1.線形方程式 $Ax=b$ を数値計算で解く方法を直接法・繰り返し法の観点から説明せよ．その方法を利用するための条件と，方法の特徴についても付記せよ．
2.Condition Number とは何か．線形方程式 $Ax=b$ を解く際にどのように利用されるか．
3.マトリクスの性質を調べる尺度としてどのようなものがあるか．

1.線形方程式 $Ax=b$ を数値計算で解くには，(i)係数行列 $A$ が正方行列である場合には(i-a)直接法と(i-b)繰り返し法があり，(ii) 係数行列 $A$ が正方でない場合には代表的なものとして特異値分解による方法がある．

(i-a)直接法は，Gauss の消去法に代表されるように，係数行列の余分な項を行列の基本演算によって消去していき，対角化することで解を得るものである．係数行列 $A$ を上三角行列化（前進消去）し，下から順に代入して解を得る（後退代入）のが Gauss の消去法で，n 次の線形方程式である場合は $n^3/3$ 程度の計算量を要する．これに対し，係数行列 $A$ を単位行列になるよう変形していくのが Gauss-Jordan の消去法で，同じく $n^3/2$ 程度の計算量を要する．また，LU 分解も直接法の1つで，これは係数行列 $A$ を上三角行列 $U$ と下三角行列 $L$ に分解し，方程式を2つの式に分けて前進代入，後退代入を行うことによって解を求める方法である．LU 分解後の計算量は $n^3/3$ 程度であるが，LU 分解するために多くの計算量を要するので，同じ係数行列 $A$ に対して複数の方程式を解く場合には有効である．

(i-b)繰り返し法は，Jacobi 法に代表されるように，行列演算を繰り返すことで漸近的に解を得ようとするものである．係数行列 $A$ を LDU 分解して繰り返し計算のための漸化式を得るのが Jacobi 法で，Jacobi 法の収束性を改善したもの Gauss-Seidel 法・Successive Relaxation 法がある．また，繰り返し計算の度に解の探索方向を修正する Conjugate Gradient 法があるが，これは係数行列 $A$ が正定である場合に限られる．繰り返し法は直接法に比べ少ない計算量で解が得られるが，常に計算が収束するとは限らないので注意が必要である．

(ii)特異値分解（SVD; Singular Value Decomposition）は $\Sigma=U^TAV$ が対角化行列になるように $U,V$ を定め，係数行列 $A$ の一般化(擬似)逆行列を計算することで解を求める方法で，このときは最小二乗解が求まる．

2.Condition Number とは，線形方程式 $Ax=b$ を数値計算で解く際の係数行列 $A$ の変化に対する解の感度を評価するもので，この値が大きい場合，係数行列 $A$ の微小変化が解に非常に大きく影響してしまい，「悪条件となる行列」とされ，線形方程式の解の信頼性が悪くなる．Condition Number は行列 $A$ のノルムと逆行列の積で定義されるが，逆行列の計算が困難な場合には近似的に行列 $A$ のノルムだけで表現することもある．

3.マトリクスの性質を調べる尺度として，マトリクスの(i)ランク，(ii)ノルム，(iii)固有値と固有ベクトルについて説明する．

(i)マトリクスのランクは，そのマトリクスを係数行列とする線形方程式が解を持つか否かにおいて重要となる．ランクの値がマトリクスの次元と等しい場合は方程式は一意な解を持つが，ランクの値がマトリクスの次元より小さい場合は，ランク落ちといい，変数に対して式が少なくなり，方程式は一意な解を持たない．

(ii)マトリクスのノルムは，マトリクスの大きさを評価するもので，Frobenius ノルムや Natural ノルム，P ノルムなど幾つかの定義がある．

(iii)固有値と固有ベクトルは，マトリクスが列ベクトルに作用するとき，どの方向にどれだけの大きさ影響するのか示すものである．

| |
|---|
| 1.固有値問題とは何か．固有値・固有モードを計算すべき理由を，数学的・力学的観点から説明せよ．<br>2.固有値問題を数値計算で解く方法には何があるか．利用するための条件・特徴も説明せよ． |

1.固有値問題とは，あるマトリクスに対して固有値・固有ベクトルを求める問題のことである．固有値と固有ベクトルを求めることにより，マトリクスが，どの方向にどれだけの大きさ影響するのか知ることができる．このことについて数学的，力学的観点から述べる．

数学的観点から．固有値・固有ベクトルの性質は座標系に依存せず，このため行列の固有空間を定義でき，行列の対角化計算等に応用される．

力学的観点から．固有値・固有ベクトルの性質は座標系に依存しないため，これらを求めることにより，ある物理現象を単純な状態に分解して考えることができる．例えば，2階のテンソルである応力テンソルの固有値は主応力（剪断力が0となるような座標系をとったときの応力）を示し，これによりその材料がどの方向にどの程度強いか知ることができる．また，振動問題も固有値問題の典型であり，固有値が固有振動数を示し，どのような振動モードが重なり合って振動しているのか知りことができる．

2.固有値問題の解法は，対象の行列が(i)対称の場合と(ii)非対称の場合に大別される．(i)の場合の方がより簡単に計算することができる．また，解として全ての固有値，固有ベクトルが必要なのかどうかによって幾つかの計算方法があり，目的に応じて適切な計算方法を選ぶ必要がある．

(i)対称行列の固有値問題について．代表的なものは Jacobi 法で，適当な回転行列を左右から作用させて行列の非対角成分を0に近づけていくことで，全ての固有値を対角成分として得る方法である．しかし大きな行列の場合は計算量が非常に大きくなってしまう欠点を持つ．

そこで計算を高速化するため，直接対角化するのではなく，一度三重対角化し，それから対角化する方法がある．三重対角化の方法には，行列の各列に鏡像変換を繰り返すことで三重対角成分以外を0にする Householder 法などがある．三重対角化行列から対角化し，固有値を求めるには Jacobi 法や QR 法が用いられる．

(ii)非対称行列について．代表的なものはべき乗法(Power 法)で，これは任意の列ベクトルに対して対象の行列を繰り返し作用させることで漸近的に最大固有値とそれに対応する固有ベクトルを求めることができる方法である．また，対象の行列の逆行列を繰り返し作用させることで最小固有値とそれに対応する固有ベクトルを求める方法を逆べき乗法(Inverse Power 法)という．

非対称行列について全ての固有値を求める場合は，回転行列を用いて上三角行列化する Givens Householder 法がある．上三角行列化したあとは QR 法を用いて対角化し，全ての固有値を求めることができる．

1.常微分方程式を解く方法について，陽解法・陰解法の観点から特徴等について説明せよ.
2.Runge-Kutta 法とはどのような解法か．利点・欠点について述べよ.

1.常微分方程式 $\dfrac{dy}{dx}=f(x,\ y)$ が与えられたとき，一般に次のように差分化する.

$$\frac{dy}{dx}\cong\frac{y_{i+1}-y_i}{h}=f(x,y)\ \Rightarrow\ y_{i+1}=y_i+\phi h,\ \phi:\text{勾配},\ h:\text{ステップサイズ}$$

$$\text{陽解法}:\phi=\frac{dy_i}{dx}=f(x_i,y_i)\qquad\rightarrow\ y_{i+1}=y_i+\frac{dy_i}{dx}h$$

$$\text{陰解法}:\phi=\frac{dy_{i+1}}{dx}=f(x_{i+1},y_{i+1})\quad\rightarrow\ y_{i+1}=y_i+\frac{dy_{i+1}}{dx}h$$

陽解法は，現在のステップ $i$ における値を基にして次のステップ $i+1$ の値を代数的に求め，それを繰り返していく方法で，次のステップの値の計算は比較的簡単な演算であることがほとんどである。ただし，ステップサイズ $h$ を大きくとってしまうと計算結果が発散してしまうことがあるのでステップサイズ $h$ はある安定条件(Courant 条件)を満たすように決めなければならない.

これに対し陰解法では，次のステップにおける値を仮定し，その仮定値が正しいかどうかを差分方程式を使って調べて，誤差がゼロになるように仮定値を収束させていく計算を行う．この場合，巨大な行列式(連立1次方程式)を解くという計算が必要になるので1つの時間ステップあたりの計算量は多くなるが，無条件で計算が収束するため，ステップサイズを大きくすることができるため、ステップ数が多い場合に有利である.

2. 陽解法の代表的なものは，オイラー法であり，差分方程式は次のようになる.

$$y_{i+1}=y_i+f(x_i,y_i)h$$

これを改良したものがルンゲ・クッタ法であり，代表的な4次精度のものは次式のようになる.

$$y_{i+1}=y_i+\frac{1}{6}(k_1+2k_2+3k_3+k_4)\ h$$

$$k_1=f(x_i,y_i)$$

$$k_2=f\left(x_i+\frac{1}{2}h,y_i+\frac{1}{2}k_1h\right)$$

$$k_3=f\left(x_i+\frac{1}{2}h,y_i+\frac{1}{2}k_2h\right)$$

$$k_4=f(x_i+h,y_i+k_3h)$$

オイラー法では $x_i$ での勾配しか考えていないが，ルンゲ・クッタ法では複数の点の勾配の値を使って精度を上げるもので，計算量はやや多くなるが広く使われている.

1.Lagrange 補間法と Spline 補間法の相違を，基本的な考え方と補間結果の観点から説明せよ.
2.Bezier 曲線と B-Spline 曲線の相違を既定関数の考察に基づき説明せよ.

1．補間とは，ある既知の数値データを基にしてそのデータの範囲の内側で予想される数値を求めることである.

Lagrange 補間法とは，$n+1$ 個の数値データが得られたときにこの全ての点を通る関数を $n$ 次の多項式の形で求めるものである.

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$
$$= L_0(x) f_0 + L_1(x) f_1 + \cdots L_n(x) f_n, \qquad f_i = f(x_i) = a_0 + a_1 x_i + \cdots + a_n x_i^{\,n}$$

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

しかし，補間の点数が増えてくると補間の関数が振動してしまう問題がある. Lagrange 補間には常にこの問題が付きまとうため，データ点数が多い場合は使えないことが多い.

Spline 補間法は，補間する領域をデータ毎に区間(サブセット)に区切り、その区間ごとに低次の多項式で近似し，補間する方法で，境界で導関数が連続になるように、区間内を3次関数で補間する3次 Spline 補間がよく用いられる. $n+1$ 個の数値データが得られたときは $n$ 個の区間に分けられ，未知係数が $3n$ 個となるが，方程式は $3n$-2 本となる.

$$f_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i \;\Rightarrow\; r_i(x) = a_i (x - x_i)^3 + b_i (x - x_i)^2 + c_i (x - x_i) + y_i$$

- $r_i(x_{i+1}) = y_{i+1}$ for $1 \leq i \leq n \rightarrow$ $n$ 本
- $r'_{i-1}(x_i) = r'_i(x_i)$ for $1 < i \leq n \rightarrow$ $n$-1 本
- $r''_{i-1}(x_i) = r''_i(x_i)$ for $1 < i \leq n \rightarrow$ $n$-1 本

残り二つの拘束条件として，

$$r''_0(x_0) = 0, \quad r''_{n-1}(x_n) = 0$$

とする Natural Spline がよく用いられる.
Spline 補間では補間関数が振動することも防げ，様々な分野で利用されている.

2.

熱伝導方程式を次のように差分近似するとき，

$$\frac{\partial u}{\partial t}=c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{u_j^{n+1}-u_j^{n-1}}{2\Delta t}=c\frac{u_{j+1}^n-u_j^{n+1}-u_j^{n-1}+u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} \qquad \cdots(※)$$

1. $\dfrac{c\Delta t}{(\Delta x)^2}=\rho=$一定，とする差分スキームの精度は$\Delta t$について何次精度か．

2. 1.の差分スキームの増幅率$g$を求め，安定性をフォン・ノイマンの方法で調べよ．

1. (※) ⇔ $u_j^{n+1}=u_j^{n-1}+2\dfrac{c\Delta t}{(\Delta x)^2}\left[u_{j+1}^n-u_j^{n+1}-u_j^{n-1}+u_{j-1}^n\right]$

これは$\dfrac{c\Delta t}{(\Delta x)^2}=\rho=$一定の下で$\dfrac{\partial u}{\partial t}=c\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$に適合．

$u_j^n$を$u(x_j,t_n)$で置き換え，$x_j=x$，$t_n=t$と書くと、

$$\begin{aligned}u(x,t+\Delta t)&=u(x,t-\Delta t)+2\frac{c\Delta t}{(\Delta x)^2}\left[u(x+\Delta x,t)-u(x,t+\Delta t)-u(x,t-\Delta t)+u(x-\Delta x,t)\right]\\&=S(\Delta x,\Delta t)\ u(x,t) \qquad \cdots(※※)\end{aligned}$$

(※※の右辺)

$$\begin{aligned}&=u(x,t)-\Delta t u_t+\frac12(\Delta t)^2u_{tt}-\frac16(\Delta t)^3u_{ttt}+\frac1{24}(\Delta t)^4u_{tttt}-\frac1{120}(\Delta t)^5u_{ttttt}+\cdots\\
&+2\frac{c\Delta t}{(\Delta x)^2}\Big[\cancel{u(x,t)}\cancel{+\Delta x u_x}+\frac12(\Delta x)^2u_{xx}+\cancel{\frac16(\Delta x)^3u_{xxx}}+\frac1{24}(\Delta x)^4u_{xxxx}+\cancel{\frac1{120}(\Delta x)^5u_{xxxxx}}\\
&\qquad-\cancel{u(x,t)}\cancel{-\Delta t u_t}-\frac12(\Delta t)^2u_{tt}-\cancel{\frac16(\Delta t)^3u_{ttt}}-\frac1{24}(\Delta t)^4u_{tttt}-\cancel{\frac1{120}(\Delta t)^5u_{ttttt}}\\
&\qquad-\cancel{u(x,t)}\cancel{+\Delta t u_t}-\frac12(\Delta t)^2u_{tt}+\cancel{\frac16(\Delta t)^3u_{ttt}}-\frac1{24}(\Delta t)^4u_{tttt}+\cancel{\frac1{120}(\Delta t)^5u_{ttttt}}\\
&\qquad+\cancel{u(x,t)}\cancel{-\Delta x u_x}+\frac12(\Delta x)^2u_{xx}-\cancel{\frac16(\Delta x)^3u_{xxx}}+\frac1{24}(\Delta x)^4u_{xxxx}-\cancel{\frac1{120}(\Delta x)^5u_{xxxxx}}+\cdots\Big]\\
&=\cancel{u(x,t)}-\Delta t u_t+\cancel{\frac12(\Delta t)^2u_{tt}}-\frac16(\Delta t)^3u_{ttt}+\cancel{\frac1{24}(\Delta t)^4u_{tttt}}-\frac1{120}(\Delta t)^5u_{ttttt}\\
&+2\frac{c\Delta t}{(\Delta x)^2}\left[(\Delta x)^2u_{xx}-(\Delta t)^2u_{tt}+\frac1{12}(\Delta x)^4u_{xxxx}-\frac1{12}(\Delta t)^4u_{tttt}+\mathrm{O}\left((\Delta t)^6,(\Delta x)^6\right)\right]\end{aligned}$$

(※※の左辺)

$$=\cancel{u(x,t)}+\Delta t u_t+\cancel{\frac12(\Delta t)^2u_{tt}}+\frac16(\Delta t)^3u_{ttt}+\cancel{\frac1{24}(\Delta t)^4u_{tttt}}+\frac1{120}(\Delta t)^5u_{ttttt}+\cdots$$

以上より，$\dfrac{c\Delta t}{(\Delta x)^2}=\rho$，$u_t=cu_{xx}$，$\mathrm{O}\left((\Delta x)^6\right)\approx\mathrm{O}\left((\Delta t)^3\right)$を考慮して，

$$u(x+\Delta x,t)-S(\Delta x,\Delta t)\ u(x,t)$$

$$=2\Delta t u_t-2\rho\left[(\Delta x)^2u_{xx}-(\Delta t)^2u_{tt}+\frac{1}{12}(\Delta x)^4u_{xxxx}+O\left((\Delta t)^3\right)\right]$$

$$=2\Delta t(cu_{xx})-2\rho(\Delta x)^2u_{xx}+2\rho(\Delta t)^2u_{tt}-\frac{1}{6}\rho(\Delta x)^4u_{xxxx}+O\left((\Delta t)^3\right)$$

$$=2\Delta t(cu_{xx})-2\Delta t u_{xx}+2\rho(\Delta t)^2u_{xxxx}-\frac{1}{6}\frac{(\Delta t)^2}{\rho}u_{xxxx}+O\left((\Delta t)^3\right)$$

$$=2\rho(\Delta t)^2\left(1-\frac{1}{12}\frac{1}{\rho^2}\right)u_{xxxx}+O\left((\Delta t)^3\right)$$

$\rho=\dfrac{1}{\sqrt{12}}$ なら~~3~~2次精度，それ以外なら~~2~~1次精度.

2. (※)に $u_j^n=g^ne^{i\xi j\Delta x}$ を代入して,

$$g^{n+1}e^{i\xi j\Delta x}-g^{n-1}e^{i\xi j\Delta x}=2\frac{c\Delta t}{(\Delta x)^2}\left(g^ne^{i\xi(j+1)\Delta x}-g^{n+1}e^{i\xi j\Delta x}-g^{n-1}e^{i\xi j\Delta x}+g^ne^{i\xi(j-1)\Delta x}\right)$$

$$\Leftrightarrow\ g^2-1=2\rho\left(ge^{i\xi\Delta x}-g^2-1+ge^{-i\xi\Delta x}\right)$$

$$\Leftrightarrow\ (2\rho+1)g^2-4\rho\cos\xi\Delta x\ g+2\rho-1=0$$

$$\Rightarrow\ g=\frac{2\rho\cos\xi\Delta x\pm\sqrt{4\rho^2\cos^2\xi\Delta x-\left(4\rho^2-1\right)}}{2\rho+1}=\frac{2\rho\cos\xi\Delta x\pm\sqrt{1-4\rho^2\sin^2\xi\Delta x}}{2\rho+1}$$

熱伝導方程式を次のように差分近似するとき,

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Rightarrow\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}=\theta\frac{u_{j+1}^{n+1}-2u_j^{n+1}-u_{j-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2}+(1-\theta)\frac{u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2},\ 0\le\theta\le 1\cdots(※)$$

1. $\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}=\rho=$一定, とする差分スキームの精度は$\Delta t$について何次精度か.

2. 1.の差分スキームの増幅率$g$を求め, 安定性をフォン・ノイマンの方法で調べよ.

1. (※)$\Leftrightarrow$ $u_j^{n+1}-u_j^n=\theta\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\left[u_{j+1}^{n+1}-2u_j^{n+1}+u_{j-1}^{n+1}\right]+(1-\theta)\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\left[u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n\right]$

これは$\frac{c\Delta t}{(\Delta x)^2}=\rho=$一定の下で$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$に適合.

$u_j^n$を$u(x_j,t_n)$で置き換え, $x_j=x$, $t_n=t$と書くと、

$$u(x,t+\Delta t)-u(x,t)=\theta\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\left[u^{n+1}(x+\Delta x,t)-2u^{n+1}(x,t)-u^{n+1}(x-\Delta x,t)\right]$$
$$+(1-\theta)\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\left[u^n(x+\Delta x,t)-2u^n(x,t)-u^n(x-\Delta x,t)\right]\cdots(※※)$$

(※※の右辺)

$$=\theta\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\Big[u^{n+1}+\Delta x u_x^{n+1}+\frac{1}{2}(\Delta x)^2u_{xx}^{n+1}+\frac{1}{6}(\Delta x)^3u_{xxx}^{n+1}+\frac{1}{24}(\Delta x)^4u_{xxxx}^{n+1}+\cdots-2u^{n+1}$$
$$+u^{n+1}-\Delta x u_x^{n+1}+\frac{1}{2}(\Delta x)^2u_{xx}^{n+1}-\frac{1}{6}(\Delta x)^3u_{xxx}^{n+1}+\frac{1}{24}(\Delta x)^4u_{xxxx}^{n+1}-\cdots\Big]$$
$$+(1-\theta)\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\Big[u^n+\Delta x u_x^n+\frac{1}{2}(\Delta x)^2u_{xx}^n+\frac{1}{6}(\Delta x)^3u_{xxx}^n+\frac{1}{24}(\Delta x)^4u_{xxxx}^n+\cdots-2u^n$$
$$+u^n-\Delta x u_x^n+\frac{1}{2}(\Delta x)^2u_{xx}^n-\frac{1}{6}(\Delta x)^3u_{xxx}^n+\frac{1}{24}(\Delta x)^4u_{xxxx}^n-\cdots\Big]$$
$$=\rho\theta\left[(\Delta x)^2u_{xx}^{n+1}+\frac{1}{12}(\Delta x)^4u_{xxxx}^{n+1}+O\left((\Delta x)^6\right)\right]+\rho(1-\theta)\left[(\Delta x)^2u_{xx}^n+\frac{1}{12}(\Delta x)^4u_{xxxx}^n+O\left((\Delta x)^6\right)\right]$$
$$=\rho\left\{(\Delta x)^2u_{xx}^n+\frac{1}{12}(\Delta x)^4u_{xxxx}^n\right\}+\rho\theta\left[(\Delta x)^2u_{xx}+\frac{1}{12}(\Delta x)^4u_{xxxx}+O\left((\Delta x)^6\right)\right]_n^{n+1}$$
$$=\rho\left\{(\Delta x)^2u_{xx}^n+\frac{1}{12}(\Delta x)^4u_{xxxx}^n\right\}+\rho\theta\Big[(\Delta x)^2\left\{u_{xx}+\Delta t u_{xxt}+\frac{1}{2}(\Delta t)^2u_{xxtt}+\cdots-u_{xx}\right\}$$
$$+\frac{1}{12}(\Delta x)^4\left\{u_{xxxx}+\Delta t u_{xxxxt}+\frac{1}{2}(\Delta t)^2u_{xxxxtt}+\cdots-u_{xxxx}\right\}+O\left((\Delta x)^6\right)\Big]$$
$$=\rho\left\{(\Delta x)^2u_{xx}^n+\frac{1}{12}(\Delta x)^4u_{xxxx}^n\right\}$$

$$+\rho\theta\left[(\Delta x)^2\Delta t u_{xxt}+\frac{1}{2}(\Delta x)^2(\Delta t)^2 u_{xxtt}+\frac{1}{12}(\Delta x)^4\Delta t u_{xxxxt}+\mathrm{O}\left((\Delta x)^6\right)\right]$$

$\dfrac{\Delta t}{(\Delta x)^2}=\rho,\ u_t=u_{xx},\ \mathrm{O}\left((\Delta x)^6\right)\approx\mathrm{O}\left((\Delta t)^3\right)$を考慮して，

$$=\rho\left\{(\Delta x)^2 u_{xx}^n+\frac{1}{12}(\Delta x)^4 u_{xxxx}^n\right\}+\rho\theta\left[(\Delta x)^2\Delta t u_{xxt}+\mathrm{O}\left((\Delta x)^6\right)\right]$$

(※※の左辺)

$$=u+\Delta t u_t+\frac{1}{2}(\Delta t)^2 u_{tt}+\frac{1}{6}(\Delta t)^3 u_{ttt}+\cdots-u$$

$$=\Delta t u_t+\frac{1}{2}(\Delta t)^2 u_{tt}+\mathrm{O}\left((\Delta t)^3\right)$$

以上より，

(※※の左辺)−(※※の右辺)

$$=\Delta t u_t+\frac{1}{2}(\Delta t)^2 u_{tt}+\mathrm{O}\left((\Delta t)^3\right)$$

$$-\rho\left\{(\Delta x)^2 u_{xx}+\frac{1}{12}(\Delta x)^4 u_{xxxx}\right\}+\rho\theta\left[(\Delta x)^2\Delta t u_{xxt}+\mathrm{O}\left((\Delta x)^6\right)\right]$$

$$=\Delta t u_t+\frac{1}{2}(\Delta t)^2 u_{tt}+\mathrm{O}\left((\Delta t)^3\right)-\left\{\rho(\Delta x)^2 u_{xx}+\frac{1}{12}\rho(\Delta x)^4 u_{xxxx}+\rho\theta(\Delta x)^2\Delta t u_{xxt}+\mathrm{O}\left((\Delta t)^3\right)\right\}$$

$$=\Delta t u_t+\frac{1}{2}(\Delta t)^2 u_{xxxx}-\Delta t u_{xx}-\frac{1}{12}\frac{(\Delta t)^2}{\rho}u_{xxxx}-\theta(\Delta t)^2 u_{xxxx}+\mathrm{O}\left((\Delta t)^3\right)$$

$$=(\Delta t)^2 u_{xxxx}\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{12}\frac{1}{\rho}-\theta\right\}+\mathrm{O}\left((\Delta t)^3\right)$$

$\theta\neq\dfrac{1}{2}$かつ$\rho=\dfrac{1}{6(1-2\theta)}$なら~~3~~2次精度，それ以外なら~~2~~1次精度.

2. (※)に $u_j^n=g^n e^{i\xi j\Delta x}$ を代入して，

$$g^{n+1}e^{i\xi j\Delta x}-g^n e^{i\xi j\Delta x}=\theta\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\left(g^{n+1}e^{i\xi(j+1)\Delta x}-2g^{n+1}e^{i\xi j\Delta x}+g^{n+1}e^{i\xi(j-1)\Delta x}\right)$$

$$+(1-\theta)\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\left(g^n e^{i\xi(j+1)\Delta x}-2g^n e^{i\xi j\Delta x}+g^n e^{i\xi(j-1)\Delta x}\right)$$

$$\Leftrightarrow\quad g-1=\rho\theta\left(ge^{i\xi\Delta x}-2g+ge^{-i\xi\Delta x}\right)+\rho(1-\theta)\left(e^{i\xi\Delta x}-2+e^{-i\xi\Delta x}\right)$$

$$\Leftrightarrow\quad\left\{1-\rho\theta\left(e^{i\xi\Delta x}-2+e^{-i\xi\Delta x}\right)\right\}g=1+\rho(1-\theta)\left(e^{i\xi\Delta x}-2+e^{-i\xi\Delta x}\right)$$

$$\Rightarrow\quad g=\frac{1+\rho(1-\theta)\left(e^{i\xi\Delta x}-2+e^{-i\xi\Delta x}\right)}{1-\rho\theta\left(e^{i\xi\Delta x}-2+e^{-i\xi\Delta x}\right)}=\frac{1+\rho(1-\theta)(2\cos\xi\Delta x-2)}{1-\rho\theta(2\cos\xi\Delta x-2)}=\frac{1-4\rho(1-\theta)\sin^2\dfrac{\xi\Delta x}{2}}{1+4\rho\theta\sin^2\dfrac{\xi\Delta x}{2}}$$

次の実験データの回帰直線を求める回帰分析を行え.

$$(X_i, Y_i) = (1,2), (2,5), (3,5)$$

$Y = aX + b$ とする. $\sum_i (Y_i - (aX + b))^2$ を最小とする $a, b$ を求める.

$$\sum_i (Y_i - (aX + b))^2 = (2 - (a+b))^2 + (5 - (2a+b))^2 + (5 - (3a+b))^2$$

$$= 14a^2 + 3b^2 + 12ab - 54a - 24b + 54$$

$$= 14\left\{a + \frac{3}{14}(2b-9)\right\}^2 - \frac{9}{14}(2b-9)^2 + 3b^2 - 24b + 54$$

$$= 14\left\{a + \frac{3}{14}(2b-9)\right\}^2 + \frac{3}{7}\left(b^2 - 2b + \frac{9}{2}\right)$$

$$= 14\left\{a + \frac{3}{14}(2b-9)\right\}^2 + \frac{3}{7}\left((b-1)^2 + \frac{7}{2}\right)$$

$$= 14\left\{a + \frac{3}{14}(2b-9)\right\}^2 + \frac{3}{7}(b-1)^2 + \frac{3}{2}$$

よって $a = \frac{3}{2}$; $b = 1$ のとき最小になる. 回帰直線は,

$$Y = \frac{3}{2}X + 1$$