机器学习复习13

2022年7月8日 星期五 23:51

Factor Analysis

1. issues:

$$\mu=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}x^{(i)},\quad \Sigma=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(x^{(i)}-\mu)(x^{(i)}-\mu)^T$$

2. 限制协方差 matrix

$$\Sigma_{jj}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(x_j^{(i)}-\mu_j)^2,\quad \Sigma=\sigma^2 I$$

其中: $\sigma^2=\frac{1}{mn}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}(x_j^{(i)}-\mu_j)^2$

3. 边缘和 Gauss 分布:

$$x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\quad \mu=\begin{bmatrix}\mu_1\\\mu_2\end{bmatrix}\quad \Sigma=\begin{bmatrix}\Sigma_{11}&\Sigma_{12}\\\Sigma_{21}&\Sigma_{22}\end{bmatrix}$$

4. 因子分析模型.

$$z\sim N(0,I)\quad \epsilon\sim N(0,\Psi)$$

$$x=\mu+\Lambda z+\epsilon.$$

$$\begin{bmatrix}z\\x\end{bmatrix}\sim N(\mu_{zx},\Sigma)$$

$$E(x)=E(\mu+\Lambda z+\epsilon)$$

$$=\mu+\Lambda E[z]+E[\epsilon]=\mu$$

$$E[(z-E[z])(x-E[x])^T]=\Lambda^T$$

$$E[(x-E[x])(x-E[x])^T]=\Lambda\Lambda^T+\Psi$$

$$\begin{bmatrix}z\\x\end{bmatrix}\sim N\left(\begin{bmatrix}\vec{0}\\\mu\end{bmatrix},\begin{bmatrix}I&\Lambda^T\\\Lambda&\Lambda\Lambda^T+\Psi\end{bmatrix}\right)$$

5. 因子分析的 EM 估计:

$$\begin{cases}Q_i(z^{(i)}):=P(z^{(i)}|x^{(i)};\theta)\\ \theta:=\arg\max_\theta\sum_i\sum_{z^{(i)}}Q_i(z^{(i)})\log\frac{P(x^{(i)},z^{(i)};\theta)}{Q_i(z^{(i)})}\end{cases}$$

最大化目标: $\sum_{i=1}^{m}\int_{z^{(i)}}Q_i(z^{(i)})\log\frac{P(x^{(i)},z^{(i)};\mu,\Lambda,\Psi)}{Q_i(z^{(i)})}$

即 $\sum_{i=1}^{m}E[\log P(x^{(i)}|z^{(i)};\mu,\Lambda,\Psi)]$

$$\Rightarrow\Lambda=\left(\sum_{i=1}^{m}(x^{(i)}-\mu)E_{z^{(i)}\sim Q_i}[z^{(i)T}]\right)\left(\sum_{i=1}^{m}E_{z^{(i)}\sim Q_i}[z^{(i)}z^{(i)T}]\right)^{-1}$$