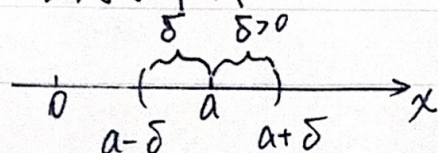


# 一. 区间与邻域



$$\{x \mid |x-a| < \delta\} = N(a, \delta)$$

$$= (a-\delta, a+\delta) \quad \text{中心 } a \quad \text{半径 } \delta$$

$N(a)$  - (半径不重要)

$N^0(a)$

去心邻域  $N^0(a, \delta) = \{x \mid 0 < |x-a| < \delta\}$

左邻域  $(a-\delta, a)$

四个符号

右邻域  $(a, a+\delta)$

$\forall \exists \Rightarrow \Leftarrow$

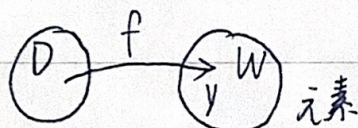
$\forall f(x), x \in (-\infty, +\infty)$ ,  $\exists$  一个奇函数  $g(x)$  与一个偶函数  $h(x)$ :  $f(x) = g(x) + h(x)$  (真)

$$g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} \quad h(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$

# 二. 函数

$$f: x \mapsto y, x \in D$$

$$y = f(x), x \in D$$



$$D = \mathbb{R} \times \mathbb{R} (= \mathbb{R}^2) \quad (x, y) \quad \text{实平面}$$

$$W \quad \text{复平面} \quad x+iy$$

# 几个特殊函数

## 1° 符号函数

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

$$\text{注: } |x| = x \cdot \operatorname{sgn} x$$

$$= \operatorname{sgn} x$$

## 2° Gauss 取整函数

$$f(x) = [x]$$

## 3° Dirichlet 函数

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数} \\ 0, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$$



## 三. 初等性质

(奇偶性, 单调性, 周期性, 有界性)

例1. 验证  $D(x)$  是周期函数证: 正有理数  $r$ 

$$\forall x \in \mathbb{R}, D(x+r) = \begin{cases} 1, & x+r \text{ 为有理数} \\ 0, & x+r \text{ 为无理数} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数} \\ 0, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$$

$$\stackrel{(\text{有理})}{=} D(x) \quad \therefore D(x) \text{ 以 } r \text{ 为周期}$$

无基本周期

例2.  $f(x) = \frac{1+x^2}{1+x^4}$  有界性如何?解:  $f(x)$  定义域为  $\mathbb{R}$ .首先  $f(x) \geq 0$ ,  $f$  有下界 0

$$f(x) = \frac{1}{1+x^4} + \frac{x^2}{1+x^4} \quad 1+x^4 \geq 2x^2$$

$$\leq 1 + \frac{1}{2}$$

 $\therefore f$  有上界  $\frac{3}{2}$ 

(上确界, 下确界)