m g h i d a)
  ตัวหลัง
  ∴ แต่ละ vertex จะโดนดึงมาทีหลังจากลูกตัวเองโดน ดึงข้อมูลไปหมดแล้ว เรียงจากซ้าย → ขวา
- pre order traversal (a b e j k n o p f c d g l m h i)
  อ่านตัวเองก่อนค่อยไปลูกๆ หมดลูกก็ไปพี่น้องต่อจนถึงไป จนกว่าจะตัวสุดท้าย เรียงซ้าย → ขวา
- in order traversal (j e n k o p b f a c l g m d h i)
  เอาลูกซ้ายมาให้หมด ค่อยอ่านตนเอง

application tree traversal

- Postfix Calculator

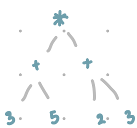
ลองทำ (3+5)×(2+3) ใช้ tree 🥰🥰🥰🥰 ใช้ทำไมอ้ดดอก

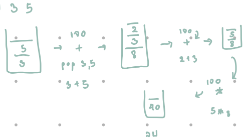
แปลง 3 5 + 2 3 + *

operand
operator

stack

3 5





1. Find the number of edges of K_{10}

- [ ] 40
- [x] 45
- [ ] 50
- [ ] 55

$\frac{10!}{2!(10-2)!} = \frac{\cancel{10}^{5} \cdot 9 \cdot \cancel{8!}}{2(\cancel{8!})}$

$= 45$

---

2. Find the number of edges of Q_5

- [ ] 12
- [ ] 32
- [x] 80
- [ ] 160

$2^5 \cdot 5 = 2e$

$\frac{\cancel{32}^{16} \cdot 5}{\cancel{2}_1} = e$

$e = 80$

---

3. Find the number of maximum edges of a bipartite graph with 30 vertices.

- [ ] 30
- [ ] 135
- [x] 225
- [x] 435

$W_{30} = 2 \cdot 30 \quad V = 30$

$= 60$

$Q_{30} = 2^{30} \cdot 30 = 2e$

$2^{30} \cdot 15 =$

$\frac{30!}{2!(28!)}$

$= \frac{\cancel{30}^{15} \cdot 29}{\cancel{2}_1}$

$= 435$

---

4. Determine whether the following sentences are true or false respectively.

$1.$ Adjacency matrix is always symmetric. X

$2.$ Sum of each row in the adjacency matrix is equal to number of edges incident to that vertex.

- [ ] True, True
- [ ] True, False
- [x] False, True
- [x] False, False

$e \cdot 2$

$\frac{100 \cdot 99}{2} = \frac{9900}{2}$

---

5. Determine whether the following sentences are true or false respectively.

$1.$ The total degree of K_{100} is 9900. ✓

$2.$ Every simple graph with 31 vertices and 431 edges is a conected graph. ?

- [x] True, True
- [x] True, False
- [ ] False, True
- [ ] False, False

---

6. What is the maximum number of edges that can be removed from W_{10} and keep the graph connected?

- [ ] 9
- [x] 10
- [ ] 11
- [ ] 12

??

---

7. Let G be a connected simple graph with 100 edges.

What is the minimum and maximum number of vertices that G can have?

- [x] 15, 101
- [ ] 15, 100
- [ ] 14, 101
- [ ] 14, 100

$2(100) = \Sigma \deg(v)$

9

---

8. Count the number of paths with a length of 4 that connect a pair of vertices in K_5.

- [ ] 50
- [x] 51
- [ ] 99
- [ ] 100

---

9. If the number of subgraphs of $K_{6,6}$ that are isomorphic with Q_3 is $\binom{6}{n}\binom{6}{n}m!$.

Find n.

- [ ] 1
- [ ] 3
- [x] 4
- [ ] 6

---

10. If the number of subgraphs of $K_{6,6}$ that are isomorphic with Q_3 is $\binom{6}{n}\binom{6}{n}m!$.

Find m.

- [ ] 2
- [x] 4
- [ ] 6
- [ ] 8

---

11. Find the length of the longest simple path in K_6.

- [ ] 6
- [ ] 12
- [x] 13
- [ ] 15

---

12. Find the length of the longest simple path in C_7.

- [ ] 4
- [ ] 5
- [ ] 6
- [x] 7

---

13. Find the length of the longest simple path in Q_7.

- [ ] 259
- [ ] 322
- [x] 385
- [ ] 448

---

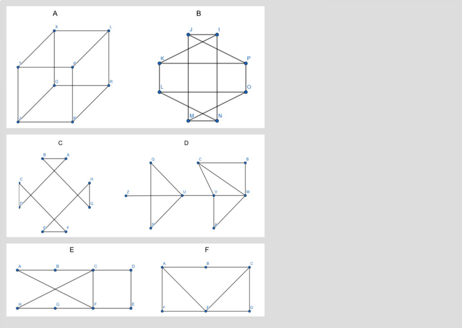
14. Find the length of the longest simple path in W_8.

- [ ] 8
- [ ] 9
- [ ] 10
- [x] 13

---

15. Find the length of the longest simple path in $K_{5,5}$.

- [ ] 10
- [ ] 11
- [ ] 20
- [x] 21



1. which one is isomorphic
- [x] A, B
- [ ] A, C
- [ ] B, C
- [ ] B, D

2. which one have cut edge
- [ ] A
- [x] D
- [ ] E
- [ ] F

3. from answer in Question number 2 how many cut edge the answer have
- [ ] 0
- [ ] 1
- [x] 2
- [ ] 3

4.

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

from this adjacency matrix find the number of path length 2 between vertex A and C
- [ ] 0
- [x] 1
- [ ] 2
- [ ] 5

5. from graph A which one is not a circuit
- [ ] X, L, R, O, X
- [ ] T, X, O, R, L, X, T
- [x] O, R, L, P, K, R
- [ ] O, J, K, R, L, P, T, X, O

6. which graph have euler circuit
- [ ] D, E
- [ ] D, F
- [x] C, E
- [ ] A, C

6. which graph have euler circuit
- [ ] D, E
- [ ] D, F
- [x] C, E
- [ ] A, C

7. which image have euler path but dont have euler circuit
- [ ] A, C
- [x] D, F
- [ ] E, B
- [ ] None of the above

8. from the following graph and path, which one is not a hamilton path
- [ ] graph C / (A, B, G, H, E, F, C, D)
- [x] graph D / (Z, U, V, A, W, B, C)
- [ ] graph E / (A, B, C, D, E, F, G, H)
- [ ] graph F / (F, E, A, B, C, D)

9. which graph **does not** have hamilton Circuit
- [ ] A
- [ ] C
- [x] D
- [ ] F

Graph Exercise Part III

- This test/quiz can be taken many times.
- Correct answers will NOT be revealed after submission.

undefined

1 *Find the maximum integer n such that K_n is a planar graph*

- [ ] 3
- [x] 4
- [ ] 5
- [ ] 6

2 *Find the maximum $m+n$ such that m, n are integer and $K_{m,n}$ is a planar graph*

- [ ] 10
- [ ] 20
- [ ] 5
- [x] m+n is unbounded

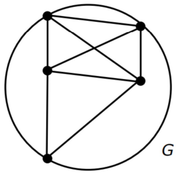
3 *If a simple graph G has 2 connected components find the formula of r, e, v*

- [ ] r = e−v+1
- [ ] r = e−v+2
- [x] r = e−v+3
- [ ] r = e−v+4

4 *Which one of the following Graph is a planar graph*

- [ ] Q7
- [ ] K5
- [ ] K3,3
- [x] C100

5



Is Graph G a planar graph ?

- [ ] Yes
- [x] No

6 *Which one has the maximum chromatic number ?*

- [ ] Q2023
- [ ] C2023
- [x] W2023
- [ ] K2023,2023

7 *Can we remove any 1 edges from K_6 to turn it into a planar graph ?*

- [ ] Yes
- [x] No

8 *For any simple connected graph G which has a vertex of degree less than 6 then G is pl*

- [ ] True
- [x] False

9 *Which one has the different chromatic number from another ?*

A.

B.

C.

D.

- [ ] A
- [ ] B
- [ ] C
- [x] D

10 *Is there any Graph G which is a tree and contain a circuit ?*

- [ ] Yes
- [x] No

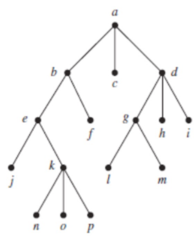
11 *How many leaves are there in the full $4-ary$ with 17 vertices ?*

- [x] 13
- [ ] 12
- [ ] 14
- [ ] 10

12 *What is the highest height of a full $4-ary$ tree with 13 vertices ?*

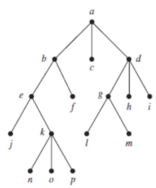
- [ ] 2
- [ ] 4
- [x] 3
- [ ] 5

13 *Find this tree's inorder tranversal sequence*



- [x] j,e,n,k,o,p,b,f,a,c,i,g,m,d,h,i
- [ ] a,b,e,j,k,n,o,p,f,c,d,g,l,m,h,i
- [ ] j,n,o,p,k,e,f,b,c,l,m,g,h,i,d,a
- [ ] a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l,m,n,o,p

14 *Find this tree's preorder tranversal sequence*



- [ ] j,e,n,k,o,p,b,f,a,c,i,g,m,d,h,i
- [x] a,b,e,j,k,n,o,p,f,c,d,g,l,m,h,i
- [ ] j,n,o,p,k,e,f,b,c,l,m,g,h,i,d,a
- [ ] a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l,m,n,o,p