計算機ソフトウェア
第十回

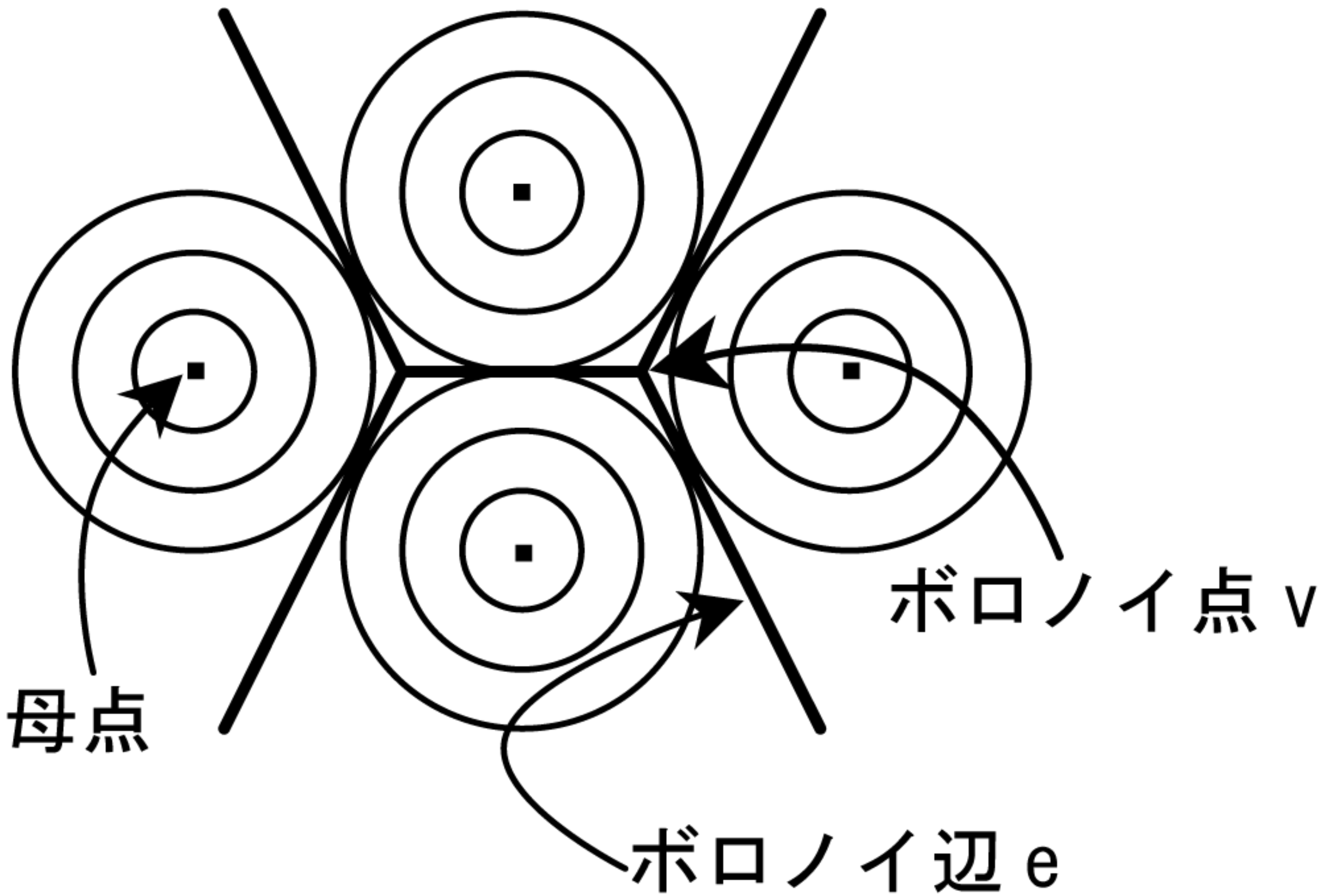
電気電子工学科
黒橋禎夫

幾何学的問題を扱うための用語

- 図形：点の（有限 or 無限）集合
- 図形が凸（convex)：ある図形に含まれる任意の2点を結ぶ線分が、その図形に含まれる
- Xの凸包(convex hull)：図形Xを含む最小の凸図形

ボロノイ図

- 勢力範囲のようなものを考える



ボロノイ図

- ボロノイ辺:母点から等距離にある境界
- ボロノイ点:3個以上の母点を通る円の中心
- 空円性（empty-circleproperty）:３つ以上の母点を通る円の中には他の母点が含まれない
- 円の中心がボロノイ点 ∫ 空円性を満たす

- 母点個数 = n, ボロノイ辺個数 = e, ボロノイ点個数 = v とするとき、以下が成り立つ。

  $v < 2n - 2,\ e < 3n - 3$

（証明） ボロノイ点に接続する辺の延べ総数 A

$3v \leqq A < 2e$ より $3v < 2e$ (1)

オイラーの関係式 $V - E + F = 2$ に対して

$V - v = E - e,\ F = n + 1$ (ボロノイ図の周りを囲んだ図を考えて) がいえるから

$v - e + n = 1$ (2)

(1), (2) から題式が直接導ける（証明終わり）

アルゴリズム NEAREST-POINT

入力: $S = \{ P_1, P_2 \dots P_n \}, P$

出力: P に最も近い母点

手続き:

1. 任意の母点 Pi
2. Pi に最も近い Pj
3. if $d(P, P_i) \leqq d(P, P_j)$ then P_i を出力
   else $P_i \leftarrow P_j$, 2. – 3. を繰り返す

最小全域木 minimum spanning tree

- S のすべての点を頂点とする木（全域木 spanning tree)のうち、長さの総和が最小のもの

  素朴なアルゴリズム: すべての対の距離を計算、短いものから順に加える（閉路が無い場合） $O(n^2)$

  ドロネー図を用いたアルゴリズム: ドロネー図を作る、ドロネー辺の距離でソート $O(n \log n)$

3次元凸包とドロネー図

- ドロネー図：ボロノイ領域が隣接する母点同士を結んだ「ドロネー辺」が作る図
- 構成法：３次元凸包を利用した分割統治法

平面上で与えられた3点 P_i, P_j, P_k がドロネー三角形を構成するということは、行列式

$$
\begin{vmatrix}
1 & x_i & y_i & x_i^2+y_i^2 \\
1 & x_j & y_j & x_j^2+y_j^2 \\
1 & x_k & y_k & x_k^2+y_k^2 \\
1 & x & y & x^2+y^2
\end{vmatrix}
$$

が0より大、すなわち他のすべての P が P_i, P_j, P_k を通る円の中にないということであり、

これは $x^2+y^2 = z$ とおいたときに z を高さとする空間上で他のすべての p の高さ z が P_i, P_j, P_k の作る平面より上にあることと正確に対応する。