复变函数与积分变换第三章

2022年8月30日 星期二 20:07

第三章

复变函数的积分

§3.1 复积分的定义与计算

定理1. $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在光滑曲线 C 上连续，则复积分 $\int_C f(z)dz$ 存在，而且可以表示为：

$$\int_C f(z)dz=\int_C u(x,y)dx-v(x,y)dy+i\int_C v(x,y)dx+u(x,y)dy$$

①**计算方法**：$z(t)=x(t)+iy(t)$ 代入，得：

$$=\int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)dt$$

eg1 计算 $\oint_C \frac{dz}{(z-z_0)^n}$，其中n为任意整数，C为以 z_0 为中心，r为半径的圆周：

「解」：C的参数方程：$z=z_0+re^{i\theta}\ (0\le\theta\le2\pi)$

$$\oint_C\frac{dz}{(z-z_0)^n}=\int_0^{2\pi}\frac{ire^{i\theta}d\theta}{r^ne^{in\theta}}=\frac{i}{r^{n-1}}\int_0^{2\pi}e^{-i(n-1)\theta}d\theta$$

......

eg2：$\int_C z\,dz=\int_C(x+yi)d(x+yi)$

$(0,0)$ 到 $(3,4)$，令 $x=3t$，$y=4t$.

则 $\int_0^1(3+4i)^2t\,dt$

$=\frac{1}{2}(3+4i)^2$

②**基本性质**（同第二型曲线积分）

1. $\int_C f(z)dz=-\int_{C^-}f(z)dz$.
2. $\left|\int_C f(z)dz\right|\le\int_C|f(z)|ds \iff \left|\int_C f(z)dz\right|\le\int_C|f(z)||dz|$

估值问题I：设C为从原点到 $3+4i$ 的直线段.
试求 $\int_C\frac{1}{z-i}dz$ 的绝对值的一个上界.

$$\left|\int_C\frac{1}{z-i}dz\right|\le\int_C\left|\frac{1}{z-i}\right|ds$$

$z=3t+4ti$，$\left|\frac{1}{z-i}\right|=\frac{1}{\sqrt{25(t-\frac{4}{25})^2+\frac{9}{25}}}\le\frac{5}{3}$

$$\left|\int_C\frac{1}{z-i}dz\right|\le\frac{5}{3}\times5=\frac{25}{3}$$

§3.2 柯西积分定理

定理1： 设 $f(z)$ 在单连通区域内解析，则 $f(z)$ 在D内沿任意一条简单闭曲线C的积分：

$$\int_C f(z)dz=0$$

定理2： 积分与路径无关

eg：$\int_C\ln(1+z)dz$，C为从 $-i$ 到 i 的直线段：

$$\int_C\ln(1+z)dz=z\ln(1+z)\Big|_{-i}^{i}-\int_C\frac{z}{1+z}dz$$

$$=(-2+\ln2+\frac{\pi}{2})i$$

§3.3 柯西积分公式：

定理1. $f(z)$ 在C所围区域D内解析，在 $\bar{D}=D\cup C$ 上连续，

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

eg:(1) $\oint_{|z|=2}\frac{\sin z}{z}dz$

$=2\pi i\sin z\big|_{z=0}=0$

eg(2)：$\oint_{|z|=2}\frac{z}{(9-z^2)(z+i)}dz$

$=2\pi i\frac{z}{9-z^2}\Big|_{z=-i}=\frac{\pi}{5}$

定理2. （最大模原理）设 $f(z)$ 在区域D内解析，$f(z)$ 不为常数，$|f(z)|$ 在D内没有最大值

两推论： ①在D内解析的函数，若模在D的内点达到max，则函数为常数

②若 $f(z)$ 在有界区域D内解析，在 $\bar{D}$ 上连续，则 $|f(z)|$ 必在D的边界上达到最大模

§3.4 解析函数的高阶导数

定理. $f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\oint\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta$

eg(1). $\oint_{|z-i|=1}\frac{\cos z}{(z-i)^3}dz=\frac{2\pi i}{2!}(\cos z)^{(2)}\Big|_{z=i}$

$=-\frac{2\pi i}{2}\cos i=-\pi i\cos i=-\pi i\left(\frac{e^{-1}+e}{2}\right)$

eg(2). $\oint_{|z|=4}\frac{e^z}{z^2(z-1)^2}dz=\oint_{|z|=4}\frac{\frac{e^z}{(z-1)^2}}{z^2}dz$

$=\frac{2\pi i}{1!}\left(\frac{e^z}{(z-1)^2}\right)'\Big|_{z=0}+2\pi i\left(\frac{e^z}{z^2}\right)'\Big|_{z=1}$

$=2\pi(3-e)i$

两个不等式：

①设 $f(z)$ 在 $|z-z_0|<R$ 内解析，又 $|f(z)|\le M$ $(|z-z_0|<R)$，则以下不等式成立：

$$|f^{(n)}(z_0)|\le\frac{n!M}{R^n}$$

②（刘维尔（Liouville）定理）：
$f(z)$ 在全平面上解析且有界，则 $f(z)$ 为一常数