信号与系统第四章

2022年9月21日 星期三　16:23

连续时间傅里叶变换

S4.1 非周期信号的表示:

① $\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega \\ X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt \end{cases}$ $x(t)$、$X(j\omega)$ 互相转换公式

② 收敛与狄里赫利条件:

$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$ (4.5)

$\begin{cases} 1. \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < \infty \\ 2. \text{有限 } max, min \text{ 值} \\ 3. \text{有限个断点，且必须为有限值} \end{cases}$

S4.2 周期信号的傅里叶变换

$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,dt$

$a_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cdot e^{-jk\omega_0 t}dt$

S4.3 连续时间傅里叶变换性质

① 线性性质

「课」:

① 周期信号 → 采用傅里叶
非周期 → 设 $T=\infty$

② $F_k = |F_k|\cdot e^{j\varphi_k} = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_1 t}dt$

$X(j\omega) = \lim_{T\to\infty} F_k T = \lim_{\Delta\omega\to 0} 2\pi\cdot\frac{F_k}{\Delta\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$

③ 傅里叶逆变换

$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k e^{jk\omega_1 t} = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{2\pi F_k}{\Delta\omega}e^{jk\omega_1 t}\Delta\omega$

$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$　　$X(j\omega) = \frac{2\pi F_k}{\Delta\omega}$ (幅度密度)

$X(j\omega) \longrightarrow x(t)$: 傅里叶变换

④ Tips: $\begin{cases} \text{正变换}: X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt \\ \text{反变换}: x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega \end{cases}$

⑤ $X(j\omega) = \dots = Re(\omega) + jIm(\omega)$

$|X(j\omega)| = \sqrt{Re^2(\omega) + Im^2(\omega)}$ (幅度), $\varphi(j\omega) = \arctan\frac{Im(\omega)}{Re(\omega)}$ (相位)

⑥ $\begin{cases} Re(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cos\omega t\,dt \text{ (偶)} \\ Im(\omega) = -\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\sin\omega t\,dt \text{ (奇)} \end{cases}$

⑦ 信号分解的角度看傅里叶逆变换:

$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega = \sum_{\omega=-\infty}^{\infty}\left[X(j\omega)\frac{d\omega}{2\pi}\right]e^{j\omega t}$

$e^{j\omega t}$ 幅度为: $\frac{|X(j\omega)|d\omega}{2\pi}$, 幅度密度: $|X(j\omega)|$

$\frac{1}{T}\int_T [x(t)]^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |F_k|^2$

⑧ 对于 $Ae^{j\omega t}$, 平均功率: $|A|$, 能量无穷大

$\overline{P(j\omega)} = \left\{|X(j\omega)|\frac{d\omega}{2\pi}\right\}^2$

$E(j\omega) = [X(j\omega)]^2\frac{d\omega}{2\pi}$

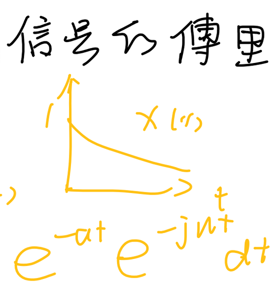
	周期信号: $x_T(t)$	非周期信号: $x(t)$
基本信号	$\{e^{jk\omega_1 t}\}, k\in Z$	$\{e^{j\omega t}\}$
信号分解	$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k e^{jk\omega_1 t}$ ⋮	$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}\dots$ ⋮

⑨ Dirichlet Conditions:

1) $x(t)$ 绝对可积: $\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|dt < \infty$
2) 有限个最大值、小值
3) 有限个不连续点, 在每一个不连续点都为有限值

⑩ 典型非周期信号的傅里叶变换.

1) 单边指数



$x(t) = e^{-at}u(t)$

$X(j\omega) = \int_0^{+\infty} e^{-at}e^{-j\omega t}dt = \frac{1}{a+j\omega}$

$|X(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}}$　$\varphi(j\omega) = -\arctan\frac{\omega}{a}$

2) 双边指数

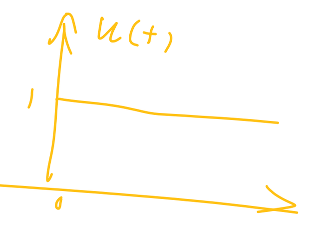
$x(t) = e^{-a|t|}$, $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{0} e^{at}e^{-j\omega t}dt + \int_0^{+\infty} e^{-at}e^{-j\omega t}dt$

3) 单位冲激信号:

$x(t) = \delta(t)$

$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)e^{-j\omega t}dt = e^{-j\omega t}\big|_{t=0} = 1$

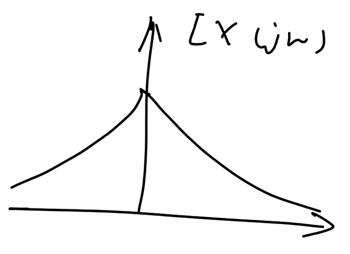
4) 单位阶跃信号:



无法利用傅里叶变换求解 ……

$u(t) \xleftrightarrow{F} \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$

$a>0$ 时,



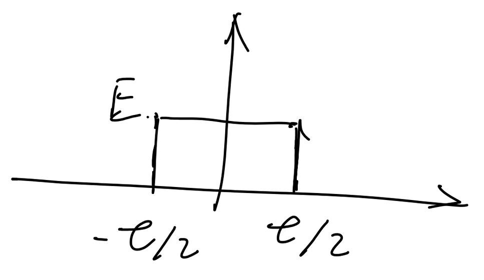
$y(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}[e^{-at}u(t) - e^{at}u(-t)]$

$\lim_{a\to 0} y(t) = u(t)$

$F\{y(t)\} = F\{\frac{1}{2}\} + \frac{1}{2}F\{e^{-at}u(t)\} - \frac{1}{2}F\{e^{at}u(-t)\}$

$1 \xleftrightarrow{F} 2\pi\delta(\omega)$ …

5) 偶对称门信号



Review

傅里叶正变换: $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$

傅里叶逆变换: $x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)\cdot e^{j\omega t}dt$

- 典型非周期信号傅里叶变换:

$x(t)$	F	$X(j\omega)$
$e^{-at}u(t)$	$\longleftrightarrow$	$1/a+j\omega$
$e^{-a\|t\|}$	$\longleftrightarrow$	$2a/(a^2+\omega^2)$
$\delta(t)$	$\longleftrightarrow$	1
1	$\longleftrightarrow$	$2\pi\delta(\omega)$
$u(t)$	$\longleftrightarrow$	$\pi\delta(\omega)+1/j\omega$
$E\,rect_\tau(t)$	$\longleftrightarrow$	$E\tau Sa(\omega\tau/2)$

1. $X_0(j\omega) = F(x_0(t))$

2. $F_k = \frac{1}{T}X_0(j\omega)|_{\omega=k\omega_1} = \frac{1}{2\pi}X_0(jk\omega_1)\omega_1$

3. $X_T(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_0(jk\omega_1)\omega_1\delta(\omega-k\omega_1)$