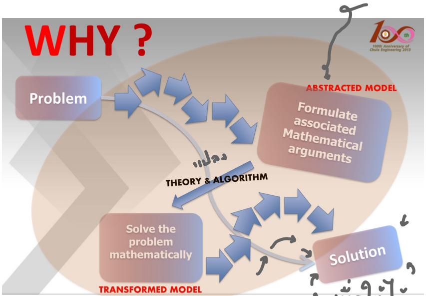
discrete → แปลงปัญหาให้เป็นคณิตศาสตร์ได้

Logic & reasoning

1.พยายามหา



แปลง

2.ทำให้เป็น

3. เพื่อให้ได้

e.g. ซื้อปากกามา 20แท่ง แท่งละ8 บาท ขายแท่ง 10 บาท กี่แท่งถึงจะไม่ขาดทุน

ทุน=(20·8)160 บาท → ต้องขาย $\frac{(20\cdot 8)}{10}$ = 16 แท่ง

สมการ $10x = 20\cdot 8$

$x = 16$

ดังนั้นการให้เหตุผลแบบอุปนัยไม่จำเป็นต้องถูกเสมอ

- 1. จำนวนข้อมูล หลักฐานหรือข้อเท็จจริงที่นำมาเป็นข้อสังเกตหรือข้ออ้างมีมากพอกับการสรุปความหรือไม่
  - เช่น ถ้าไปทานส้มตำที่ร้านอาหารแห่งหนึ่งแล้วท้องเสีย แล้วสรุปว่า ส้มตำนั้นทำให้ท้องเสีย
  - การสรุปเหตุการณ์นั้นอาจเกิดขึ้นเพียงครั้งเดียว ย่อมเชื่อถือได้น้อยกว่าการที่ไปรับประทานส้มตำบ่อยๆ แล้วท้องเสียเกือบทุกครั้ง
- 2. ข้อมูล หลักฐานหรือข้อเท็จจริง เป็นตัวแทนที่ดีในการให้ข้อสรุปหรือไม่
  - เช่น ถ้าอยากรู้ว่าคนไทยชอบกินข้าวเจ้าหรือข้าวเหนียวมากกว่ากัน ถ้าถามจากคนที่อาศัยอยู่ในภาคเหนือหรือภาค-อีสาน คำตอบที่ตอบว่าชอบกินข้าวเหนียวอาจจะมีมากกว่าชอบกินข้าวจ้าว
  - แต่ถ้าถามคนที่อาศัยอยู่ในภาคกลางหรือภาคใต้ คำตอบอาจจะเป็นในลักษณะตรงกันข้าม

เจอ AI, data mind.

Inductive Reasoning

สรุป จาก การสังเกต
conclusion from observations / สรุปจากการทดลองหลายๆครั้ง

↳ อุปนัยทางคณิตศาสตร์

หน้า 13 Mathematical induction

VS

Deductive Reasoning

correction of assumptions

เจอใน discrete

หาความจริงจากความจริง, ความรู้ที่มีอยู่แล้ว เพื่อนำไปสู่ข้อสรุป

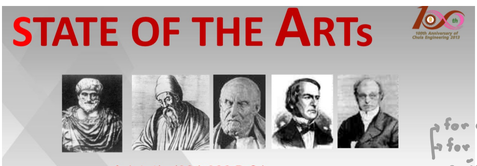
เหตุ	1. สัตว์เลี้ยงทุกตัวเป็นสัตว์ไม่ดุร้าย
	2. แมวทุกตัวเป็นสัตว์เลี้ยง
ผล	แมวทุกตัวเป็นสัตว์ไม่ดุร้าย

VS

Analogical Reasoning

compares similarities between new and understood concepts

การให้เหตุผลจากการเปรียบเทียบ
ขาว-ดำ, พระอาทิตย์-พระจันทร์ etc.



Aristotle (384-322 B.C.) SYLLOGISTIC REASONING → สมบัติการถ่ายทอด คนต้องตาย คนไทยทุกคนเป็นคน คนไทยทุกคนต้องตาย

→ for all x → sth ...
→ for some x ≠ sth ...

inductive v. Euclid of Alexandria (325-265 B.C.) DEDUCTIVE REASONING

Chrysippus of Soli (279-206 B.C.) MODAL LOGIC อธิบายการให้เหตุผลมนุษย์โดยมีเวลาเป็นข้อเกี่ยวข้อง (ตามสภาพแวดล้อมของระบบนั้นในที่นี้ใช้เวลา, ความเร็ว etc.) อุณหภูมิ

George Boole (1815-1864 A.D.) PROPOSITIONAL LOGIC มี operator

Augustus De Morgan (1806-1871 A.D.) DE MORGAN's LAWs ล้ำ อะไรนู๋แต่ล้ำ

ตรรกศาสตร์ที่ว่าด้วยการทดสอบประโยคหรือเนื้อหา

Propositional logic

ได้แค่บอกเล่า ไปแดกข้าวมะ ✗
วันนี้กูกินข้าว ✓

นิพจน์
- หาค่าความจริงได้
✗ คำถาม

def. A **proposition** is declarative statement that is either true or false **(not both)**

Vocab

Determine กำหนด

OPERATORS

และ	Negation (not)	¬	¬p
หรือ	Conjunction (and)	∧	
-	Disjunction (or)	∨	
ถ้า..แล้ว	Exclusive or (Xor)	⊕	
ก็ต่อเมื่อ	Implication	→	
	Bicondition	↔	

T F

F T

both true = T

both false = F

ต้องต่างกัน TT = F FF = F

¬

p	$\neg p$
T	F
F	T

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

p	q	$p \oplus q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

p	q	$p \to q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

General Compound proposition

1. Do in ( ) first!
2.

Operator	Precedence
¬	1
∧	2
∨	3
→	4
↔	5

3. if ศักดิ์เท่ากันทำ left → right

¬q r

Example (**Rosen**):
You cannot ride the rollercoaster if you are under 4 feet tall unless you are older than 16 years old.

s

เป็นผล condition

$\neg q \to (r \wedge \neg s)$

↳ ใช้ตอน s = F เท่านั้น

$(r \wedge \neg s) \to \neg q$

$\neg(\neg r \vee s) \to \neg q$

q

Example :
A statement S is a proposition if the truth value of S is either true or false but not both.

r s

$[(r \vee s) \wedge (\neg(r \wedge s))] \to q$

$[(r \wedge \neg s) \vee (\neg r \wedge s)] \to q$

ค่าความจริง same same

อะไรวะ

$p \to q \equiv \neg p \vee q$

Vocab

Contrapositive มีประโยชน์กับ implication only

$p \to q \;=\; \neg q \to \neg p$ ค่าความจริงไม่เปลี่ยนทั้งหมด

Conditional: If A, then B Contrapositive: If not B, then not A

Conditional: If it's raining, then the grass is wet.
Contrapositive: If the grass isn't wet, then it's not raining.

ค่าความจริงเปลี่ยนและแต่ตอนท้ายเหมือนกัน

converse of an implication $p \to q$ is $q \to p$ สลับเลยๆ

converse, in logic, the proposition resulting from an interchange of subject and predicate with each other

the converse of "No man is a pencil" is "No pencil is a man."

Only if q only if p เท่านั้น
$\neg p \to \neg q$

E.g. ถ้าจะเก็บ A discrete คะแนนต้อง 95% ขึ้นเท่านั้น
คือ 95% ได้ A ไหมไม่รู้
แต่ถ้าได้ A คือมากกว่า 95 ชัวร์

inverse of an implication $p \to q$ is $\neg p \to \neg q$

Only if I studied more would have a chance of passing.
MEANING: Studying more would be the only way for me to pass.

p I studied more.
q I would have a chance of passing.

q only if p ≡ ¬p → ¬q
≡ q → p.

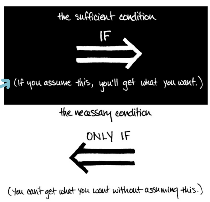
NECESSARY CONDITION

necessary condition จำเป็นต้องใช้ มีเงื่อนไขในการสรุป

Who said food keeps us alive? Tom died a few days ago and he was not short of good food.

$\neg p \to \neg q$

sufficient condition $p \to q$ สรุปได้เลย



Vocab(ต่อ)

Valid argument

มักมี 1 conclu / valid argu

ถาม hypotheses — ตอบ conclution

An argument is valid means that if all hypotheses are true, the conclusion is also true.

① ถ้า hypotheses ทั้งหมดเป็นจริง conclution ต้องเป็นจริงด้วย → ② เอา $(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \dots p_n) \to q$ เป็นจริง => VALID ARGUMENT

In a valid argument, if is not possible that the conclusion is false when the premises are true. Or, in other words: In a valid argument, whenever the premises are true, the conclusion also has to be true.

Example

Given an argument $p \vee (q \vee r)$; $\neg r$; $\therefore p \vee q$

p	q	r	$q \vee r$	$p \vee (q \vee r)$	$\neg r$	$p \vee q$
T	T	T	T	T	F	T
T	T	F	T	T	T	T
T	F	T	T	T	F	T
T	F	F	F	T	T	T
F	T	T	T	T	F	T
F	T	F	T	T	T	T
F	F	T	T	T	F	F
F	F	F	F	F	T	F

Example VALID

Given an argument $p \vee (q \vee r)$; $\neg r$; $\therefore p \vee q$

p	q	r	$q \vee r$	$p \vee (q \vee r)$	$\neg r$	$p \vee q$
T	T	T	T	T	F	T
T	T	F	T	T	T	T
T	F	T	T	T	F	T
T	F	F	F	T	T	T
F	T	T	T	T	F	T
F	T	F	T	T	T	T
F	F					
F	F					

TRUE

$(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \dots \wedge p_n) \to q$

[Ex.]

วิธีพิสูจน์

Consistency

p	q	r	$p \to \neg q$	$q \to r$	$\neg r \to \neg p$
T	F	T	T	T	T

- Whenever the system is being upgraded, users cannot access the file system. $p \to \neg q$
- If users can access the file system, they can save new files. $q \to r$
- If users cannot save new files, the system is not being upgraded. $\neg r \to \neg p$

EXAMPLE

p	q	r	$p \to \neg q$	$q \to r$	$\neg r \to \neg p$
T	T	T	F	T	T
T	T	F	F	F	F
T	F	T	T	T	T
T	F	F	T	T	F
F	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	T
F	F	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T

สัจนิรันดร์

tautology — จริงตลอด

contradiction — เท็จตลอด

contingency — จริงบ้างเท็จบ้าง

Logical equivalent

The propositions p and q are called "**logical equivalent**" ($p \equiv q$) if $p \leftrightarrow q$ is a tautology

แต่ $p \neq q$ ก็ได้

p, q ต้องเป็นจริงคู่

1. Construct truth table

Logical Equivalences

Showing Logically Equivalent propositions

- Example (Rosen):

Show that $p \to q \equiv \neg p \vee q$

p	q	$p \to q$	$\neg p$	$\neg p \vee q$
T	T	T	F	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

Logically Equivalent

Two or more propositions are consistent if and only if there is at least one row in which they are all true. Otherwise, they are inconsistent.

+ consistent

Two or more propositions are logically consistent if it is possible for them to all be true at the same time. If there is no way for them all to be true at once, they are inconsistent. Inconsistent propositions are said to contradict one another.

Examples

The three propositions (A ⊃ B), (A ∨ B), and ~A are *consistent*, because there is a row in which all three are true:

A	B	(A ⊃ B)	(A ∨ B)	~A
0	0	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	1	0
1	1	1	1	0

The two propositions (A • B) and (~A ∨ ~B) are *inconsistent*, because there is no row in which both are true:

A	B	(A • B)	(~A ∨ ~B)
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

e.g.

2. Use series of established equivalences.

Show that $\neg(p \vee (\neg p \wedge q))$ and $(\neg p \wedge \neg q)$ are logically equivalent.

Proof: $\neg(p \vee (\neg p \wedge q))$
$\equiv \neg p \wedge \neg(\neg p \wedge q)$ — By the De Morgan law
$\equiv \neg p \wedge (\neg\neg p \vee \neg q)$ — By the De Morgan law
$\equiv \neg p \wedge (p \vee \neg q)$ — By the Double negation law
$\equiv (\neg p \wedge p) \vee (\neg p \wedge \neg q)$ — By the distributive law
$\equiv F \vee (\neg p \wedge \neg q)$ — By the negation law
$\equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee F$ — By the commutative law
$\equiv (\neg p \wedge \neg q)$ — By the identity law

Q.E.D.

Commutative laws
$p \wedge q \equiv q \wedge p$
$p \vee q \equiv q \vee p$

Associative laws
$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$
$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$

Distributive laws
$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r$

Identity laws
$p \wedge T \equiv p$
$p \vee F \equiv p$

Absorption laws
$p \vee (p \wedge q) \equiv p$
$p \wedge (p \vee q) \equiv p$

Domination laws (Universal bound laws)
$p \vee T \equiv T$
$p \wedge F \equiv F$

Idempotent laws
$p \wedge p \equiv p$
$p \vee p \equiv p$

Negation laws
$p \vee \neg p \equiv T$
$p \wedge \neg p \equiv F$

Double negation law
$\neg(\neg p) \equiv p$

Show $(p \wedge q) \to (p \vee q)$ is a tautology.

Proof: $(p \wedge q) \to (p \vee q)$
$\equiv \neg(p \wedge q) \vee (p \vee q)$ — Since $(x \to y) \equiv (\neg x \vee y)$
$\equiv \neg p \vee \neg q \vee (p \vee q)$ — By the De Morgan law
$\equiv (\neg p \vee p) \vee (\neg q \vee q)$ — By the associative law; By the commutative law
$\equiv T \vee T$ — By the negative law
$\equiv T$ — By the domination law

Q.E.D.

Predicate logic

≈ propositional ที่แต่ละประพจน์แบ่งเป็นส่วน

- predicate ภาคแสดง
- argument ตัวแปร

นักเรียนทุกคนไปรร. ⇒ ไปรร. (นักเรียนทุกคน)

$P(x)$

ต้องแทนค่า x ถึงจะระบุค่าความจริงได้

Quantifier

- Universal $\forall x P(x)$ for all (x)
  - $P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge P(x_3) \wedge \dots P(x_n)$
- Existential $\exists x P(x)$ for some (x)
  - $P(x_1) \vee P(x_2) \vee P(x_3) \vee \dots P(x_n)$

Unique existential $\exists! x P(x)$

Example (Rosen):

What is the truth value of $\forall x P(x^2 \geq x)$, when the universe of discourse consists of:

1) all real numbers?
2) all integers?

Since $x^2 \geq x$ only when $x \leq 0$ or $x \geq 1$, $\forall x P(x^2 \geq x)$ is false if the universe consists of all real numbers. However, it is true when the universe consists of only the integers.

E.g.

All lions are fierce. $\forall x\,(P(x) \rightarrow Q(x))$

Some lions do not drink coffee. $\exists x\,(P(x) \wedge \neg R(x))$

∴ Some fierce creatures do not drink coffee. $\exists x\,(Q(x) \wedge \neg R(x))$

P(x) x is lion.
Q(x) x is fierce.
R(x) x drinks coffee.

$\forall x\,(P(x) \rightarrow Q(x))$
$\exists x\,(P(x) \wedge \neg R(x))$
$\therefore \exists x\,(Q(x) \wedge \neg R(x))$

Precedence of quantifiers

✿ Quantifiers ($\forall, \exists$) ลำดับสำคัญกว่าทุกตัว ✿

E.g. $\forall x P(x) \vee Q(x)$

คือ $(\forall x P(x)) \vee Q(x)$

Negating quantified expressions

$\neg \forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$

กลายเป็น some

$\neg P(x)$

ก็คือแตกเข้าทั้งก้อน

$\neg \exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x)$

E.g. show $P(1)$

$\forall_{k \geq 1} (P(k) \rightarrow P(k+1))$

conclusion : $\forall_n P(n)$

$\left[\left[P(1) \wedge (\forall_{k \geq 1} (P(k) \rightarrow P(k+1))\right] \rightarrow \forall k P(k)\right] \equiv T$

---

consider a statement $\forall x\,(P(x) \rightarrow Q(x))$

contraposition

$\forall x\,(\neg Q(x) \rightarrow \neg P(x))$

inverse

$\forall x\,(\neg P(x) \rightarrow \neg Q(x))$

converse

$\forall x\,(Q(x) \rightarrow P(x))$

การเขียนแบบหลากหลายรูปแบบ

$\forall x P(x) \wedge \exists y Q(y)$
$\forall x \exists y\,(P(x) \wedge Q(y))$
$\exists y \forall x\,(P(x) \wedge Q(y))$

$\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$
$\forall x \forall y\,(P(x) \wedge Q(y))$

Rules of inference

→ P เป็น T P∨Q จะ T

- **Disjunctive addition**
- Conjunctive simplification → P∧Q อยู่ด้วง Poonได้เลย
- Conjunction addition → P เป็น T Q เป็น T P∧Q เป็น T
- Modus ponens
- Modus tollens
- Hypothetical syllogism → P→Q Q→R ∴ P→R
- Disjunctive syllogism → P∨Q เป็นจริง ¬P ∴ Q จริง
- Resolution → P∨Q จริง ¬P∨R ∴ Q∨R เป็นจริงแน่ๆจู้!
- Dilemma

Modus ponens:
P → Q เป็นจริง
P เป็นจริง
∴ Q จริง

Modus tollens:
P→Q จริง
¬Q เท็จ
∴ ¬P เท็จ

Dilemma:
P∨Q
P→R
Q→R
∴ R

เอามาใช้ต่อ

Universal modus ponens (4)

Consider a statement $\forall x\,(P(x) \rightarrow Q(x))$.

For a particular e,

P(e) is true, → สรุปจากข้อ 4

therefore Q(e) is true.

modus tollens

Consider a statement $\forall x\,(P(x) \rightarrow Q(x))$.

For a particular e,

$\neg Q(e)$ is true,

therefore $\neg P(e)$ is true.

Universal instantiation

$\forall x P(x)$ $\therefore P(c)$ if $c \in U$. เป็นจริงหมด

Universal generalization

$P(c)$ for an arbitrary $c \in U$ $\therefore \forall x P(x)$

Existential instantiation

$\exists x P(x)$ $\therefore$ $P(c)$ for some element $c \in U$ ต้องพิสูจน์ว่า P(c) จริงไหม

Existential generalization

$P(c)$ for some element $c \in U$ $\therefore \exists x P(x)$

มี c ซักตัวจริง include ได้เลย

Example (Rosen Ex. 6, P.67)

propositional

แยกโจทย์ข้อมูลไม่ต้องแจกแจงเพิ่มเติม คิดถึงเศร น.ร.ทุกคนต้องไปรร.ไว้

จงแสดงว่าสมมติฐานต่อไปนี้

- บ่ายวันนี้อากาศไม่แจ่มใสและหนาวกว่าเมื่อวาน $\neg p \wedge q$
- เราจะไปว่ายน้ำเมื่ออากาศแจ่มใสเท่านั้น $\neg p \to \neg r$ (only if)
- ถ้าเราไม่ไปว่ายน้ำเราจะไปพายเรือ $\neg r \to s$
- ถ้าเราไปพายเรือแล้วเราจะถึงบ้านก่อนพระอาทิตย์ตกดิน $s \to t$

สรุปได้ว่า

- เราจะถึงบ้านก่อนพระอาทิตย์ตกดิน $\therefore t$

1. $\neg p \wedge q$
2. $\neg p \to \neg r$
3. $\neg r \to s$
4. $s \to t$

$\therefore t$

trick ทำย้อนกลับดู สรุปให้ได้ว่า t เป็นจริง

	ขั้นตอน	เหตุผล
1.	$\neg p \wedge q$	สิ่งกำหนดให้
2.	$\neg p$	simplification (1)
3.	$\neg p \to \neg r$	สิ่งที่กำหนดให้
4.	$\neg r$	m.p 2 และ 3
5.	$\neg r \to s$	โจทย์ให้ 3
6.	s	M.P 4,5
7.	$s \to t$	โจทย์ให้ 4
8.	t	M.P 6,7

Q.E.D

การลดรูป (Simplification)

- จากวงจร Logic Gates ที่ผ่านมาเราพบว่าวงจรที่ใช้ Logic Gate ทำงาน ถือเป็นการออกแบบ
- หากออกแบบได้ดีก็ใช้ Gates น้อย ทำให้ลดต้นทุนและประหยัดพลังงาน
- หากออกแบบไม่ดี จะใช้ Gates จำนวนมาก
- มีเทคนิคที่สามารถช่วยในการออกแบบให้ใช้ Gates ได้น้อยที่สุด

M.P = modus ponens

Set

vocab
∈ (epsilon)
เป็นสมาชิก

กลุ่มของ object ที่สัมพันธ์กันแบบ unordered (ไม่มีอันดับ)

cardinality = จำนวนสมาชิก

An empty set denote by ∅ (null set)

สมบัติของ set ที่เราใช้

1. ความเท่ากันของเซต — เซตเทียบเท่ากัน คือ เซตที่ member เท่ากัน (คนละอันกันนะ!)

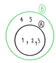
$\forall x (x \in A \leftrightarrow x \in B)$ ก็คือ สมาชิกทุกตัวเหมือนกันเป๊ะๆ!

2. สับเซต (subset ⊂) • ทุกสมาชิกในสับเซตต้องเป็นสมาชิกของเซตที่มันเป็น $A \subset B$

- B = {1,2,3} A = {1,2} สรุป A ⊂ B
- B = {1,2,3} C = {1,4} สรุป C ⊄ B

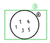
theorem • ∅ เป็น subset ของทุกเซต • ทุกเซตเป็น subset ของตัวมันเอง

proper subset สับเซตแท้



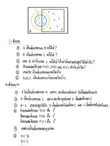
ขนาดไม่ใช่รูปร่าง แต่เป็นจำนวนสมาชิก

จะเห็นว่า เซต A มีขนาดเล็กกว่าเซต B และสมาชิกทุกตัวของ A อยู่ในเซต B สรุปได้ว่า A เป็นสับเซตแท้ของ B



จะเห็นว่า เซต A มีขนาดเท่ากับเซต B
สมาชิกทุกตัวใน A อยู่ใน B
สมาชิกทุกตัวใน B อยู่ใน A
ดังนั้น A เป็นสับเซตไม่แท้ของ B
และ B เป็นสับเซตไม่แท้ของ A เช่นกัน.

สับเซตแท้ : ให้ A และ B เป็นเซตที่ A ⊂ B ถ้าจำนวนสมาชิก(หรือขนาด)ของ A ไม่เท่ากับจำนวนสมาชิกของ B จะได้ว่า A เป็นสับเซตแท้ของเซต B สับเซตไม่แท้ : ให้ A และ B เป็นเซตที่ A ⊂ B ถ้าจำนวนสมาชิก(หรือขนาด)ของ A เท่ากับจำนวนสมาชิกของ B จะได้ว่า A ไม่เป็นสับเซตแท้ สามารถเขียนแทนด้วย A⊆B **"จำง่ายๆคือ สับเซตไม่แท้ เซตสองเซตจะเท่ากัน (A = B)"**



เหตุผลพิสูจน์ A ⊆ B

SET
George Cantor (1845-1918)

Subset

Showing that A is a subset of B

To show that A ⊆ B, show that if x belongs to A then x is also belongs to B.

Showing that A is not a subset of B

To show that A ⊄ B, find a single x ∈ A such that x ∉ B.

3. cardinality จำนวนสมาชิก

ถ้า set is finite set (จำนวนสมาชิกจำกัด) จะระบุ cardinality ได้ but it's infinite can't define (สมาชิกไม่จำกัด)

- **เพาเวอร์เซต (POWERSET)** P(A) คือเซตเป็นไปได้ทั้งหมดที่เป็นสมาชิกของเซต A
  - A = {1, 2} P(A) = { ∅, {1}, {2}, {1,2} } = จำนวนคือ 2^n
  - B = {1,2,3} $2^3 = 8$
  - P(B) = {∅,{1},{2},{3},{1,2},{1,3},{2,3},{1,2,3}}

2^n

2. power set เซตของ subset ที่เป็นไปได้ทั้งหมด

$A = \{1,2\}$ $P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$

$\therefore n = 2$ $P(A) = 2^n = 4$

4. cartesian product

$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$

การบรรยายเซต

E.g.

$\forall x \in \mathbb{R} \, (x^2 \geq 0)$ for real x, $x^2 \geq 0$

$\exists n \in \mathbb{Z} \, (n^2 = 49)$ for some I n, $n^2 = 49$

$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2x + 5 > 30\}$

$\mathbb{R} = \{x \mid x \text{ is real number}\}$

EXERCISE

Let U be the universe described by
U = { x | 1000 ≤ x ≤ 9999}.
Let A_i be the set of all numbers in U such that the i^{th} position is i.

Find the cardinality of the union of A_1, A_2, A_3 and A_4

?

- คือ เซตของคู่ลำดับ (a, b) ทั้งหมดที่ a∈A และ b∈B
- โดย A×B = { (a, b) | a∈A และ b∈B }
  - A = {1,2,3} B = {x, y}
  - A×B =

$A \times B = \{(1,x), (2,x), (3,x), (1,y), (2,y), (3,y)\}$

EXERCISE

Let S be the set of all x that x does not contain x.
S = { x | x ∉ x }
Note that x is also a set.

$S = \{x \mid x \notin x\}$? $S \in S$ ไหม

ถ้า $S \in S$ เกิดอะไรขึ้น $\therefore S \notin S$

เกิดขึ้นไม่ได้

T → F ✗

$\therefore S \notin S$ มีสมบัติเป็นสมาชิกไหม แต่มันเกิดขึ้นไม่ได้

$\therefore$ เซต S ไม่มีจริง

ตัวอย่างการพิสูจน์เซต

- 4. จากข้อ 3 จงพิสูจน์ว่า B ⊄ A

A = { 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, ... } B = { 2, 4, 6, 8 , ... }

- B = { 2j | j ∈ {1,2,3,...} } ดังนั้น B = { 2, 4, 6, 8, 10, ... }
- A = { 2^i | i ∈ {1,2,3,...} } ดังนั้น A = { 2, 4, 8, 16, 32, ... }
- วิเคราะห์ B ⊂ A คือ ทุกอย่างใน B ต้องอยู่ใน A ถ้ามีเพียงกรณีเดียวที่ B ไม่อยู่ใน A แสดงว่า B ⊄ A
- พิจารณาจากเซตแล้วพบว่า สมาชิกของเซต B คือ 6 ซึ่งไม่เป็นสมาชิกของเซต A
- สรุป B ⊄ A

set operator

union รวมกัน

intersection เอาแค่ตัวที่ซ้ำ

different เป็นสมาชิกใน A ไม่เป็นสมาชิกใน B (เอาตัวซ้ำออก)

disjoint set $A \cap B = \emptyset$

Complement เซตของอะไรก็ได้ที่ไม่อยู่ใน A
$U - A$

Powerset

มีเซตให้ n เซต เลือกมา 2 เซต
$A_1 \cap A_2 = \emptyset$ ไม่ว่าจะคู่ไหนก็ตาม
(เซตทุกเซตสมาชิกไม่เหมือนกันเลย)

Pairwise disjoint

เหมือนกัน แต่จาก หยิบมา 2 เซต อาจเป็น 3 เซต 4 เซต ++

Mutually disjoint

Partition

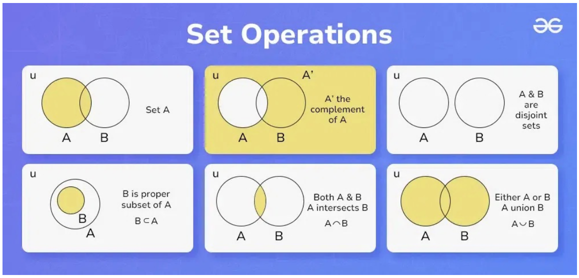
Let A be a set
Let $A_1, A_2, \dots, A_n$ be subset of A

(1) $\forall i \neq j \, (A_i \cap A_j \neq \emptyset)$

A_i pairwise disjoint

(2) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A$

$\therefore A_i$ partition of A



จำไว้จ้า

SET

Theorem Given sets A,B and C.

Commutative laws:	$A \cap B = B \cap A$	$A \cup B = B \cup A$
Associative laws:	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	
Distributive laws:	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	
Idempotent laws:	$A \cap U = A$	$A \cup U = U$
De Morgan's laws:	$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$	$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
Alternative representation for set difference	$A - B = A \cap B^c$	
Absorption laws:	$A \cup (A \cap B) = A$	$(A \cup B) \cap A = A$

e.g.

$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

$A = B \quad \forall x \, (x \in A \leftrightarrow x \in B)$

if and only if

$p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$

show

$\forall x \big((x \in A \to x \in B) \wedge (x \in B \to x \in A) \big)$

พิสูจน์ 1. $\forall x \, (x \in \overline{A \cup B} \to x \in \bar{A} \cap \bar{B})$

พิสูจน์ 1) $\forall x \, (x \in \overline{A \cup B} \to x \in \bar{A} \cap \bar{B})$

Assume $\forall x \;\; x \in \overline{A \cup B}$

$\therefore x \notin A \cup B$ (by def of complement)

$\therefore x \notin A \wedge x \notin B$ (by def of union)

$\therefore x \in \bar{A} \wedge x \in \bar{B}$ (by def of complement)

$\therefore x \in \bar{A} \cap \bar{B}$ (by def of intersection)

$\therefore \overline{A \cup B} \subseteq \bar{A} \cap \bar{B}$ ✓

2) $\forall x \, (x \in \bar{A} \cap \bar{B} \to x \in \overline{A \cup B})$

⋮

$\therefore \bar{A} \cap \bar{B} \subseteq \overline{A \cup B}$ ✓

$\therefore \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ Q.E.D.

E.g.

SET

Question: Prove that $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

Proof: $(A \cup B)^C = \{x \mid x \notin (A \cup B)\}$	Definition of complement
$= \{x \mid \neg(x \in (A \cup B))\}$	Does not belong symbol
$= \{x \mid \neg(x \in A \vee x \in B)\}$	Definition of union
$= \{x \mid \neg(x \in A) \wedge \neg(x \in B)\}$	De Morgan's law
$= \{x \mid x \notin A \wedge x \notin B\}$	Does not belong symbol
$= \{x \mid x \in A^C \wedge x \in B^C\}$	Definition of complement
$= \{x \mid x \in (A^C \cap B^C)\}$	Definition of intersection
$= A^C \cap B^C$	Meaning of builder notation

Q.E.D.

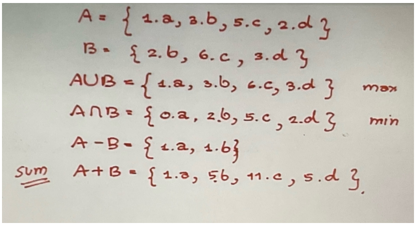
Multiset

บรรยายเซตที่มีสมาชิกซ้ำกันแล้วเรานับจำนวนตัวที่ซ้ำ ≈ fuzzy logic

$\{m_1 a_1, m_2 a_2, \ldots, m_i a_i\}$

m_i คือ multiplicitities ของ elements a_i

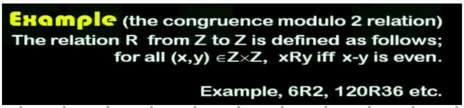
operator: union, intersection, different, sum

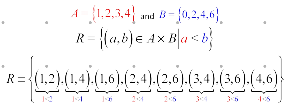


Relation

binary relation

be subset ของ cartesian product $A \times B$



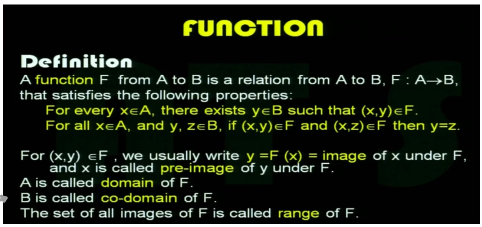


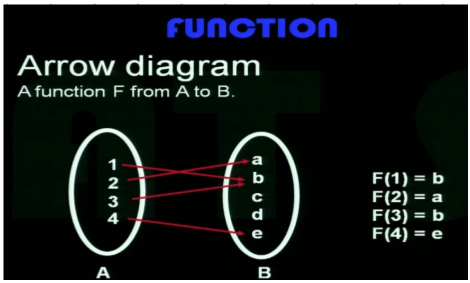
function

be subset ของ cartesian product $A \times B$ แต่มีข้อกำหนดว่า

ทุก $x \in A$ ต้องมี $y \in B$ เสมอ $(x,y) \in F$

range →





composition of functions

f and g

denote by $f \circ g$

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$

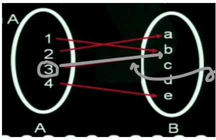
function

injection function (or one-to-one)

if A to B is injective for all x and y in A

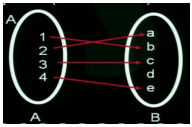
F(x) = F(y) then x = y   แล้วถ้า x ≠ y image ก็จะไม่เท่า

(F(x) ≠ F(y))



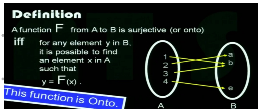
ไม่ 1 to 1 ดังนั้น
ไม่เป็น injection

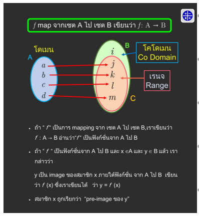
✓✓ อันนี้เป็น



subjective function (or onto)

ทุกสมาชิกใน co-domain ต้องมี pre image เสมอ





bijective function (or bijection)

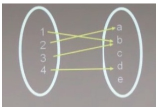
1 ต่อ 1 อันต้องหมดพอดีกัน

bijective fuction

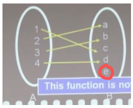
E.g. A = { 0, 1, 2, 3, ... }

B = { 0, 2, 4, 6, ... }

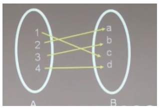
B ⊊ A |A| = |B|



x one to one
x onto



x onto



✓✓✓

⌊ ⌋ floor fuction and Ceiling function ⌈ ⌉

จำนวนเต็มค่ามากสุด   จน.เต็มค่าน้อยสุด

$\lfloor\ \rfloor : \mathbb{R} \to \mathbb{Z} \quad \forall r \in \mathbb{R}\ \exists!_n \in \mathbb{Z}\ (\lfloor r \rfloor = n)$

สัญลักษณ์	ความหมาย
$\mathbb{N}$	จำนวนนับ
$\mathbb{Z}$	จำนวนเต็ม
$\mathbb{Q}$	จำนวนตรรกยะ
$\mathbb{R}$	จำนวนจริง
$\mathbb{C}$	จำนวนเชิงซ้อน

n = จน.เต็มที่มากที่สุดที่มีค่าไม่เกิน r $n \le r$

Ex. $\lfloor 2.5 \rfloor$

$\{ \underset{n}{2}, \underbrace{1, 0, -1, \dots}_{s} \}$

$s \le r \to n \ge s$

$\lfloor r \rfloor = n$ iff 1) $n \le r$
$\wedge$
2) $\forall s \in \mathbb{Z}\ (s \le r \to n \ge s)$

iff = if and only if

$$(\forall_r \in \mathbb{R}\ \exists!_n \in \mathbb{Z}\ (\lfloor r \rfloor = n)\ \text{iff}\ (n \le r) \wedge (\forall_s \in \mathbb{Z}\ (s \le r \to s \le n)))$$

$$(\forall_r \in \mathbb{R}\ \exists!_m \in \mathbb{Z}\ (\lceil r \rceil = m) \leftrightarrow (m \ge r) \wedge (\forall_s \in \mathbb{Z}\ (s \ge r \to s \ge m)))$$

0.25   -0.75

Let f(x)=(x−1)/4. Determine the value of ⌊f(2)⌋ and ⌈f(−2)⌉

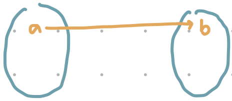
0 and 0

function

สมบัติ

1. ทุกสมาชิกในdomain มี image
2. แต่ละตัวมี image ได้ตัวเดียว

$F: A \to B$ / $F: a \mapsto b$



A
domain

B
co domain

$F \subseteq A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$

$a \in A$ $\quad F(a) = b$? $\quad b \in B$

b : image of a

a : pre image of b

$F(A)$ = Range of $F \subseteq B$

Addition / Multiplication | Composition

$F_1: A \to B$

$F_2: A \to B$

$(f_1 + f_2)(a)$; $a \in A$

$= f_1(a) + f_2(a)$

$(f_1 f_2)(a)$

$= f_1(a) \cdot f_2(a)$

$f: B \mapsto C$

$g: A \mapsto B$

$(f \circ g): A \mapsto C$

$A \overset{g}{\longmapsto} B \overset{f}{\longmapsto} C$

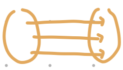
$f(g(x)) \in C$

$x \in A$

Inverse of function

$f: A \to B$; $f^{-1}: B \to A$

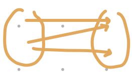
one to one
1-1 :



given f : 1-1 but not onto

f^{-1} เป็น function ไหม? ไม่!

onto :



given f : onto but not 1-1

f^{-1} เป็น function ไหม? ไม่!

พิสูจน์ว่าคิดอินเวอร์สถูกไหม

$(f^{-1} \circ f)(x) = (x)$

f^{-1} จะเป็น f ต่อเมื่อ เป็น 1-1 + onto

E.g. $f_1, f_2: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f_1(x) = x^2 - 5$ $\quad (f_1 + f_2)(x) = x^2 + x + 3$

$f_2(x) = x + 8$ $\quad (f_1 f_2)(x) = x^3 + 8x^2 - 5x - 40$

$(f_1 \circ f_2)(x) = f_1(f_2(x))$

$= (x+2)^2 - 5$

f_1^{-1} $\quad y = x^2 - 5$

$x^2 = y + 5$

$x = \pm\sqrt{y+5}$

$f_1^{-1}(x) = \pm\sqrt{y+5}$ ไม่ใช่ฟังก์ชันแต่ถูก

$f_2^{-1}(x) = x - 8$

$y = x - 8$

$x = 8 - y$

$f(x) = 8 - y$

properties

กันทางกันปลายทาง เป็นเซตเดียวกัน

definition: Let R be a binary reltion on A.

มีสมบัติครบ 3 ข้อ "equivalece relation"

1. R is reflextive iff for all $x \in A$, xRx

   ทุกสมาชิกใน A ต้องมีคสพ.กับตัวมันเอง

2. R is symmetric iff for all $x, y \in A$

   if xRy then yRx

3. R is transitive iff for all $x, y, z \in A$

   if xRy and yRz then xRz

E.g. $A = \{a, b, c\}$

$R_1 = \{(a,a), (a,b), (a,c)\}$

✗ reflexive เพราะไม่มี (b,b)

✗ symmetric " (b,a), (c,a)

✓ transitive

E.g. 2

$\mathbb{Z}$ = integer

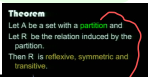
$R : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

$\forall a, b \in \mathbb{Z} \ (aRb \leftrightarrow a \% n = b \% n)$

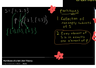
for a constant n Let $n = 5$

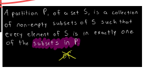
Equivalece relation มันทำไมๆ พิเศษไง?

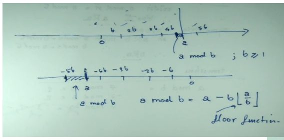
★ set partition

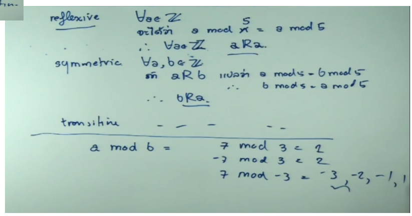


ถ้ามีเซตอยู่เซต 1 มีคสพ. อยู่ในเซตนั้น สมาชิกใดในเซตมีคสพ.กัน









ต่อ e.g. consider $a \equiv b \pmod 5$ on $\mathbb{Z}$

partition of $\mathbb{Z}$

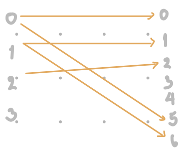
คสพ. consequence modulo n

$a \equiv b \pmod n$

Let $A_i \subseteq \mathbb{Z}$; $i \geq 0$

$A_i := \{a \in \mathbb{Z} \mid a \equiv i \pmod 5\}$

show $\mathbb{Z} = \bigcup_{\text{all } i} A_i$; $A_i \cap A_j = \emptyset$ ($i \neq j$; $i \not\equiv j \pmod 5$)



(0,0) (0,5) (0,10) ...

(5,0) ✓

(1,1) (1,6) ...

reflextive ✓✓

symmetive ✓✓

transitive ✓✓

$A_0 = \{0, 5, -5, 10, -10, \ldots\}$

$A_1 = \{1, -4, 6, -9, \ldots\}$

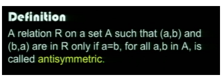
A_2 =

A_3 =

A_4 =

$A_5 = \{0, 5, -5, \ldots\}$

Antisymmetric



A มีคสพ R โดย คสพ.นี้มี ทั้งคู่อันดับ (a,b) และ (b,a) มีทางเดียวคือ a = b เท่านั้น เรียก Antisymmetric

a,b คู่อันดับใดๆก็ได้

E.g. $A = \{1, 2, 3\}$ $R_1 = \{(1,1), (1,3), (2,3)\}$

(a,b), (b,a) only if $a = b$

ไม่ต้องย

$a \neq b \to (a,b) \wedge (b,a)$

แปล ถ้า $a \neq b$ จะมี (a,b) ∧ (b,a) ไม่ได้

$R_2 = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$

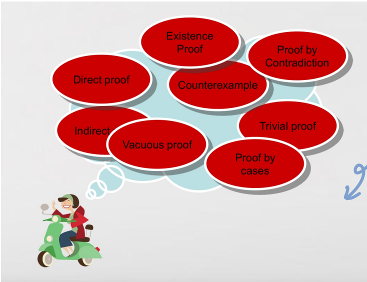
symmetric ✓

antisymmetric ✓

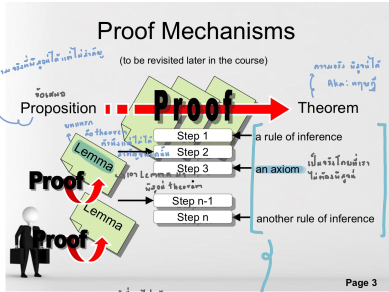
$R_3 = \{(1,1), (2,3), (3,2)\}$ sym ✓

Antsy ✗

Methods of Proving



ชื่อเทคนิควิธีพิสูจน์



ความจริงที่พิสูจน์ได้แต่ไม่สำคัญ

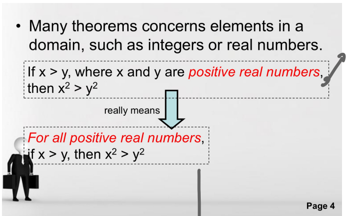
ข้อเสนอ

ความจริง พิสูจน์ได้ Aka: ทฤษฎี

เป็นจริงโดยที่เราไม่ต้องพิสูจน์

(ความจริงที่เอาไปใช้) ถ้าเอา Lemma ต่อไปได้เอา theorem or proposition

sequence ลำดับ



ถึงพวก ℝ Z ฯลฯ แบบนั้นพิสูจน์ไม่ได้ ต้องเปลี่ยนเป็น ∀ ∃ พวะ

$\forall x,y \in \mathbb{R}^+ \, (P(x,y) \to Q(x,y))$

where $P(x,y) : x<y$

$Q(x,y) : x^2<y^2$

Proof : Assume $P(x,y)$ Show $Q(x,y)$

คำโจทย์เขียนแสดงว่าจะสมมุติอะไร เพื่อหาอะไร

Proof : Assume $P(x,y)$ $(\equiv T)$ Show $Q(x,y)$

$\forall x,y \in \mathbb{R}^+$, Let $x<y$

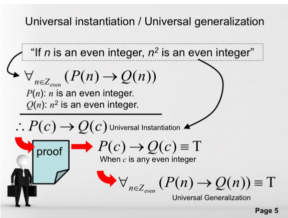
$x \cdot x < x \cdot y$

$x \cdot y < y \cdot y$

$x \cdot x < y \cdot y$

$x^2 < y^2$

$\therefore Q(x,y)$ Q.E.D.

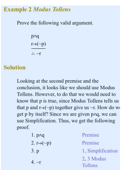


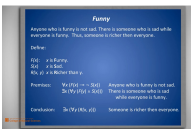
start with implication (p→q)

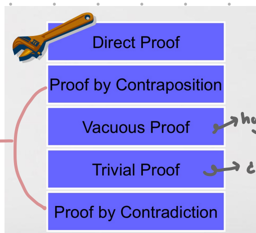
นาทีที่ 20:00 • โจทย์มักมาแบบ implication กับ ∀

• premiss proptensis คืออะไร?

• แยกระหว่าง premises กับ







indirect proof

ไม่ได้ตรงไปตรงมาขนาดนั้น

hypotheses เป็นเท็จตลอดกาล

conclution จริงตลอดกาล

start with

implication ($p \to q$)

Direct proof and Contraposition

Direct Proof	Show that if **p** is true, **q** must be true.
Proof by Contraposition	$p \to q \equiv \neg q \to \neg p$ Show that if **¬q** is true, **¬p** must be true.
Vacuous Proof	
Trivial Proof	
Proof by Contradiction	

same as

Contrapositive มีประโยคนั้น implication only

$p \to q = \neg q \to \neg p$ ค่าความจริงไม่เปลี่ยนทั้งหมด

Conditional: If A, then B Contrapositive: If not B, then not A

Conditional: If it's raining, then the grass is wet.
Contrapositive: If the grass isn't wet, then it's not raining.

E.g. 1 Show that "if n is an odd integer, n^2 is an odd integer."

$\forall n \in \text{Odd}$

ใช้ for all ได้เพราะมี condition ที่คุม

$\forall n \in \mathbb{Z} \; (P(n) \to Q(n))$

เขียนเป็นภาษาหลัก

$P(n)$: n is ood $\equiv \exists k \in \mathbb{Z} \, (n = 2k+1)$

$Q(n)$: n^2 is ood $\equiv \exists m \, \mathbb{Z} \, (n^2 = 2m+1)$

assume $\exists k \in \mathbb{Z} \;\; n = 2k+1$

show $\exists m \in \mathbb{Z} \;\; n^2 = 2m+1$

$n = 2k+1$

$n^2 = (2k+1)^2$

$n^2 = 4k^2 + 4k + 1$

$= 2(2k^2 + 2k) + 1$

$n^2 = 2m+1$ where $m = 2k^2 + 2k$

$m \in \mathbb{Z}$

Q.E.D.

E.g. 2 show that If n^2 is an integer and n^2 is odd, then n is odd.

$\forall n \in \mathbb{Z} \; (P(n) \to Q(n))$

$P(n)$: n^2 is ood $\equiv \exists k \in \mathbb{Z} \, (n^2 = 2k+1)$

$Q(n)$: n is ood $\equiv \exists m \in \mathbb{Z} \, (n^2 = 2m+1)$

assume $\exists k \in \mathbb{Z} \;\; n^2 = 2k+1$

show $\exists m \in \mathbb{Z} \;\; n = 2m+1$

$n^2 = 2k+1$

⋮

$n = 2m+1$

ติดข้างเพราะ $\sqrt{k}$ มันอาจจะ $\notin \mathbb{Z}$

จึงต้องใช้ contraposition :) $p \to q \equiv \neg q \to \neg p$

Proof by contraposition

$\forall n \in \mathbb{Z} \; (\neg Q(n) \to \neg P(n))$

E.g. 3

Prove that if $n = ab$, where a and b are positive integers, then $a \le \sqrt{n}$ or $b \le \sqrt{n}$

Proof : $\forall n \in \mathbb{Z}^+ \; (P(n) \to Q(n))$

$P(n) : \exists a, b \in \mathbb{Z}^+ \;\; n = ab$

$Q(n) : \exists a, b \in \mathbb{Z}^+ \;\; a \le \sqrt{n}$ or $b \le \sqrt{n}$

* เราไม่มีทางรู้ได้ว่า a, b นั้นเป็นตัวเดียวกัน

∴ ถ้าจะใช้ตัวแปรเดียวกันต้องดึงตัวแปรออกมาข้างนอก

$\forall n \in \mathbb{Z}^+ \; \exists a, b \in \mathbb{Z}^+ \; (P(n,a,b) \to Q(n,a,b))$

$P(n,a,b)$ $n = ab$

$Q(n,a,b)$: $a \le \sqrt{n}$ or $b \le \sqrt{n}$

* พิสูจน์ได้ไหม? ก็ได้แต่มันยาก

∴ มาใช้ contraposition

ปกติ	นิเสธ
$P(n,a,b)$ $n = ab$	$\neg P(n,a,b)$ $n \ne (ab)$
$Q(n,a,b)$: $a \le \sqrt{n}$ or $b \le \sqrt{n}$	$\neg Q(n,a,b)$ $a > \sqrt{n}$ and $\neg b > n$

$P(n,a,b) \to Q(n,a,b)$

contraposition $\neg Q(n,a,b) \to \neg P(n,a,b)$

Proof : By contraposition technique,

$\forall n \in \mathbb{Z}^+ \; \exists a, b \in \mathbb{Z}^+ \; ((a > \sqrt{n} \wedge b > \sqrt{n}) \to (n \ne ab))$

∴ Assume $a > \sqrt{n}$ and $b > \sqrt{n}$

show $n \ne ab$

$a > \sqrt{n}$

$a \cdot b > \sqrt{n} \cdot \sqrt{n}$

$a \cdot b > n$

$ab \ne n$ Q.E.D.

E.g. 4

The real number r is rational if there exist integers p and q with q≠0 such that r = p/q

Example (Rosen Ex.6 p.79):
Prove that the sum of two rational numbers is rational.

$\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ CHULA ENGINEERING

$\forall n, m \in \mathbb{Z} \; ((P(n) \wedge P(m)) \longrightarrow Q(m,n))$

$P(x)$: $\exists p, q \in \mathbb{Z} \; (q \ne 0 \wedge x = p/q)$

$Q(m,n)$: $\exists p, q \in \mathbb{Z} \; (q \ne 0 \wedge (n+m) = p/q)$

implication (p→q)

Vacuous Proof , Trivial Proof

Proving p→q

- Direct Proof
- Proof by Contraposition
- Vacuous Proof — Show that **p** is false. So, **p→q** is always true.
- Trivial Proof — Show that **q** is true. So, **p→q** is always true.
- Proof by Contradiction

Used in *Math Induction*

$P(n)$: If $n > 1$, then $n^2 > n$

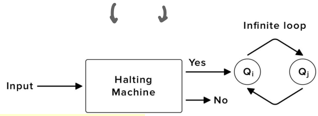
show $P(0)$: true

$P(0)$ $\quad 0 > 1 \to 0^2 > 0$ (F, F)

$P(0)$: true

Example (Rosen Ex.6 p.79)
$P(n)$ = "If a and b are positive integers with $a \ge b$, then $a^n \ge b^n$"
Show that $P(0)$ is true.

halting problem
( )



Vacuous Proof

- If p is false, then $p \to q$ is true regardless of the value of q.
- Thus, if p is false, then $p \to q$ is true trivially.
- A vacuous proof is a proof of a statement of the form $p \to q$ which shows that p is false.
- **Example:** Prove that if 1+1=1, then I am the Pope.
- **Proof:** Since $1+1 \neq 1$, the premise is false. Therefore the statement "if 1+1=1, then I am the Pope" is true.

Vocab finite case เซตที่จำกัด

nonfinite case ไม่-- " --

Proof by Contradiction

*การพิสูจน์ที่นำไปสู่สิ่งที่เป็นไปไม่ได้

Show $P \equiv T$

Assume $\neg P \equiv T$ — ส่วนนี้เกิดการ assume ขึ้นมา

⋮

$\neg P \equiv F$

จนได้ $\neg P \to F \equiv T$

x ที่ $\to F \equiv T$ มีแค่ F

$\therefore \neg P \equiv F$ สุดท้ายได้ $P \equiv T$

และ P ไม่มีทาง false ได้

Proof by Contradiction

การบอกว่า ¬S เป็นเท็จเสมอ ก็คือการบอกว่า S เป็นจริงเสมอ

- Proof by Contradiction
  - Suppose we want to prove a statement s
  - Start by assuming $\neg s$ is true.
  - Show that $\neg s$ implies a contradiction. ($\neg s \to F$)
  - Then, $\neg s$ must be false (or s must be true).

Page 15

- Proof by Contradiction
  - Start by assuming $\neg(p \to q)$ is true.
  - That means $p \wedge \neg q$ is true.
    (since $\neg(p \to q) \equiv \neg(\neg p \vee q) \equiv p \wedge \neg q$)
  - Show that $p \wedge \neg q$ is a contradiction
  - Then, $\neg(p \to q)$ must be false
    (or $(p \to q)$ must be true).

E.g.1. Show that at least 10 of any 64 days chosen must fall on the same day of the week

proof: let d_i = n days fall day i $(1 \le 7)$ — วันที่-อาทิตย์

$\sum_{all} d_i = 64$ — พิสูจน์แบบ direct ได้ยากมาก

show $\exists d_i (d_i \ge 10)$ — ทำให้เป็นเท็จ

By contradiction technique

Assume $\neg(\exists d_i (d_i \ge 10))$

$\equiv \forall d_i (d_i \le 9)$

$\therefore \sum_{all} d_i \le 7 \times 9 = 63$

$\therefore \sum_{all} d_i \le 63$

$\therefore$ contradiction

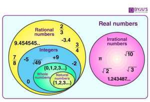
$(\sum_{all} d_i = 64 \wedge \sum_{all} \le 63)$

ขัดแย้งกัน

ประพจน์สมมูลกัน

- สมบัติการสลับที่
  p ∧ q ≡ q ∧ p
  p ∨ q ≡ q ∨ p
  p ↔ q ≡ q ↔ p
- สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม
  p ∧ (q ∧ r) ≡ (p ∧ q) ∧ r ≡ p ∧ q ∧ r
  p ∨ (q ∨ r) ≡ (p ∨ q) ∨ r ≡ p ∨ q ∨ r
  p ↔ (q ↔ r) ≡ (p ↔ q) ↔ r ≡ p ↔ q ↔ r
- สมบัติการแจกแจง
  p ∧ (q ∨ r) ≡ (p ∧ q) ∨ (p ∧ r)
  p ∨ (q ∧ r) ≡ (p ∨ q) ∧ (p ∨ r)
  p → (q ∨ r) ≡ (p → q) ∨ (p → r)
  p → (q ∧ r) ≡ (p → q) ∧ (p → r)
  (p ∨ q) → r ≡ (p → r) ∧ (p → r)
  (p ∧ q) → r ≡ (p → r) ∨ (p → r)
- สมบัติของ ถ้า...แล้ว (→)
  p → q ≡ ~q → ~p ≡ ~p ∨ q
- สมบัติของ ก็ต่อเมื่อ (↔)
  p ↔ q ≡ (p → q) ∧ (q → p)
- สมบัติของ นิเสธ (~)
  ~(~p) ≡ p
  ~(p ∧ q) ≡ ~p ∨ ~q
  ~(p ∨ q) ≡ ~p ∧ ~q
  ~(p → q) ≡ p ∧ ~q
  ~(p ↔ q) ≡ ~p ↔ q ≡ p ↔ ~q

TUENONG



ให้พิสูจน์ว่า อตรรกยะ × ตรรกยะ = อตรรกยะ

1. Prove or disprove that the product of irrational (อตรรกยะ) and rational (ตรรกยะ) numbers is irrational.

ข้อนี้หา rational num except 0 — concept

$\frac{a}{b} \cdot x = \frac{c}{d}$

$x = \frac{cb}{ad}$

กลายเป็นอตรรกยะ

มาทำต่อ #หน้าที่ 25

E.g.2
- Example: Prove that "If n is an integer and n^3+5 is odd, then n is even". Using a proof by contradiction.

$\forall n \in \mathbb{Z}\,(\exists m \in \mathbb{Z}\,(n^3+5 = \underbrace{2m+1}_{odd}) \to \exists p \in \mathbb{Z}\,(\underbrace{n=2p}_{even}))$

Assume $\neg(\forall n \in \mathbb{Z}\,(\exists m \in \mathbb{Z}\,(n^3+5 = 2m+1) \to \exists p \in \mathbb{Z}\,(n=2p)))$

$\exists n \in \mathbb{Z}\,(\exists m \in \mathbb{Z}\,(n^3+5 = 2m+1) \wedge \forall p \in \mathbb{Z}\,(\underbrace{n \neq 2p}_{n\text{ไม่เป็นเลขคู่}}))$

- สมบัติของ นิเสธ (~)
  ~(~p) ≡ p
  ~(p ∧ q) ≡ ~p ∨ ~q
  ~(p ∨ q) ≡ ~p ∧ ~q
  ~(p → q) ≡ p ∧ ~q
  ~(p ↔ q) ≡ ~p ↔ q ≡ p ↔ ~q

⋮

$\exists p \in \mathbb{Z} \quad n = 2p+1$

⋮

$n^3+5 = 2(\quad)$

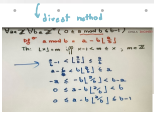
$\mathbb{Z}$ ให้เป็นเลขคู่ให้ได้

⋮

$\equiv F$ Q.E.D

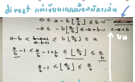
3. Show that if a is an integer and b is a positive integer, then $0 \le a \bmod b \le b-1$.

direct method



direct แต่เขียนแบบมือสมัครเล่น

backword reasoning

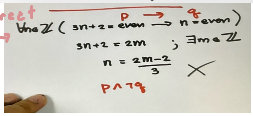


เวลาพิสูจน์ จากล่าง บน

ไม่รู้ว่าจะเริ่มไง ให้เริ่มจากข้อเท็จจริง ไปยังความจริงเสมอ aka แถ

2. Prove that if n is an integer and $3n + 2$ is even, then n is even.

direct



contradiction

Assume $\neg(\forall n \in \mathbb{Z}\,(\exists k \in \mathbb{Z}\,(3n+2=2k) \to \exists p \in \mathbb{Z}\,(n=2p)))$

$\exists n \in \mathbb{Z}\,(\exists k \in \mathbb{Z}\,(3n+2=2k) \to \forall p \in \mathbb{Z}\,(n \neq 2p))$

ยังคู่อยู่ → กลายเป็นเลขคี่

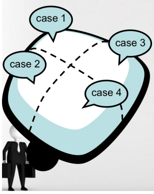
เป็นไปไม่ได้ = F

$\neg(p \to q) \equiv F \quad \therefore (p \to q) \equiv T$

base on implication

proof by Cases

$A = CASE1 \cup CASE2 \cup CASE3 \cup CASE4$



$\forall_{n \in CASE1}(P(n) \to Q(n))$

$\forall_{n \in CASE2}(P(n) \to Q(n))$

$\forall_{n \in CASE3}(P(n) \to Q(n))$

$\forall_{n \in CASE4}(P(n) \to Q(n))$

$\forall_{n \in A}(P(n) \to Q(n))$

key word : 49:00

- Example:
  Show that |xy| = |x||y|, where x and y are real numbers.

$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad |xy| = |x||y|$

note $|x| = \begin{cases} -x & ; x < 0 \\ x & ; x \geq 0 \end{cases}$

proof. proof by case

1. $x \geq 0 \wedge y \geq 0$
2. $x \geq 0 \wedge y < 0$
3. $x < 0 \wedge y < 0$
4. $x < 0 \wedge y \geq 0$

รวมถึงด้านหมดด้วย

พิสูจน์แค่ for all ($\forall$)

- Since (p↔q) ↔ (p→q) ∧ (q→p), then *prove both p→q and q→p*
- Equivalent propositions ($p_1 \leftrightarrow p_2 \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow p_n$) are proven by *proving $p_1 \to p_2$, $p_2 \to p_3$, …, $p_n \to p_1$*

if and only if iff ต้องพิสูจน์ว่าเป็นจริงทั้งคู่

If And Only If Statements

$P \leftrightarrow Q \equiv (P \to Q) \wedge (Q \to P)$

วนกลับไปที่เดิมเพราะ implication มัน มีสมบัติการถ่ายทอด

proof of proposition involving quantifiers

- Existence proofs A proof $\exists x P(x)$ step 1.
  - Constructive existen proof ชี้ให้เห็นเลยว่ามี!
    – Find an element *c* such that P(*c*) is true.
  - Non-Constructive existen proof พิสูจน์แบบอ้อมๆ
    – Do not find an element *c* such that P(*c*) is true, but use some other ways.

E.g. 1 Show that ∃x ∃y (x^y is rational.) where x and y are irrational.

proof $\exists x \exists y \, (x^y = \text{ratinal})$; x, y = irratinal

consider $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$

case 1 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ = rational

$x = \sqrt{2} \wedge y = \sqrt{2}$

case 2 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ = irrational

$(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 2$; rational

$x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}} \wedge y = \sqrt{2}$

ต้องมีซักเคสเป็นจริง ไม่เท็จคู่ และจริงคู่

ไม่ได้พิสูจน์เพื่อบอกข้อไหนเป็นจริง แต่พิสูจน์เพื่อบอกว่ามีเงไหนที่เป็นจริงแน่นอน ส่งผลให้

เป็นจริงแน่นอน

some แบบ uniqueness มีเพียงตัวเดียว และต้องหาให้เจอ

- Uniqueness proofs

พิสูจน์ 2 ขั้น 1. Existence : show that $\exists x P(x)$

2. Uniqueness: show that if $y \neq x$; $P(y)$ is false.

same as

$\exists x (P(x) \wedge \forall y (y \neq x \to \neg P(y)))$

E.g. 1

Example:
Show every integer has a unique additive inverse. (If p is an integer, there exists a unique integer q such that p+q = 0.)

Proof $\forall p \in \mathbb{Z} \; \exists q \in \mathbb{Z} \; (p+q=0)$

we have to show that

1) $\forall p \in \mathbb{Z} \; \exists q \in \mathbb{Z} \quad p+q=0$

Let $q = -p \quad \therefore \quad p+q = p+(-p) = 0$

2) $\exists q_1, q_2 \in \mathbb{Z} \; (q_1 \neq q_2) \wedge (p+q_1=0) \wedge (p+q_2=0)$

By contradiction.

$p+q_1 = 0 = p+q_2$

$q_1 = q_2$ contradicts with $q_1 \neq q_2$

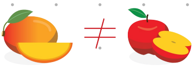
Q.E.D.

- Counterexamples

show that $\forall x P(x)$ is false

If a food is a fruit, then it is an Apple → Statement

Condition Conclusion



Condition is true but conclusion is false.
Mango is a counter example.
Mango is a fruit but not an Apple.

- Example:
  "Every positive integer is the sum of the squares of three integers" ?

$\forall n \in \mathbb{Z} \; \exists a,b,c \in \mathbb{Z} \; (n = a^2+b^2+c^2) \equiv F$

ใส่นิเสธ $\exists n \in \mathbb{Z} \; \forall a,b,c \in \mathbb{Z} \; (n \neq a^2+b^2+c^2)$

Let n = ...

$a, b, c \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

$\forall n \geq b\ (P(n))$
for all n ที่ ≥ b ต้องการพิสูจน์ว่า P(n) เป็นจริง

การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

Mathematical Induction

Use in $\mathbb{Z}^+$

เป็นวิธีที่สร้างมาแบบ recursive เลยใช้ claim ได้ว่า หากมีอย่างใดจริง อย่างอื่นก็จะจริงด้วย

A proof by induction that *P(n)* is true for every **positive integer** *n* consists of 2 steps:

BASIS STEP: Show that *P(1)* is true.

INDUCTIVE STEP:
Show that *P(k)→P(k+1)* is true for every positive integer *k*

Sometimes we want to prove that *P(n)* is true for *n = b, b+1, b+2, …* where *b* is an integer other than 1.

BASIS STEP: Show that *P(b)* is true.

INDUCTIVE STEP:
Show that *P(k)→P(k+1)* is true for every positive integer *k ≥ b*

predicate

Prove that the sum of the first *n* odd positive integers is n^2.

$P(n) : 1+3+5 \ldots + 2n-1 = n^2 , \forall n \geq 1$

basis step : Show tha P(1) is true

$P(1) : 1 = 1^2$ true $\therefore P(1) \equiv T$

Inductive step: $\forall k \geq 1$ show $P(k) \rightarrow P(k+1)$

Assume $P(k)$ show $P(k+1)$

consider $1+3+\ldots+(2(k+1)-1) = 1+3+\ldots+(2k+1)$

$= \ldots + (2(k+1)-1)$

$= k^2 + 2k + 1$

$= (k+1)^2$

n

Prove that $n < 2^n$ for all positive integers n.

$P(n) : \forall n \geq (n < 2^n)$

basis step : show $P(1)$ $1 < 2^1 = 2$ $\therefore P(1) \equiv T$

Inductive step

: $\forall_k \geq 1\ (P(k) \rightarrow P(k+1))$

Assume $P(k) : k < 2^k$

show $P(k+1)$

consider $k+1 < 2^k + 1$

$< 2^k + 2^k$

$< 2^{k+1}$

ทุก math induction

หา

ต้องการ. $\forall n \geq b\ (P(n))$

มี $P(b) \land \forall k \geq b\ (P(k) \rightarrow P(k+1))$ จริง ส่งผลให้

$T \equiv ((P(b) \land \forall k \geq b\ (P(k) \rightarrow P(k+1))) \rightarrow \forall n \geq b\ (P(n)))$ tautology

T ?

prove

CHULA ENGINEERING

Example :

Prove that n^3-n is divisible by 3 all positive integers *n*.

$(\exists m \in \mathbb{Z}\ (n^3 - n = 3m))$

P(n): $\forall n \geq 1\ (n^3 - n \bmod 3 = 0)$

Basis Step: Show $P(1)$ $1^3 - 1 = 0 = 3 \cdot 0$ $\therefore P(1)$

Inductive Step: $\forall k \geq 1\ (P(k) \rightarrow P(k+1))$

CHULA

Assume $P(b)$

$\forall k \geq b\ (P(k) \rightarrow P(k+1))$

show $\forall n \geq b\ (P(n))$

The well ordering property.

ทุกๆ เซตที่ไม่เป็นเซตว่าง ของ nonnegative integers ($\neq 0$) has a least element

เซตไหนที่ไม่ใช่เซตว่าง มีค่ามากกว่า 0 หาค่าที่น้อยที่สุดได้เสมอ

พิสูจน์จากความขัดแย้ง

proof by contradiction,

คือมันจริงหมดอยู่แล้วหาตัวไม่จริงไม่ได้

Assume $\exists m \geq b\ (\neg P(m))$

Let $S = \{m \geq b \mid \neg P(m)\} \neq \emptyset$ ← ว่างชัวร์เพราะมันเก้

By well-ordering principle

Let r be the smallest non-neg in S

$\therefore \neg P(r)$

We have $P(b)$ $\therefore b \notin S$ $\therefore r > b$

$r - 1 \geq b$

$r - 1 \notin S$

$\therefore P(r-1) \equiv T$

$\therefore P(r) \equiv T$

$\therefore r \notin S$

ขัดแย้ง

contradiction

Mathematical Induction

Use mathematical induction to show that

1) $1+2+2^2+2^3+2^4+\ldots+2^n = 2^{n+1}-1$ for all nonnegative integer n.

CH

Proof: By M.I.

1) Basis step: $P(0)$

$2^0 = 1 = 2^{0+1}-1 \quad \therefore P(0)$

2) $\forall k \geq 0\,(P(k) \to P(k+1))$

Assume $1+2+\ldots 2^k = 2^{k+1}-1$

Show $P(k+1)$

$1+2+2^2+\ldots 2^k+2^{k+1} = 2^{k+1}-1+2^{k+1}$

$= 2 \cdot 2^{k+1}-1$

$= 2^{k+2}-1$

$\therefore P(k+1)$ Q.E.D.

2) $2^n < n!$ for every positive integer n with $n \geq 4$.

Proof: By M.I, $\forall n \geq 4\,(2^n < n!)$

1) Basis step: show $P(4)$ $\quad 2^4 = 16,\ 4! = 24 \quad \therefore 2^4 < 4!$

$\therefore P(4)$

2 Inductive step: $\forall k \geq 4\,(P(k) \to P(k+1))$.

Assume ~~1+2+ ... +2^k~~ $2^k < k!$

Show $2^{k+1} < (k+1)!$

$2^{k+1} = 2 \times 2^k$

$< 2 \times k!$

$< (k+1)k!$ $\quad$ Since $k \geq 4$, $k+1 \geq 5 > 2$

$= (k+1)!$

Q.E.D.

Eg. proof that $1+2+\ldots+n = \frac{n}{2}(n+1)$

$P(1)$; $1 = \frac{1}{2}(1+1) \quad \equiv T$

$P(k)$; $1+2+3+\ldots k = \frac{k}{2}(k+1)$

same

$P(k+1)$; $1+2+\ldots+k+(k+1) = \frac{(k+1)}{2}[(k+1)+1]$

$\frac{k}{2}(k+1)+(k+1) \times \frac{2}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$

$\frac{k^2+k}{2}+\frac{2k+2}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$

$\frac{k^2+3k+2}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$

$\frac{(k+2)(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$

Q.E.D

ตัวอย่าง 3

n+1 $\quad$ เริ่มต้นที่ 0

- จงพิสูจน์ว่า $2^0+2^1+2^2+\ldots+2^n = 2^{n+1}-1$ เมื่อ $n \geq 0$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม

$P(0)$; Base Steps $\quad 2^0 = 2^{0+1}-1 = 1$ จริง

$P(n)$; $2^0+2^1+2^2+\ldots+2^n = 2^{n+1}-1$ จริง

$P(n+1)$; $\boxed{2^0+2^1+2^2+\ldots+2^n}+2^{n+1} = 2^{n+2}-1$ จริง

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$2^{n+1}-1+2^{n+1} = 2^{n+2}-1$

$2 \cdot 2^{n+1}-1 = 2^{n+2}-1$

$2^{n+2}-1 = 2^{n+2}-1$

Discrete Math. 17

ตัวอย่าง 2

k+1 $\quad$ 2k+2-1 $\quad$ เริ่มต้นที่ 1

- จงพิสูจน์ว่า $1+3+5+\ldots+(2n-1) = n^2$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

$P(1)$; Base Step; $1 = 1^2$ จริง

$P(k)$; $\boxed{1+3+5+\ldots+(2k-1)} = k^2$ จริง

$P(k+1)$; $\boxed{1+3+5+\ldots+(2k-1)}+(2k+1) = (k+1)^2$ จริง?

$k^2+2k+1 = (k+1)^2$

$(k+1)(k+1) = (k+1)^2$

$(k+1)^2 = (k+1)^2$

Discrete Math. 15

e.g. * $\quad \therefore P(0)$

n^3+2n หารลงตัวเมื่อ $n \geq 0$

proof ;

Assume $\forall n \in \mathbb{Z}^+ (P(n))$ mod 3 == 0

Basis $P(0)$; $0^3+2(3)$ % 3 == 0 $\quad \therefore P(0) \equiv T$

$P(n)$; $n^3+2(n)$ %3 == 0 $\equiv T$

$P(n+1)$; $(n+1)^3+2(n+1)$

$n^3+3n^2+3n+1+2n+2$

$n^3+2n = P(n)$

ซึ่ง P(n) % 3 == 0 ✓✓

$n^3+2n+3n^2+3n+3$

$n^3+2n+3(n^2+n+1) \equiv T$

หารลงตัว ตาม P(n)

อะไรคูณด้วย 3 ก็ mod 3 ลงตัว

แบบฝึกหัด 2

เริ่มต้นที่ 0 $\quad 2^3-2 \quad 8-2=6 \quad 3^3-3 \quad 27-3=24$

- n^3-n หารด้วย 6 ลงตัว เมื่อ $n \geq 0$

$P(0)$; $0^3-0 = 0$ หาร 6 ลงตัว จริง

$P(n)$; n^3-n หาร 6 ลงตัว จริง

$P(n+1)$; $(n+1)^3-(n+1)$ พิสูจน์ หาร 6 ลงตัว จริง

$\cancel{n^3}+3n^2+3n\cancel{+1}\cancel{-n}\cancel{-1}$

n^3-n+3n^2+3n

$n^3-n+3n(n+1)$ ✓

$3n(n+1)$

Strong induction

A proof by induction that $P(n)$ is true for every positive integer n consists of 2 steps:

Use a different induction step.

BASIS STEP: Show that $P(1)$ is true.

INDUCTIVE STEP:

Show that $[P(1) \wedge P(2) \wedge \ldots \wedge P(k)] \to P(k+1)$ is true for every positive integer k

Example:

Show that if n is an integer greater than 1, then n can be written as the product of primes.