复变函数与积分变换第四章

2022年9月2日 星期五 11:10

第四章 解析函数的级数表示

§4.1 复数项级数

1. $\{z_n\}$ 为一复数列，其中 $z_n = x_n + iy_n$.
   极限表示：$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$，且 $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ $\lim_{n\to\infty} y_n = y_0$

2. 复数项级数：$S_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n$

3. 收敛条件：① 充要：$\sum_{x=1}^{\infty} x_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 都收敛
   ② S_n 收敛的必要条件：$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty}(x_n + iy_n) = 0$
   ③ $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 也收敛

eg：(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2^n}\right)$：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，级数发散

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n} = -\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots\right) + i\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\right)$
实部，虚部均收敛 ✓，而 $\left|\frac{i^n}{n}\right| = \frac{1}{n}$，为条件收敛

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n^2}$：绝对收敛.

§4.2 复变函数项级数

1. Def. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z)$ $(S_n(z))$

2. 幂级数：$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n$
   相关定理①：若幂级数在 z_1 $(z_1 \neq z_0)$ 收敛，
   则在圆域 $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$
   绝对收敛
   ②：z_2 发散，$|z - z_0| > |z_2 - z_0|$ 发散

3. 比值法 & 根值法：
   ① $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right| = \lambda$，则 $\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n$ 收敛半径 $R = \frac{1}{\lambda}$
   ② $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|C_n|} = \lambda$，则 $\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n$ 收敛半径 $R = \frac{1}{\lambda}$

eg. (1). 求 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}$ 的收敛半径.
均满足 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right| = 1$，$R = 1$
由于 $|z| = 1$ 时，$\lim z^n \neq 0$，则发散
$z = -1$ 处 $\frac{z^n}{n}$ 收，$z = 1$，发
$z = -1$ & 1 时 $\frac{z^n}{n^2}$ 在 $|z| = 1$ 收

eg. (2). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{n}$ 的收敛半径：
$\lim\frac{C_{n+1}}{C_n} = 1$ $R = \frac{1}{\lambda} = 1$

eg. (3). $\frac{1}{z} = \frac{1}{2 + (z - 2)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1 - \frac{z-2}{-2}}$
$= \frac{1}{2} + \left(\frac{z-2}{-2}\right) + \left(\frac{z-2}{-2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{z-2}{-2}\right)^n.$

§4.3 泰勒级数

1. 定理（Taylor 定理）：$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n$，$C_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$

eg (1). 将 $f(z) = e^z$ 在 $z = 0$ 处展开为 Taylor 级数：
$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots + \frac{z^n}{n!}$
$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n!}}} = \infty$???

eg (2). $f(z) = \frac{1}{1-z}$ 在 $z = 0$ 展：
$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n.$

eg (3). $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ $|z| < 1$
$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{1 - (-z^2)} = 1 + (-z^2) + (-z^2)^2 + \cdots + (-z^2)^n$

eg (4). $f(z) = \frac{1}{z-2}$ 在 $z = -1$ 处 $|z + 1| < 3$
$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{-3 + (z+1)} = \frac{1}{-3}\cdot\frac{1}{1 - \frac{z+1}{3}}$ ...

§4.4 洛朗（Laurent）级数

定理 I.「洛朗定理」：$R_1 < |z - z_0| < R_2$
则在此圆域中一定能展 $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z - z_0)^n$
$C_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta$

eg. $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}$
在 (1) $0 < |z| < 1$ 展开为洛朗级数
$f(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2\left(1 - \frac{z}{2}\right)}$
$= \sum_{z=0}^{\infty} z^n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}$

(2) $1 < |z| < 2$，则 $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$ $\left|\frac{z}{2}\right| < 1$
$f(z) = -\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1 - \frac{1}{z}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1 - \frac{z}{2}}$
$= -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}$
$= -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}$

eg：$f(z) = \frac{\sinh z}{z^2}$ 在 $0 < |z| < +\infty$ 展开为洛朗级数.
$= \frac{1}{2z^2}\left(e^z - e^{-z}\right)$