

応用数値計算法 (担当: 土屋)

期末試験問題

2013 年 7 月 22 日実施

(Translation to English is on the second page, just for your reference.)

1. (LU 分解)

LU 分解を用いて次の連立 1 次方程式を解け.

$$\begin{cases} 4x + 3y + 2z + w = 10 \\ 16x + 10y + 9z + 6w = 46 \\ 12x + 3y + 12z + 5w = 58 \\ 8x + 4y + 11z + 2w = 40 \end{cases}$$

2. (固有値問題)

対称行列 A についてゼロでないベクトル x に対してレーリー商 $R(x)$ が次のように定義される.

$$R(x) = \frac{(x, Ax)}{(x, x)} = \frac{x^T A x}{x^T x}$$

(a, b) はベクトル a, b の内積をあらわす.

a) このとき, A の固有ベクトルのレーリー商が対応する固有値となることを確認せよ.

b) レーリー商を用いたべき乗法の手順を簡潔に説明せよ.

c) 適当なベクトル $x^{(0)}$ を初期値としたレーリー商を用いたべき乗法の反復

$$x^{(k+1)} = Ax^{(k)}$$

を考える. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ の固有値, 固有ベクトルを λ_j, v_j ($j = 1, 2, \dots, n$) とし

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$$

としたときに上記の反復により, $R(x^{(k)})$ が λ_1 に収束することを示せ.

3. (偏微分方程式の数値解の安定性)

拡散方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

の陽解法における解の安定性をフォン・ノイマンの条件

$$|g| \leq 1 + K\Delta t$$

を用いて議論せよ.