Date . . No.

線形方程式$Ax=b$を、数値計算で解く方法（直接法と反復法の観点から）
それらの方法を利用する条件、方法の特徴（05,06,07,08）

係数行列Aが正則行列の場合には、直接法と繰り返し法があり、Aが正則でない場合には代表的なものとして特異値分解による方法がある

直接法は、係数行列の余分な項を行列の基本演算によって消去していき、対角化することで解を得る。Aを上三角行列化（前進消去）し、下から順に代入して解を得る（後退代入）のがGaussの消去法で、n次の線形方程式の場合、$n^3/3$程度の計算量を要する。これに対し、係数行列Aを単位行列になるように変形していくのがGauss-Jordanの消去法で、$n^3/2$程度の計算量を要する。またLU分解法も直接法の1つで、これは係数行列Aを上三角行列Uと下三角行列Lに分解し、方程式を2つの式に分けて前進代入、後退代入を行うことによって解を求める方法である。LU分解後の計算量は$n^3/3$程度だが、LU分解に多くの計算を要するため、同じ係数行列Aに対して複数の方程式を解く場合に有効である

反復法は、Jacobi法に代表されるように、行列演算を繰り返すことで漸近的に解を得ようとするものである。AをLDU分解し繰り返し計算のための漸化式を得るのがJacobi法で、Jacobi法の収束性を改善したものにGauss-Seidel法・Successive Relaxation法がある。また、反復計算の度に解の探索方向を修正するConjugate Gradient法があるが、これは係数行列Aが正則である場合に限られる。反復法は直接法に比べて少ない計算量で解が得られるが、常に計算が収束するとは限らない

特異値分解は$\Sigma=U^TAV$が対角化行列になるようにU,Vを定め、係数行列Aの擬似逆行列を計算し解を求める。最小2乗解が求まる

No. Date . .

・Condition Number (06, 08)

・線形方程式 $Ax=b$ を数値計算で解く際の係数行列 A の変化に対する解の感度を評価するもの

・値が大きい場合、A の微小変化が解に非常に大きく影響し、解の信頼性が悪くなる

$$k(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$$

・マトリクスの性質を調べる尺度 (05, 07)

(i) ランク

・線形方程式が解を持つか否かにおいて重要

・ランクの値がマトリクスの次元と等しい場合、方程式は一意な解をもつが、小さい場合(ランク落ち)変数に対して式が少なくなり、方程式は一意な解をもたない

(ii) ノルム

マトリクスの大きさを評価

Frobenius ノルム、Natural ノルム、P ノルムなどが存在

(iii) 固有値、固有ベクトル

マトリクスが列ベクトルに作用するとき、どの方向にどれだけの大きさ影響するのかを示すもの

Date . . No.

(1) 固有値問題とは？また，固有値や固有モードを計算すべき理由は？
(2) 固有値問題を解く方法は？ (05〜08)

(1) 固有値問題とは，あるマトリクスに対して固有値・固有ベクトルを求める問題のこと，
－数学的観点－
の性質は座標系に依らないので，行列の固有空間を定義でき，行列の対角化等に応用される

－力学的観点－
求めることで，ある物理現象を単純な状態に分解して考えることができる
ex) 2階のテンソルである応力テンソルの固有値は，主応力を示し，これによりその材料がどの方向にどの程度強いのかを知ることができる
振動問題では固有値が固有振動数を示し，どのような振動モードが重なり合って振動しているのかを知ることができる．

(2) (i) 対象の行列が対称な場合
代表的なものにJacobi法がある．適当な回転行列を左右から作用させて行列の非対角成分を0に近づけていくことで，全ての固有値を対角成分として得る．しかし大きな行列の場合，計算量が非常に大きくなってしまう．
計算を高速化するため，直接対角化するのではなく，一度三重対角化し，それから対角化する方法がある．三重対角化には，行列の各列に鏡像変換を繰り返すことで三重対角成分以外0にするHouseholder法などがある．三重対角化後，固有値を求めるにはJacobi法やQR法がある

No. Date . .

(iii) 対象の行列が非対象の場合

Power法が代表的. 任意の列ベクトルに対して対象の行列をくり返し作用させることで漸近的に最大固有値と、それに対応する固有ベクトルを求める方法. また対象の行列の逆行列を繰り返し作用させることで最小固有値とそれに対応する固有ベクトルを求める方法をInverse-Power法という

全ての固有値を求める場合は. 回転行列を用いて上三角行列化するGivens Householder法がある

Date . . No.

(1) Lagrange補間法とSpline補間法の相違を説明せよ
(2) Bezier曲線とB-spline曲線の違いを説明せよ.

(1) Lagrange補間… n+1個のデータが得られたとき、この全ての点を通る関数をn次の多項式の形で求めるもの

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$
$$= L_0(x) f_0 + L_1(x) f_1 + \cdots + L_n(x) f_n, \quad f_i = f(x_i)$$
$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{(x_i - x_j)}$$

補間の点数が増えてくると、補間の関数が振動してしまう問題点がある ⇒ データ点数が多い場合は使えないことが多い

Spline補間法 … 補間する領域をデータ毎に区間(サブセット)に区切り、その区間ごとに低次の多項式で近似して補間を行う。境界で導関数が連続になるように区間内を3次関数で補間する3次Spline補間がよく用いられる.

Spline補間では補間関数が振動することを防げる
しかし、厳密に連続な関数にはならない
1つの曲線が

$$Y_i(x) = a_i (x - x_i)^3 + b_i (x - x_i)^2 + c_i (x - x_i) + d_i$$
(3n-2本)

$$Y''_0(x_0) = Y''_{n-1}(x_n) = 0$$

(2)

(1) 常微分方程式を解く方法について、陽解法・陰解法の観点から説明せよ

(2) Runge-Kutta法について説明せよ (07)

(1) $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ を一般に次のように差分化する

$$\frac{dy}{dx} \fallingdotseq \frac{y_{i+1}-y_i}{h} = f(x,y) \Rightarrow y_{i+1} = y_i + \phi h$$

ϕ：勾配

h：ステップサイズ

陽解法：$\phi = \frac{dy_i}{dx} = f(x_i, y_i) \rightarrow y_{i+1} = y_i + \frac{dy_i}{dx}h$

陰解法：$\phi = \frac{dy_{i+1}}{dx} = f(x_{i+1}, y_{i+1}) \rightarrow y_{i+1} = y_i + \frac{dy_{i+1}}{dx}h$

陽解法

…現在のステップiにおける値を基にして次のステップ$i+1$の値を代数的に求め、それを繰り返していく方法。

ステップサイズhを大きくとってしまうと計算結果が発散してしまうことがあるのでhはCourant条件を満たす必要がある

陰解法

…次のステップにおける値を仮定して、その値が正しいかどうかを差分方程式を使って調べ、誤差がゼロになるように仮定値を収束させていく方法。

1つの時間ステップあたりの計算量は多くなるが、無条件で計算が収束するため、ステップサイズを大きくすることができる。

(2) 陽解法の代表的なものはEuler法で差分方程式は以下のようになる

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h$$

これを改良したものがRunge-Kutta法であり代表的な4次精度のものは次式のようになる

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 3k_3 + k_4)h$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h,\ y_i + \frac{1}{2}k_1 h\right)$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h,\ y_i + \frac{1}{2}k_2 h\right)$$

$$k_4 = f(x_i + h,\ y_i + k_3 h)$$

Euler法に比べ、RK法は複数の点の勾配値を使って精度を上げる
計算量がやや多くなる

2.1.2 差分表式の作り方

・$u=u(x)$のテイラー展開

$$u(x+\Delta x)=u(x)+\Delta x u'(x)+\frac{1}{2}(\Delta x)^2 u''(x)+\frac{1}{6}(\Delta x)^3 u'''(x)+\cdots \quad (1)$$

(1)でΔxの代わりに$-\Delta x$を代入すると,

$$u(x-\Delta x)=u(x)-\Delta x u'(x)+\frac{1}{2}(\Delta x)^2 u''(x)-\frac{1}{6}(\Delta x)^3 u'''(x)+\cdots \quad (2)$$

(1)で, $x=x_n=n\Delta x$とおくと, $x+\Delta x=x_n+\Delta x=(n+1)\Delta x=x_{n+1}$

$$u'(x_n)=\frac{u(x_{n+1})-u(x_n)}{\Delta x}+O(\Delta x)$$

※u_nは$u(x_n)$の「近似値」

$$\sim \frac{u_{n+1}-u_n}{\Delta x}$$ (1次精度の「前進差分」)

(2)は $x-\Delta x=x_n-\Delta x=(n-1)\Delta x=x_{n-1}$

$$u'(x_n)=\frac{u(x_n)-u(x_{n-1})}{\Delta x}+O(\Delta x)$$

$$\sim \frac{u_n-u_{n-1}}{\Delta x}$$ (1次精度の「後退差分」)

<u>2次精度は?</u>

(1)−(2)より, $O((\Delta x)^2)$の項を消去して,

$$u'(x_n)=\frac{u(x+\Delta x)-u(x-\Delta x)}{2\Delta x}+O(\Delta x)^2$$

$$\sim \frac{u_{n+1}-u_{n-1}}{2\Delta x}$$ (2次精度の「中心差分」)

<u>2階微分は?</u>

(1)+(2)より, $u'(x)$の項を消去して,

$$u''(x_n)=\frac{u(x_{n+1})-2u(x_n)+u(x_{n-1})}{(\Delta x)^2}+O(\Delta x)^2$$

$$\sim \frac{u_{n+1}-2u_n+u_{n-1}}{(\Delta x)^2}$$ (2次精度の「中心差分」)

<u>$u'(x)$に対する3次精度の表式は?</u>

$$u(x+\Delta x)=u(x)+\Delta x u'(x)+\frac{1}{2}(\Delta x)^2 u''(x)+\frac{1}{6}(\Delta x)^3 u'''(x)+\cdots \quad (1)$$

$$u(x-\Delta x)=u(x)-\Delta x u'(x)+\frac{1}{2}(\Delta x)^2 u''(x)-\frac{1}{6}(\Delta x)^3 u'''(x)+\cdots \quad (2)$$

(1),(2)に加えて(1)で$\Delta x\to 2\Delta x$を代入した,

$$u(x+2\Delta x)=u(x)+2\Delta x u'(x)+2(\Delta x)^2 u''(x)+\frac{4}{3}(\Delta x)^3 u'''(x)+\cdots \quad (3)$$

(1)×a+(2)×b+(3)×cを作り, $(\Delta x)^2u''$, $(\Delta x)^3u'''$が消えるようにする.

$(\Delta x)^2u''$の係数$=0$: $\Rightarrow \frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b+2c=0$

$(\Delta x)^3u'''$の係数$=0$: $\Rightarrow \frac{1}{6}a-\frac{1}{6}b+\frac{4}{3}c=0$

a, b, c の比を求めるので，簡単のため $a=6$ とすると，
$b=-2,\ c=1$

結局，$(1)\times 6+(2)\times(-2)+3\times 1$ は，

$$6u(x+\Delta x)-2u(x-\Delta x)-u(x+2\Delta x)$$
$$=3u(x)+6\Delta x\,u'(x)+O((\Delta x)^4)$$

$$u'(x)=\frac{6u(x+\Delta x)-2u(x-\Delta x)-u(x+2\Delta x)-3u(x)}{6\Delta x}+O((\Delta x)^3)$$

$$\therefore\quad u'(x)\sim\frac{-u_{n+2}+6u_{n+1}-3u_n-2u_{n-1}}{6\Delta x}$$

と近似できる．

$u'(x)$ に対する4次精度の表式？

$$u(x+\Delta x)=u(x)+\Delta x\,u'(x)+\frac{1}{2}(\Delta x)^2u''(x)+\frac{1}{6}(\Delta x)^3u'''(x)+\cdots \quad (1)$$
$$u(x-\Delta x)=u(x)-\Delta x\,u'(x)+\frac{1}{2}(\Delta x)^2u''(x)-\frac{1}{6}(\Delta x)^3u'''(x)+\cdots \quad (2)$$
$$u(x+2\Delta x)=u(x)+2\Delta x\,u'(x)+2(\Delta x)^2u''(x)+\frac{4}{3}(\Delta x)^3u'''(x)+\cdots \quad (3)$$

(1), (3) に加えて，(1) で $\Delta x\to-2\Delta x$ を代入．

$$u(x-2\Delta x)=u(x)-2\Delta x\,u'(x)+2(\Delta x)^2u''(x)-\frac{4}{3}(\Delta x)^3u'''(x)+\cdots \quad (4)$$

$(1)\times a+(2)\times b+(3)\times c+(4)\times d$ を作り，$(\Delta x)^2u''$, $(\Delta x)^3u'''$, $(\Delta x)^4u''''$ が消えるようにする。

$(\Delta x)^2u''(x)$ の係数 $=0$ $\Rightarrow \frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b+2c+2d=0$
$(\Delta x)^3u'''(x)$ の係数 $=0$ $\Rightarrow \frac{1}{6}a-\frac{1}{6}b+\frac{4}{3}c-\frac{4}{3}d=0$
$(\Delta x)^4u''''(x)$ の係数 $=0$ $\Rightarrow \frac{1}{24}a+\frac{1}{24}b+\frac{2}{3}c+\frac{2}{3}d=0$

$\therefore\ a:b:c:d=8:-8:-1:1$

$(1)\times 8+(2)\times(-8)+(3)\times(-1)+(4)\times 1$ より，

$$8u(x+\Delta x)-8u(x-\Delta x)-u(x+2\Delta x)+u(x-2\Delta x)=12(\Delta x)u'(x)+O((\Delta x)^5)$$

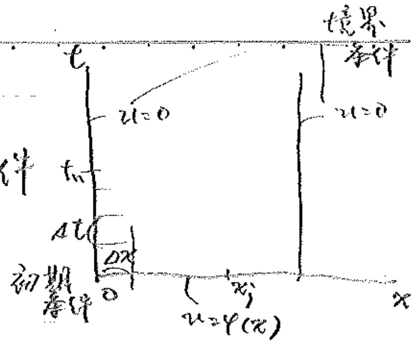
$$u'(x)=\frac{-u(x+2\Delta x)+8u(x+\Delta x)-8u(x-\Delta x)+u(x-2\Delta x)}{12\Delta x}+O((\Delta x)^4)$$

$$\therefore\quad u'(x)=\frac{-u_{n+2}+8u_{n+1}-8u_{n-1}+u_{n-2}}{12\Delta x}$$

2.2. 偏微分方程式．

2.2.1. 初期値境界値問題の一例．(熱伝導方程式)

$u=u(x,t)$ （x：空間関数，t：時間関数）
についての方程式



$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (t>0,\ 0<x<1) \quad \cdots (1)$$

$u(x,0)=\varphi(x)$ $(0<x<1)$：初期条件

$u(0,t)=0,\ u(1,t)=0$ $(t>0)$：境界条件

$x_j = j\Delta x$ $(j=0,1,\cdots,J)$

$t_n = n\Delta t$ $(n=0,1,\cdots)$

$u(x_j, x_n)$ が知りたい $\longrightarrow$ 近似値 u_j^n を計算.

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t} = \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} \quad \cdots\cdots \quad (2)\text{で近似}$$

(時間tについて1次精度の前進差分(オイラー法)，座標xについて，2次精度の中心差分)

これを書き直すと差分方程式

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\left(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n\right) \quad \cdots \quad (3)$$

$u_j^0 = \varphi(j\Delta x)$ $(j=1,2,\cdots,J-1)$

$u_n^0 = 0$, $u_J^n = 0$ $(n=0,1,2,\cdots)$ となる.

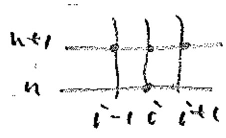
方程式(3)において u_j^{n+1} $(j=1,2,\cdots,J-1)$ がそれぞれ単独で前の時刻でのuの近似値から計算できる.

⇒ 陽解法あるいは「陽」の方程式

これに対し，差分方程式

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\left(u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}\right) \quad \cdots \quad (4)$$

右辺が $t=(n+1)\Delta t$ での値を含む.



⇒ u_j^{n+1} $(j=1,2,\cdots,J-1)$ が単独では解けない

⇒ 同時刻での値 u_j^{n+1} $(j=1,2,\cdots,J-1)$
(J−1個の方程式)を連立させて解く必要がある.

⇒ 陰解法，「陰」方程式.

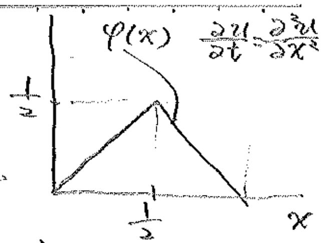
No. Date . .

6/2

2.2.2 数値解の例

$$\varphi(x)=\begin{cases}x & (0\le x\le \frac{1}{2})\\ 1-x & (\frac{1}{2}\le x\le 1)\end{cases}$$

の時の差分方程式(2) or (3)の解



第4図 $\Delta x=\frac{1}{8},\ \Delta t=\frac{1}{160}\ \left(\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}=0.4\right)$

第6図 $\Delta x=\frac{1}{16},\ \Delta t=\frac{1}{320}\ \left(\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}=0.8>\frac{1}{2}\right)$

⇒ 結果×（格子を相似形 $\frac{\Delta t}{\Delta x}=$ 一定 $=\frac{1}{20}$ のまま小さくした）

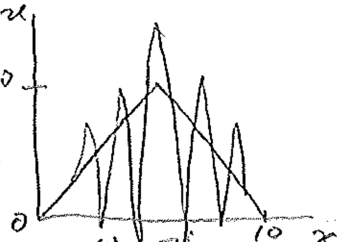
第7図 $\Delta x=\frac{1}{16},\ \Delta t=\frac{1}{640}\ \left(\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}=0.4\right)$

⇒ 結果○（格子を $\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}=0.4$ のまま小さくした）.
（このとき格子は偏平（$\frac{\Delta t}{\Delta x}=\frac{1}{40}<\frac{1}{20}$）になるので、
より広い x の範囲の情報を取り入れることになる）.

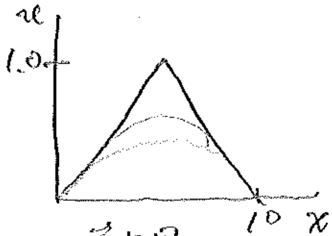
第8図 $\Delta x=\frac{1}{8},\ \Delta t=\frac{3}{320}\ \left(\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}=0.6\right)$

⇒ $\Delta x=\frac{1}{16},\ \Delta t=\frac{3}{1280}\ \left(\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}=0.6\right)$

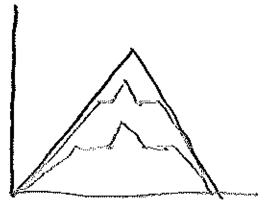
（このとき $\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}=$ 一定だが、結果はもっと悪くなる.）



第6図



第7図



第8図(a)

実は陽解法(2) or (3)においては $\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\le$ でないと×.
⇒ 実は「解いている方程式の性質」（今の場合、熱伝導方程式）を反映.（熱伝導方程式では、初期条件の効果が瞬時に全領域に伝わる（第5図参照）ので、できるだけ広い x の範囲の情報をとりいれることが必要）

一方、陰解法(4)は、Δt 進めるには計算量が増える（連立方程式を解く必要あり）が、実は無条件安定（$\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$ は任意にとって良い）というメリットあり.
⇒ これはすべての x における情報を使っているためと解釈できる.

3、差分法による偏微方の解法 ― 非定常問題

3.1、差分方程式の解が微方の解に収束する条件

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L(u) \quad \cdots\ (1)$$

（L: xに関する定数係数の線形微分演算子、
例えば、$L = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ ⟶ 熱伝導方程式）

(1)の厳密解 $u(x,t)$ の点 $(x_j, t_n) = (j\Delta x, n\Delta t)$ における
(x_j, t_n) に対する近似値 u_j^n に対し、
差分方程式 $u_j^{n+1} = S(\Delta x, \Delta t)u_j^n \quad \cdots\ (2)$
を作ったとする。

このとき、(2)は u_j^n を厳密解 $u(j\Delta x, n\Delta t)$ で置きかえてから、
$\Delta x \to 0$, $\Delta t \to 0$ の極限をとったとき、(1)と一致しなければならない。

⟺「$\Delta x \to 0$, $\Delta t \to 0$ の時、$\Delta x = h(\Delta t)$ （$\Delta t \to 0$ で、$h(\Delta t) \to 0$）
の関係を設定したとする。このとき、
$u(x, t+\Delta t) - S(h(\Delta t), \Delta t)u(x,t) = o(\Delta t)$
（$= O((\Delta t)^{p+1})$ のとき、p次精度 という。
ただし、$o(\Delta t)$ は、Δt のオーダーよりも小さいことを表す。
例えば、$o(\Delta t) = O((\Delta t)^2)$）
が成立するならば、差方 $u_j^{n+1} = S(h(\Delta t), \Delta t)u_j^n$ は微方(1)
に適合しているという。」

$\Delta x = h(\Delta t)$

$\frac{\Delta t}{\Delta x} = \text{const.} \longrightarrow \Delta x = \underbrace{c\Delta t}_{\text{1次精度}} = h(\Delta t)$

$\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} = \text{const.} \longrightarrow \Delta x = \left(\frac{\Delta t}{c}\right)^{\frac{1}{2}} = h(\Delta t)$

$o(\Delta t) = O(\Delta t)^\alpha \quad (\alpha > 1)$

$\Delta t \to 0$ のとき→ Δt よりも早く0に近づく $= O(\Delta t)^{1+\beta} \quad (\beta > 0)$

ex.) $u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\left(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n\right)$ は,
$\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} = r$ = (定数) のもとで, $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ に適合.
u_j^n を $u(x_j, t_n)$ で置き換え, $x_j \to x$, $t_n \to t$ と書くと,

$$u(x, t+\Delta t) = u(x,t) + \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\left(u(x+\Delta x, t) - 2u(x,t) + u(x-\Delta x, t)\right) \cdots (3)$$

$$\left(= S(\Delta x, \Delta t)\, u(x,t)\right)$$

これが, $\Delta t \to 0$ $(\Delta x \to 0)$ で元の方程式と一致する必要あり.

$$\begin{aligned}(3)\text{の(右辺)} &= u(x,t) + \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\Big[u(x,t) + \Delta x\, u_x + \frac{1}{2}(\Delta x)^2 u_{xx} + \frac{1}{6}(\Delta x)^3 u_{xxx} \\ &\quad + \frac{1}{24}(\Delta x)^4 u_{xxxx} + \frac{1}{120}(\Delta x)^5 u_{xxxxx} - 2u(x,t) + u(x,t) \\ &\quad - \Delta x\, u_x + \frac{1}{2}(\Delta x)^2 u_{xx} - \frac{1}{6}(\Delta x)^3 u_{xxx} + \frac{1}{24}(\Delta x)^4 u_{xxxx} - \frac{1}{120}(\Delta x)^5 u_{xxxxx} \\ &\quad + O((\Delta x)^6)\Big] \\ &= u(x,t) + \Delta t\, u_{xx} + \frac{1}{12}\Delta t (\Delta x)^2 u_{xxxx} + O(\Delta t (\Delta x)^4)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(3)\text{の(左辺)} &= u(x,t) + \Delta t\, u_t + \frac{1}{2}(\Delta t)^2 u_{tt} + O((\Delta t)^3) \\ &= u(x,t) + \Delta t\, u_{xx} + \frac{1}{2}(\Delta t)^2 u_{xxxx} + O((\Delta x)^6)\end{aligned}$$

結局, $u(x, t+\Delta t) - S(\Delta x, \Delta t)\, u(x,t)$

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{2}(\Delta t)^2\left(1 - \frac{1}{6r}\right) u_{xxxx} + O((\Delta t)^3) \\ &= o(\Delta t) \ :\ \text{適合}\end{aligned}$$

$p = 1$ なので, 1次精度
ただし, $r = \frac{1}{6}$ の時のみ, $p = 2$ (2次精度(以上))

- 適合していても, 差分の解がもとの方程式に収束するとは限らない $\Longrightarrow$ 例(2.2.2) 第6図

- 収束する条件は?
  時刻 t_n $(= n\Delta t)$ を固定して, $\Delta t \to 0$ に(きざみを細かく)した時に, (このときステップ数 $n \to \infty$)
  誤差 $\varepsilon_j^n \equiv u_j^n - u(x_j, t_n) \to 0$ になること,

⟹ Laxの同値定理

偏微分方程式 $\frac{\partial u}{\partial t}=Lu$ に適合する差分スキーム $v^{n+1}=Sv^n$ が与えられ，$\Delta x=h(\Delta t)$（ただし $\Delta t\to 0$ のとき，$h(\Delta t)\to 0$）の関係があるとき，この差分の解がもとの微分方程式の解に収束する必要十分条件は，

「差分演算子 S の n 乗 S^n のノルム（拡大率）$\|S^n\|$ に対して $\|S^n\|\leq C$ となるある定数 C が存在すること。」
（ただし，$0\leq n\Delta t\leq T$（T：有限）をみたすどのような $n, \Delta t$ に対してもこれが成立しなければいけない，すなわち $\Delta t\to 0$ として，$n\to\infty$ となっても，ということ。）

この条件がみたされる差分スキームは安定であるという。⟹ すなわち，適合性＋安定性 → 収束性

3.2. 安定条件の具体的な表現 ―フーリエ分解の方法―

6/9

差分方程式 $u_j^{n+1}=S(\Delta x,\Delta t)u_j^n$ ――― (1)
において，$S=\sum_m C_m T^m$　Tは平行移動演算子 $Tf(x)=f(x+\Delta x)$

このとき，特解 $u_j^n=g^n e^{i\xi j\Delta x}$ ――― (2)
ξ：波数，g：増幅率（Δt 進むと g 倍）

を(1)に代入，

$$g^{n+1}e^{i\xi j\Delta x}=\sum_m C_m T^m(g^n e^{i\xi j\Delta x})\qquad j\Delta x=x$$
$$=g^n\sum_m C_m e^{i\xi(j+m)\Delta x}$$

したがって，$g=\sum_m C_m e^{i\xi m\Delta x}$
$t\to t+\Delta t$ で，u_j が g 倍

・差分スキームの安定条件

$|g|^n\leq C$ が $n\to\infty$ で成立，
（ある目標時刻 T　$\Delta t\to 0$，$n\to\infty$ ／ $T=n\Delta t$）

$|g|^n\leq C$ を（$0\leq n\Delta t\leq T$ をみたす，全ての $n, \Delta t, \xi$ に対して）満たす定数 C が存在すること。
⟺ 全ての ξ，Δt に対して，$|g|\leq 1+K\Delta t$ を満たす正定数 K が存在すること。（フォン・ノイマンの条件）

$$\because\ |g|^n \le (1+K\underbrace{\Delta t}_{\frac{T}{n}})^n$$

$$= 1 + n\frac{KT}{n} + \underbrace{\frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{KT}{n}\right)^2}_{\le 1} + \cdots$$

$$\le 1 + KT + \frac{1}{2!}(KT)^2 + \cdots = e^{KT} = C \ : 定数$$

3.3、具体例

3.3.1、拡散方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

(1) 陽のスキーム

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\left(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n\right) \quad \text{—— (1)}$$

($\rho = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$ = 一定とするスキーム)の場合.

3.2.の(2)を代入, $g = 1 + \rho(e$

$$= 1 - 4\rho \sin^2\frac{\xi\Delta t}{2} \quad \text{------ (2)}$$

フォン・ノイマンの条件は,

$$-1 - K\Delta t \le 1 - 4\rho\sin^2\frac{\xi\Delta t}{2} \le 1 + K\Delta t \quad \text{— (3)}$$

$|g| \le 1 + K\Delta t$

右側は常に成立、
左側の不等号が全てのξ, Δtについて成立する条件を考える.
まず, すべてのξについて成立するには,

$$-1 - K\Delta t \le 1 - 4\rho \quad \text{—— (4)}$$

より,

$$\rho \le \frac{1}{2} + \frac{K}{4}\Delta t \quad \text{—— (5)}$$

$$\rho \le \frac{1}{2} \quad \text{—— (6)}$$

よって, 安定条件は(6)で与えられる.

2.2.2.の数値例では,

$$\rho = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} = 0.4 < \frac{1}{2} \qquad 4図$$

$$= 0.8 > \frac{1}{2} \qquad 6図$$

$$0.4 < \frac{1}{2} \qquad 7図$$

$$0.6 > \frac{1}{2} \qquad 8図$$

(2) 陰のスキーム

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\left(u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}\right) \quad \text{——— (7)}$$

($\rho = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} = \text{const.}$ とするスキーム) の場合,

3.2.(2) を代入

$$g^{n+1} e^{i\xi j\Delta x}\left[1 - \rho\left(e^{i\xi\Delta x} - 2 + e^{-i\xi\Delta x}\right)\right] = g^n e^{i\xi j\Delta x} \quad \text{——— (8)}$$

$$g = \frac{1}{1 + 4\rho \sin^2\frac{\xi\Delta x}{2}} \quad \text{——— (9)}$$

$$|g| \le 1 (+K\Delta t) \quad \text{——— (10)}$$

が全ての ξ, Δt について ρ の値によらず成立.
よって, 無条件安定.

3.3.2. 波動方程式 (1階)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad (t > 0, -\infty < x < \infty)$$

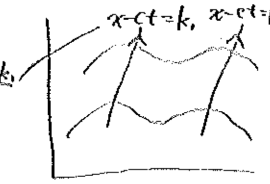
$$\text{i.c. } u(x, 0) = \varphi(x) \qquad (t = 0, -\infty < x < \infty)$$

の解 $u(x,t) = \varphi(x - ct)$ ——— (11)

すなわち, 波形が形を変えず, 一定速度 c で x 方向に進行.
$\Longleftrightarrow$ $x - ct = k$ (const.) (傾き $1/c$ の特性曲線に沿って)
初期値の情報が伝わる.

$$\begin{cases} X(x,t) = x - ct \\ T(x,t) = t \end{cases}$$ と変数変換 $u(x,t) \to u(X,T)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x} = \underbrace{\left(\dfrac{\partial X}{\partial x}\right)}_{=1}\dfrac{\partial}{\partial X} + \underbrace{\left(\dfrac{\partial T}{\partial x}\right)}_{=0}\dfrac{\partial}{\partial T} = \dfrac{\partial}{\partial X} \\ \dfrac{\partial}{\partial t} = \left(\dfrac{\partial X}{\partial t}\right)\dfrac{\partial}{\partial X} + \left(\dfrac{\partial T}{\partial t}\right)\dfrac{\partial}{\partial T} = -c\dfrac{\partial}{\partial X} + \dfrac{\partial}{\partial T} \end{cases}$$



元の方程式

$$\underbrace{\left(-c\frac{\partial u}{\partial X} + \frac{\partial u}{\partial T}\right)}_{=\frac{\partial u}{\partial t}} + \underbrace{c\frac{\partial u}{\partial X}}_{=\frac{\partial u}{\partial x}} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial T} = 0$$

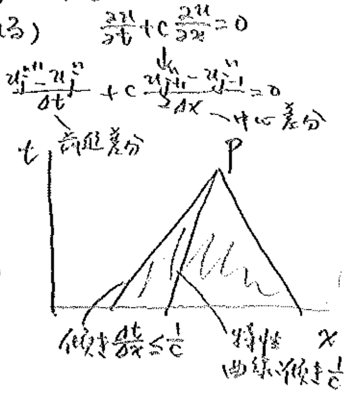
u は X のみの関数

$$u = \varphi(X) = \varphi(x - ct)$$

(1) 差分スキーム

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{c\Delta t}{2\Delta x}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) \quad \text{—— (12)}$$

⇒ $\frac{\Delta t}{\Delta x} < \frac{1}{c}$ でないと，初期値の情報が取り込めない．
これは，安定性のための必要条件（CFL条件とよばれる）



(12)の増幅率 g は

$$g = 1 - \frac{c\Delta t}{2\Delta x}(e^{i\xi\Delta x} - e^{-i\xi\Delta x})$$

$$= 1 - ic\frac{\Delta t}{\Delta x}\sin(\xi\Delta x) \quad \text{—— (13)}$$

$$\Rightarrow |g| = \sqrt{1 + c^2\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \sin^2(\xi\Delta x)} \quad \text{— (14)}$$

・$\frac{\Delta t}{\Delta x} = \lambda$ (const.) のスキームでは，
$|g|_{max} = \sqrt{1+c^2\lambda^2} > 1$ → 常に不安定（CFL条件をみたす場合でも）

・$\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} = \rho$ (const.) のスキームでは，
$|g|_{max} = \sqrt{1+c^2\Delta t\rho} \le 1 + \left(\frac{1}{2}\right)c^2\rho\Delta t$ なので $K = \left(\frac{1}{2}\right)c^2\rho$ とすれば，ρ の値によらずフォン・ノイマンをみたす → 安定．

(2) 差分スキーム

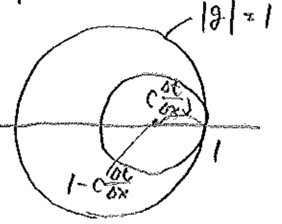
$$u_j^{n+1} = u_j^n - c\frac{\Delta t}{\Delta x}(u_j^n - u_{j-1}^n) \quad \text{— (15)}$$

では，$g = \left(1 - c\frac{\Delta t}{\Delta x}\right) + c\frac{\Delta t}{\Delta x}e^{-i\xi\Delta x}$ —— (16)

g が点 $1-\frac{c\Delta t}{\Delta x}$ を中心とする半径 $\frac{c\Delta t}{\Delta x}$ の円周上にある．

⇒ $\frac{c\Delta t}{\Delta x} \le 1$ なら，原点中心半径1の円 $|g| \le 1$ の外に出ない．（→安定）

⇒ このスキームでは安定性条件がCFL条件と一致．



問題：熱伝導方程式 $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$
を $\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t} = \frac{1}{2}\cdot\frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2}$
と差分近似．

(1) $\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} = \rho = \text{const.}$ とする差分スキームの精度は何次？

(2) (1)の差分スキームの安定性をフォン・ノイマンの方法より調べよ．