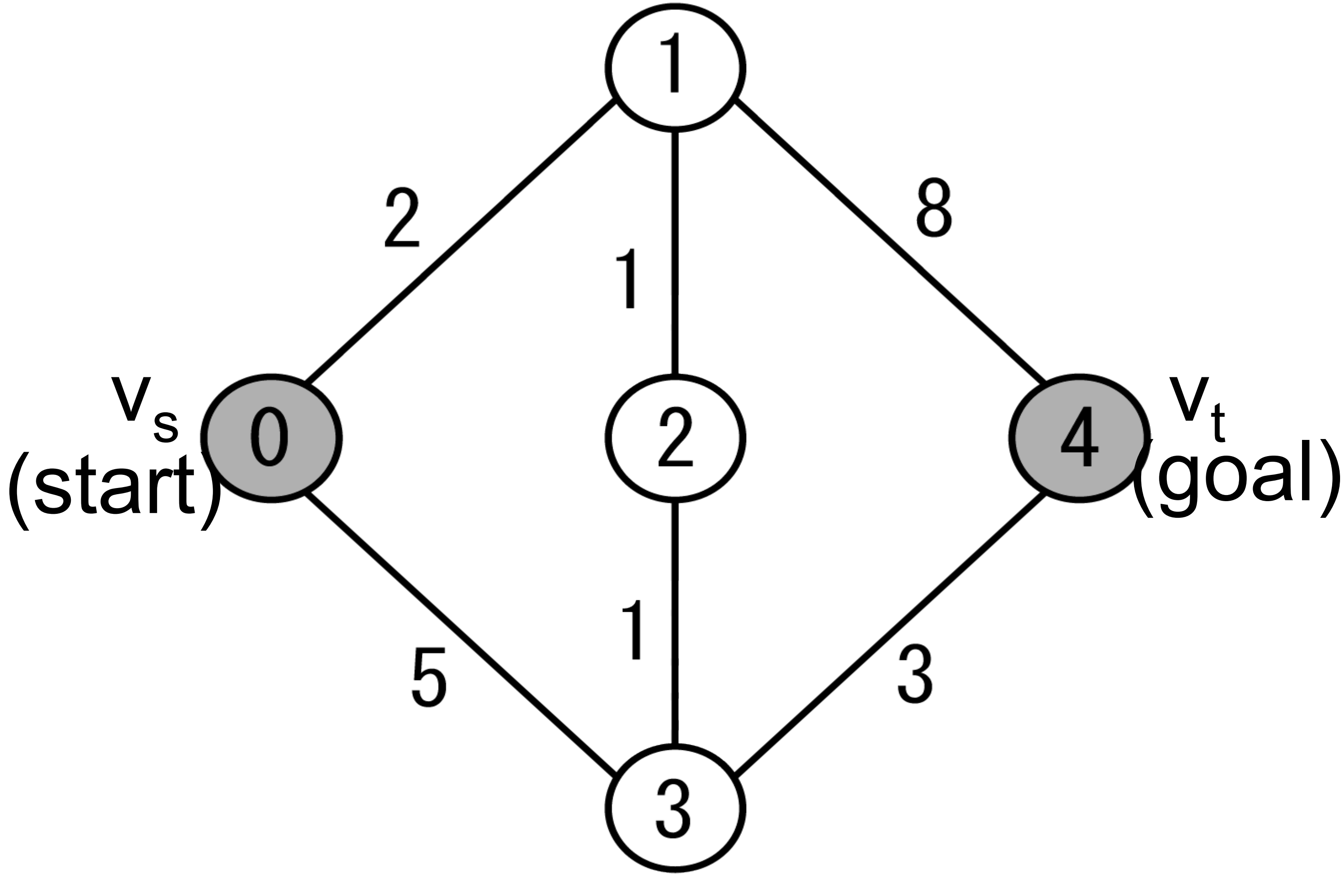
計算機ソフトウェア
第八回

電気電子工学科
黒橋禎夫

最短路問題

- 前回はグラフ探索問題を扱いました
- 今回はエッジに距離（非負のウェイト）を与えたグラフの中で2ノード間の最短路を探す問題についてです

エッジに距離を考える



- アルゴリズム SHORTEST-PATH
  1. d(vs) ← 0
  2. V - $\{v_s\}$ のすべての v について d(v) ← ∞ O(n)
  3. A ← $\{v_s\}$
  4. Aのうちdの値が最小のvを取り出す O(nlong)
  5. v = v_t なら終了
  6. T(v) の各 w について O(nlogn)

     If d(w) = ∞ then w を A に加えて

     d(w) ← d(v) + l(v, w)

     elseif d(w) > d(v) + l(v, w) then

     d(w) ← d(v) + l(v, w)

  – 4. – 6. をループ

ヒープで管理しておくと一回の処理毎の再構築はヒープ嵩までO(nlong)

アルゴリズム SHORTEST-PATH

A(v:d)

0:0

1:2, 3:5

3:5, 2:3, 4:10

3:4, 2:3, 4:10

4:$\boxed{7}$

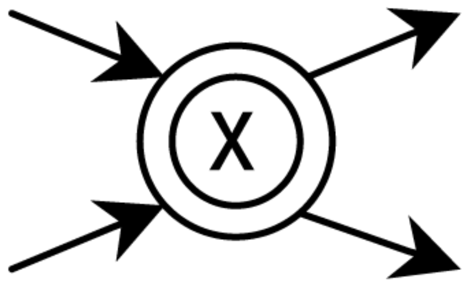
本当に最短になるかは帰納法で証明する

そこへ至るまでが最短と仮定

次に取り出されるのが最短ではない → 矛盾

最大流と割り当て問題

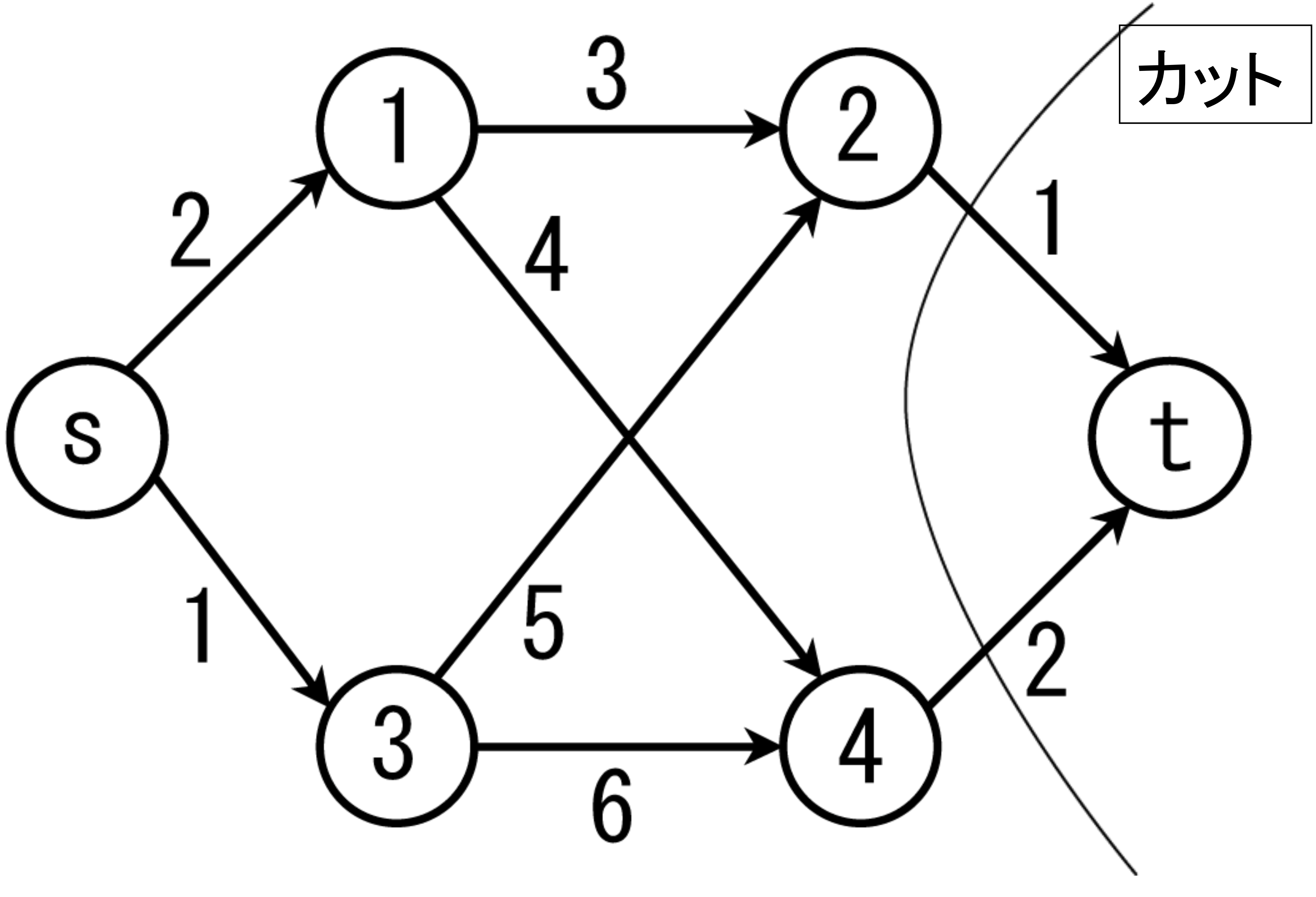
- **G** = (V, **E**)
- Cxy： 容量 capacity
- N(ネットワーク) = (V, **E**, C, v_s, v_t)
- f_{xy}： 流れ flow
- 制約1　0 ≦ f_{xy} ≦ Cxy
- 制約2　$\Sigma_x f_{zx} = \Sigma_y f_{xy}$



制約を満たす最大の flow を割り当てる問題

キャパシティが全て整数ならば最大流も整数

最大流 = 最小カット容量　　　ボトルネックを探す



- アルゴリズム MAXIMUM-FLOW

  入力: ネットワーク (V, **E**, c, v_s, v_t)

  出力: 最大流 f

  1. すべての辺 **e** に対して f(**e**) = 0
  2. v_s から v_t への道 p で g(p) > 0 の道を探す。なければ終了、あればその道を辿る
  3. f(**e**) ← f(**e**$_i$) + g(p) (**e**$_i$ が正順)
     f(**e**) ← f(**e**$_i$) - g(p) (**e**$_i$ が逆順)
  4. 2. – 3. を繰り返す

最大流問題

- アルゴリズム MAXIMUM-FLOWの性質

  すべての辺の容量が整数であれば最大流 f もすべての辺で整数である

- ポイント

  逆向きに打ち消す経路も考える

最大マッチング

- 最大フローアルゴリズムの応用
- 二部グラフ (biportite graph) のマッチング

  二つの集合に含まれる要素同士を1対1で対応づける問題

- ex. 男女のパートナー選び

  制約(各人の希望)を満たしつつ、できるだけたくさんのカップルを作る

  MAXIMUM-FLOWで解く

割り当て問題

- 最大マッチングを多対多に拡張する

- ex. 学生とゼミの割り当て

  各ゼミに複数の学生が振られる

  学生は複数のゼミを受講する