一、符号定义

1.1 MDH参数（常量）

符号	值 (m)	说明
d_1	0.342	基座高度
a_1	0.040	肩关节偏移
a_2	0.275	大臂长度
a_3	0.025	小臂偏移
d_4	0.280	腕部偏移
d_t	0.073	末端工具长度

1.2 各关节MDH参数表

关节 i	α(i-1)	a(i-1)	d_i	θ_offset	说明
1	0	0	d_1	0	基座高度
2	-90°	a_1	0	-90°	肩关节偏移
3	0	a_2	0	0	大臂
4	-90°	a_3	d_4	0	小臂、腕部
5	90°	0	0	0	腕关节
6	-90°	0	d_t	0	末端工具

1.3 三角函数简写

简写	含义
c_i	$\cos(\theta_i)$

简写	含义
s_i	$\sin(\theta_i)$
c_{ij}	$\cos(\theta_i + \theta_j)$
s_{ij}	$\sin(\theta_i + \theta_j)$

1.4 末端位姿矩阵

目标位姿矩阵 ${}^0T_6$ 定义为：

$$
{}^0T_6 = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{n} & \vec{o} & \vec{a} & \vec{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

其中：

- $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)^T$：法向量（Normal）
- $\vec{o} = (o_x, o_y, o_z)^T$：方向向量（Orientation）
- $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)^T$：接近向量（Approach）
- $\vec{p} = (p_x, p_y, p_z)^T$：位置向量（Position）

二、正运动学

2.1 通用齐次变换矩阵（MDH Convention）

根据Modified DH参数，相邻坐标系间的齐次变换矩阵为：

$$
{}^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i} & 0 & a_{i-1} \\ s_{\theta_i}c_{\alpha_{i-1}} & c_{\theta_i}c_{\alpha_{i-1}} & -s_{\alpha_{i-1}} & -s_{\alpha_{i-1}}d_i \\ s_{\theta_i}s_{\alpha_{i-1}} & c_{\theta_i}s_{\alpha_{i-1}} & c_{\alpha_{i-1}} & c_{\alpha_{i-1}}d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

2.2 各关节变换矩阵

矩阵 ${}^{0}T_{1}$

$$
{}^{0}T_{1}=\begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad \theta_1=q_1
$$

矩阵 ${}^{1}T_{2}$

$$
{}^{1}T_{2}=\begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s_2 & -c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad \theta_2=q_2-\frac{\pi}{2}
$$

矩阵 ${}^{2}T_{3}$

$$
{}^{2}T_{3}=\begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & a_2 \\ s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad \theta_3=q_3
$$

矩阵 ${}^{3}T_{4}$

$$
{}^{3}T_{4}=\begin{bmatrix} c_4 & -s_4 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ -s_4 & -c_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad \theta_4=q_4
$$

矩阵 ${}^{4}T_{5}$

$$
{}^{4}T_{5}=\begin{bmatrix} c_5 & -s_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s_5 & c_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad \theta_5=q_5
$$

矩阵 ${}^{5}T_{6}$

$$
{}^{5}T_{6} = \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_t \\ -s_6 & -c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \theta_6 = q_6
$$

2.3 复合变换矩阵

矩阵 ${}^{1}T_{3}$

$$
{}^{1}T_{3} = {}^{1}T_{2} \cdot {}^{2}T_{3} = \begin{bmatrix} c_{23} & -s_{23} & 0 & a_2c_2 + a_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s_{23} & -c_{23} & 0 & -a_2s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

矩阵 ${}^{4}T_{6}$

$$
{}^{4}T_{6} = {}^{4}T_{5} \cdot {}^{5}T_{6} = \begin{bmatrix} c_5c_6 & -c_5s_6 & -s_5 & -d_ts_5 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ s_5c_6 & -s_5s_6 & c_5 & d_tc_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

矩阵 ${}^{3}T_{6}$

$$
{}^{3}T_{6} = {}^{3}T_{4} \cdot {}^{4}T_{6} = \begin{bmatrix} n_x^{(36)} & o_x^{(36)} & a_x^{(36)} & p_x^{(36)} \\ n_y^{(36)} & o_y^{(36)} & a_y^{(36)} & p_y^{(36)} \\ n_z^{(36)} & o_z^{(36)} & a_z^{(36)} & p_z^{(36)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

${}^{3}T_{6}$ **元素展开：**

向量	x 分量	y 分量	z 分量
$\vec{n}^{(36)}$	$c_4c_5c_6 - s_4s_6$	s_5c_6	$-s_4c_5c_6 - c_4s_6$
$\vec{o}^{(36)}$	$-c_4c_5s_6 - s_4c_6$	$-s_5s_6$	$s_4c_5s_6 - c_4c_6$
$\vec{a}^{(36)}$	$-c_4s_5$	c_5	s_4s_5
$\vec{p}^{(36)}$	$a_3 - d_tc_4s_5$	$d_4 + d_tc_5$	$d_ts_4s_5$

矩阵 $^1T_6$

$$
{}^1T_6 = {}^1T_3 \cdot {}^3T_6 = \begin{bmatrix} n_x^{(16)} & o_x^{(16)} & a_x^{(16)} & p_x^{(16)} \\ n_y^{(16)} & o_y^{(16)} & a_y^{(16)} & p_y^{(16)} \\ n_z^{(16)} & o_z^{(16)} & a_z^{(16)} & p_z^{(16)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$^1T_6$ 结构展开：

$$
{}^1T_6 = \begin{bmatrix} c_{23}n_x^{(36)} - s_{23}n_y^{(36)} & c_{23}o_x^{(36)} - s_{23}o_y^{(36)} & c_{23}a_x^{(36)} - s_{23}a_y^{(36)} & p_x^{(16)} \\ n_z^{(36)} & o_z^{(36)} & a_z^{(36)} & p_y^{(16)} \\ -s_{23}n_x^{(36)} - c_{23}n_y^{(36)} & -s_{23}o_x^{(36)} - c_{23}o_y^{(36)} & -s_{23}a_x^{(36)} - c_{23}a_y^{(36)} & p_z^{(16)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

位置向量 $\vec{p}^{(16)}$ 展开：

$$
\begin{aligned}
p_x^{(16)} &= c_{23}(a_3 - d_t c_4 s_5) - s_{23}(d_4 + d_t c_5) + a_2 c_2 + a_1 \\
p_y^{(16)} &= d_t s_4 s_5 \\
p_z^{(16)} &= -s_{23}(a_3 - d_t c_4 s_5) - c_{23}(d_4 + d_t c_5) - a_2 s_2
\end{aligned}
$$

2.4 最终正运动学

$$
{}^0T_6 = {}^0T_1 \cdot {}^1T_6 = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

2.4.1 位置向量

$$
p_x = c_1 \left[c_{23}(a_3 - d_t c_4 s_5) - s_{23}(d_4 + d_t c_5) + a_2 c_2 + a_1\right] - s_1 \left[d_t s_4 s_5\right]
$$

$$
p_y = s_1 \left[c_{23}(a_3 - d_t c_4 s_5) - s_{23}(d_4 + d_t c_5) + a_2 c_2 + a_1\right] + c_1 \left[d_t s_4 s_5\right]
$$

$$
p_z = -s_{23}(a_3 - d_t c_4 s_5) - c_{23}(d_4 + d_t c_5) - a_2 s_2 + d_1
$$

2.4.2 旋转矩阵

第一列（法向量 $\vec{n}$）：

$$r_{11} = c_1\left[c_{23}(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - s_{23}s_5c_6\right] - s_1\left[-s_4c_5c_6 - c_4s_6\right]$$

$$r_{21} = s_1\left[c_{23}(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - s_{23}s_5c_6\right] + c_1\left[-s_4c_5c_6 - c_4s_6\right]$$

$$r_{31} = -s_{23}(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - c_{23}s_5c_6$$

第二列（方向向量 $\vec{o}$）：

$$r_{12} = c_1\left[c_{23}(-c_4c_5s_6 - s_4c_6) + s_{23}s_5s_6\right] - s_1\left[s_4c_5s_6 - c_4c_6\right]$$

$$r_{22} = s_1\left[c_{23}(-c_4c_5s_6 - s_4c_6) + s_{23}s_5s_6\right] + c_1\left[s_4c_5s_6 - c_4c_6\right]$$

$$r_{32} = -s_{23}(-c_4c_5s_6 - s_4c_6) + c_{23}s_5s_6$$

第三列（接近向量 $\vec{a}$）：

$$r_{13} = c_1\left[-c_{23}c_4s_5 - s_{23}c_5\right] - s_1\left[s_4s_5\right]$$

$$r_{23} = s_1\left[-c_{23}c_4s_5 - s_{23}c_5\right] + c_1\left[s_4s_5\right]$$

$$r_{33} = s_{23}c_4s_5 - c_{23}c_5$$

> **注：** 旋转矩阵各元素可通过将 ${}^3T_6$ 中的 $n^{(36)}$、$o^{(36)}$、$a^{(36)}$ 代入 ${}^1T_6$ 的表达式，再与 ${}^0T_1$ 相乘得到。

令$\theta_1 = 0, \theta_2 = -90^\circ, \theta_3 = 0, \theta_4 = 0, \theta_5 = 0, \theta_6 = 0$， 最终得到${}^0T_6$为

$$ {}^0T_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & d_4 + d_t + a_1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a_3 + a_2 + d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

三、逆运动学

$$ {}^0T_6 = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = {}^0T_1 \cdot {}^1T_2 \cdot {}^2T_3 \cdot {}^3T_4 \cdot {}^4T_5 \cdot {}^5T_6 $$

3.1 求解 θ_1

步骤1：构建方程

从矩阵方程 $\left({}^0T_1\right)^{-1} \cdot {}^0T_6 = {}^1T_6$ 的 (2,4) 和 (2,3) 元素：

$$\left({}^0T_1\right)^{-1} \cdot {}^0T_6 = \begin{bmatrix} c_1 & s_1 & 0 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = {}^1T_6$$

$$-s_1 p_x + c_1 p_y = d_t(s_4 s_5) \quad ...(1)$$

$$-s_1 a_x + c_1 a_y = s_4 s_5 \quad ...(2)$$

步骤2：消元

将方程(2)代入方程(1)消去 $s_4 s_5$：

$$-s_1 p_x + c_1 p_y = d_t(-s_1 a_x + c_1 a_y)$$

步骤3：整理求解

$$s_1(d_t a_x - p_x) = c_1(d_t a_y - p_y)$$

- **公式1：θ_1 求解公式**

$$\boxed{\theta_1 = \text{atan2}(p_y - d_t a_y,\ p_x - d_t a_x)}$$

> **物理意义**：$(p_x - d_t a_x, p_y - d_t a_y)$ 是腕部中心点在基坐标系XY平面的投影