情報メディア工学特論

特異点可視化 II

2004/11/30

京都大学高等教育研究開発センター情報メディア教育部門
学術情報メディアセンター連携研究部門（兼任）
大学院工学研究科電気工学専攻（兼担）
小山田耕二

コース概要 (2/2)

- 特異点ベース可視化技術
  - 渦可視化(11/16)
  - 等値面表示高速化、DT-MRI可視化(11/30)
- システム開発技術/OpenGL基礎
  - オブジェクト指向システム開発技術 (12/7)
  - 基本オブジェクト設計 (12/14)
- 可視化システム実装演習
  - 等値面表示システム(12/21)
  - ボリュームレンダリング表示システム (1/11)
  - 流線表示システム(1/18)

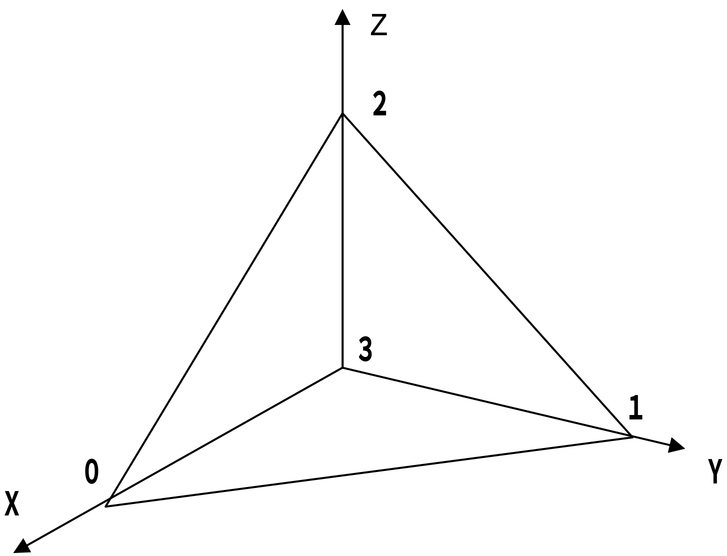
内容

- 特異点可視化
  - 小テスト解答
  - 6面体格子を用いて特異点を求める方法
    - 6面体格子内部でのデータ補間
    - 速度勾配テンソルの計算
- DT-MRI可視化

小テストの解答

Table 2.1: 4面体の座標・速度データ

節点番号	x 座標	y 座標	z 座標	速度 x 成分	速度 y 成分	速度 z 成分
0	1	0	0	-1	1	-1
1	0	1	0	-1	-1	1
2	0	0	1	1	-1	-1
3	0	0	0	1	1	1



$$\begin{pmatrix} -u_3 \\ -v_3 \\ -w_3 \end{pmatrix} = Mv \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$$

$$Mv = \begin{bmatrix} u_0 - u_3 & u_1 - u_3 & u_2 - u_3 \\ v_0 - v_3 & v_1 - v_3 & v_2 - v_3 \\ w_0 - w_3 & w_1 - w_3 & w_2 - w_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}$$

小テスト解答

- 与えられた情報から速度勾配テンソルJは以下のように表される．

$$J = Mx^{-T} \times Mv^{T}$$

$$= \begin{bmatrix} x_0 - x_3 & x_1 - x_3 & x_2 - x_3 \\ y_0 - y_3 & y_1 - y_3 & y_2 - y_3 \\ z_0 - z_3 & z_1 - z_3 & z_2 - z_3 \end{bmatrix}^{-T} \times \begin{bmatrix} u_0 - u_3 & u_1 - u_3 & u_2 - u_3 \\ v_0 - v_3 & v_1 - v_3 & v_2 - v_3 \\ w_0 - w_3 & w_1 - w_3 & w_2 - w_3 \end{bmatrix}^{T}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\det(J - \lambda I) = -(\lambda + 2)^3 - 8 = 0$$

$$\lambda = -4, -1 \pm \sqrt{3} i$$

6面体格子内部でのデータ補間

- 6面体格子内部において，局所座標系(p,q,r)を使って，データ補間を行う．
- 内部点(x,y,z) において，ベクタデータ X=(u,v,w)は，以下のように表現される．

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^{7} Ni(p,q,r) \begin{pmatrix} ui \\ vi \\ wi \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^{7} Ni(p,q,r) \begin{pmatrix} xi \\ yi \\ zi \end{pmatrix}$$

- ここで，(u_i, v_i, w_i)は，i番目の頂点において 定義されているベクタデータを，そして (p,q,r)は，内部点の局所座標を表す．

$$Ni(p,q,r) = \frac{1}{8}(1-pip)(1-qiq)(1-rir)$$

速度勾配テンソル計算 (1)

- 6面体格子内部における速度勾配テンソルは以下のように表現される.

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} & \frac{\partial q}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} & \frac{\partial q}{\partial y} & \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial p}{\partial z} & \frac{\partial q}{\partial z} & \frac{\partial r}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial p} & \frac{\partial v}{\partial p} & \frac{\partial w}{\partial p} \\ \frac{\partial u}{\partial q} & \frac{\partial v}{\partial q} & \frac{\partial w}{\partial q} \\ \frac{\partial u}{\partial r} & \frac{\partial v}{\partial r} & \frac{\partial w}{\partial r} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial p} & \frac{\partial y}{\partial p} & \frac{\partial z}{\partial p} \\ \frac{\partial x}{\partial q} & \frac{\partial y}{\partial q} & \frac{\partial z}{\partial q} \\ \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial p} & \frac{\partial v}{\partial p} & \frac{\partial w}{\partial p} \\ \frac{\partial u}{\partial q} & \frac{\partial v}{\partial q} & \frac{\partial w}{\partial q} \\ \frac{\partial u}{\partial r} & \frac{\partial v}{\partial r} & \frac{\partial w}{\partial r} \end{pmatrix}$$

- ここで, (u_i, v_i, w_i) は, i番目の頂点において 定義されているベクタデータを, そして (p,q,r)は, 内部点の局所座標を表す.

速度勾配テンソル計算 (2)

$$
I = \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} & \frac{\partial q}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} & \frac{\partial q}{\partial y} & \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial p}{\partial z} & \frac{\partial q}{\partial z} & \frac{\partial r}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial p} & \frac{\partial y}{\partial p} & \frac{\partial z}{\partial p} \\ \frac{\partial x}{\partial q} & \frac{\partial y}{\partial q} & \frac{\partial z}{\partial q} \\ \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} & \frac{\partial q}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} & \frac{\partial q}{\partial y} & \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial p}{\partial z} & \frac{\partial q}{\partial z} & \frac{\partial r}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial p} & \frac{\partial y}{\partial p} & \frac{\partial z}{\partial p} \\ \frac{\partial x}{\partial q} & \frac{\partial y}{\partial q} & \frac{\partial z}{\partial q} \\ \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \end{pmatrix}^{-1}
$$

$$
\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial x} \\ \frac{\partial x}{\partial y} \\ \frac{\partial x}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} \\ \frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial z} z + \frac{\partial x}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial z} + \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z} \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial x} \\ \frac{\partial y}{\partial y} \\ \frac{\partial y}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} \\ \frac{\partial y}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial y}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial y}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial z} z + \frac{\partial y}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial z} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z} \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} \\ \frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} z + \frac{\partial x}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial z} + \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z} \end{pmatrix}
$$

速度勾配テンソル計算 (3)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^{7} Ni(p,q,r) \begin{pmatrix} xi \\ yi \\ zi \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial p} & \frac{\partial y}{\partial p} & \frac{\partial z}{\partial p} \\ \frac{\partial x}{\partial q} & \frac{\partial y}{\partial q} & \frac{\partial z}{\partial q} \\ \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{7} \frac{\partial Ni(p,q,r)}{\partial p} xi & \sum_{i=0}^{7} \frac{\partial Ni(p,q,r)}{\partial p} yi & \sum_{i=0}^{7} \frac{\partial Ni(p,q,r)}{\partial p} zi \\ \sum_{i=0}^{7} \frac{\partial Ni(p,q,r)}{\partial q} xi & \sum_{i=0}^{7} \frac{\partial Ni(p,q,r)}{\partial q} yi & \sum_{i=0}^{7} \frac{\partial Ni(p,q,r)}{\partial q} zi \\ \sum_{i=0}^{7} \frac{\partial Ni(p,q,r)}{\partial r} xi & \sum_{i=0}^{7} \frac{\partial Ni(p,q,r)}{\partial r} yi & \sum_{i=0}^{7} \frac{\partial Ni(p,q,r)}{\partial r} zi \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial Ni(p,q,r)}{\partial p} = \frac{-pi}{8}(1-qiq)(1-rir)$$

$$\frac{\partial Ni(p,q,r)}{\partial q} = \frac{-qi}{8}(1-pip)(1-rir)$$

$$\frac{\partial Ni(p,q,r)}{\partial r} = \frac{-ri}{8}(1-pip)(1-qiq)$$

速度勾配テンソル計算 (4)

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^{7} Ni(p,q,r) \begin{pmatrix} ui \\ vi \\ wi \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial p} & \frac{\partial v}{\partial p} & \frac{\partial w}{\partial p} \\ \frac{\partial u}{\partial q} & \frac{\partial v}{\partial q} & \frac{\partial w}{\partial q} \\ \frac{\partial u}{\partial r} & \frac{\partial v}{\partial r} & \frac{\partial w}{\partial r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{7} \frac{\partial Ni(p,q,r)}{\partial p} ui & \sum_{i=0}^{7} \frac{\partial Ni(p,q,r)}{\partial p} vi & \sum_{i=0}^{7} \frac{\partial Ni(p,q,r)}{\partial p} wi \\ \sum_{i=0}^{7} \frac{\partial Ni(p,q,r)}{\partial q} ui & \sum_{i=0}^{7} \frac{\partial Ni(p,q,r)}{\partial q} vi & \sum_{i=0}^{7} \frac{\partial Ni(p,q,r)}{\partial q} wi \\ \sum_{i=0}^{7} \frac{\partial Ni(p,q,r)}{\partial r} ui & \sum_{i=0}^{7} \frac{\partial Ni(p,q,r)}{\partial r} vi & \sum_{i=0}^{7} \frac{\partial Ni(p,q,r)}{\partial r} wi \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial Ni(p,q,r)}{\partial p} = \frac{-pi}{8}(1-qiq)(1-rir)$$

$$\frac{\partial Ni(p,q,r)}{\partial q} = \frac{-qi}{8}(1-pip)(1-rir)$$

$$\frac{\partial Ni(p,q,r)}{\partial r} = \frac{-ri}{8}(1-pip)(1-qiq)$$

まとめ

- 特異点可視化の応用について理解した
  - 小テスト解答
  - 6面体格子を用いて特異点を求める方法
    - 6面体格子内部でのデータ補間
    - 速度勾配テンソルの計算
  - DT-MRI可視化

小テスト（氏名：　　　　　　　　　　　）

- 拡散テンソル画像の適用例について自由に述べよ

- koyamada@kudpc.kyoto-u.ac.jp