第1章 质点运动学
Kinematics of Particles

第1节　参考系 质点

第2节　位置矢量位移

第3节　速度 加速度

第4节　相对运动

第1节　参考系 质点
Reference system
Particle

1. 概念理解：参考系、质点

1. 参考系

在描述一个物体的运动时，选作参考的其他物体称为**参考系**。也称**参照系**。

参考系的选择原则上是任意的。但参考系不同，对运动的描述可能是不同的。

选定参考系后，还只能对物体的机械运动作定性描述。为了定量地说明一个质点相对于此参考系的位置，还必须在参考系中建立固定的**坐标系**。

坐标系是参考系的数学抽象。

坐标系是固定在参考系中的一组坐标轴。

2. 质点

忽略物体的大小和形状，而将其抽象为一个有质量而无大小和形状的几何点，这样的物体称为**质点**。

物体 $\xrightarrow[\text{可忽略}]{\text{大小、形状的影响}}$ 质点

物体 $\xrightarrow[\text{不可忽略}]{\text{大小、形状的影响}}$ ~~质点?~~

$\searrow$ $\xrightarrow[\text{体元足够小均可视为质点}]{\text{由许多小体元组成}}$ 质点系

第2节　位置矢量　位移

Position vector
Displacement

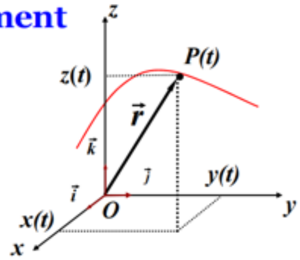
1. 位置矢量(位矢)

$$\vec{r} = r\vec{e}_r$$

单位矢量

在直角坐标系中

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$



$$\vec{r}\begin{cases}\text{大小:}\ |\vec{r}| = r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \text{方向:}\ \cos\alpha = \dfrac{x}{r}\quad \cos\beta = \dfrac{y}{r}\quad \cos\gamma = \dfrac{z}{r}\end{cases}$$

$$\boxed{\vec{a} = a\vec{e}_a}$$

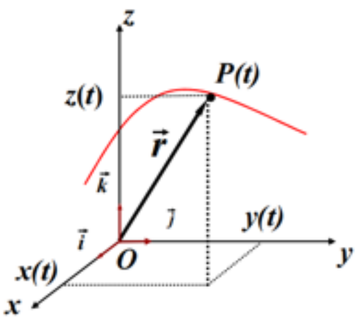
1. 轨迹方程 & 运动方程

✓ $f(x,y,z)=0$: $\begin{cases} y^2+z^2=4 \\ x=0 \end{cases}$ = 空间曲线

✓ $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$

$$\boxed{\vec{r}(t) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}$$

——质点运动方程



$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

——轨迹方程的参数方程

消去t得到的是轨迹方程:

$$\boxed{f(x,y,z) = 0}$$

2. 位移:　位置矢量的增量称为位移。

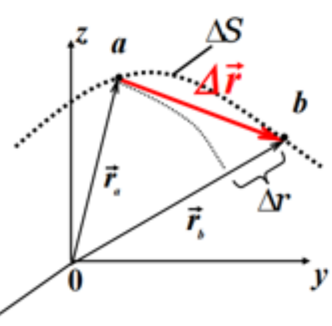
2.分清轨迹图中各物理量的含义
($\vec{r}$, $\Delta\vec{r}$, Δr, ΔS)

t时刻: 质点在a点　$\vec{r}_a$

$t+\Delta t$时刻: 质点在b点　$\vec{r}_b$

则经Δt后质点的位置变化:

位移: $\Delta\vec{r} = \vec{r}_b - \vec{r}_a$



$\begin{cases} |\Delta\vec{r}| \neq \Delta S \neq \Delta r \\ |d\vec{r}| = dS,\ dr \neq dS \end{cases}$

注意:

1) 位移$\Delta\vec{r}$是矢量

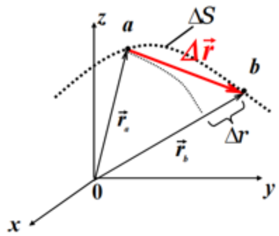
$$\Delta\vec{r}\begin{cases}\text{方向:}\ \vec{r}_b - \vec{r}_a \\ \text{大小:}\ |\Delta\vec{r}| \neq \Delta r\end{cases}$$

并且: $|d\vec{r}| \neq dr$

2) 位移 $|\Delta\vec{r}| \neq \Delta S$ (路程)　　但: $|d\vec{r}| = dS$

3）在直角坐标系中：

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_b - \vec{r}_a = (x_b\vec{i} + y_b\vec{j} + z_b\vec{k}) - (x_a\vec{i} + y_a\vec{j} + z_a\vec{k})$$



即：

$$\Delta\vec{r} = \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j} + \Delta z\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}$$

$\Delta r ? = r_b - r_a$

第3节　速度 加速度

Velocity
Acceleration

1. 瞬时速度，平均速度 — 矢量

$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$：微商形式

$\bar{\vec{v}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$：变化量之比

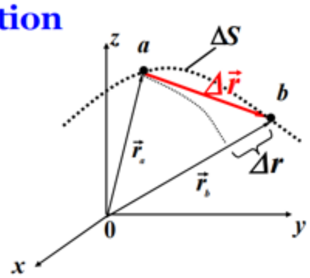
1. 速度

平均速度：$\bar{\vec{v}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$

注意：$|\bar{\vec{v}}| = \frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t} \neq \frac{\Delta S}{\Delta t}$

速度(瞬时速度)：

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$



$$\boxed{\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}}$$

方向：沿质点在a点处的切线，并指向运动的前方。

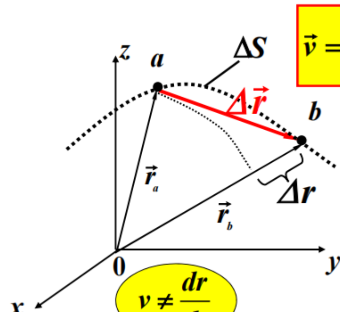
13

在直角坐标系中：

$$\boxed{\vec{r}(t) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}$$

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}}$$



$v \neq \frac{dr}{dt}$

速率

$$\vec{v}\begin{cases}|\vec{v}| = v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \frac{dS}{dt} \\ \text{方向：} \cos\alpha = \frac{v_x}{v}, \cos\beta = \frac{v_y}{v}, \cos\gamma = \frac{v_z}{v}\end{cases}$$

$$\boxed{v = \frac{dS}{dt}}$$

$$\boxed{v = |\vec{v}| = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \frac{|d\vec{r}|}{dt} = \frac{dS}{dt}}$$

14

直角坐标系下：

$$\vec{v} = \frac{d(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

速率：速度的模

$$v = |\vec{v}| = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \frac{|d\vec{r}|}{dt} = \frac{dS}{dt}$$

$$= \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

注意：$\Delta v \neq |\Delta \vec{v}|$

$\boxed{\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}$

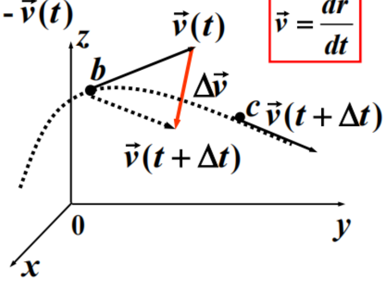
2. 加速度

$\boxed{\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}}$

速度增量: $\Delta\vec{v} = \vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)$

平均加速度: $\bar{\vec{a}} = \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$

加速度(瞬时加速度):

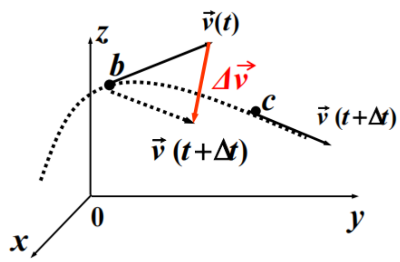


$$\vec{a} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

$$= \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$$

$$= \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

$\boxed{\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}}$



$\vec{a}$ 的大小和方向

大小:

$$|\vec{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

方向:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{a} \qquad \cos\beta = \frac{a_y}{a} \qquad \cos\gamma = \frac{a_z}{a}$$

注意: 加速度的方向永远指向轨迹凹进的一侧.

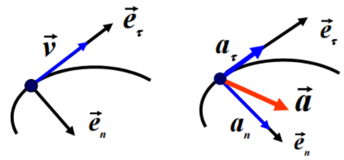
$a \neq \dfrac{dv}{dt}$ “圆周运动”.

$a = |\vec{a}| = \left|\dfrac{d\vec{v}}{dt}\right| = \dfrac{|d\vec{v}|}{dt}$ $\because |d\vec{v}| \neq dv$. $\therefore a \neq \dfrac{dv}{dt}$

切向加速度与法向加速度:

在自然坐标系中有

速度: $\vec{v} = v\vec{e}_\tau$



加速度:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v\vec{e}_\tau)}{dt} = \frac{d(v)}{dt}\vec{e}_\tau + v\frac{d(\vec{e}_\tau)}{dt}$$

$$= \vec{a}_\tau + \vec{a}_n = a_\tau\vec{e}_\tau + a_n\vec{e}_n$$

可证 ⟶ $\begin{cases} a_\tau = \dfrac{dv}{dt} & \text{反映速度大小的变化} \\ a_n = \dfrac{v^2}{\rho} & \text{反映速度方向的变化} \end{cases}$

曲率半径

$$\therefore \vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{e}_\tau + \frac{v^2}{\rho}\vec{e}_n$$

物理意义: 可从直线运动和匀速圆周运动两特例看

$$\vec{a} = \frac{d(\vec{v})}{dt} = \frac{d(v\vec{e}_\tau)}{dt}$$

$$= \frac{dv}{dt}\vec{e}_\tau + v\frac{d(\vec{e}_\tau)}{dt}$$

$$= a_\tau\vec{e}_\tau + a_n\vec{e}_n$$

注意: $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$ 依旧成立.

例: t=0时刻在山顶以速率v_0水平发射一枪弹，求其后任意t 时刻的速度、切向和法向加速度的大小。忽略空气阻力。

解: $\vec{a} = \dfrac{dv}{dt}\vec{e}_\tau + \dfrac{v^2}{\rho}\vec{e}_n$

分别沿水平方向和竖直向下方向建立x、y轴，

则 $v_x = v_0 \quad v_y = gt$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + g^2t^2}$$

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\sqrt{v_0^2 + g^2t^2}$$

$$= \frac{g^2t}{\sqrt{v_0^2 + g^2t^2}}$$

$$a^2 = a_\tau^2 + a_n^2$$

$$a = g$$

$$a_n = \sqrt{g^2 - a_\tau^2}$$

$$= \frac{v_0 g}{\sqrt{v_0^2 + g^2t^2}}$$

3. 质点运动学的两类基本问题

(1) 已知运动方程，求速度、加速度

$$\vec{r}(t) \xrightarrow{\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}} \vec{v}(t) \xrightarrow{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}} \vec{a}(t)$$

求导. 积分. 直角系下分解

(2) 已知加速度，求速度、运动方程

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \to \int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}} d\vec{v} = \int_{t_0}^{t} \vec{a}dt \qquad \vec{v} = \vec{v}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{a}dt$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \to \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r} = \int_{t_0}^{t} \vec{v}dt \qquad \vec{r} = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{v}dt$$

已知加速度和运动的初始条件，可用积分的方法求速度、运动方程和轨迹方程。

4. 角速度与角加速度

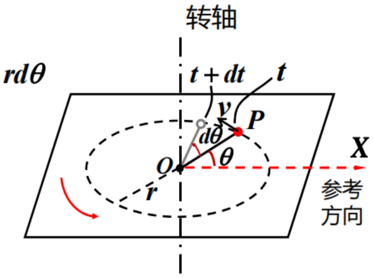
1) 角位置：$\theta=\theta(t)$

2) 角位移：$d\theta,\Delta\theta \quad ds=rd\theta$

3) 角速度：$\omega=\dfrac{d\theta}{dt}$

$$v=\frac{ds}{dt}=\frac{rd\theta}{dt} \quad \boxed{v=r\omega}$$

线速度



4) 角加速度

$$\beta=\frac{d\omega}{dt}=\frac{d^2\theta}{dt^2} \qquad a_\tau=\frac{dv}{dt}=\frac{d(r\omega)}{dt}=r\frac{d\omega}{dt} \quad \boxed{a_\tau=r\beta}$$

量纲 θ，$\Delta\theta$：弧度(rad) ω：弧度/秒(rad · s^{-1}) β：弧度/秒^2(rad · s^{-2})

●描述质点运动的有关物理量

1. 位置矢量（或位矢）$\vec{r}=r\vec{e}_r=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$

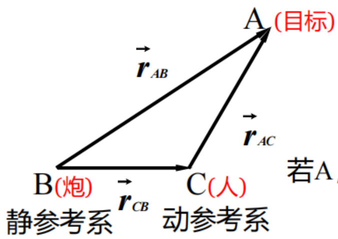
2. 位移 $\Delta\vec{r}=\vec{r}_b-\vec{r}_a=\Delta x\vec{i}+\Delta y\vec{j}+\Delta z\vec{k}$

3. 速度 $\vec{v}=\dfrac{d\vec{r}}{dt}$

4. 加速度 $\vec{a}=\dfrac{d\vec{v}}{dt}=\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$

第4节　相对运动 ⟶ 参系的变换

Relative motion



$\vec{r}_{AB}$ ：A相对B的位矢

$\vec{r}_{AB}=\vec{r}_{AC}+\vec{r}_{CB}$ ①

若A，B，C的位置关系不断变动，则

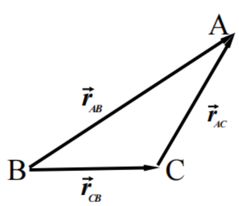
$\vec{r}_{AB}(t)=\vec{r}_{AC}(t)+\vec{r}_{CB}(t)$ ②

$\vec{r}_{AB}(t+\Delta t)=\vec{r}_{AC}(t+\Delta t)+\vec{r}_{CB}(t+\Delta t)$ ③

③ - ②得: $\Delta\vec{r}_{AB}=\Delta\vec{r}_{AC}+\Delta\vec{r}_{CB}$

由①得: $\vec{v}_{AB}=\vec{v}_{AC}+\vec{v}_{CB}$　　$\vec{a}_{AB}=\vec{a}_{AC}+\vec{a}_{CB}$

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{r}_{AB}&=\vec{r}_{AC}+\vec{r}_{CB}\\ \Delta\vec{r}_{AB}&=\Delta\vec{r}_{AC}+\Delta\vec{r}_{CB}\\ \vec{v}_{AB}&=\vec{v}_{AC}+\vec{v}_{CB}\\ \vec{a}_{AB}&=\vec{a}_{AC}+\vec{a}_{CB}\end{aligned}}$$



$$\boxed{\begin{aligned}\vec{r}_{AB}&=\vec{r}_{AC}+\vec{r}_{CB}\\ \Delta\vec{r}_{AB}&=\Delta\vec{r}_{AC}+\Delta\vec{r}_{CB}\\ \vec{v}_{AB}&=\vec{v}_{AC}+\vec{v}_{CB}\\ \vec{a}_{AB}&=\vec{a}_{AC}+\vec{a}_{CB}\end{aligned}}$$

推广：

绝对=相对+牵连

$\vec{r}_{AB}=\vec{r}_{AC}+\vec{r}_{CD}+\vec{r}_{DB}$

$\Delta\vec{r}_{AB}=\Delta\vec{r}_{AC}+\Delta\vec{r}_{CD}+\Delta\vec{r}_{DB}$

$\vec{v}_{AB}=\vec{v}_{AC}+\vec{v}_{CD}+\vec{v}_{DB}$

$\vec{a}_{AB}=\vec{a}_{AC}+\vec{a}_{CD}+\vec{a}_{DB}$

…

上述公式表明: 同一质点在不同的参考系中的位矢、速度、加速度不同，这体现了运动描述的相对性。