

# 一、符号定义

## 1.1 MDH参数（常量）

符号	值 (m)	说明
$d_1$	0.342	基座高度
$a_1$	0.040	肩关节偏移
$a_2$	0.275	大臂长度
$a_3$	0.025	小臂偏移
$d_4$	0.280	腕部偏移
$d_t$	0.073	末端工具长度

## 1.2 各关节MDH参数表

关节 $i$	$\alpha(i-1)$	$a(i-1)$	$d_i$	$\theta_{\text{offset}}$	说明
1	0	0	$d_1$	0	基座高度
2	$-90^\circ$	$a_1$	0	$-90^\circ$	肩关节偏移
3	0	$a_2$	0	0	大臂
4	$-90^\circ$	$a_3$	$d_4$	0	小臂、腕部
5	$90^\circ$	0	0	0	腕关节
6	$-90^\circ$	0	$d_t$	0	末端工具

## 1.3 三角函数简写

简写	含义
$c_i$	$\cos(\theta_i)$

简写	含义
$s_i$	$\sin(\theta_i)$
$c_{ij}$	$\cos(\theta_i + \theta_j)$
$s_{ij}$	$\sin(\theta_i + \theta_j)$

## 1.4 末端位姿矩阵

目标位姿矩阵  ${}^0T_6$  定义为：

$${}^0T_6 = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{n} & \vec{o} & \vec{a} & \vec{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

其中：

- $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)^T$ ：法向量 (Normal)
- $\vec{o} = (o_x, o_y, o_z)^T$ ：方向向量 (Orientation)
- $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)^T$ ：接近向量 (Approach)
- $\vec{p} = (p_x, p_y, p_z)^T$ ：位置向量 (Position)

# 二、正运动学

## 2.1 通用齐次变换矩阵 (MDH Convention)

根据Modified DH参数，相邻坐标系间的齐次变换矩阵为：

$${}^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i} & 0 & a_{i-1} \\ s_{\theta_i}c_{\alpha_{i-1}} & c_{\theta_i}c_{\alpha_{i-1}} & -s_{\alpha_{i-1}} & -s_{\alpha_{i-1}}d_i \\ s_{\theta_i}s_{\alpha_{i-1}} & c_{\theta_i}s_{\alpha_{i-1}} & c_{\alpha_{i-1}} & c_{\alpha_{i-1}}d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## 2.2 各关节变换矩阵

矩阵  ${}^0T_1$

$${}^0T_1 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \theta_1 = q_1$$

矩阵  ${}^1T_2$

$${}^1T_2 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s_2 & -c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \theta_2 = q_2 - \frac{\pi}{2}$$

矩阵  ${}^2T_3$

$${}^2T_3 = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & a_2 \\ s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \theta_3 = q_3$$

矩阵  ${}^3T_4$

$${}^3T_4 = \begin{bmatrix} c_4 & -s_4 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ -s_4 & -c_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \theta_4 = q_4$$

矩阵  ${}^4T_5$

$${}^4T_5 = \begin{bmatrix} c_5 & -s_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s_5 & c_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \theta_5 = q_5$$

矩阵  ${}^5T_6$

$${}^5T_6 = \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_t \\ -s_6 & -c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \theta_6 = q_6$$

## 2.3 复合变换矩阵

矩阵  ${}^1T_3$

$${}^1T_3 = {}^1T_2 \cdot {}^2T_3 = \begin{bmatrix} c_{23} & -s_{23} & 0 & a_2c_2 + a_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s_{23} & -c_{23} & 0 & -a_2s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

矩阵  ${}^4T_6$

$${}^4T_6 = {}^4T_5 \cdot {}^5T_6 = \begin{bmatrix} c_5c_6 & -c_5s_6 & -s_5 & -d_ts_5 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ s_5c_6 & -s_5s_6 & c_5 & d_tc_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

矩阵  ${}^3T_6$

$${}^3T_6 = {}^3T_4 \cdot {}^4T_6 = \begin{bmatrix} n_x^{(36)} & o_x^{(36)} & a_x^{(36)} & p_x^{(36)} \\ n_y^{(36)} & o_y^{(36)} & a_y^{(36)} & p_y^{(36)} \\ n_z^{(36)} & o_z^{(36)} & a_z^{(36)} & p_z^{(36)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

${}^3T_6$  元素展开：

向量	x 分量	y 分量	z 分量
$\vec{n}^{(36)}$	$c_4c_5c_6 - s_4s_6$	$s_5c_6$	$-s_4c_5c_6 - c_4s_6$
$\vec{o}^{(36)}$	$-c_4c_5s_6 - s_4c_6$	$-s_5s_6$	$s_4c_5s_6 - c_4c_6$
$\vec{a}^{(36)}$	$-c_4s_5$	$c_5$	$s_4s_5$
$\vec{p}^{(36)}$	$a_3 - d_tc_4s_5$	$d_4 + d_tc_5$	$d_ts_4s_5$

矩阵  ${}^1T_6$

$${}^1T_6 = {}^1T_3 \cdot {}^3T_6 = \begin{bmatrix} n_x^{(16)} & o_x^{(16)} & a_x^{(16)} & p_x^{(16)} \\ n_y^{(16)} & o_y^{(16)} & a_y^{(16)} & p_y^{(16)} \\ n_z^{(16)} & o_z^{(16)} & a_z^{(16)} & p_z^{(16)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

${}^1T_6$  结构展开：

$${}^1T_6 = \begin{bmatrix} c_{23}n_x^{(36)} - s_{23}n_y^{(36)} & c_{23}o_x^{(36)} - s_{23}o_y^{(36)} & c_{23}a_x^{(36)} - s_{23}a_y^{(36)} & p_x^{(16)} \\ n_z^{(36)} & o_z^{(36)} & a_z^{(36)} & p_y^{(16)} \\ -s_{23}n_x^{(36)} - c_{23}n_y^{(36)} & -s_{23}o_x^{(36)} - c_{23}o_y^{(36)} & -s_{23}a_x^{(36)} - c_{23}a_y^{(36)} & p_z^{(16)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

位置向量  $\vec{p}^{(16)}$  展开：

$$\begin{aligned} p_x^{(16)} &= c_{23}(a_3 - d_t c_4 s_5) - s_{23}(d_4 + d_t c_5) + a_2 c_2 + a_1 \\ p_y^{(16)} &= d_t s_4 s_5 \\ p_z^{(16)} &= -s_{23}(a_3 - d_t c_4 s_5) - c_{23}(d_4 + d_t c_5) - a_2 s_2 \end{aligned}$$

## 2.4 最终正运动学

$${}^0T_6 = {}^0T_1 \cdot {}^1T_6 = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### 2.4.1 位置向量

$$\begin{aligned} p_x &= c_1 [c_{23}(a_3 - d_t c_4 s_5) - s_{23}(d_4 + d_t c_5) + a_2 c_2 + a_1] - s_1 [d_t s_4 s_5] \\ p_y &= s_1 [c_{23}(a_3 - d_t c_4 s_5) - s_{23}(d_4 + d_t c_5) + a_2 c_2 + a_1] + c_1 [d_t s_4 s_5] \\ p_z &= -s_{23}(a_3 - d_t c_4 s_5) - c_{23}(d_4 + d_t c_5) - a_2 s_2 + d_1 \end{aligned}$$

### 2.4.2 旋转矩阵

第一列（法向量  $\vec{n}$ ）：

$$r_{11} = c_1 [c_{23}(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - s_{23}s_5c_6] - s_1 [-s_4c_5c_6 - c_4s_6]$$

$$r_{21} = s_1 [c_{23}(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - s_{23}s_5c_6] + c_1 [-s_4c_5c_6 - c_4s_6]$$

$$r_{31} = -s_{23}(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - c_{23}s_5c_6$$

第二列（方向向量  $\vec{o}$ ）：

$$r_{12} = c_1 [c_{23}(-c_4c_5s_6 - s_4c_6) + s_{23}s_5s_6] - s_1 [s_4c_5s_6 - c_4c_6]$$

$$r_{22} = s_1 [c_{23}(-c_4c_5s_6 - s_4c_6) + s_{23}s_5s_6] + c_1 [s_4c_5s_6 - c_4c_6]$$

$$r_{32} = -s_{23}(-c_4c_5s_6 - s_4c_6) + c_{23}s_5s_6$$

第三列（接近向量  $\vec{a}$ ）：

$$r_{13} = c_1 [-c_{23}c_4s_5 - s_{23}c_5] - s_1 [s_4s_5]$$

$$r_{23} = s_1 [-c_{23}c_4s_5 - s_{23}c_5] + c_1 [s_4s_5]$$

$$r_{33} = s_{23}c_4s_5 - c_{23}c_5$$

注：旋转矩阵各元素可通过将  ${}^3T_6$  中的  $n^{(36)}$ 、 $o^{(36)}$ 、 $a^{(36)}$  代入  ${}^1T_6$  的表达式，再与  ${}^0T_1$  相乘得到。

令  $\theta_1 = 0, \theta_2 = -90^\circ, \theta_3 = 0, \theta_4 = 0, \theta_5 = 0, \theta_6 = 0$ ，最终得到  ${}^0T_6$  为

$${}^0T_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & d_4 + d_t + a_1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a_3 + a_2 + d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### 三、逆运动学

$${}^0T_6 = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = {}^0T_1 \cdot {}^1T_2 \cdot {}^2T_3 \cdot {}^3T_4 \cdot {}^4T_5 \cdot {}^5T_6$$

### 3.1 求解 $\theta_1$

#### 步骤1：构建方程

从矩阵方程  $({}^0T_1)^{-1} \cdot {}^0T_6 = {}^1T_6$  的 (2,4) 和 (2,3) 元素：

$$({}^0T_1)^{-1} \cdot {}^0T_6 = \begin{bmatrix} c_1 & s_1 & 0 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = {}^1T_6$$
$$-s_1 p_x + c_1 p_y = d_t(s_4 s_5) \quad \dots (1)$$
$$-s_1 a_x + c_1 a_y = s_4 s_5 \quad \dots (2)$$

#### 步骤2：消元

将方程(2)代入方程(1)消去  $s_4 s_5$ ：

$$-s_1 p_x + c_1 p_y = d_t(-s_1 a_x + c_1 a_y)$$

#### 步骤3：整理求解

$$s_1(d_t a_x - p_x) = c_1(d_t a_y - p_y)$$

#### ◆ 公式1： $\theta_1$ 求解公式

$$\theta_1 = \text{atan2}(p_y - d_t a_y, p_x - d_t a_x)$$

物理意义： $(p_x - d_t a_x, p_y - d_t a_y)$  是腕部中心点在基坐标系XY平面的投影