

## **Estudio de la estrategia óptima para el black-jack**

por JUAN TEJADA CAZORLA y  
JAVIER YAÑEZ GESTOSO

Departamento de Estadística e  
Investigación Operativa  
Facultad Ciencias Matemáticas.  
Universidad Complutense. Madrid.

### **RESUMEN**

En este artículo se estudia en una primera aproximación el juego del Black-Jack o veintiuno según las reglas vigentes en la actualidad en España.

Se trata este juego como un proceso de decisión secuencial acotado en el que se intenta maximizar la ganancia esperada. Mediante la aplicación del principio de optimalidad de Bellman y bajo ciertas hipótesis se obtiene la regla de parada óptima, que, con una serie de decisiones que se toman en determinadas situaciones iniciales, constituyen la estrategia óptima, de la que se estudian sus propiedades estadísticas. Los detalles computacionales se indican aunque son omitidos explícitamente.

Por último, se discute el procedimiento seguido por otros autores que han determinado una estrategia para el Black-Jack pero no demuestran la optimalidad de ésta. El método aquí propuesto garantiza esto último. No obstante, se demuestra al final que, bajo ciertas hipótesis, el procedimiento seguido por aquéllos también conduce a la estrategia óptima.

*Palabras clave:* Black-Jack; juego de apuesta; principio de optimalidad de Bellman; regla de parada óptima; técnicas de Montecarlo.

## 1. INTRODUCCION

El Black-Jack o veintiuno es un juego de cartas habitual en todos los casinos del mundo. Con la reciente legalización del juego en España, han sido varias las estrategias que han surgido para este juego. Dada la disparidad entre éstas y debido a que las reglas usadas aquí, difieren (aunque no en lo esencial) de las utilizadas en otros países, hemos considerado conveniente un nuevo estudio.

Baldwin et al. (1), Sagan (3) y Thorp (4) han investigado en profundidad el Black-Jack pero ajustándose a las reglas de los casinos americanos.

Una característica del Black-Jack, que facilita la búsqueda de la estrategia óptima, es la de que el croupier tiene obligación de jugar de una forma fija y conocida. El jugador es el único que puede tomar decisiones. Estas decisiones son de un grado de complejidad superior a las que se toman en otros juegos de casino y en esto reside el atractivo que, para muchos jugadores, posee el Black-Jack.

### *Reglas de juego*

Se usa la baraja francesa de 52 cartas. Cada carta tiene un valor: Las figuras valen 10 y las demás carta su valor nominal salvo el as que puede valer 1 u 11 a elección del jugador.

Participan el croupier y un máximo de 7 jugadores. Los jugadores hacen sus apuestas antes de que se reparta ninguna carta. El croupier sirve dos cartas a cada jugador y una a sí mismo, todas ellas levantadas. El objetivo de los jugadores es acercarse lo más posible a 21 puntos sin pasar ese límite. Para ello suma el valor de las cartas recibidas y decide si pide una carta más o se planta. Esta operación se puede repetir hasta que decida plantarse o se pase. Si se pasa, paga su apuesta al croupier independientemente del total que alcance éste.

*Estrategia del croupier.*— Una vez que todos los jugadores han hecho su juego, el croupier se sirve cartas estando obligado a plantarse si tiene una suma igual o superior a 17. En caso contrario deberá pedir cartas hasta que alcance 17 o más. Cuando el croupier tenga un as que pueda valer 1 u 11 sin pasarse, deberá contarle como 11 si con este valor alcanza 17 o más.

*Pagos.*— Si un jugador no se ha pasado y el croupier sí, recibe una cantidad igual a su apuesta. Si el croupier tampoco se ha pasado, se comparan los totales y el que lo tenga mayor gana una cantidad igual a la apuesta del jugador. En caso de empate no se producen pagos.

*Black-Jack.*— Consiste en un as con un diez (las figuras son “dieces”). Gana a cualquier otra suma. Si el jugador tiene Black-Jack y el croupier no, entonces recibe una vez y media su apuesta.

El jugador tiene otras posibilidades:

*Doblarse.*— Si las dos primeras cartas del jugador suman 9, 10 u 11, podrá doblar su apuesta inicial. Si así lo hace solamente recibirá una carta más.

*Abrirse.*— Si las dos primeras cartas tienen igual valor, puede separarlas y jugar a dos manos haciendo una apuesta en cada una de ellas igual a la inicial. El jugador recibe otra carta en cada mano y prosigue jugándolas independientemente salvo que no podrá volver a abrirse. Si un jugador separa un par de ases recibirá una y solamente una carta sobre cada as, y si en alguna de ellas recibiera un diez, no valdrá como Black-Jack, sino como 21.

*Asegurarse.*— Si la primera carta del croupier es un as, los jugadores podrán asegurarse contra el posible Black-Jack del croupier haciendo una apuesta adicional que sea como máximo la mitad de la apuesta original. Si el croupier obtiene Black-Jack, paga el seguro 2 a 1 y si no lo obtiene el jugador lo perderá.

El seguro se deberá hacer antes de que el primero de los jugadores reciba la tercera carta.

## 2. METODOLOGIA

Buscaremos la estrategia que sea óptima según el criterio de la máxima ganancia esperada. La obtendremos bajo dos hipótesis:

$H_1$  : La probabilidad de obtener una carta concreta no varía a lo largo del juego. Es decir, la de obtener un 10 será  $4/13$  y la de las demás cartas  $1/13$ .

$H_2$  : El total de puntos alcanzados por el croupier es independiente del conseguido por el jugador.

La hipótesis  $H_1$  es una simplificación necesaria en una primera etapa de análisis del juego. Esta hipótesis es razonable si se tiene en cuenta que el croupier usa un mazo de seis barajas y que nunca lo agota, volviendo a barajar cuando aún queda una parte apreciable de cartas (algo más de una baraja) que no han sido servidas.

Estudiaremos el juego como un proceso de decisión secuencial acotado. La estrategia óptima vendrá dada en términos de una regla de parada óptima, que obtendremos por inducción hacia atrás.

El principio de optimalidad de Bellman garantiza que esta regla maximiza la ganancia esperada.

Baldwin et al. (1) y Thorp (4) no prueban, explícitamente, que su método de análisis conduzca a la estrategia óptima. Esto se demuestra en el APENDICE de este artículo, en el caso en que la distribución sea la indicada en  $H_I$ .

Nuestro procedimiento sigue siendo válido aún cuando la distribución sea distinta y además es, computacionalmente, más eficiente.

Para el análisis distinguiremos dos tipos de manos: Blandas y duras según contengan o no ases que pueden tomar los valores 1 u 11 sin que el total exceda de 21.

Consideraremos en primer lugar el caso en que el jugador tiene una mano dura y después, usando los resultados obtenidos, analizaremos las manos blandas.

Sucesivamente estudiaremos los casos en que el jugador tenga que doblarse, abrirse o asegurarse.

En lo que sigue, consideraremos que el jugador apuesta inicialmente una unidad monetaria.

### 3. MANOS DURAS

En este caso, la mano del jugador no contiene ases que puedan valer 11 sin que el total exceda de 21. Se descarta, de momento, la posibilidad de que el jugador pueda abrirse, doblarse o asegurarse.

En un momento dado del juego, el jugador dispone de dos informaciones:

*a.*— La suma de sus cartas, que notaremos por  $x$ ,  $x \geq 4$ .

*b.*— La carta que se ha servido el croupier, que notaremos por  $b$ ,  $b = A, 2, \dots, 10$

Ante una situación dada  $(x, b)$ , el jugador debe elegir entre plantearse o pedir carta.

Se introduce la siguiente notación:

$G^*(x, b)$  es la máxima ganancia esperada del jugador supuesto que se halla en la situación  $(x, b)$  y se obtiene cuando actúa de forma óptima.

$G_0(x, b)$  es la ganancia esperada si a la vista de  $(x, b)$  decide plantearse.

$P_c$  es la probabilidad de obtener una carta de valor  $c$ , según  $H_I$  :

$$P_c = \begin{cases} 4/13 & \text{si } c=10 \\ 1/13 & \text{si } c \neq 10 \end{cases}$$

Por tanto, podemos expresar:

$$G^*(x,b) = \text{Max} \left\{ G_0(x,b), \sum_{c=1}^{10} P_c G^*(x+c,b) \right\} \quad (1)$$

Es decir, el máximo entre  $G_0(x,b)$  y la ganancia esperada si pide una carta y después continúa el juego según la estrategia óptima. Convendrá plantarse, pues, cuando el máximo se alcance en  $G_0(x,b)$  y pedir carta en caso contrario.

Tenemos que evaluar la ecuación (1) para cada  $x$  y cada  $b$ . Para ello necesitamos conocer:

- i.-  $G_0(x,b)$  para cada  $x = 4, 5, \dots$  y cada  $b = A, 2, \dots, 10$
- ii.- Diez valores finales de  $G^*(x,b)$  para poder iniciar el proceso de inducción hacia atrás con cualquier valor de  $x$  y  $b$ .

#### *Cálculo de $G_0(x,b)$*

Tenemos que  $G_0(x,b) = \Pr(B > 21) + \Pr(B < x) - \Pr(x < B \leq 21)$ , donde  $B$  es la suma total obtenida por el croupier supuesto que su primera carta tiene un valor  $b$ . Por tanto, el cálculo de  $G_0(x,b)$  depende exclusivamente de las probabilidades  $\Pr(B = j)$ ,  $j = 17, \dots, 21, > 21$  (se distingue en  $j = 21$  el caso de Black-Jack).

#### *Cálculo de las probabilidades del croupier*

Se ha realizado de forma exacta nada más que en los casos  $b=6$  y  $b=10$ , obteniéndose, redondeando en la 6.ª cifra:

	17	18	19	20	21	BL.JACK	SE PASA
$b = 6$	.166948	.106454	.107192	.100705	.097878	.000000	.420824
$b = 10$	.111424	.111424	.111424	.342193	.034501	.076923	.212111

Por lo tedioso de estos cálculos, se han usado las técnicas de Montecarlo para obtener el resto de las probabilidades aproximadamente:

$\begin{smallmatrix} B \\ b \end{smallmatrix}$	17	18	19	20	21	BLJACK	SE PASA
1	.130967	.130867	.130926	.130593	.053895	.307919	.114833
2	.139866	.134672	.129167	.124510	.118795	.000000	.352990
3	.135020	.130546	.125441	.120473	.114699	.000000	.373821
4	.130407	.126073	.121832	.116268	.111227	.000000	.394193
5	.121943	.121931	.117990	.112953	.108040	.000000	.417143
6	.165071	.106337	.106072	.101458	.097660	.000000	.423402
7	.368573	.137726	.078497	.078528	.074030	.000000	.262646
8	.128650	.359020	.128543	0.70008	.069280	.000000	.244499
9	.120016	.120380	.351065	.119597	.060732	.000000	.228210
10	.111998	.111416	.111418	.341491	.034456	.076816	.212405

Esta tabla se ha comparado con la deducida por Baldwin et al. (1) no observando diferencias superiores a un 1%.

No obstante, en los casos en que las esperanzas calculadas no determinan con absoluta claridad la regla a seguir, estos cálculos se han llevado a cabo de forma exacta.

#### Valores finales de $G^*(x, b)$

Estos son:  $G^*(x, b) = G_0(x, b) = -1$  si  $x > 21$  y para todo  $b$   
 $G^*(21, b) = G_0(21, b)$  para todo  $b$

A partir de la matriz de probabilidades del croupier se ha diseñado un algoritmo que evalúa  $G_0(x, b)$ . Aplicando la ecuación (1), con los valores finales ya citados, se obtiene  $G^*(x, b)$  para cada  $x$  y cada  $b$ , así como la regla de parada óptima: Al jugador le conviene plantarse si el máximo se alcanza en  $G_0(x, b)$  y pedir carta en caso contrario.

Una vez efectuados los cálculos, se observa que para cada  $b$ , existe un valor  $T(b)$ , que llamaremos tope, de forma que si  $x < T(b)$  es mejor pedir carta, mientras que si  $x \geq T(b)$  es preferible plantarse.

Los resultados se sintetizan en la siguiente tabla:

$b :$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$T(b) :$	17	13	13	12	12	12	17	17	17	17

#### 4. MANOS BLANDAS

El análisis de lo que se entiende por manos blandas, aunque esencialmente es el mismo, presenta algunas diferencias respecto al de manos duras.

La mano del jugador contiene un as que puede valer 11 sin que el total exceda de 21, en este caso,  $x$  será ese total. Para el jugador que decide plantarse,  $G_0(x, b)$  se evalúa exactamente igual que antes. En caso contrario, si al pedir una carta se obtiene un valor  $c$  tal que  $x + c$  supera a 21, el as toma automáticamente el valor 1 y el total de su mano será ahora  $x + c - 10$ .

Sea  $\bar{G}^*(x, b)$  la ganancia esperada máxima en el caso de manos blandas.

Para calcular  $\bar{G}^*(x, b)$  se utiliza la fórmula recurrente:

$$\bar{G}^*(x, b) = \text{Max} \left\{ G_0(x, b), \sum_{c=1}^{10} P_c \bar{G}^*(x+c, b) \right\} \quad (2)$$

donde los valores finales serían:  $\bar{G}^*(x, b) = G^*(x-10, b)$ ,  $x > 21$  y todo  $b$

En este caso, también la regla de parada óptima se puede caracterizar fácilmente en función de unos topes (de manos blandas, para distinguirlos de los anteriores), y que denotaremos por  $\bar{T}(b)$ :

$$\begin{array}{l} b : 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10 \\ \bar{T}(b) : 19 \quad 18 \quad 18 \quad 18 \quad 18 \quad 18 \quad 18 \quad 16 \quad 19 \quad 19 \end{array}$$

De forma que si  $x < \bar{T}(b)$  el jugador debe pedir carta, si  $x \geq \bar{T}(b)$  y  $x \leq 21$ , el jugador se planta, y si, por último,  $x > 21$ , entonces tiene una mano dura de valor  $x - 10$  y sigue jugando de forma óptima hasta alcanzar o sobrepasar  $T(b)$ .

#### 5. DOBLARSE

Como ya hemos indicado, si las dos primeras cartas suman 9, 10 u 11, cabe la posibilidad de doblar la apuesta inicial recibiendo una y solamente una carta más.

Por tanto, para decidir en qué situación  $(x, b)$  es mejor doblarse, se compara

$$2 \sum_{c=1}^{10} P_c G_0(x+c, b) \quad \text{con} \quad G^*(x, b) :$$

Si  $2 \sum_{c=1}^{10} P_c G_0(x+c, b) > G^*(x, b)$  entonces es mejor doblar la apuesta.

Cuando  $x=19, 20$  ó  $21$  (Black-Jack) con una mano blanda, también cabría la posibilidad de doblarse. Si se compara  $2 \sum_{c=1}^{21-x} P_c G_0(x+c, b) + \sum_{c=22-x}^{10} P_c G_0(x+c-10, b)$  con  $\bar{G}^*(x, b)$  se concluye que lo mejor es plantearse tal y como indica la estrategia óptima para manos blandas.

Examinadas las distintas situaciones individualmente, se concluye que el jugador debe doblarse cuando sumando 9, 10 u 11, el croupier tenga en su carta inicial los valores (3, 4, . . . , 6), (2, 3, . . . , 9) y (2, 3, . . . , 9) respectivamente.

## 6. ABRIRSE

Compararemos la ganancia máxima esperada cuando no se abre el jugador con la que resultaría de jugar óptimamente con dos manos después de abrirse (incluyendo la posibilidad de doblarse después de abrirse).

Si las dos primeras cartas del jugador tienen el mismo valor  $z$ , deberá abrirse si se verifica que:

$2 \sum_{c=1}^{10} P_c G^*(z+c, b) - G^*(2z, b) > 0$ , entendiendo que  $G^*(z+c, b)$  engloba el caso de mano dura y mano blanda y la posibilidad de doblarse después de abrirse.

Cuando se poseen dos ases hay que abrirse si:

$$2 \sum_{c=1}^{10} P_c G_0(11+c, b) - \bar{G}^*(12, b) > 0$$

Las conclusiones sobre cuando merece la pena abrirse se visualizan fácilmente en el apdo. 8.

## 7. ASEGURARSE

Esta es una opción que el jugador puede escoger independientemente del juego que realice con su mano. Si la primera carta del croupier es un as y el jugador decide asegurarse, lo que obtendrá dependerá exclusivamente de la segunda carta que el croupier reciba.

Por tanto, la ganancia esperada cuando se asegura con una cantidad  $d$  ( $d \leq \frac{1}{2}$ ), disminuye en  $d/13$ . No se recomienda, pues, asegurarse salvo que:



Si el jugador tiene **Black-Jack** y el croupier tiene un as, la matriz de ganancias es la siguiente:

		CROUPIER	
		BLACK-JACK	NO BLACK-JACK
JUGADOR	SEGURO	+ 1	+ 1
	NO SEGURO	0	+ 3/2

## 8. DESCRIPCION Y PROPIEDADES DE LA ESTRATEGIA OPTIMA

A continuación se describe la estrategia óptima:

[illegible]

**DOBLARSE:** (0 : no doblarse; 1 : doblarse)

[illegible]

ABRIRSE: (0 : no abrirse; 1 : abrirse)

$b :$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1-1 :	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2-2 :	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0
3-3 :	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0
4-4 :	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
5-5 :	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6-6 :	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0
7-7 :	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0
8-8 :	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0
9-9 :	0	1	1	1	1	1	0	1	1	0
10-10 :	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

ASEGURARSE: no conviene asegurarse nunca.

Una vez determinada la estrategia óptima, es lógico preguntarse cuál es la media de la variable aleatoria ganancia cuando se apuesta una unidad monetaria y se sigue dicha estrategia.

Por lo tedioso de los cálculos, se ha optado por estimar la media a través de las técnicas de Montecarlo, para lo cual se ha construido un modelo de simulación que desarrolla el juego del Black-Jack para un jugador, que sigue la estrategia óptima especificada anteriormente, y el croupier, que sigue su estrategia fijada por las reglas del juego.

Para una estimación más precisa, se genera para cada una de las situaciones iniciales posibles, carta inicial del croupier y dos cartas del jugador, un número suficientemente grande de jugadas,  $10^4$  en nuestro caso, y la ganancia media obtenida en cada una de estas situaciones se pondera por su probabilidad. Con 20 muestras generadas de esta forma se ha conseguido un valor medio de  $-0.0079$  y un intervalo de confianza al 95 % para dicha media:  $(-0.0082, -0.0076)$ .

La primera conclusión que se extrae es que el Black-Jack, aún siguiendo la estrategia óptima, es un juego desfavorable para el jugador, puesto que la ganancia media es negativa y significativamente distinta de 0.

Para caracterizar mejor la estrategia óptima es conveniente estimar la varianza de la variable aleatoria ganancia en una jugada. Para ello se ha construido un algoritmo que genera las situaciones iniciales y desarrolla las jugadas como en el modelo anterior. Se ha estimado de este modo la varianza de la ganancia en una jugada al apostar una unidad monetaria y el valor obtenido es 1.08.

## 9. DISCUSION

Como se acaba de ver, el juego tiene ganancia esperada negativa. Además, no existe la posibilidad (aunque sea con una pequeña probabilidad) de obtener una gran cantidad de dinero en una jugada como ocurre en otro popular juego de casino, la ruleta.

En la ruleta, si se apuesta una unidad monetaria a una suerte sencilla (rojo o negro, par o impar, falta o pasa), la esperanza de la ganancia es  $-0.0135$  y la desviación típica  $0.99$ ; mientras que al apostar a un número, la ganancia esperada es  $-0.0270$  con una desviación típica  $5.846$ . Es claro que jugar una mano de Black-Jack es mejor que apostar a una suerte sencilla de la ruleta; también es mejor, en términos de la ganancia esperada, que apostar a un sólo número. Pero para jugadores con afición al riesgo, esto último puede no ser cierto en términos de utilidad esperada, ya que con una probabilidad  $0.0270$  pueden obtener 35 veces su apuesta inicial.

No todo queda dicho aquí sobre el Black-Jack. No olvidemos que la estrategia óptima se ha deducido bajo las hipótesis  $H_1$  y  $H_2$ . En un artículo posterior discutiremos si la violación de estas hipótesis, adoptando una postura más realista, puede ser explotada con provecho por el jugador.

## APENDICE

En este apéndice se prueba que el método seguido por Baldwin et. al. (1) es correcto bajo  $H_1$  pero que no es válido para cualquier distribución de probabilidad  $P_c$ .

Para no extendernos demasiado nos vamos a centrar exclusivamente en el caso de manos duras.

Baldwin et al. deducen la estrategia óptima comparando la esperanza de la ganancia de dos jugadores que ante la misma situación  $(x, b)$  actúan de forma diferente: Mientras que uno se planta, el otro pide una y sólo una carta más. Afirman que si para una situación  $(x_0, b)$  es mejor plantarse que pedir carta, lo mismo ocurre para toda situación  $(x, b)$  con  $x \geq x_0$ . Además, consideran que si es mejor plantarse que pedir una y sólo una carta más, es también mejor plantarse que pedir una o más cartas.

Estas dos afirmaciones pueden parecer tan evidentes que no necesitan demostración, pero, como se verá en el ejemplo que sigue, su veracidad depende fuertemente de la asunción de la hipótesis  $H_1$  del aptdo. 2.

*Ejemplo*

Supongamos que la distribución de cartas en el mazo en un momento dado es la siguiente:  $P_{10} = 1/10$

$P_4 = 9/10$  y que el jugador se encuentra en la situación  $(x, b) = (12, 6)$ .

Si llamamos  $G_I(x, b)$  a la ganancia esperada por el jugador que pide una y solamente una carta y  $G_0(x, b)$  la del que se planta, tenemos que:

$$G_0(12, 6) = -.818$$

$$G_I(12, 6) = -.8362$$

por lo que es preferible plantarse que pedir una y sólo una carta. Según esto, sería  $T(6) = 12$ .

Sin embargo, si el jugador decide pedir cartas hasta obtener 18 o más, su ganancia esperada es  $-.26201$ , mejor que  $G_0$  y  $G_I$  en contra de la 2.ª afirmación.

Además,  $G_0(15, 6) = -.818$  y  $G_I(15, 6) = .5660$  con lo que, en contra de la 1.ª afirmación, es mejor pedir carta que plantarse.

Por tanto, el método que ellos proponen no es válido para cualquier distribución de probabilidad distinta de la indicada en  $H_I$ , mientras que el propuesto en este artículo sirve para abordar cualquier situación posible.

Vamos a ver, sin embargo, que bajo  $H_I$  su forma de proceder conduce a la estrategia óptima.

Sea  $G_I(x, b) = \sum_{c=1}^{10} P_c G_0(x+c, b)$  la ganancia esperada por el jugador que decide pedir una y sólo una carta más.

En lo que sigue, consideraremos que para el mismo  $b$  fijo,  $G_0$ ,  $G_I$  y  $G^*$ , definidas ya son función de  $x$ .

*Lema 1*

$G_0(x)$  es creciente. De forma más precisa, si  $x \leq x'$ , entonces se verifica  $G_0(x) \leq G_0(x')$  siempre que  $x' \leq 21$ .

*Demostración*

$G_0(x) = \Pr(B < x) + \Pr(B > 21) - \Pr(x < B \leq 21)$ , donde  $B$  es la v.a. "valor final del croupier partiendo de la carta inicial  $b$ ".

Si  $x \leq x' \leq 21$ , entonces  $\Pr(B < x') \geq \Pr(B < x)$  y  $\Pr(x' < B \leq 21) \leq \Pr(x < B \leq 21)$  y por consiguiente,  $G_0(x) \leq \Pr(B < x') + \Pr(B > 21) - \Pr(x' < B \leq 21) = G_0(x')$

*Lema 2*

Si se define  $G'(x) = \sum_{c=1}^{10} P_c G^*(x+c)$ , entonces  $G'(x)$  es decreciente. Es decir, si  $x' \geq x \geq 12$  se verifica que  $G'(x') \leq G'(x)$ .

*Demostración*

Si  $x > 21$ ,  $G^*(x) = -1$ , y si  $x \geq 12$  podemos poner:

$$G'(x) = \sum_{c=1}^{21-x} (1/13) G^*(x+c) + \sum_{c=22-x}^{10} P_c G^*(x+c) = \frac{1}{13} \sum_{c=1}^{21-x} G^*(x+c) - \Pr(C \geq 22-x)$$

siendo  $C$  la v.a. "valor de una carta extraida del mazo según  $H_1$ ".

Como  $\Pr(C \geq 22-x) = 1 - (21-x)/13 = (x-8)/13$  se tiene que

$$G'(x) = \frac{1}{13} \sum_{c=1}^{21-x} G^*(x+c) - \frac{x-8}{13}$$

Sea  $x' \geq x$ . Como para  $x' > 21$  el lema es obvio, consideraremos  $21 \geq x' \geq x$  o dicho de otra forma, sea  $x' = x + k$  con  $k$  entero y  $0 \leq k \leq 21-x$

$$G'(x') = (1/13) \sum_{c=1}^{21-x'} G^*(x+c) - \frac{x'-8}{13} = (1/13) \sum_{c=1}^{21-x-k} G^*(x+k+c) - \frac{x-8+k}{13}$$

$$\text{Poniendo } \sum_{c=1}^{21-x-k} G^*(x+k+c) = \sum_{c=k+1}^{21-x} G^*(x+c)$$

$$\frac{x - 8 + k}{13} = \frac{x - 8}{13} + \frac{k}{13} \text{ quedaría:}$$

$$G'(x') = -k/13 + (1/13) \sum_{c=k+1}^{2l-x} G^*(x+c) - \frac{x-8}{13}$$

Comparando esta expresión con  $G'(x)$  y teniendo en cuenta que  $G^*(x+c) \geq -1$  se concluye que  $G'(x) \geq G'(x')$

### Lema 3

$G_l(x)$  es decreciente. Es decir, si  $12 \leq x \leq x'$ , entonces  $G_l(x) \geq G_l(x')$

### Demostración

Análoga a la anterior.

### Lema 4

$G_l(x) \leq G^l(x)$  para todo  $x \geq 12$

### Demostración

Es trivial a partir de las definiciones de  $G_l$ ,  $G'$  y  $G^*$

Se define ahora  $x_l = \text{Max } \{x \in \{12, 20\} / G_0(x) < G_l(x)\}$ . Por ser  $G_0$  creciente y  $G_l$  decreciente, se verifica que  $G_0(x) < G_l(x)$  para todo  $x \leq x_l$ .

También se define  $x_0 = \text{Min } \{x \in \{12, 20\} / G_0(x) \geq G'(x)\}$ . Análogamente, al ser  $G_0$  creciente y  $G'$  decreciente, si  $x' \geq x_0$  entonces  $G_0(x') \geq G'(x')$ . Con estos valores así definidos se demuestra la siguiente

### Proposición

$$x_0 = x_l + 1$$

### Demostración

Se verifica que  $x_0 \geq x_l + 1$ , ya que si fuera  $x_0 \leq x_l$ , por definición de  $x_l$  y el lema 4 sería  $G_0(x_0) < G_l(x_0) \leq G'(x_0)$ , en contradicción con la definición de  $x_0$ .

Por otro lado, supongamos que fuera  $x_0 > x_I + 1$ , es decir,  $x_0 = x_I + k$  con  $k > 1$ ; con lo que  $x_0 > x_I + k - 1 > x_I$

Se demuestra entonces que  $G'(x_I + k - 1) = G_I(x_I + k - 1)$ .

En efecto,  $G'(x_I + k - 1) = \sum_{c=1}^{10} P_c G^*(x_I + k - 1 + c)$

Como  $x_I + k - 1 + c > x_0$  entonces  $G_0(x_I + k - 1 + c) > G'(x_I + k - 1 + c)$ , por lo que  $G^*(x_I + k - 1 + c) = G_0(x_I + k - 1 + c)$  y, por tanto:

$$G'(x_I + k - 1) = \sum_{c=1}^{10} P_c G_0(x_I + k - 1 + c) = G_I(x_I + k - 1)$$

Pero, por otra parte, como  $x_I + k - 1 < x_0$  entonces  $G_0(x_I + k - 1) < G'(x_I + k - 1)$ , con lo que queda:  $G_0(x_I + k - 1) < G_I(x_I + k - 1)$ , que está en contradicción con la definición de  $x_I$ .

Por consiguiente,  $x_0 = x_I + 1$

#### Corolario

$$G_0(x) \geq G_I(x) \iff G_I(x) \geq G'(x)$$

#### Demostración

$\Leftarrow$ ) Es trivial

$\Rightarrow$ )  $G_0(x) \geq G_I(x)$  implica que  $x > x_I \Rightarrow x \geq x_I + 1 = x_0 \Rightarrow G_0(x) \geq G'(x)$

Según este corolario, la estrategia que se deduciría por el método de Baldwin et al. sería efectivamente óptima.

#### REFERENCIAS

- 1) BALDWIN R. R.; WILBERT E. CANTEY; H. MAISEL; J. P. McDERMOTT. (1956): «*The optimum strategy in Black-Jack*». J. Amer. Statist. Ass, 275, vol. 51.
- 2) DE GROOT M. H. (1970): *Optimal Statistical Decisions*. Mc Graw-Hill.
- 3) SAGAN H. (1980): *Beat the odds*. Hayden Book Company, Inc.
- 4) THORP E. O. (1961): «*A favorable strategy for twenty-one*». Proc. Natl. Acad. Sci. USA 47; 110-112.

## SUMMARY

### ON OPTIMUM STRATEGY IN BLACK-JACK

In this paper is studied in a first step the game of Black-Jack or twenty-one as played in Spanish casinos.

This card game is treated like a bounded sequential decision process with the objective of finding the strategy maximizing the player's mathematical expectation. The optimal stopping rule is obtained through the Bellman's principle of optimality and we compare this procedure with the one used by other authors.

*Key words:* Black-Jack; Gambling theory; Montecarlo studies; Optimal Stopping Problems; Principle of optimality.

AMS 1980. Subject classification: Primary: 60G40, Secondary: 62E25; 90D35.