

# 线代复习+进阶

2022年7月7日 星期四 09:34

1. 基础知识点: 向量, 矩阵, 单位阵, 对角阵

2. 运算: 向量的内积:  $x^T y$  (一个具体的值)

向量的外积:  $x y^T$  (一个 Matrix...)

矩阵  $\times$  向量: (向量)

矩阵  $\times$  矩阵: (矩阵)

转置:  $A^T$

逆  $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

迹  $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n A_{ii}$

行列式:  $\det(A) = \sum_{j=1}^n A_{ij} |A_{i,j}|$

(为递归形式)

3. 性质: 对称分解:  $A = \underbrace{\frac{A + A^T}{2}}_{\text{对称阵}} + \underbrace{\frac{A - A^T}{2}}_{\text{反对称阵}}$

范数: 向量(矩阵)中非零元素的个数

有:  $\begin{cases} ① N(x+y) \leq N(x) + N(y) \\ ② \text{标量 } a \text{ 有: } N(ax) = |a| N(x) \\ ③ N(x) = 0, \text{ 则 } x = 0 \end{cases}$

常用范数:

1. 曼哈顿:  $L^1$   $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$

2. 欧几里德:  $L^2$   $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$

3. p-范数:  $L^p$   $\|x\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$

4. 无穷:  $L^\infty$   $\|x\|_\infty = \max |x_i|$

线性相关

矩阵的秩:  $r(A) / \text{rank}(A)$

半正定阵:  $A = A^T, x^T A x \geq 0$

特征值 & 特征向量

$Az = \lambda z: |A - \lambda I| = 0$ , 用别的向量表示出...

谱定理: 若  $A$  为实对称, 则  $\exists$  实正交  $U$  其中  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$

$\exists \Lambda$ , 使  $A = U \Lambda U^T$

奇异值分解:  $A = U \Sigma V^T$

对于给定  $A_{m \times n}$ ,

满足  $A = U \Sigma V^T$

4. 矩阵的微积为

① 梯度:  $\nabla_A f(A) = \frac{\partial f(A)}{\partial A_{ij}}$

② Hessian:  $(\nabla_x^2 f(x))_{ij} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}$