応用数値計算法

期末試験問題

2016年7月25日実施
担当　土屋

<u>注意</u>：　問題は4問ある．日本語と英語で問題が記載してある．どちらかを読んで回答すること．両者はほぼ同じであるが，異なる場合は選択した言語の問題文に従うこと．解答は日本語でも英語でも構わない．

<u>Note</u>:　There are four questions. Each is written both in Japanese and English. Choose either one to answer. They should be same. If they look different, follow the questions of the chosen language. You may answer either in Japanese or English.

１．（LU 分解）

LU 分解を用いて次の連立 1 次方程式を解け．（ピボット選択は不要）

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & U_{12} \\ 0 & U_{22} \end{pmatrix}$$

$$LU = \begin{pmatrix} u_{11} & U_{12} \\ u_{11}L_{21} & L_{21}U_{12} + L_{22}U_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2a + 4b - 2c + d = 115 \\ 8a + 17b - 5c + 3d = 472 \\ -4a - 9b + 4c - 4d = -296 \\ 4a + 2b + 2c - 9d = -99 \end{cases}$$

１．(LU factorization)

Solve the following system of linear equations using LU factorization (without pivoting).

$$\begin{cases} 2a + 4b - 2c + d = 115 \\ 8a + 17b - 5c + 3d = 472 \\ -4a - 9b + 4c - 4d = -296 \\ 4a + 2b + 2c - 9d = -99 \end{cases}$$

２．（特異値分解）

次の行列を特異値分解せよ．

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

２．(Singular value decomposition)

Execute singular value decomposition on the following matrix.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

３．（べき乗法を用いた固有値計算）

実正方行列$\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$の固有値，固有ベクトルが λ_j，$\boldsymbol{v}_j$ $(j = 1, 2 \dots n)$，$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_{n-1}| > |\lambda_n|$であると仮定する．

適当な初期ベクトル$\boldsymbol{x}^{(0)}$を与え，適切な反復計算により，固有値λ_1，固有ベクトル$\boldsymbol{v}_1$を得るべき乗法について説明せよ．

３．(Power iteration for Eigenvalues calculation)

Let the eigenvalues and eigenvectors of a real square matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ as λ_j and $\boldsymbol{v}_j$ $(j = 1, 2 \dots n)$, respectively, and assume $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_{n-1}| > |\lambda_n|$.

Explain the power iteration method, where we set an initial vector $\boldsymbol{x}^{(0)}$ and repeat an iteration of a calculation to obtain the eigenvalue λ_1, and the corresponding eigenvector $\boldsymbol{v}_1$.

4．(偏微分方程式，解の安定性)
2 次元空間(x,y)，時間tの関数$u(x,t)$に対する次の拡散方程式を差分法で解く．

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

格子点$\mathrm{P}_{j,k}^{n}(x_j,\ y_k,\ t_n)$を次式で定義する．

$$x_j=x_0+j\Delta x,\quad y_j=y_0+k\Delta y,\quad t_n=t_0+n\Delta t$$

この格子点での解の近似値を$u_{j,k}^{n}$とし，以下の問いに答えよ．

a) この偏微分方程式を近似する差分方程式を示せ．なお，時間微分を前進差分，空間微分を中心差分で近似せよ．

b) この差分方程式について$\Delta x=\Delta y$とし，$\Delta t/(\Delta x)^2=$(定数)というスキームの安定条件を示せ．

4．(partial differential equations, stability of numerical solution)
The diffusion equation in two dimensional space for a scalar function $u(x,t)$, where t is time, $(x,\ y)$ are spatial variables, is;

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

The grid point $\mathrm{P}_{j,k}^{n}(x_j,\ y_k,\ t_n)$ is defined as the following equations;

$$x_j=x_0+j\Delta x,\quad y_j=y_0+k\Delta y,\quad t_n=t_0+n\Delta t.$$

Let $u_{j,k}^{n}$ be the approximated solution at the point, and answer the questions.

a) Derive a difference equation, which approximate the diffusion equation above, where the time and space derivatives are approximated as forward and central differences, respectively.

b) Suppose$\Delta x=\Delta y$. Show the stability condition of the difference equation with a scheme "$\Delta t/(\Delta x)^2=$ const.".