情報メディア工学特論

特異点可視化 I

2004/11/16

京都大学高等教育研究開発センター情報メディア教育部門
学術情報メディアセンター連携研究部門 (兼任)
大学院工学研究科電気工学専攻 (兼担)
小山田耕二

コース概要 (2/2)

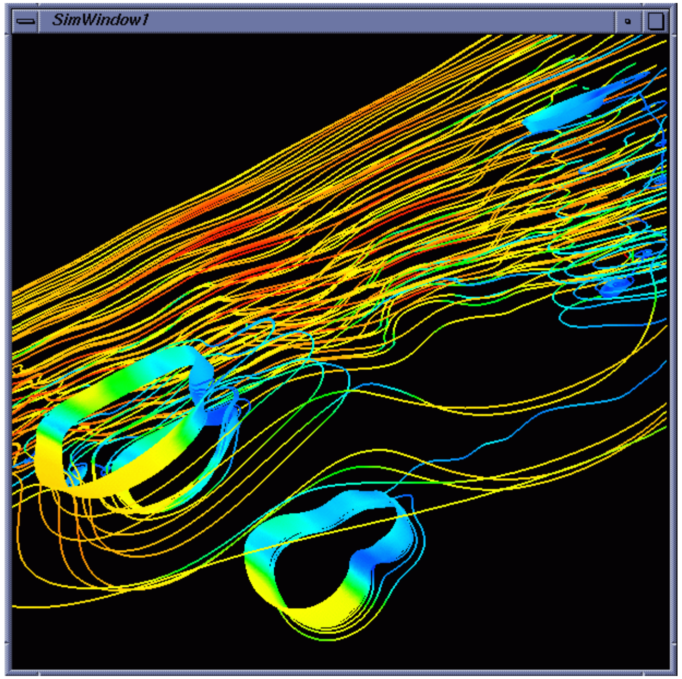
- 特異点ベース可視化技術
  - 渦可視化(11/16)
  - 等値面表示高速化、DT-MRI可視化(11/30)
- システム開発技術/OpenGL基礎
  - オブジェクト指向システム開発技術 (12/7)
  - 基本オブジェクト設計 (12/14)
- 可視化システム実装演習
  - 等値面表示システム(12/21)
  - ボリュームレンダリング表示システム (1/11)
  - 流線表示システム(1/18)

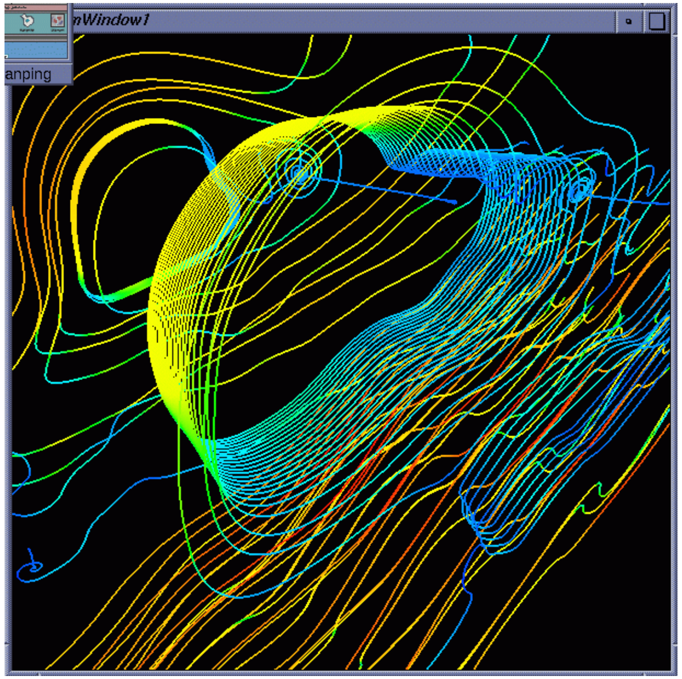
内容

- 特異点可視化
  - 流線表示法
    - 流線開始点の設定
  - 4面体格子を用いて特異点を求める方法
    - 体積座標を使った補間
    - 4面体行使内部でのベクタデータ補間
    - 特異点の探索・分類

流線表示手法

- 流線は,各点での接線がそこでのベクタデータに平行であるような曲線である





http://www.erc.msstate.edu/~zhanping/Research/FlowVis/Streamlines/Streamlines.htm

流線開始点の設定

- 渦を流線表示により可視化する場合，渦の中心付近の適切な開始点が必要
  - コンピュータグラフィックスディスプレー上で対話的に開始点を指示することは，一つの有効な手段である．
    - 速度データの分布をあらかじめ知っていないと，適切な流線の開始点を見つけるのは困難である．
  - 開始点を指示するための有効な手段として，特異点 (a critical point)付近に開始点を設定することが考えられる．
    - 特異点は，速度データがゼロベクタとなるような点

Glubusらの方法

- 格子内部における速度場は，格子点で定義された8つの速度ベクタと3次元線形補間を用いて表現される．
  - それぞれの速度成分は，格子内部の局所座標の3次式となる．
  - 特異点を求めるには，各格子毎に非線形連立方程式を解く必要がある．
  - 正しい解に収束しない場合がある
- 直交格子上で定義された速度データを対象としているため，より一般的な非構造格子で定義された速度データに適用することが不可能
  - 非構造格子は，有限要素法解析等で用いられる格子
  - 多くの場合，非構造格子は，4面体格子から構成される．

4面体格子を用いて特異点を求める方法

- 今，3次元空間で速度場 v=(u,v,w)が定義されている と仮定する．空間内の1点 $x=(x^0,y^0,z^0)$において，この 速度場を2次微分項以下を無視してテーラー展開を行うと，

$$u = u^0 + (x - x^0)\frac{\partial u}{\partial x} + (y - y^0)\frac{\partial u}{\partial y} + (z - z^0)\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$v = v^0 + (x - x^0)\frac{\partial v}{\partial x} + (y - y^0)\frac{\partial v}{\partial y} + (z - z^0)\frac{\partial v}{\partial z}$$

$$w = w^0 + (x - x^0)\frac{\partial w}{\partial x} + (y - y^0)\frac{\partial w}{\partial y} + (z - z^0)\frac{\partial w}{\partial z}$$

- ここで，$v=(u^0,v^0,w^0)$は，点 $x=(x^0,y^0,z^0)$における速度データである．
- 特異点 $x=(x^{CP},y^{CP},z^{CP})$では，$u^{CP}=v^{CP}=w^{CP}=0$となり，上式は，特異点付近での速度 場の挙動を線形近似したもの

4面体格子内部でのデータ補間

- 4面体格子内部において，体積座標系を使って，データ補間を行う．
  - 体積座標系は，4面体内部で 定義される局所座標系
  - i番目の成分 は，4面体の体積と内部点Xとi番目の頂点の対面がつくる小4面体の体積の比
- 内部点(x,y,z) において，ベクタデータ X=(u,v,w)は，以下のように表現される．

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = p\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \\ w_2 \end{pmatrix} + (1-p-q-r)\begin{pmatrix} u_3 \\ v_3 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

- ここで，(u_i , v_i , w_i)は，i番目の頂点において 定義されているベクタデータを，そして (p,q,r)は，内部点の体積座標のうち独立する3成分からなるベクタを表す．

4面体格子内部でのデータ補間

- (p,q,r)についてまとめると,

$$\begin{pmatrix} u-u_3 \\ v-v_3 \\ w-w_3 \end{pmatrix} = Mv \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$$

$$Mv = \begin{bmatrix} u_0-u_3 & u_1-u_3 & u_2-u_3 \\ v_0-v_3 & v_1-v_3 & v_2-v_3 \\ w_0-w_3 & w_1-w_3 & w_2-w_3 \end{bmatrix}$$

- 内部点 自身も頂点で定義された全体座標データ から補間計算されると考えると, ベクタデータと同様に右のように表現することができる.

$$\begin{pmatrix} x-x_3 \\ y-y_3 \\ z-z_3 \end{pmatrix} = Mx \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$$

$$Mx = \begin{bmatrix} x_0-x_3 & u_1-u_3 & u_2-u_3 \\ y_0-y_3 & y_1-y_3 & y_2-y_3 \\ z_0-z_3 & z_1-z_3 & z_2-z_3 \end{bmatrix}$$

- ここで, (x_i, y_i, z_i)は, i番目の頂点座標である. 上式は, 体積座標から全体座標への座標変換を表現している.

特異点の探索

- 4面体格子の中に特異点があるかどうかを調べるために，式(2.4)において，(u,v,w) =(0,0,0) とおき，体積座標(p,q,r) に関する連立方程式を得る．

$$\begin{pmatrix} -u_3 \\ -v_3 \\ -w_3 \end{pmatrix} = Mv \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$$

- 行列Mvの行列式の値がゼロでなければ，体積座標(p,q,r)は，以下のようにして計算できる．

$$\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = Mv^{-1} \begin{pmatrix} -u_3 \\ -v_3 \\ -w_3 \end{pmatrix}$$

- 得られた体積座標が包含条件をみたせば，1個の特異点が4面体格子内部に存在する．

特異点の分類

- 特異点が見つかると，速度勾配テンソルJの固有値(λ) にしたがって，これらを分類する．固有値は，以下の特性方程式(λ　に関する3次方程式)

$$\det(J - \lambda I) = 0$$

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}$$

- の解であり，
  - 3つの実解
  - 1つの実解と一組の共役複素数
- の場合が，存在する．

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} & \frac{\partial q}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} & \frac{\partial q}{\partial y} & \frac{\partial r}{\partial z} \\ \frac{\partial p}{\partial z} & \frac{\partial q}{\partial z} & \frac{\partial r}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial p} & \frac{\partial v}{\partial p} & \frac{\partial w}{\partial p} \\ \frac{\partial u}{\partial q} & \frac{\partial v}{\partial q} & \frac{\partial w}{\partial q} \\ \frac{\partial u}{\partial r} & \frac{\partial v}{\partial r} & \frac{\partial w}{\partial r} \end{pmatrix}$$

特異点の分類

$$\begin{pmatrix} x - x_3 \\ y - y_3 \\ z - z_3 \end{pmatrix} = Mx \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$$

$$Mx = \begin{bmatrix} x_0 - x_3 & u_1 - u_3 & u_2 - u_3 \\ y_0 - y_3 & y_1 - y_3 & y_2 - y_3 \\ z_0 - z_3 & z_1 - z_3 & z_2 - z_3 \end{bmatrix}$$

- 各行について，x，y，zでそれぞれ偏微分すると，

$$I = Mx \times \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} & \frac{\partial p}{\partial y} & \frac{\partial p}{\partial z} \\ \frac{\partial q}{\partial x} & \frac{\partial q}{\partial y} & \frac{\partial q}{\partial z} \\ \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial r}{\partial z} \end{pmatrix} \qquad Mx^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} & \frac{\partial p}{\partial y} & \frac{\partial p}{\partial z} \\ \frac{\partial q}{\partial x} & \frac{\partial q}{\partial y} & \frac{\partial q}{\partial z} \\ \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial r}{\partial z} \end{pmatrix}$$

特異点の分類

$$\begin{pmatrix} u-u_3 \\ v-v_3 \\ w-w_3 \end{pmatrix} = Mv \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$$

$$Mv = \begin{bmatrix} u_0-u_3 & u_1-u_3 & u_2-u_3 \\ v_0-v_3 & v_1-v_3 & v_2-v_3 \\ w_0-w_3 & w_1-w_3 & w_2-w_3 \end{bmatrix}$$

- 各行について，p，q，rでそれぞれ偏微分すると，

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial p} & \frac{\partial u}{\partial q} & \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial v}{\partial p} & \frac{\partial v}{\partial q} & \frac{\partial v}{\partial r} \\ \frac{\partial w}{\partial p} & \frac{\partial w}{\partial q} & \frac{\partial w}{\partial r} \end{pmatrix} = Mv \times I$$

$$Mv = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial p} & \frac{\partial u}{\partial q} & \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial v}{\partial p} & \frac{\partial v}{\partial q} & \frac{\partial v}{\partial r} \\ \frac{\partial w}{\partial p} & \frac{\partial w}{\partial q} & \frac{\partial w}{\partial r} \end{pmatrix}$$

特異点の分類

- 従って，速度勾配テンソルJは以下のように表される．

$$J = Mx^{-T} \times Mv^{T}$$

$$= \begin{bmatrix} x_0 - x_3 & x_1 - x_3 & x_2 - x_3 \\ y_0 - y_3 & y_1 - y_3 & y_2 - y_3 \\ z_0 - z_3 & z_1 - z_3 & z_2 - z_3 \end{bmatrix}^{-T} \times \begin{bmatrix} u_0 - u_3 & u_1 - u_3 & u_2 - u_3 \\ v_0 - v_3 & v_1 - v_3 & v_2 - v_3 \\ w_0 - w_3 & w_1 - w_3 & w_2 - w_3 \end{bmatrix}^{-T}$$

まとめ

- 特異点可視化の基本について理解した
  - 流線表示法
    - 流線開始点の設定
  - 4面体格子を用いて特異点を求める方法
    - 体積座標を使った補間
    - 4面体行使内部でのベクタデータ補間
    - 特異点の探索・分類

小テスト(氏名：　　　　　　　　　　)

- 黒板で書かれたような4面体の各頂点でベクタデータが定義されているとき、4面体内部に特異点が含まれるかどうか調べよ。また、含まれる場合その特異点を分類せよ。

- koyamada@kudpc.kyoto-u.ac.jp
- http://www.viz.media.kyoto-u.ac.jp
- 講義からはいってください