复变函数与积分变换第二章

2022年8月29日 星期一 15:12

第二章

“解析函数”

§2.1 解析函数的概念

① **导数**：$f'(z_0)=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$

求导公式：和 calculus 一样的法则

注：反函数的求导法则：

$$\varphi'(w)=\frac{1}{f'(z)}\Big|_{z=\varphi(w)}=\frac{1}{f'(\varphi(w))}$$

② ◦ **定理1**：$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在 (x,y) 可微：

则 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$

◦ **定理2**. $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在区域D内解析（D内可导）的充要条件 $u(x,y)$，$v(x,y)$ 在D内处处可微

◦ **定理3**. 若 $f(z)$ 在区域D内解析，且满足以下条件之一，则 $f(z)$ 在D内为常数。

(1) $f'(z)=0$ (2) $\mathrm{Re}\,f(z)=C$ (3) $|f(z)|$ 为常数

§2.2 解析函数和调和函数的概念

① **调和函数**：

当二元函数 $\varphi(x,y)$ 满足 Laplace 方程：$\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0$

则称 $\varphi(x,y)$ 为调和函数，在D内调和

◦ 定理：$f(z)$ 在D内解析，则 $u(x,y)$，$v(x,y)$ 都为调和函数

② **共轭调和函数**：1. 既满足 $\dfrac{\partial^2\phi(x,y)}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\phi(x,y)}{\partial y^2}=0$

$$\frac{\partial^2\psi(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi(x,y)}{\partial y^2}=0$$

2. 又满足 $\dfrac{\partial\phi(x,y)}{\partial x}=\dfrac{\partial\psi(x,y)}{\partial y}$

$$\frac{\partial\phi(x,y)}{\partial y}=-\frac{\partial\psi(x,y)}{\partial x}$$

※解析の充要条件

定理1. $u(x,y)$，$v(x,y)$ 调和共轭 $\Leftrightarrow$ $f(u,v)=u+vi$ 在D上解析.

eg：求解析函数 $f(z)=u+iv$，已知 $u=x^2-y^2+xy$，$f(i)=-1+i$

「解」：$f(z)$ 为解析函数，且 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2$ $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-2$

则 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，即 u 是全平面的调和函数

故 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}=2x+y$ $-\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial v}{\partial x}=2y-x$

$$v(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(2x+y)dy+(2y-x)dx+C.$$

$$=\int_0^x(2y-x)dx+\int_0^y(2x+y)dy$$

§2.3 初等函数

① **指数函数**：$z=x+iy$，$w=e^z=e^x\cdot e^{iy}=e^x(\cos y+i\sin y)$

② **对数函数**：$e^w=z$，$w=f(z)$ 称为对数函数 ...

$z=re^{i\theta}$，$w=u+iv$

$e^w=z$ 变为 $e^{u+iv}=re^{i\theta}$

$\Rightarrow e^u=r$，$v=\theta+2k\pi$

$\Rightarrow w=\ln z=\ln|z|+i\,\mathrm{Arg}\,z$，$z\neq 0$

主值：$\ln z=\ln|z|+i\arg z$

③ **幂函数**：$w=z^\alpha$ 规定：$z^\alpha=e^{\alpha\ln z}$（α 为复常数）

1° 当 α 为正整数 n 时，$w=z^n=e^{n\ln z}=e^{n(\ln|z|+i(\arg z+2k\pi))}$

$=|z|^n e^{i\arg z}$

2° 当 $\alpha=\frac{1}{n}$（n 为正整数时），$z^{\frac{1}{n}}=e^{\frac{1}{n}\ln z}=|z|^{\frac{1}{n}}\cdot e^{i\frac{\arg z+2k\pi}{n}}$

......

④ **三角函数**：$e^{iy}=\cos y+i\sin y$ $e^{-iy}=\cos y-i\sin y$

则 $\begin{cases}\cos y=\dfrac{e^{iy}+e^{-iy}}{2} & \text{(复变量 z 的余弦函数)}\\ \sin y=\dfrac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i} & \text{(复变量 z 的正弦函数)}\end{cases}$

满足：$(\sin z)'=\left(\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right)'=\cos z$

$\tan z=\dfrac{\sin z}{\cos z}$ $\cot z=\ldots$ ...

⑤ **反三角函数**：（反余弦）：$w=\mathrm{Arccos}\,z$

$z=\cos w=\frac{1}{2}(e^{iw}+e^{-iw})$

同乘 $2e^{iw}$：$2z\cdot e^{iw}=e^{2iw}+1$

故：$(e^{iw})^2-2z\cdot e^{iw}+1=0$

$e^{iw}=z+\sqrt{z^2-1}$. （Question：为什么不能为 $z-\sqrt{z^2-1}$）

$w=-i\,\mathrm{Ln}(z+\sqrt{z^2-1})$

使用同样的方法可得：$\begin{cases}\mathrm{Arcsin}\,z=-i\,\mathrm{Ln}(iz+\sqrt{1-z^2})\\ \mathrm{Arctan}\,z=\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\dfrac{i+z}{i-z}\end{cases}$

⑥ **双曲线与反双曲线**

$\sinh z=\dfrac{e^z-e^{-z}}{2}$ $\cosh z=\dfrac{e^z+e^{-z}}{2}$

$\tanh z=\dfrac{e^z-e^{-z}}{e^z+e^{-z}}$ $\coth z=\dfrac{e^z+e^{-z}}{e^z-e^{-z}}$

有如下关系：$\sinh z=-i\sin iz$ $\cosh z=\cos iz$

$\tanh z=-i\tan iz$ $\coth z=-i\cot iz$

（反双曲，略 ...，见书 P42）