

Consensus Problems in Networks of Agents with Switching Topology and Time-Delays

Jichao Zhao*

13-10-2020

Abstract

这篇文章，我们讨论了动态智能体网络固定和切换拓扑下的一致性問題。我们分析了三种情况：i) 切换通铺无时滞网络，ii) 固定拓扑通信时滞网络，iii) 离散智能体群的最大一致性问题（或领导决定性）。在每一种情况，我们介绍了线性/非线性一致性协议并且提供了分布式建议算法的收敛性分析。此外，我们还建立了网络信息流（例如网络的动态连接性）的费德勒特征值（Fiedler eigenvalue）和响应一直协议的速度（或性能）协商之间的联系。这表明平衡图在解决一致性问题扮演着重要角色。我们介绍了在一致性协议的收敛性分析问题中扮演着李雅普诺夫（Lyapunov functions）函数角色的分歧函数。这项研究的显著特征是来解决有向信息流网络的一致性问题。我们提供的分析工具基于代数图论，矩阵论和控制论。仿真提供了我们的理论结果的演示效率。

1 Introduction

这些年，动态智能体网络的分布式决策协调问题吸引了大量的研究者。部分原因是因为多智能体系统（MAS）在许多领域都有广阔的应用，包括无人协同装置，类鸟集群，水下装置，分布式传感器网络，卫星簇的姿态排列，通信网络的拥挤堵塞控制。

一致问题在计算机科学领域具有很长的历史，尤其是在自动控制理论和分布式计算方面。在很多包含多智能体系统，智能体组的应用需要商定大量的 interest。Such quantities might or might not be related to the motion of the individual agents. 至于结果，在连接失败和创造下（即动态网络拓扑）的定向信息流，解决动态智能体网络所有形式的一致性问题是非常重要的。

在这篇文章中，我们主要的贡献是定义和解决了基于大量假想的网络拓扑的一致性问题（固定的和动态的），是否存在通信时滞，和输入动态智能体的局限性。在每种情况，我们都提供了收敛性分析，并且针对线性协议建立了性能和鲁棒性之间的定向连接，包括一致性协议和网络信息流的图拉氏变换。

2 Consensus Problems

$G = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{A})$ 是加权有向图（或无向图），具有 n 个节点，和一个加权邻接矩阵 $\mathcal{A} = [a_{ij}]$ 。 \mathcal{A} 矩阵的所有元素 $a_{i,j} \geq 0$ 且所有的 $i, j \in \mathcal{I} = 1, 2, \dots, n, i \neq j$ 。这里， \mathcal{V} 表示所有向量 v_i 的集合， \mathcal{E} 表示图中所有边（ ij 或 v_i, v_j ）的集合。节点 i 的邻居集合表示为 $N_i = \{ij \in \mathcal{E} : a_{ij} > 0\}$ 。我们称节点 J 的任意子集为一个簇。簇 $J \subset \mathcal{I}$ 的集合定义为

$$N_J := \bigcup_{i \in J} N_i = \{j \in \mathcal{I} : i \in J, ij \in \mathcal{E}\} \quad (1)$$

*E-mail: zhaojichao@imakerlab.cn

定义 $x_i \in \mathbb{R}$ 表示节点 i 的值。参考 $G_x = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{A}, x)$, 其中 $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ 是为代数图 (algebraic graph), 或 $x \in \mathbb{R}$ 的信息流 (information flow) (静态) 网络 (static network) $G_x = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{A})$ 。节点的值表示物理特性, 例如姿态, 位置, 温度, 电压等等。我们认为当且仅当 $x_i = x_j$ 时, 节点 i 和 j 在网络中达到一致 (agree)。我们认为网络中所有的节点当且仅当所有的 $x_i = x_j$ 时达到一致 (consensus), 此时 $i, j \in \mathcal{I}, i \neq j$ 。当网络中的节点达到一致时, 此时所有节点的公共值叫做 (组) 决策值 (group decision value)。

假设图的每一个节点都是一个具有动态性能的动力智能体 (dynamic agent)

$$\dot{x}_i = f(x_i, u_i), i \in \mathcal{I} \quad (2)$$

一个动态图 (dynamic graph) 或一个动态网络 (dynamic network) 由一个 4 元组 $G_{x(t)} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{A}, x(t))$ 组成, 其中变化的状态 $\dot{x} = F(x, u)$ 中 x 表示动态图的状态, $F(x, u)$ 是 $F_i(x, u) = f(x_i, u_i)$ 中元素的列元素合并。

定义 $\chi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个包含 n 个变量 x_1, \dots, x_n 的函数。在一个动态图中的 χ -一致性问题 (χ -consensus problem), 是一种分布式的方式, 通过利用输入 u_i 来计算 $\chi(x(0))$, 其中输入 u_i 仅依赖于节点 i 的和它的邻居的值。我们认为协议 (protocol)

$$u_i = k_i(x_{j_1}, \dots, x_{j_{m_i}}) \quad (3)$$

其中 $j_1, \dots, j_{m_i} \in \{i\} \cup N_i$ 和 $m_i \leq n$ 渐进的解决了 χ -一致性问题, 当且仅当存在一个渐进稳定的平衡 x^* 其 $\dot{x} = F(x, k(x))$ 例如 $x^* = \chi(x(0))$, 所有的 $i \in \mathcal{I}$ 。我们致力于解决 χ -一致性问题在分布式时尚方面, 此方面没有节点与其他任何节点相连 (i.e. 即 $m_i < n$ for all i)。

特殊的, $\chi(x) = Ave(x) = \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^n x_i)$, $\chi(x) = Max(x) = \max_i x_i$, $\chi(x) = Min(x) = \min_i x_i$ 分别称作平均一致性 (average-consensus), 最大一致性 (max-consensus) 和最小一致性 (min-consensus), 分别由于他们在多智能体系统分布式决策方面广阔的应用。

平均一致性问题, 是解决线性函数 $\chi(x) = Ave(x)$ 动态系统网络的分布式计算的典型例子。这是比仅达成普通一致性更加具有挑战性。

3 Consensus Protocols

这一部分, 我们介绍了三种一致性协议, 分别用来解决连续时间 (continuous-time, CT) 动态智能体模型

$$\dot{x}_i(t) = u_i(t) \quad (4)$$

和离散时间 (discrete-time, DT) 动态智能体模型的网络一致性问题,

$$x_i(k+1) = x_i(k) + \epsilon u_i(k) \quad (5)$$

其中步长尺寸 $\epsilon > 0$ 。在这篇文章, 我们考虑了三种脚本:

i) 固定或切换拓扑的零沟通时滞: 我们使用下边的线性一致性协议:

$$u_i = \sum_{j \in N_i} a_{ij}(x_j - x_i) \quad (A1)$$

在这里, 节点 i 的邻居集合 $N_i = N_i(G)$ 在切换拓扑网络中是变化的。

ii) 固定拓扑 $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{A})$ 和通信时滞 $\tau_{ij} > 0$ 对应于 $ij \in \mathcal{E}$: 我们使用下边的线性时滞一致性协议:

$$u_i(t) = \sum_{j \in N_i} a_{ij}[x_j(t - \tau_{ij}) - x_i(t - \tau_{ij})] \quad (A2)$$

在收敛分析期间, 上述两个协议 (A1) 和 (A2) 中每个协议的派生变得显而易见, 之后将为每个协议介绍收敛分析。我们展示了在每一种情况下, 一致性都是渐进到达的。此外, 我们为

网络中的有向信息流提供了充分必要的条件，以至于可以实现平均一致性 (average-consensus)，最大一致性 (max-consensus) 和最小一致性 (min-consensus)。更进一步的，我们提供了这些一致性协议的性能表现和算法的鲁棒性分析。

Remark 1. 针对一个固定拓扑的无向网络，两个协议都可以通过适当的延迟技术来解决一致性问题。具有挑战性的是解决有向图网络和切换拓扑网络的相似一致性问题。在多智能体集群方面，信息流通常是有向的，并且网络的拓扑会经历自然界中本质上是离散状况的变化。

所给的协议 (A1)，连续时间网络的智能体状态会随着下面的线性系统进行变化

$$\dot{x}(t) = -Lx(t) \quad (6)$$

这里， L 是由信息流 G 引起的图拉普拉斯算子 (graph Laplacian)，并且定义如下

$$l_{ij} = \begin{cases} \sum_{k=1, k \neq i}^n a_{ik}, & j = i \\ -a_{ij}, & j \neq i \end{cases} \quad (7)$$

图拉普拉斯算子的性质是代数图论中主要研究领域之一，将在第 4 部分详细讨论。

关于图拉普拉斯的定义，还可查看文献 [2013_ 多智能体系统的协调控制研究综述-苗国英]

$$s = a$$

在一个切换拓扑 (switching topology) 网络中，协议 (A1) 的收敛性分析等价于混合系统 (hybrid system) 的稳定性分析

$$\dot{x}(t) = -L_k x(t), \quad k = s(t) \quad (8)$$

这里， $L_k = \mathcal{L}(G_k)$ 是 G_k 的拉普拉斯算子， $s(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{I} \subset \mathbb{Z}$ 是切换信号， $\Gamma \ni G_k$ 是有序集合 \mathcal{I}_Γ 有限个图 (节点 n) 的有限集合。之后，我们将会看到 Γ 是一个对于 $n \gg 1$ 相对较大的集合。在公式 (8) 中，混合系统的稳定性分析是一个更加具有挑战性的部分，总的来说，部分原因是因为两个拉普拉斯矩阵的乘积并不匹配。

对于离散时间的智能体模型，应用协议 (A1) 给出了如下的动态离散网络

$$x(k+1) = P_\epsilon x(k) \quad (9)$$

和

$$P_\epsilon = I - \epsilon L \quad (10)$$

对于所有的 $\epsilon \in (0, 1/d_{max})$ ，使 $d_{max} = \max_i l_{ii}$ ， P_ϵ 是一个非负随机矩阵，我们称之为门阶矩阵 (Perron matrix)，即 P_ϵ 所有元素非负且所有的行总和为 1。

智能体离散时间协议 (A1) 的收敛性分析严重依赖于非负矩阵理论，并且将会在一个额外的文章中讨论。我们的方法提出了一个基于李雅普诺夫 (Lyapunov) 的，离散时间模型网络的一致收敛性分析。这是不同于 Jadbabaie 等人从事的成果方法，这非常依赖于矩阵论的性质和无限的随机矩阵的右收敛乘积 (right-convergence product, RCP)。

4 Algebraic Graph Theory: Properties of Laplacians

在这一部分，我们介绍图论的基本的概念和标记，这些知识都将在文章的后边被用到。更多的信息参考文献 [11,5]。更加复杂全面的关于无向图的拉普拉斯算子请参考文献 [17]。然而，我们需要用到的关于无向图的拉普拉斯的基本概念无法在图论的书籍文献中找到，因此我们罗列在这里。

定义 $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{A})$ 为一个加权有向图 (或有向图), 具有 n 个节点。节点 v_i 的入度 (in-degree) 和出度 (out-degree) 分别定义如下:

$$\deg_{in}(v_i) = \sum_{j=1}^n a_{ji}, \quad \deg_{out}(v_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij} \quad (11)$$

对于一个普通图, 其邻接矩阵 \mathcal{A} 只有两个元素 $\{0, 1\}$, 出度 $\deg_{out}(v_i) = |N_i|$ 等于邻居元素的数量。图 G 的矩阵度 (degree matrix) 是一个对角矩阵, 记为 $\Delta = [\Delta_{ij}]$, 其中对于所有的 $i \neq j$, $\Delta_{ij} = 0$ 和 $\Delta_{ii} = \deg_{out}(v_i)$ 。加权图拉普拉斯算子矩阵 (graph Laplacian matrix) 和图 G 之间的联系定义如下

$$L = \mathcal{L}(G) = \Delta - \mathcal{A} \quad (12)$$

这和公式 (7) 中关于 L 中元素的定义是一致的。

Remark 2. 图拉普拉斯算子 L 并不取决于 G 的邻接矩阵中的对角元素 a_{ii} , 对应于封闭环形 (loops) (v_i, v_i) 的权重 (即 cycles of length one)。根据上下文, 在不失一般性的前提下, 我们可以假设所有对于 i 的 $a_{ii} = 0$ 。这项工作的一个受限部分是, 使用了带有循环的图, 这些图的权重无法舍弃。

我们有时使用 $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \mathcal{L}(G)$ 表示图 G 的拉普拉斯算子。根据定义, 拉普拉斯矩阵的每一行的和为 0。因此, 图拉普拉斯算子总是有一个为 0 的特征值 (即 $\text{rank}(L) \leq n - 1$) 对应于一个右特征向量

$$w_r = \mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)^T$$

具有相同的非零元素。

当且仅当任意的两个完全分开的节点, 能够通过一个关于有向图边的方向的方式进行连接, 那么这样的图称作强连接 (strongly connected)。之后的理论在定向图的 SC 性质和拉普拉斯矩阵的秩之间, 建立了定向的关系。

Theorem 1. 定义 $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{A})$ 是关于拉普拉斯算子 L 的加权有向图。那么, G 就是强连接的, 当且仅当 $\text{rank}(L) = n - 1$ 时。

Proof. 证明详见附录 A.1

Remark 3. 对于一个无向图 G , Theorem 1 的证明很容易, 详见文献 [1, 11]。

Remark 4. 对一个具有对称邻接矩阵 \mathcal{A} 的无向图 (undirected graph) G , 图拉普拉斯算子 L 是对称半正定的。拉普拉斯算子与图 G 的潜在联系定义在文献 [20] 中如下

$$\Phi_G(x) = x^T L x = \frac{1}{2} \sum_{ij \in \mathcal{E}} (x_j - x_i)^2 \quad (13)$$

这是一个简单的关于无向图定理的证明: 假设 $Lx = 0$, 其中 $x \in \mathbb{R}$ 。那么, 对于所有的边 $ij \in \mathcal{E}$, 都有 $x^T L x = 0$ 且 $x_j = x_i$ 。如果图是连接的, 这就意味着所有的节点都一致且相等 $x_1 = \dots = x_n$ 。因此, $\text{rank}(L) = n - 1$ 。对于一个所有节点都一致的连通图而言, 由于 $\Phi_G(x) = 0$, 所以 $\Phi_G(x)$ 提供了关于智能体组非一致性有意义的量化。

- 5 A Counterexample for Average-Consensus
- 6 Networks with Fixed or Switching Topology
- 7 Networks with Communication Time-Delays
- 8 Max-Consensus and Leader Determination
- 9 Simulation Results
- 10 Conclusions