

一、符号定义

1.1 MDH参数（常量）

符号	值 (m)	说明
d_1	0.342	基座高度
a_1	0.040	肩关节偏移
a_2	0.275	大臂长度
a_3	0.025	小臂偏移
d_4	0.280	腕部偏移
d_t	0.073	末端工具长度

1.2 各关节MDH参数表

关节 i	$\alpha(i-1)$	$a(i-1)$	d_i	θ_{offset}	说明
1	0	0	d_1	0	基座高度
2	-90°	a_1	0	-90°	肩关节偏移
3	0	a_2	0	0	大臂
4	-90°	a_3	d_4	0	小臂、腕部
5	90°	0	0	0	腕关节
6	-90°	0	d_t	0	末端工具

1.3 三角函数简写

简写	含义
$\$c_i\$$	$\$\\cos(\\theta_i)\$$
$\$s_i\$$	$\$\\sin(\\theta_i)\$$
$\$c_{ij}\$$	$\$\\cos(\\theta_i + \\theta_j)\$$
$\$s_{ij}\$$	$\$\\sin(\\theta_i + \\theta_j)\$$

1.4 末端位姿矩阵

目标位姿矩阵 $\${}^0T_6\$$ 定义为：

```
 $$ {}^0T_6 = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{n} & \vec{o} & \vec{a} & \vec{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

```

其中：

- $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)^T$: 法向量 (Normal)
 - $\vec{o} = (o_x, o_y, o_z)^T$: 方向向量 (Orientation)
 - $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)^T$: 接近向量 (Approach)
 - $\vec{p} = (p_x, p_y, p_z)^T$: 位置向量 (Position)
-

二、正运动学

2.1 通用齐次变换矩阵 (MDH Convention)

根据Modified DH参数，相邻坐标系间的齐次变换矩阵为：

$$\begin{aligned} \{}^i T_{i-1} = \begin{pmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i} & 0 & a_{i-1} \\ s_{\theta_i} & c_{\theta_i} & 0 & a_{i-1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2.2 各关节变换矩阵

矩阵 $\{}^0 T_1\}$

$$\begin{aligned} \{}^0 T_1 = \begin{pmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \theta_1 = q_1 \end{aligned}$$

矩阵 $\{}^1 T_2\}$

$$\begin{aligned} \{}^1 T_2 = \begin{pmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & a_1 \\ s_2 & c_2 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \theta_2 = q_2 - \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

矩阵 $\{}^2 T_3\}$

$$\begin{aligned} \{}^2 T_3 = \begin{pmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & a_2 \\ s_3 & c_3 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \theta_3 = q_3 \end{aligned}$$

矩阵 $\{}^3 T_4\}$

$$\begin{aligned} \{}^3 T_4 = \begin{pmatrix} c_4 & -s_4 & 0 & a_3 \\ s_4 & c_4 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \theta_4 = q_4 \end{aligned}$$

矩阵 $\{}^4 T_5\}$

$$\begin{aligned} \{}^4 T_5 = \begin{pmatrix} c_5 & -s_5 & 0 & a_4 \\ s_5 & c_5 & 0 & a_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \theta_5 = q_5 \end{aligned}$$

矩阵 $\{}^5 T_6\}$

$$\begin{aligned} \{}^5 T_6 = \begin{pmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & a_5 \\ s_6 & c_6 & 0 & a_5 \\ 0 & 0 & 1 & d_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \theta_6 = q_6 \end{aligned}$$

2.3 复合变换矩阵

矩阵 $\{ \}^1 T_{\{3\}}$

$$\begin{aligned} \$\$ & \{0\}^1 T_{\{3\}} = \{0\}^1 T_{\{2\}} \cdot \dots \cdot \{0\}^2 T_{\{3\}} = \begin{bmatrix} c_{\{23\}} & -s_{\{23\}} & 0 & a_2 c_{\{2\}} + a_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -s_{\{23\}} & -c_{\{23\}} & 0 \\ 0 & -a_2 s_{\{2\}} & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \$\$$$

矩阵 $\{ \}^4 T_{\{6\}}$

$$\begin{aligned} \text{\$\$ } & \{0\}^4 T_{\{6\}} = \{0\}^4 T_{\{5\}} \cdot \{0\}^5 T_{\{6\}} = \begin{bmatrix} c_5 c_6 & -c_5 s_6 & -s_5 & -d_t s_5 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ 0 & s_5 c_6 & -s_5 s_6 & c_5 + d_t c_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{\$\$} \end{aligned}$$

矩阵 $\{ \}^3 T_{\{6\}}$

```
 $$ \{0\}^3 T_{\{6\}} = \{0\}^3 T_{\{4\}} \cdot \{0\}^4 T_{\{6\}} = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

```

`${}^3T_{\{6\}}` 元素展开：

| 向量 | x 分量 | y 分量 | z 分量 | :-----| :-----| :-----| :-----|
 | \$\\vec{n}^{(36)}\$ | \$c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6\$
 | \$s_5 c_6\$ | \$-s_4 c_5 c_6 - c_4 s_6\$ | \$\\vec{o}^{(36)}\$ | \$-c_4 c_5 s_6 - s_4 c_6\$ | \$-s_5 s_6\$ | \$s_4 c_5 s_6 - c_4 c_6\$ | \$\\vec{a}^{(36)}\$ | \$-c_4 s_5\$ | \$c_5\$ | \$s_4 s_5\$ | \$\\vec{p}^{(36)}\$ | \$a_3 - d_t c_4 s_5\$ | \$d_4 + d_t c_5\$ | \$d_t s_4 s_5\$ |

矩阵 $\{0\}^T \cdot \{6\}$

```
 $$ \{0\}^1 T_{\{6\}} = \{0\}^1 T_{\{3\}} \cdot \{0\}^3 T_{\{6\}} = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x \\ p_x & n_y & o_y \\ p_y & n_z & o_z \\ p_z & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

```

`${}^{\{1\}}T_{\{6\}}` 结构展开：

```
 $$ \{ }^1T_{\{6} = \begin{bmatrix} c_{\{23} n_{\{x}^{(36)} - s_{\{23} n_{\{y}^{(36)} & c_{\{23} o_{\{x}^{(36)} - s_{\{23} \\ o_{\{y}^{(36)} & c_{\{23} a_{\{x}^{(36)} - s_{\{23} a_{\{y}^{(36)} & p_{\{x}^{(16)} \ n_{\{z}^{(36)} & o_{\{z}^{(36)} & a_{\{z}^{(36)} \\ & p_{\{y}^{(16)} \ -s_{\{23} n_{\{x}^{(36)} - c_{\{23} n_{\{y}^{(36)} & -s_{\{23} o_{\{x}^{(36)} - c_{\{23} o_{\{y}^{(36)} & -s_{\{23} \\ a_{\{x}^{(36)} - c_{\{23} a_{\{y}^{(36)} & p_{\{z}^{(16)} \ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$
```

位置向量 $\vec{p}^{(16)}$ 展开：

```
 $$ \begin{aligned} p_x^{(16)} &= c_{23}(a_3 - d_t c_4 s_5) - s_{23}(d_4 + d_t c_5) + a_2 c_2 + a_1 \\ p_y^{(16)} &= d_t s_4 s_5 \quad p_z^{(16)} = -s_{23}(a_3 - d_t c_4 s_5) - c_{23}(d_4 + d_t c_5) - a_2 s_2 \\ \end{aligned} $$
```

2.4 最端正运动学

```
 $$ \{ }^0 T_{\{6} = \{ }^0 T_{\{1} \cdot \{ }^1 T_{\{6} = \begin{bmatrix} r_{\{11} & r_{\{12} & r_{\{13} & p_x \\ r_{\{21} & r_{\{22} & r_{\{23} & p_y \\ r_{\{31} & r_{\{32} & r_{\{33} & p_z \end{bmatrix} \quad 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

```

2.4.1 位置向量

$$\begin{aligned} p_x &= c_1 \left[c_{23}(a_3 - d_t c_4 s_5) - s_{23}(d_4 + d_t c_5) + a_2 c_2 + a_1 \right] - s_1 \left[d_t s_4 s_5 \right] \\ p_y &= s_1 \left[c_{23}(a_3 - d_t c_4 s_5) - s_{23}(d_4 + d_t c_5) + a_2 c_2 + a_1 \right] + c_1 \left[d_t s_4 s_5 \right] \\ p_z &= -s_{23}(a_3 - d_t c_4 s_5) - c_{23}(d_4 + d_t c_5) - a_2 s_2 + d_1 \end{aligned}$$

2.4.2 旋转矩阵

第一列 (法向量 \vec{n}) :

$$\begin{aligned} r_{11} &= c_1 \left[c_{23}(c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6) - s_{23} s_5 c_6 \right] - s_1 \left[-s_4 c_5 c_6 - c_4 s_6 \right] \\ r_{21} &= s_1 \left[c_{23}(c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6) - s_{23} s_5 c_6 \right] + c_1 \left[-s_4 c_5 c_6 - c_4 s_6 \right] \\ r_{31} &= -s_{23}(c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6) - c_{23} s_5 c_6 \end{aligned}$$

第二列 (方向向量 \vec{o}) :

$$\begin{aligned} r_{12} &= c_1 \left[c_{23}(-c_4 c_5 s_6 - s_4 c_6) + s_{23} s_5 s_6 \right] - s_1 \left[s_4 c_5 s_6 - c_4 c_6 \right] \\ r_{22} &= s_1 \left[c_{23}(-c_4 c_5 s_6 - s_4 c_6) + s_{23} s_5 s_6 \right] + c_1 \left[s_4 c_5 s_6 - c_4 c_6 \right] \\ r_{32} &= -s_{23}(-c_4 c_5 s_6 - s_4 c_6) + c_{23} s_5 s_6 \end{aligned}$$

第三列 (接近向量 \vec{a}) :

$$\begin{aligned} r_{13} &= c_1 \left[-c_{23} c_4 s_5 - s_{23} c_5 \right] - s_1 \left[s_4 s_5 \right] \\ r_{23} &= s_1 \left[-c_{23} c_4 s_5 - s_{23} c_5 \right] + c_1 \left[s_4 s_5 \right] \\ r_{33} &= s_{23} c_4 s_5 - c_{23} c_5 \end{aligned}$$

注： 旋转矩阵各元素可通过将 $\{}^3T_{\{6\}}$ 中的 $n^{\{36\}}$ 、 $o^{\{36\}}$ 、 $a^{\{36\}}$ 代入 $\{}^1T_{\{6\}}$ 的表达式，再与 $\{}^0T_{\{1\}}$ 相乘得到。

令 $\theta_1 = 0^\circ$, $\theta_2 = -90^\circ$, $\theta_3 = 0^\circ$, $\theta_4 = 0^\circ$, $\theta_5 = 0^\circ$, $\theta_6 = 0^\circ$ ，最终得到 $\{}^0T_{\{6\}}$ 为

$$\begin{aligned} \{}^0T_{\{6\}} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & d_4 + d_t + a_1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & a_3 + a_2 + d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

三、逆运动学

$$\begin{aligned} \{}^0T_{\{6\}} &= \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x & n_y & o_y & a_y & p_y & n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -s_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \{}^0T_{\{1\}} \cdot \{}^1T_{\{2\}} \cdot \{}^2T_{\{3\}} \cdot \{}^3T_{\{4\}} \cdot \{}^4T_{\{5\}} \cdot \{}^5T_{\{6\}} \end{aligned}$$

3.1 求解 θ_1

步骤1：构建方程

从矩阵方程 $\left(\{}^0T_{\{1\}}\right)^{-1} \cdot \{}^0T_{\{6\}} = \{}^1T_{\{6\}}$ 的 (2,4) 和 (2,3) 元素：
 $\left(\{}^0T_{\{1\}}\right)^{-1} \cdot \{}^0T_{\{6\}} = \begin{bmatrix} c_1 & s_1 & 0 & 0 & -s_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
 $\begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x & n_y & o_y & a_y & p_y & n_z & o_z & a_z & p_z \end{bmatrix} = \{}^1T_{\{6\}}$

$$-s_1 p_x + c_1 p_y = d_t(s_4 s_5) \quad \text{(1)}$$

$$\$ \$ -s_1a_x + c_1a_y = s_4s_5 \quad \text{\text{quad}} \text{\text{text}\{(2)\}} \$ \$$$

步骤2：消元

将方程(2)代入方程(1)消去 s_4s_5 ：

$$\$ \$ -s_1p_x + c_1p_y = d_t(-s_1a_x + c_1a_y) \$ \$$$

步骤3：整理求解

$$\$ \$ s_1(d_ta_x - p_x) = c_1(d_ta_y - p_y) \$ \$$$

◆ 公式1： θ_1 求解公式

$$\$ \$ \boxed{\theta_1 = \text{atan2}(p_y - d_ta_y, p_x - d_ta_x)} \$ \$$$

物理意义： $(p_x - d_ta_x, p_y - d_ta_y)$ 是腕部中心点在基坐标系XY平面的投影
