加权概率模型信道编码

王杰林

湖南涉外经济学院，湖南 长沙 410000

* 通信作者. E-mail: 254908447@qq.com

摘要 对称离散无记忆信道(DMC)输入的二进制伯努利信源序列设为X，线性地将X中“1”替换为“10”得到序列Q，则序列Q满足条件“每个 1 被一个或多个 0 隔开”。序列X转换成序列Q的方法有很多，统称为信源处理。发送端采用加权概率模型对序列Q进行线性编码。接收端进行加权概率模型译码，若连续译码出一个以上 1，则数据传输出错。然后基于 BSC(ξ)和 BEC(ε)信道模型特征构造前向纠错译码方法。经证明，当码长趋近于无穷，本文编码方法使得传输速率可达信道容量，且平均译码错误概率趋近于 0。以二进制输入加白噪声信道（Binary Input Additive White Gaussian Noise,BIAWGN）仿真实验，码率为 1/2，本文方法误块率(BLER)低于 Polar Code 和 Low-Density Parity-Check Codes(LDPC)。

关键词 信息熵,信道容量,信道纠错,加权概率

1 引言

为了构造逼近信道容量的编码方法，专家学者们付出了不懈努力。2009 年，Arikan 提出了基于信道极化现象，在码长趋近于无限时被严格证明容量可达的编码方法，称为极化码（Polar Code）[1]。LDPC 码[2],Turbo 码[3]也逼近香农限。本文以比特为单位构造一种简单易实现的线性信道编译码方法,区别于 Polar 码、LDPC 码和 Turbo 码等现有编码，是基础编码理论的创新。文中给出了理论证明，得出该方法使得 DMC 传输速率达到信道容量，且平均译码错误概率趋近于 0。根据香农有噪信道编码定理[4]，本文方法属于“好码”。为了方便分析和证明，本文方法分为两个部分：

首先构造二进制信源序列线性处理方法，简称信源处理。信源处理使得二进制序列具备错误校验条件。信源处理方法有很多，因添加冗余信息量不同，具有不同的译码错误概率。文中分析了条件概率和马尔科夫链模型不可构造线性信道编译码方法的原因。

然后构造加权概率模型线性编码算法，发送端将信源处理后的序列经加权概率模型以比特为单位编码。接收端通过加权概率模型线性译码，译码时进行错误校验，发现错误后前向纠错或重新传输。信源处理方法不同，加权概率模型编码码率不同。

2 信源处理

发送端和接收端约定的比特长度为n。发送端由信源生成长度为$n(n=1,2,\dots)$的二进制伯努利序列X。线性地将X中“1”替换为“101”且“0”替换为“01”得到序列Q。类似的方法有很多，比如线性地将X中“1”替换为“10”得到序列Q；又比如线性地将X中“011”替换为“0110”得到序列Q。显然序列Q呈现如下形态特征：

$$\text{序列中连续符号 0 的个数最多为}s\text{，且连续符号 1 的个数最多为}t \tag{2-1}$$

将成对出现的$s\in N^*$和$t\in N^*$记为(s,t)，(2-1)是数据错误校验的判断依据。因(s,t)不同，序列中的冗余信息量不同。下面分析 $(s\to\infty,t=1)$和$(s=1,t=2)$的平均译码错误概率，记为P_{err}。序列Q（长度

记为l，$l \geq n$）通过 DMC 传输，Y为接收到的二进制序列。

2.1 ($s \to \infty, t = 1$)

根据$(s \to \infty, t = 1)$，序列Q需满足条件：

$$\text{连续符号 1 的个数最多为 1} \tag{2-2}$$

因序列X由信源生成，且无法确定序列X满足(2-2)，所以任意序列X均需线性处理：

$$\text{将序列}X\text{中“1”替换为“10”} \tag{2-3}$$

处理后得序列Q，Q必然满足(2-2)。例如：X为 0110111100101，根据(2-3)可得序列Q为 010100101010100010010。从左边至右，将序列Q中“10”替换为“1”可得序列X。(2-3)为信源处理。

设事件E表示满足(2-2)的序列Y的集合，事件E有$f(s \to \infty, t = 1, l = i)(i = 1,2, \dots)$个序列$Y$。

当$i = 1$时，$E = (0,1)$，$f(s \to \infty, t = 1, l = 1) = 2$，互补事件为$\bar{E} = \emptyset$。

当$i = 2$时，$E = (00,01,10)$，$f(s \to \infty, t = 1, l = 2) = 3$，$\bar{E} = (11)$。

当$i = 3$时，$E = (000,001,010,100,101)$，$f(s \to \infty, t = 1, l = 3) = 5$，$\bar{E} = (011,110,111)$。

类推可得，当$i \geq 3$时：

$$f(s \to \infty, t = 1, l = i) = f(s \to \infty, t = 1, l = i - 1) + f(s \to \infty, t = 1, l = i - 2) \tag{2-4}$$

可得事件E的概率为：

$$\mathrm{P}(E) = \frac{f(s \to \infty, t = 1, l = i)}{2^i} \tag{2-5}$$

令事件E中$f(s \to \infty, t = 1, l = i)$个序列$Y$服从均匀分布，则：

$$\mathrm{P}(Y = Q) = \frac{1}{f(s \to \infty, t = 1, l = i)} \qquad \mathrm{P}(Y \neq Q) = \frac{f(s \to \infty, t = 1, l = i) - 1}{f(s \to \infty, t = 1, l = i)} \tag{2-6}$$

于是，$Y \in E$且$Y \neq Q$的概率为：

$$\mathrm{P}(Y \neq Q | Y \in E) = \mathrm{P}(E)\mathrm{P}(Y \neq Q) = \frac{f(s \to \infty, t = 1, l = i) - 1}{2^i} \tag{2-7}$$

$\mathrm{P}(Y \neq Q | Y \in E)$为平均译码错误概率，记为$P(s \to \infty, t = 1, l = i)$。于是$P_{err} = P(s \to \infty, t = 1, l = i)$。

定理 2.1 序列Y满足(2-1)且$(s \to \infty, t = 1)$，$\lim\limits_{i \to \infty} P(s \to \infty, t = 1, l = i) = 0$。

证明 $i \to \infty$，则$\mathrm{P}(Y \neq Q) \to 1$，得出$\mathrm{P}(Y \neq Q | Y \in E) \to \mathrm{P}(E)$。根据斐波那契数列，令$F(0) = 0, F(1) = 1$，且当$i \geq 2, i \in N^*$时$F(i) = F(i-1) + F(i-2)$。于是$i \geq 1, i \in N^*$时，$f(s \to \infty, t = 1, l = i) = F(i) + F(i+1)$。由斐波那契数列通项式得：

$$f(s \to \infty, t = 1, l = i) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^i - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^i\right] + \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{i+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{i+1}\right]\right)$$

可得：

$$\mathrm{P}(E) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^i - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^i\right] + \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^{i+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^{i+1}\right]\right)$$

因$\frac{1+\sqrt{5}}{4} < 1$，$\frac{1-\sqrt{5}}{4} < 1$，所以$i \to \infty$时$\mathrm{P}(E) \to 0$，即$\lim\limits_{i \to \infty} P(s \to \infty, t = 1, l = i) = 0$。

2.2 $(s=1,t=2)$

根据$(s=1,t=2)$，序列Q需满足条件：

$$\text{序列中连续符号 0 的个数最多为 1，且连续符号 1 的个数最多为 2} \tag{2-8}$$

信源处理方法：

$$\text{将序列}X\text{中“1”替换为“101”且“0”替换为“01”} \tag{2-9}$$

处理后得序列Q，Q必然满足(2-8)。例如X为 0110111100101，根据(2-9)可得Q为 01101101011011011011010101101101101。将序列Q中“01”替换为“0”且“101”替换为“1”可还原序列X。

设事件E表示满足(2-8)的序列Y的集合，事件E有$f(s=1,t=2,l=i)(i=1,2,\ldots)$个序列$Y$。

当$i=1$时，$E=(0,1)$，$f(s=1,t=2,l=1)=2$，互补事件为$\bar{E}=\emptyset$。

当$i=2$时，$E=(01,10,11)$，$f(s=1,t=2,l=2)=3$，$\bar{E}=(00)$。

当$i=3$时，$E=(010,101,011,110)$，$f(s=1,t=2,l=3)=4$，$\bar{E}=(000,001,100,111)$。

类推可得，当$l\geq 4$时：

$$f(s=1,t=2,l=i)=f(s=1,t=2,l=i-2)+f(s=1,t=2,l=i-3) \tag{2-10}$$

于是：

$$\mathrm{P}(E)=\frac{f(s=1,t=1,l=i)}{2^i} \tag{2-11}$$

$$P_{err}=P(s=1,t=1,l=i)=\frac{f(s=1,t=2,l=i)-1}{2^i} \tag{2-12}$$

定理 2.2 序列Y满足(2-1)且$(s=1,t=2)$，$\lim\limits_{l\to\infty}P(s=1,t=1,l=i)=0$。

证明 $f(s\to\infty,t=2,l=i)$和$f(s=1,t=2,l=i)$单调递增，且$f(s=1,t=2,l=i)\leq f(s\to\infty,t=2,l=i)$，即$\frac{f(s=1,t=2,l=i)-1}{2^i}\leq\frac{f(s\to\infty,t=1,l=i)-1}{2^i}$。根据定理 2.1，$i\to\infty$时$\frac{f(s\to\infty,t=1,l=i)-1}{2^i}\to 0$，所以$\lim\limits_{l\to\infty}P(s=1,t=1,l=i)=0$。

2.3 译码错误校验方法分析

假设存在以比特为单位的编译码方法。序列Q编码后得二进制序列V，V通过 DMC 传输，U为接收到的二进制序列。接收端通过U译码出二进制序列Y。因信源序列X已知且其长度为n，当(s,t)确定，序列Q的长度l确定，所以P_{err}的表达式也确定。

i（单位为比特）	$P(s\to\infty,t=1,l=i)$	$P(s=1,t=1,l=i)$
32	0.001327807	3.16184E-06
64	1.50584E-06	5.9561E-12
112	5.75104E-11	1.53974E-20
256	3.20367E-24	2.66011E-46

表 1 设定序列Y的长度，计算平均译码错误概率（科学计数法）

于是，通过设定n使得编译码方法具有不同的平均译码错误概率。根据定理 2.1 和 2.2，n和(s,t)已知，通过(2-5)和(2-11)可得$\mathrm{P}(E)$。因接收端只能通过序列U译码得到序列Y，所以译码错误校验方法为：

（1）$Y\in\bar{E}\to U\neq V,Y\neq Q$；

（2）$Y \in E \to \lim\limits_{l \to \infty} \mathrm{P}(Y \neq Q | Y \in E) = 0, U = V, Y = Q$。

显然，当码长足够长时，$Y \in \bar{E}$则U错误；$Y \in E$时译码正确。由表 1 可得，当码长相同时，$P(s = 1, t = 1, l = i) < P(s \to \infty, t = 1, l = i)$，$(s = 1, t = 1)$具有更低的译码错误概率。可在不同的信道环境下使用不同的(s, t)或n。

3 加权概率模型编译码方法

因序列Q中符号的概率已知，且当前符号状态与相邻有限个符号状态有关，能否使用马尔可夫链或条件概率模型构造编译码方法？

以$(s \to \infty, t = 2)$为例，设序列Q为 011001000011010，序列Q由“0”，“10”和“110”组成。基于马尔可夫链或条件概率分析，符号 0 存在三种概率质量函数，分别为$p(0|0)$，$p(0|1)$，$p(0|1,1)$。符号 1 存在两种概率质量函数，分别为$p(1|0)$和$p(1|1)$。发送端线性编码时，因为序列Q已知，所以每个符号使用的概率质量函数均能准确选择。但接收端线性译码时无法准确选择概率质量函数。如已经译码出“0”，因符号 0 存在三种概率质量函数，无法正确选择哪一个概率质量函数译码下一个符号。同理符号 1 也无法正确选择概率质量函数。当已经译码出“011”，因“011”后必然是符号 0，所以存在唯一的选择$p(0|1,1)$。因概率质量函数不唯一，所以采用马尔可夫链或条件概率构造信道编译码方法不可行，可构建信源编码。

以$(s \to \infty, t = 1)$为例，设序列Q为 010100101010100010010。传统信源编码方法是：从左边至右，将序列Q中“10”替换为“1”可得序列X为 0110111100101，然后对序列X进行编码从而逼近$H(X)$(信息熵[4])。但是传统信源编码方法在译码时无法进行错误校验。若对序列Q进行编码，因增加了冗余信息，所以$H(Q) > H(X)$，即传统信源编码方法无法逼近$H(X)$。

设存在函数$\varphi(p(x), r) = rp(x)$。$p(x)$为符号x的概率。r表征序列Q的形态特征，称为权系数。$\varphi(p(x), r)$称为加权概率质量函数，下面基于$\varphi(p(x), r)$构造编译码方法。

3.1 加权概率模型编码

定义 3.1 设离散随机变量X，$X \in \{0,1\}$，$\mathrm{P}\{X = a\} = p(a)(a \in \{0,1\})$，加权概率质量函数为$\varphi(a) = r\mathrm{P}\{X = a\} = rp(a)$，$p(a)$为的概率质量函数，$0 \le p(a) \le 1$，$r$为权系数，且

$$F(a) = \sum_{i \le a} p(i) \tag{3-1}$$

若$F(a, r)$满足$F(a, r) = rF(a)$，则称$F(a, r)$为加权累积分布函数，简称加权分布函数。显然，所有符号的加权概率之和为$\sum_{a=0}^{k} \varphi(a) = r$。

根据(3-1)$F(X_i - 1) = F(X_i) - p(X_i)$，$X_i = 0$时$F(X_i - 1) = 0$，$X_i = 1$时$F(X_i - 1) = \varphi(0)$。将序列$Q$的加权分布函数记为$F(Q, r)$：

$l = 1$时，$F(Q, r) = rF(X_1 - 1) + rp(X_1)$。

$l = 2$时，$F(Q, r) = rF(X_1 - 1) + r^2F(X_2 - 1)p(X_1) + r^2p(X_1)p(X_2)$。

$l = 3$时，$F(Q, r) = rF(X_1 - 1) + r^2F(X_2 - 1)p(X_1) + r^3F(X_3 - 1)p(X_1)p(X_2) + r^3p(X_1)p(X_2)p(X_3)$。

令$\prod_{j=1}^{0} p(X_j) = 1$，$l \ge 1$时：

$$F(Q, r) = \sum_{i=1}^{l} r^i F(X_i - 1) \prod_{j=1}^{i-1} p(X_j) + r^l \prod_{i=1}^{l} p(X_i) \tag{3-2}$$

将满足(3-2)的加权分布函数的集合定义二元加权模型，简称加权模型，记为$\{F(Q, r)\}$。令

$$H_l = F(Q, r) \tag{3-3}$$

$$R_l = r^l \prod_{i=1}^{l} p(X_i) \tag{3-4}$$

$$L_l = H_l - R_l = \sum_{i=1}^{l} r^i F(X_i - 1) \prod_{j=1}^{i-1} p(X_j) \tag{3-5}$$

其中$X_i \in \{0,1\}, l = 1,2, \dots$。当$r = 1$时：

$$F(Q,1) = \sum_{i=1}^{l} F(X_i - 1) \prod_{j=1}^{i-1} p(X_j) + \prod_{i=1}^{l} p(X_i) \tag{3-6}$$

$H_l = F(Q,1)$，$R_l = \prod_{i=1}^{l} p(X_i)$，$L_l = H_l - R_l$，可得算术编码（区间编码）[5][6]是基于$r = 1$时加权分布函数的无损编码方法。加权模型可扩展到$X_i \in \{0,1,2,\dots\}$的情形，本文不作讨论。

因X_i必须取A中的值，所以$p(X_i) \geq 0$。显然(3-3)(3-4)(3-5)为区间列。L_i，H_i是信源序列X在时刻$i(i = 0,1,2,\dots,l)$变量X_i对应的区间上下标，$R_i = H_i - L_i$是区间的长度。根据(3-3)(3-4)(3-5)，加权概率模型线性编码的迭代式为：

$$R_i = R_{i-1}\varphi(X_i), \qquad L_i = L_{i-1} + R_{i-1}F(X_i - 1, r), \qquad H_i = L_i + R_i \tag{3-7}$$

以$(s \to \infty, t = 1)$为例，令$r > 1$且序列Q从$i + 1$位置开始的 3 个符号为$0,1,0$。根据(3-7)二元加权模型的编码运算过程如图 2。

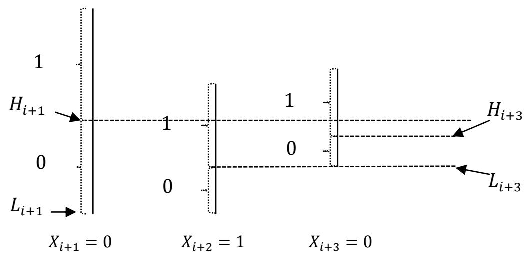

图 2 二元加权模型编码 010 的过程示意图

根据图 2，若$H_{i+3} > H_{i+1}$，因区间$[H_{i+1}, H_{i+3}) \in [H_{i+1}, H_{i+1} + R_{i+1})$，且$[H_{i+1}, H_i + R_i)$与符号 1 对应，所以第$i + 1$个符号 0 可能被错误译码为符号 1。若$H_{i+3} \leq H_{i+1}$，则$[L_{i+3}, H_{i+3}) \in [L_{i+1}, H_{i+1})$。如图 2 中$[L_{i+1}, H_{i+1})$与符号 0 唯一对应，所以$i + 1$位置上的符号 0 被$L_{i+3}$正确译码，且$i + 2$和$i + 3$位置上的符号 1 和符号 0 也能正确译码。当$0 < r \leq 1$时，任意时刻都有$[L_{i+1}, H_{i+1}) \in [L_i, H_i)$，可无损译码。由于$F(0 - 1) = 0$，$F(0) = p(0)$，由(3-7)可得：

$$\begin{gathered} H_{i+3} = L_i + R_i\varphi(0)^2 + R_i\varphi(0)^2\varphi(1) = L_i + R_i r^2 p(0)^2 + R_i r^3 p(0)^2 p(1) \\ H_{i+1} = L_i + R_i\varphi(0) = L_i + R_i r p(0) \end{gathered} \tag{3-8}$$

因为$H_{i+3} \leq H_{i+1}$，所以：

$$\varphi(0)\varphi(1) + \varphi(0) = r^2 p(1)p(0) + rp(0) \leq 1 \tag{3-9}$$

设方程$ar^2 + br + c = 0$，其中$a = p(1)p(0)$，$b = p(0)$，$c = -1$，且$r > 0$。满足方程的正实数根为$\frac{\sqrt{p(0)^2 + 4p(1)p(0)} - p(0)}{2p(1)p(0)}$，因$p(1) = 1 - p(0)$，且$p(1) = 0$时$r \leq 1$，所以：

$$r \leq \frac{\sqrt{4p(0) - 3p(0)^2} - p(0)}{2p(0) - 2p(0)^2} = \frac{\sqrt{4/p(0) - 3} - 1}{2 - 2p(0)} \tag{3-10}$$

令$r_{max} = \frac{\sqrt{4/p(0) - 3} - 1}{2 - 2p(0)}$，$r_{max}$为$r$的最大值，显然$r_{max}$仅在序列$Q$满足(2-1)才能通过$L_i$完整译码。

设序列Q中第$i + 1$个位置起有$j + 2(j = 1,2,3,\dots)$个符号为$0,1,\dots,1,0$，其中符号 1 的连续个数为j，根据(2-1)$j \leq t$。因$H_{i+j+2} \leq H_{i+1}$，根据(3-7)有：

$$\varphi(0)+\varphi(0)\varphi(1)+\varphi(0)\varphi(1)^2+\cdots+\varphi(0)\varphi(1)^j \le 1 \tag{3-11}$$

于是：

$$\varphi(0)+\varphi(0)\varphi(1)+\varphi(0)\varphi(1)^2+\cdots+\varphi(0)\varphi(1)^{j-1} \le \frac{1-\varphi(0)}{\varphi(1)} \tag{3-12}$$

将(3-11)减去(3-12)，化简得：

$$r-r^{j+2}p(1)^{j+1}+r^{j+2}p(1)^{j+2} \ge 1 \tag{3-13}$$

$p(1)$已知，(3-13)取等号可得r_{max}。当$p(1)=1$或$p(0)=0$时，$r_{max}=1$；当$0<p(0)<1$，$j\to\infty$时，${r_{max}}^{j+2}p(1)^{j+1}\to 0$，${r_{max}}^{j+2}p(1)^{j+2}\to 0$，则$r_{max}\to 1$。当$j<t$或$r<r_{max}$时$rp(0)+r^2p(0)p(1)+r^3p(0)p(1)^2+\cdots+r^{j+1}p(0)p(1)^j<1$。

3.2 无损译码可行性证明

定理 3.2 加权模型满足：

(1) $L_l<H_l\wedge L_l<H_{l-1}\wedge\ldots\wedge L_l<H_1$，通过$L_l$可完整还原序列$Q$；

(2) $\lim\limits_{l\to\infty}(H_l-L_l)=0$，即收敛性；

(3) $\lim\limits_{l\to\infty}H_l=L_l$，即唯一性。

证明 (1)根据(3-11)，$j>t$或$r>r_{max}$，有$H_{i+j+2}>H_{i+1}$，由于$[H_{i+j+2},H_{i+1})$对应于符号 1，于是第$i+1$个符号不能被准确译码为符号 0,不符合无损译码要求,所以$0\le j\le t$且$0<r\le r_{max}$必须同时满足。因$F(0-1,r)=0,L_{i-1}\ge 0,R_{i-1}\ge 0$，所以$L_l$为单调不减函数。当且仅当$L_l\in[L_l,H_l)\wedge L_l\in[L_{l-1},H_{l-1})\wedge\ldots\wedge L_l\in[L_1,H_1)$时，因$[L_i,H_i)(i=1,2,\ldots,l)$与变量$X_i$为唯一映射关系，所以当$L_l\in[L_i,H_i)(i=1,2,\ldots,l)$时得出唯一的符号$X_i$，从而完整得出信源序列$X$，于是$L_l<H_l\wedge L_l<H_{l-1}\wedge\ldots\wedge L_l<H_1$。

(2)因$j\le t$且$r\le r_{max}$，有$\varphi(0)+\varphi(0)\varphi(1)+\varphi(0)\varphi(1)^2+\cdots+\varphi(0)\varphi(1)^j\le 1$，所以$H_{i+j+2}\le H_{i+1}$。当且仅当$j=t$且$r=r_{max}$时$H_{i+j+2}=H_{i+1}$。

令$R_{j+1}=\varphi(0)\prod_{i=1}^{j}\varphi(1)$，$R_j=\varphi(0)\prod_{i=1}^{j-1}\varphi(1)$，…，$R_2=\varphi(0)\varphi(1)$，$R_1=\varphi(0)$，于是$R_l=\prod R_{j+1}\prod R_j\ldots\prod R_2\prod R_1$。当$j<t$且$r<r_{max}$时，由(3-11)可得$R_1=\varphi(0)<1$，$R_2=\varphi(0)\varphi(1)<1$，$R_3=\varphi(0)\varphi(1)^2<1$，⋯，$R_{j+1}=\varphi(0)\varphi(1)^j<1$，所以$l\to\infty$时$R_l\to 0$，则$\lim\limits_{l\to\infty}(H_l-L_l)=\lim\limits_{l\to\infty}R_l=0$，加权概率模型是收敛的。

(3) $\{L_l\}$是严格单调不减且有上界的数列，由单调有界定理，设$\lim\limits_{l\to\infty}L_l=\xi$，且$\xi\ge L_l$。因为$\lim\limits_{l\to\infty}(H_l-L_l)=0$，所以$\lim\limits_{l\to\infty}L_l=\lim\limits_{l\to\infty}H_l=\xi$，所以$\xi=L_l$，$\lim\limits_{l\to\infty}H_l=\xi=L_l$，且$L_l$是唯一的。

推论 3.3 设$\varphi(1)=1$，当$\varphi(0)\le\frac{1}{t+1}$时，加权模型通过$L_l$可完整还原序列$Q$。

证明 根据(3-11)，当$\varphi(1)=1$时$(t+1)\varphi(0)\le 1$，于是$\varphi(0)\le\frac{1}{t+1}$。

根据推论 3.3，因$r=\varphi(0)+\varphi(1)$，于是$r\le\frac{t+2}{t+1}$。但是不能得出$r_{max}=\frac{t+2}{t+1}$。以$t=1$为例，$r_{max}=\frac{3}{2}$,

代入(3-9)求解，当$p(0) \leq \frac{1}{3}$时(3-9)成立，加权模型满足定理3.2(1)。因为$t = 1$时，序列Q中$p(0) \geq \frac{1}{2}$。所以$r_{max} \neq \frac{t+2}{t+1}$。所以$r_{max} - {r_{max}}^{j+2}p(1)^{j+1} + {r_{max}}^{j+2}p(1)^{j+2} = 1 (j \leq t)$是加权模型无损编译码的充要条件。

3.3 加权模型信息熵

当$r = 1$时，$\varphi(X_i) = p(X_i)$。Q的信息熵为：

$$H(Q) = -p(0)\log_2 p(0) - p(1)\log_2 p(1) \tag{3-14}$$

当$r \neq 1$时，定义具有加权概率$\varphi(X_i)$的随机变量X_i的自信息量为：

$$I(X_i, r) = -\log\varphi(X_i) = -\log r - \log p(X_i) \tag{3-15}$$

设集合$\{X_i = a\}(i = 1,2,\ldots,l, a \in \{0,1\})$中有$c_a$个$a$。当$r$的值确定，序列$Q$的总信息量为：

$$-c_0\log\varphi(0) - c_1\log\varphi(1)$$

于是平均每个符号的信息量为：

$$-\frac{c_0}{l}\log\varphi(0) - \frac{c_1}{l}\log\varphi(1) = -p(0)\log\varphi(0) - p(1)\log\varphi(1) = -\log r + H(Q)$$

其中$p(0) = \frac{c_0}{l}$和$p(1) = \frac{c_1}{l}$为序列Q中符号0和符号1的概率质量函数。根据3.1和3.2节，$r \leq r_{max}$，因$r_{max} > 1$所以$-\log r + H(Q) < H(Q)$。因$r > r_{max}$时加权模型无法还原序列Q，所以$r = r_{max}$时$I(X_i, r)$最小。于是加权模型的信息熵：

$$\begin{aligned} H(Q, r_{max}) &= -\sum_{X_i=0}^{k} p(X_i)\log\varphi(X_i) \\ &= -\log r_{max} - \sum_{X_i=0}^{k} p(X_i)\log p(X_i) \\ &= -\log r_{max} + H(Q) \end{aligned} \tag{3-16}$$

3.4 加权模型编码码率

根据2.3节，因加权模型编译码满足：

（1）编译码时符号0和符号1存在唯一的概率质量函数$p(0)$和$p(1)$；

（2）(s,t)已知，存在唯一r_{max}与(s,t)对应，且$r_{max} > 1$时$-\log r_{max} < 0$，所以$H(Q, r_{max}) < H(Q)$。加权概率模型编码更接近$H(X)$；

（3）U无误译码后$Y = Q$，$Y \in E$；

（4）$n \to \infty$时$l \to \infty$，当$Y \in \bar{E}$，U错误；当$Y \in E$，U正确，$Y = Q$。

所以序列Q经加权模型编码为序列V，V通过DMC传输，U为接收到的二进制序列。接收端通过U经加权模型译码出二进制序列Y。

根据(3-16)，序列Q中平均每个比特所携带的信息量为$H(Q, r_{max})$(bit/bit)，总信息量为$lH(Q, r_{max})$(bit)。信源序列X的总信息量为$nH(X)$(bit)，可得加权模型的编码码率为：

$$R = \frac{nH(X)}{lH(Q, r_{max})} \tag{3-17}$$

根据 BSC(ξ)信道模型，序列X直接由 BSC(ξ)传输，ξ已知。序列X中符号等概率$(p=\frac{1}{2})$时，BSC(ξ)的传输速率最大。于是 BSC(ξ)信道容量为$C_{BSC}=1-H(\xi)$且$H(X)=1$。根据 BEC(ε)信道模型，信道容量为$C_{BEC}=1-\varepsilon$。由(3-17)可得单位时间内 BSC(ξ)和 BEC(ε)信道容量为：

$$C_{BSC}=R\big(1-H(\xi)\big) \tag{3-18}$$

$$C_{BEC}=R(1-\varepsilon) \tag{3-19}$$

因序列Q满足(2-1)，可根据(3-13)得r_{max}且$r_{max}\geq 1$。满足序列$Y\in B$且$Y=Q$算术编码极限为$H(Q)$，即序列Q以比特单位进行算术编码。因为加权模型中$r_{max}\geq 1$，所以$-\log r_{max}\leq 0$，则$H(Q,r_{max})\leq H(Q)$。显然，加权模型编码能使得信道的传输速率更高。对于传输速率要求不高的信道，可以使用算术编码（或区间编码）。

4 错误校验和前向纠错编译码

本章以$(s\to\infty,t=1)$为例构造前向纠错编译码。设长度为n的二进制伯努利信源序列X中符号 0 的概率为$p(0\leq p\leq 1)$。于是$nH(X)=-pn\log_2 p-(1-p)n\log_2(1-p)$。经(2-3)处理后得序列$Q$，序列$Q$的长度为$l=(2-p)n$，则$\frac{n}{l}=\frac{1}{2-p}$。

定理 4.1 $(s\to\infty,t=1)$，当$n\to\infty$且$p=\varphi(0)=\frac{1}{2},\varphi(1)=1$时，BSC$(\xi)$和 BEC$(\varepsilon)$传输速率达到信道容量，平均译码错误概率趋近于 0。

证明 $p=\frac{1}{2}$时$nH(X)=n$。根据推论 3.3 有 $H\left(Q,\varphi(0)=\frac{1}{2},\varphi(1)=1\right)=-\frac{1}{2-p}\log_2\frac{1}{2}=\frac{1}{2-p}$。于是$lH\left(Q,\varphi(0)=\frac{1}{2},\varphi(1)=1\right)=\frac{(2-p)n}{2-p}=n$。由(3-17)可得：

$$R=\frac{nH(X)}{lH\left(Q,\varphi(0)=\frac{1}{2},\varphi(1)=1\right)}=1$$

代入(3-18)(3-19)可得$C_{BSC}(t)=1-H(\xi)$，$C_{BEC}(t)=1-\varepsilon$，所以 BSC(ξ) 和 BEC(ε)传输速率达到信道容量。又根据定理 2.1 和定理 2.2，$n\to\infty$时$l\to\infty$，$\lim\limits_{l\to\infty}P(s\to\infty,t=1,l=i)=0$，即平均译码错误概率趋近于 0。

序列Q中符号 0 和符号 1 的概率质量函数$p(0)=\frac{1}{2-p}$，$p(1)=\frac{1-p}{2-p}$，且$\frac{1}{2}\leq p(0)\leq 1$。根据(3-10)当$p(0)=1$时，$r_{max}=1$，$p=1$；当$\frac{1}{2}\leq p(0)<1$时，$r_{max}=\frac{(2-p)(\sqrt{5-4p}-1)}{2-2p}$。

$$\begin{aligned}lH(Q,r_{max})&=-n\log_2\frac{\sqrt{5-4p}-1}{2-2p}-(1-p)n\log_2\frac{\sqrt{5-4p}-1}{2}\\&=(2-p)n\log_2\frac{2}{\sqrt{5-4p}-1}+n\log_2(1-p)\end{aligned} \tag{4-1}$$

定理 4.2 $(s\to\infty,t=1)$，当$n\to\infty$时，BSC(ξ)和 BEC(ε)传输速率可达信道容量，平均译码错误概率趋近于 0。

证明 根据(4-1)

$$lH(Q,r_{max})-nH(X)=(2-p)n\log_2\frac{2}{\sqrt{5-4p}-1}+(2-p)n\log_2(1-p)+pn\log_2 p$$

$$=(2-p)n\log_2\frac{2-2p}{\sqrt{5-4p}-1}+pn\log_2 p=n\log_2\left(\left(\frac{2-2p}{\sqrt{5-4p}-1}\right)^{2-p}*p^p\right)$$

因$0\le p\le 1$，所以$4(1-p)^2\ge 0$，则$4-8p+4p^2\ge 0$。因$4-8p+4p^2=(3-2p)^2-(5-4p)\ge 0$，所以$2-2p\ge\sqrt{5-4p}-1$。因$(2-2p)^2\ge\left(\sqrt{5-4p}-1\right)^2$，可得$2p-2p^2\le\sqrt{5-4p}-1$，则$\frac{\sqrt{5-4p}-1}{2-2p}\ge p$。因为$\left(\frac{2-2p}{\sqrt{5-4p}-1}\right)^{2-p}*p^p=\left(\frac{\sqrt{5-4p}-1}{2-2p}\right)^{p-2}*p^p\ge p^{2p-2}=\left(\frac{1}{p}\right)^{2-2p}$且$2-2p\ge 0$，$\frac{1}{p}\ge 1$，所以$\left(\frac{1}{p}\right)^{2-2p}\ge 1$，即$lH(Q,r_{max})-nH(X)\ge 0$，可得$R=\frac{nH(X)}{lH(Q,r_{max})}\le 1$。由(3-18)(3-19)得 BSC($\xi$)和 BEC($\varepsilon$)传输速率可达信道容量。

因$n\to\infty$时$l\to\infty$，$\lim_{l\to\infty}P(s\to\infty,t=1,l=i)=0$，所以平均译码错误概率趋近于 0。

4.1 编码

根据定理 4.1 和 4.2，可构造的前向纠错编译码算法。经计算，当$p\ge 0.652$时$H(Q,r_{max})\le\frac{1}{2-p}=\frac{n}{l}$，即$lH(Q,r_{max})\le n$，所以加权模型编码具有信道无损压缩作用。因$\varphi(0)=\frac{1}{2},\varphi(1)=1$无法适应$p$变化，所以本节采用$\varphi(0)=r_{max}p(0),\varphi(1)=r_{max}p(1)$进行加权模型编码。于是基本运算变量：$p(0)=\frac{1}{2-p}$，$p(1)=\frac{1-p}{2-p}$，$\varphi(0)=\frac{r_{max}}{2-p}$，$\varphi(1)=\frac{r_{max}(1-p)}{2-p}$，$r_{max}=\frac{(2-p)\left(\sqrt{5-4p}-1\right)}{2-2p}$。

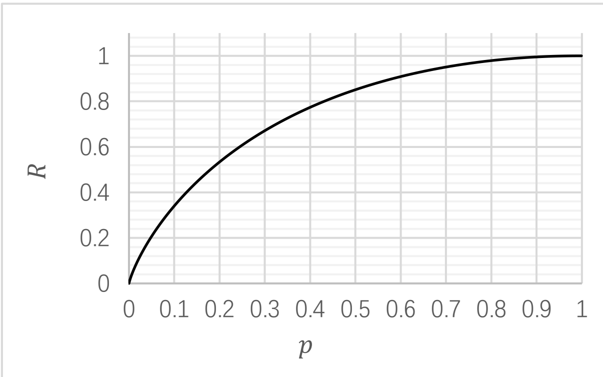

图 3 加权模型编码码率R与序列X中符号 0 概率p的关系

图 3 可得出，当$p<\frac{1}{2}$时，将序列X中符号互换。

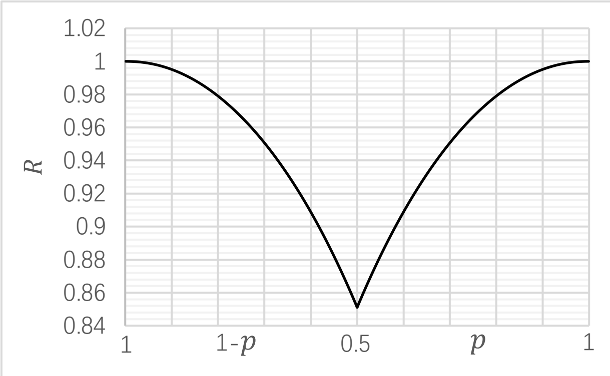

图 4 $p<\frac{1}{2}$时R与$1-p$的关系，$p\geq\frac{1}{2}$时R与p的关系

由图 4 可得，$p=\frac{1}{2}$时加权模型编码码率最小，$\min R=0.85108$。根据(3-7)，加权模型是基于比特的线性编码，将序列X的信源处理过程合并在编码步骤中。编码时分两种情形：

（1）$p\geq\frac{1}{2}$时，编码序列X中的符号 0 时$R_i=R_{i-1}\varphi(0)$，$L_i=L_{i-1}$；编码序列X中符号 1，因$(s\rightarrow\infty,t=1)$，所以实际编码“10”，$R_i=R_{i-1}\varphi(1)\varphi(0)$，$L_i=L_{i-1}+R_{i-1}\varphi(0)$。编码步骤如下。

1)：初始化参数，$R_0=1$，$L_0=0$，$p=0$，$i=1$；

2)：统计序列X中的符号 0 的个数记录为c，得$p=\frac{c}{n}$；

3)：计算权系数，$r_{max}=\frac{(2-p)\left(\sqrt{5-4p}-1\right)}{2-2p}$；

4)：计算加权概率，$\varphi(0)=\frac{r_{max}}{2-p}$，$\varphi(1)=\frac{r_{max}(1-p)}{2-p}$；

5)：获取序列X中第i个符号x_i；

6)：如果$x_i=0$，$R_i=R_{i-1}\varphi(0)$，否则$R_i=R_{i-1}\varphi(1)\varphi(0)$，$L_i=L_{i-1}+R_{i-1}\varphi(0)$；

7)：$i=i+1$，如果$i<n$，则重复步骤 5 到步骤 7，得到L_n；

8)：结束编码，返回L_n和c。

以上步骤可用图 5 示意。

（2）$p<\frac{1}{2}$时，编码符号 0 时，实际编码“10”，$R_i=R_{i-1}\varphi(1)\varphi(0)$，$L_i=L_{i-1}+R_{i-1}\varphi(0)$；编码符号 1 时$R_i=R_{i-1}\varphi(0)$，$L_i=L_{i-1}$。将上述步骤相关参数互换可实现序列$X$的编码。

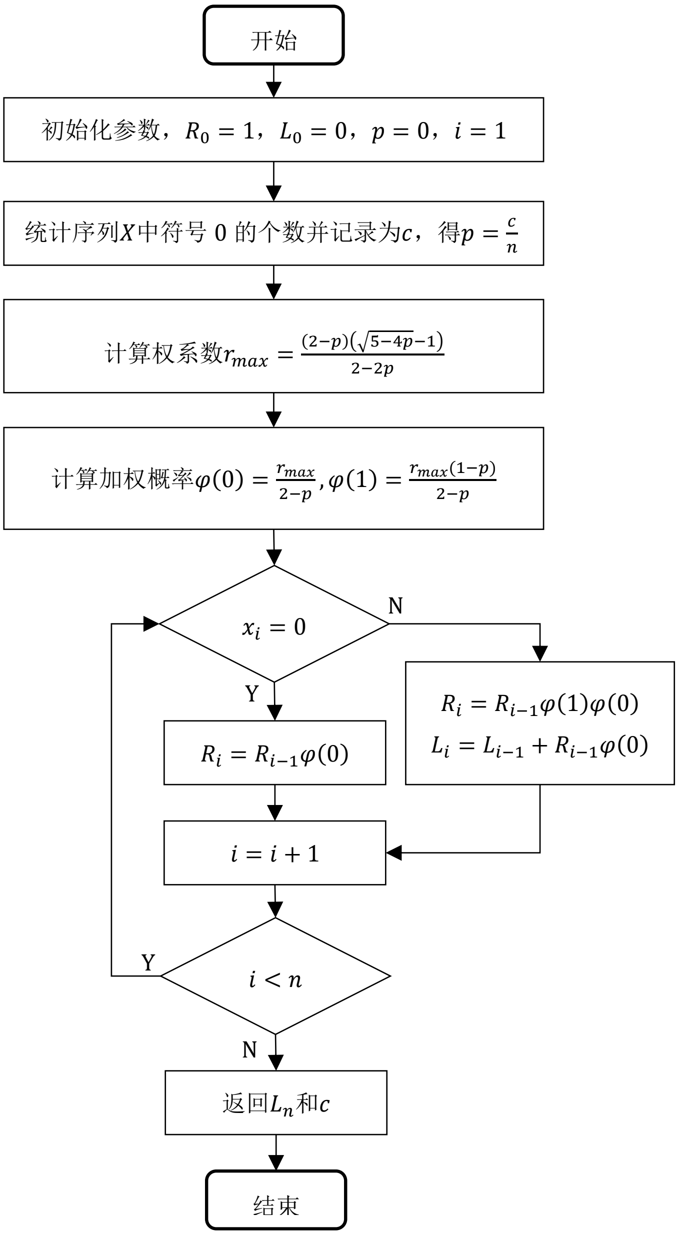

图 5 $p \geq \frac{1}{2}$时加权模型编码示意图

根据图 5，$p \geq \frac{1}{2}$和$p < \frac{1}{2}$情形下的加权模型编码算法如下。

Algorithm(1)：基于$(s \to \infty, t = 1)$的加权模型编码

输入：长度为n的序列X的比特数组$XBitArray$

输出：比特数组$VBitArray$和c

```
R_0 ← 1; L_0 ← 0;
for i ← 0 to n
    if XBitArray[i] = 0 then
        c ← c + 1;
    end if
end for
```

```
p ← c/n; p(0) ← 1/(2-p);
r_max ← (2-p)(√(5-4p) - 1)/(2-2p); φ(0) ← r_max p(0); φ(1) ← r_max (1 - p(0));
for i ← 1 to n
    if XBitArray[i-1] = 0 then
        if p < 0.5 then
            R_i ← R_{i-1} φ(1) φ(0);
            L_i ← L_{i-1} + R_{i-1} φ(0);
        else
            R_i ← R_{i-1} φ(0);
        end if
    else
        if p < 0.5 then
            R_i ← R_{i-1} φ(0);
        else
            R_i ← R_{i-1} φ(1) φ(0);
            L_i ← L_{i-1} + R_{i-1} φ(0);
        end if
    end if
end for
VBitArray ← L_n;
return VBitArray, c;
```

本文伪代码以实现逻辑为目的，其中V、R_i和L_i等被定义为无限精度的实数，且c能被无误传输。在实际应用中，仅需将$\varphi(0)$和$\varphi(1)$代入算术编码（区间编码）实现加权模型编译码。考虑c在接收端需校验，约定发送端和接收端用d个比特记录整数c。Algorithm(1)中$n = n + d$，数组$XBitArray[n + d]$前d个比特存放c，后n个比特存放X，进行加权模型编码。接收端可实现c的校验。

4.2 译码和错误校验

本节给出数据错误校验的译码过程。因$(s \to \infty, t = 1)$，所以连续译码 2 个或 2 个以上符号 1 时可判定数据$U \neq V$。接收端得到二进制序列U和c，将序列U的长度记为m，于是$m = (2n - c)H(Q, r_{max})$。其中$p = \frac{c}{n}$，当$p \geq \frac{1}{2}$时的错误校验译码步骤如下。

1)：初始化参数，$R_0 = 1$，$L_0 = 0$， $i = 1$，$H = 0$，$s = 0$，$p = \frac{c}{n}$;

2)：计算权系数，$r_{max} = \frac{(2-p)(\sqrt{5-4p}-1)}{2-2p}$;

3)：计算加权概率， $\varphi(0) = \frac{r_{max}}{2-p}$，$\varphi(1) = \frac{r_{max}(1-p)}{2-p}$;

5)：计算第i个符号$y_i = 0$时的H_i，$H_i = H = L_{i-1} + R_{i-1}\varphi(0)$;

6)：当$U \geq H$且$s = 1$，U错误，返回 null，结束译码；

7)：当$U \geq H$且$s = 0$，$y_i = 1$，更新s，R_i和L_i，使$s = 1$，$R_i = R_{i-1}\varphi(1)$，$L_i = L_{i-1} + R_{i-1}\varphi(0)$;

8)：当$U < H$且$s = 1$，更新s，R_i和L_i，使$s = 0$，$R_i = R_{i-1}\varphi(0)$，$L_i = L_{i-1}$；

9)：当$U < H$且$s = 0$，$y_i = 0$，更新s，R_i和L_i，使$s = 0$，$R_i = R_{i-1}\varphi(0)$，$L_i = L_{i-1}$；

10)：$i = i + 1$，如果$i < n$，则重复步骤 5 到步骤 10，解码出n个比特的序列Y；

11)：结束编码，返回序列$Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$。

以上步骤可用图 6 示意。

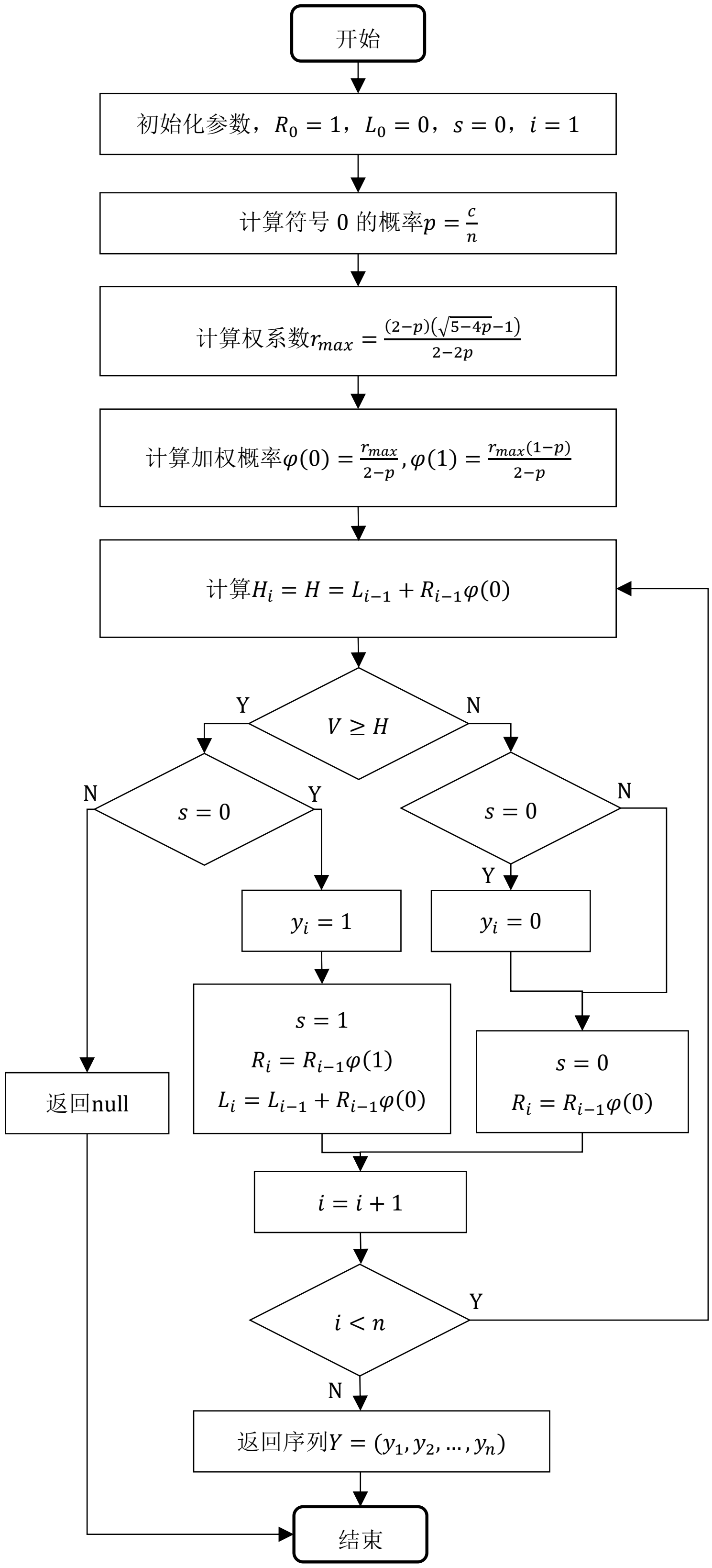

图 6 $p \geq \frac{1}{2}$时加权模型错误校验及译码示意图

根据图 6，$p \geq \frac{1}{2}$和$p < \frac{1}{2}$情形下的加权模型错误校验及译码算法如下。

Algorithm(2)：基于$(s \to \infty, t = 1)$的加权模型错误校验译码

输入：序列U的比特数组$UBitArray$和c

输出：序列Y的比特数组$YBitArray$或null

$R_0 \leftarrow 1; L_0 \leftarrow 0; i \leftarrow 1; H \leftarrow 0; s \leftarrow 0; p \leftarrow \frac{c}{n}; p(0) \leftarrow \frac{1}{2-p};$
$U \leftarrow UBitArray;$
$r_{max} \leftarrow \frac{(2-p)(\sqrt{5-4p}-1)}{2-2p}; \varphi(0) \leftarrow r_{max}p(0); \varphi(1) \leftarrow r_{max}(1-p(0));$
while $i < n$
$H \leftarrow L_{i-1} + \varphi(0)R_{i-1};$
if $U \geq H$ then
if $s = 1$ then
return null;
else
if $p < 0.5$ then
$YBitArray[i-1] \leftarrow 0$;
else
$YBitArray[i-1] \leftarrow 1$;
end if
$R_i \leftarrow R_{i-1}\varphi(1)$;
$L_i \leftarrow L_{i-1} + R_{i-1}\varphi(0);$
$s \leftarrow 1;$
end if
else
if $s = 0$ then
$R_i \leftarrow R_{i-1}\varphi(0);$
else
$R_i \leftarrow R_{i-1}\varphi(0);$
if $p < 0.5$ then
$YBitArray[i-1] \leftarrow 1;$
else
$YBitArray[i-1] \leftarrow 0;$
end if
end if
$s \leftarrow 0;$
end if
$i \leftarrow i + 1;$
end while
return $YBitArray$;

如果需要对c进行校验，可通过Algorithm(2)首先译码d个比特，若c正确，接着译码；若c错误，结束译码。当Algorithm(2)返回null则U错误。

4.3 BSC(ξ)前向纠错译码

根据 BSC(ξ)信道模型，存在概率ξ使得符号 0 被接收为符号 1，或符号 1 被接收为符号 0。基于加权模型，当Algorithm(2)返回null时，二进制序列U中部分符号 0 或符号 1 错误。设序列U中存在e个比特错误，当$e = 1$时，前向纠错译码步骤如下。

1)：初始化参数，$i = m - 1$；

2)：序列U的第i个比特取非，使$u_i = \overline{u_i}$；

3)：将U输入Algorithm(2)进行数据校验译码；

4)：$i > 0$且Algorithm(2)返回null，$u_i = \overline{u_i}$，$i = i - 1$，重复步骤 2 到步骤 4；$i > 0$且Algorithm(2)返回序列Y，结束纠错译码；$i = 0$且Algorithm(2)返回null，则$e > 1$。

以上步骤可用图 7 示意。

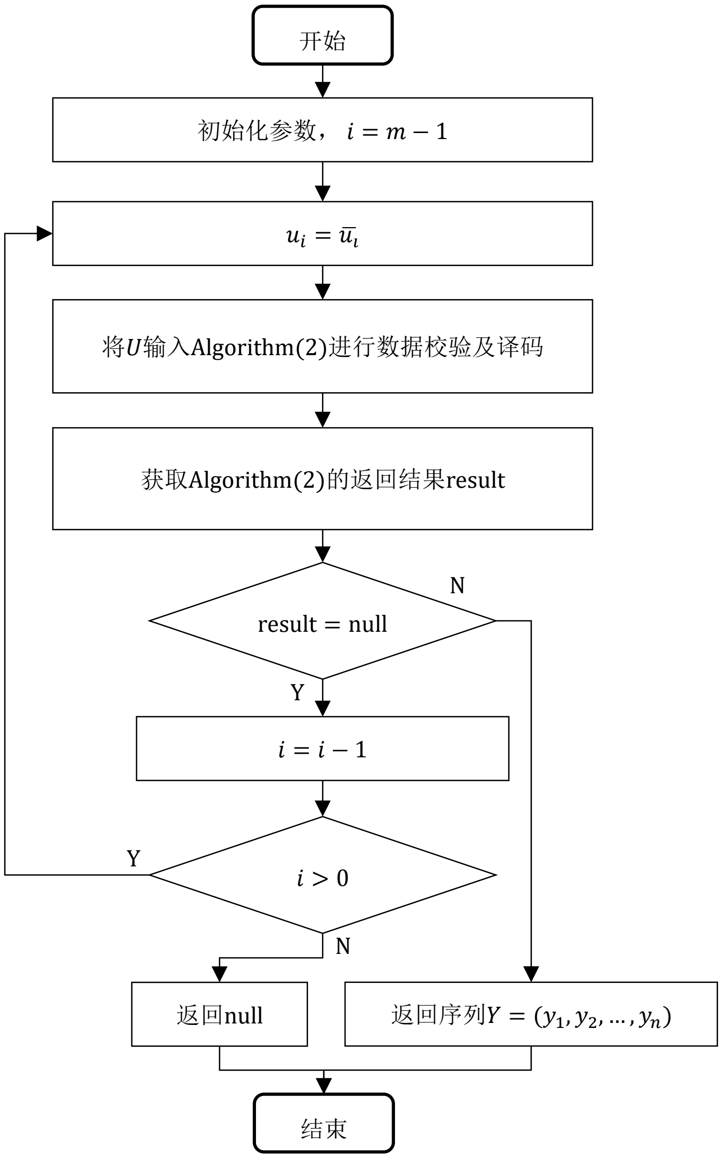

图 7 $e = 1$时前向纠错译码示意图

根据图 7，$e = 1$时纠错译码算法如下。

Algorithm(3)：基于($s \to \infty, t = 1$)和 BSC(ξ)， $e = 1$时前向纠错译码
输入：序列U的比特数组$UBitArray$

输出：序列V的比特数组$YBitArray$或null

```
for i ← m − 1 to 0
    UBitArray[i] ← not UBitArray[i];
    YBitArray ← Algorithm(2) ← UBitArray;
    if YBitArray = null then
        UBitArray[i] ← not UBitArray[i];
    else
        break;
    end if
end for
return YBitArray;
```

Algorithm(3)最多遍历$C_m^1 = m$次。若遍历全部m次返回null，说明序列U不止错误一个比特。然后进行$e = 2$的前向纠错算法。

Algorithm(4)：基于$(s \to \infty, t = 1)$和 BSC(ξ)，$e = 2$时前向纠错译码

输入：序列U的比特数组$UBitArray$

输出：序列Y的比特数组$YBitArray$或null

```
for i ← m − 1 to 0
    UBitArray[i] ← not UBitArray[i];
    for j ← i − 1 to 0
        UBitArray[j] ← not UBitArray[j];
        YBitArray ← Algorithm(2) ← UBitArray;
        if YBitArray = null then
            UBitArray[j] ← not UBitArray[j];
            j ← j − 1;
        else
            break;
        end if
    end for
    if YBitArray = null then
        UBitArray[i] ← not UBitArray[i];
        i ← i − 1;
    else
        break;
    end if
end for
return YBitArray;
```

Algorithm(4)最多遍历C_m^2次。若遍历全部次数返回null，说明序列U不止错误两个比特。类推，因$e \leq m$，总共需进行$\sum_{i=1}^{m} C_m^i = 2^m$次遍历，实现所有可能种类的纠错。显然，$P_{err}$是 BSC$(\xi)$前向纠错译码时唯一的译码错误概率。

4.4 BEC(ε)前向纠错译码

根据 BEC(ε)信道模型，存在概率ε使得符号 0 或符号 1 被接收为符号s。设序列U中存在e个符号s。以$e = 3$为例，错误符号记为$s_i, s_j, s_k (i < j < k)$。前向纠错算法如下。

Algorithm(5)：基于$(s \to \infty, t = 1)$和 BEC(ε)， $e = 3$时前向纠错译码

输入：序列U的比特数组$UBitArray$

输出：序列Y的比特数组$YBitArray$或null

```
for i ← 0 to 1
    s_i ← i;
    for j ← 0 to 1
        s_j ← j;
        for k ← 0 to 1
            s_k ← k;
            YBitArray ← Algorithm(2) ← UBitArray;
            if YBitArray ≠ null then
                break;
            end if
        end for
        if YBitArray ≠ null then
            break;
        end if
    end for
    if YBitArray ≠ null then
        break;
    end if
end for
return YBitArray;
```

当e确定时，总共需进行2^e次遍历，实现所有可能种类的纠错。同样的，P_{err}是 BEC(ε)前向纠错译码时唯一的译码错误概率。

4.5 P_{err}递增问题解决方法

设序列$Y = (y_1, y_2, \dots, y_i, \dots, y_l)$，序列$U = (u_1, u_2, \dots, u_j, \dots, u_m)$。接收端已知$c$和$n$，且$s$和$t$已知，所以$p$和$p(0)$已知。由(3-16)可得：

$$l = \frac{m}{H(Q, r_{max})} \tag{4-2}$$

将l代入(2-7)可得P_{err}，P_{err}仅与l有关。当$j \geq 1$时，$\frac{m-j}{H(Q, r_{max})} < l$，即不足以译码$l$个比特，于是$P_{err}$变大。当$m - j = 0$时$l = 0$，$P_{err} = 1$，即$j = m$时，无法校验错误，存在$P_{err}$递增问题。

为确保P_{err}不变或变小，可采用下面的两种方法：

（1）序列$Q = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_l)$编码完成后，再编码不少于$l$个符号 0，即$x_{i>l} = 0$。于是序列$Y$中符号$y_{i>l}$被译码为符号 1 时，$U \neq V$。

（2）设序列V中符号$v_{j>m} = 0$，序列V进行加权模型译码得出序列Y，序列Y中符号$y_{i>l}$被译码为符号 1 时，$U \neq V$。

根据加权编码过程， $L_{2l} = L_{2l-1} = \cdots = L_{l+1} = L_l = V$。$V$为小数，无论$V$后增加多少个 0 均不会影响$V$的值，如$V = 0.365 = 0.36500 \dots 0$。显然方法（1）等价于序列$V$中$v_{j>m} = 0$。因为编码时，方法（2）比方法（1）运算量小一倍，所以一般选用方法（2）。于是，序列U经方法（2）译码得长度为$2l$的序列Y，设$Y_1 = (y_1, y_2, \dots, y_l)$，$Y_2 = (y_{l+1}, y_{l+2}, \dots, y_{2l})$，当$Y_1 \in E$且$y_{l+1} = y_{l+2} = \cdots = y_{2l} = 0$时$U = V$，$P_{err}$不

变。上述两种方法在m为有限可数值时有效，当$m \to \infty$时，设定P_{err}的值，可将序列U分段进行纠错译码：

将序列U和V分割为$\left\lceil\frac{m}{h}\right\rceil$段，$h$为已知可数非零整数。设$U_k=(u_k,u_{k+1},u_{k+2},\dots,u_{k+h})$，$V_k=(v_k,v_{k+1},v_{k+2},\dots,v_{k+h})$，$U_k$为序列$U$中第$k$个比特段，$V_k$为序列$V$中第$k$个比特段，于是$k=0,1,2\dots,\frac{m}{h}$。根据定理 2.1 和 2.2，$s$和$t$已知，$P_{err}$仅与$l_k$有关。因$l_k=\frac{h}{H(Q,r_{max})}$，所以$P_{err}$仅与$h$有关。由方法（1）和方法（2）可得需译码不少于$\frac{2h}{H(Q,r_{max})}$个比特才能使得$P_{err}$不变或变小，即至少需$U_k$和$U_{k+1}$才能译码出长度为$\frac{2h}{H(Q,r_{max})}$的序列$Y'$（$Y'$为序列$Y$中的一段二进制序列），当$Y'\in E$时$U_k=V_k$。于是满足$P_{err}$不变或变小的最小数据校验范围为：

$$l_{min}=\frac{2h}{H(Q,r_{max})} \tag{4-3}$$

当$k=\left\lceil\frac{m}{h}\right\rceil$时，根据方法（2）需令$U_{k+1}=(0,0,\dots,0)$，当$y_{i>l}=0$时$U_k=V_k$。

4.6 错误校验范围与前向纠错范围

根据 4.5 节的分析，根据信道情形可自定义h的值。因为需要U_k和U_{k+1}才能译码出长度为$\frac{2h}{H(Q,r_{max})}$的序列Y'，所以当$Y'\in\bar{E}$时，$U_k\neq V_k$或$U_{k+1}\neq V_{k+1}$。于是比特错误发生在U_k或U_{k+1}中，根据(4-3)，因h已知，所以前向纠错范围仅与$H(Q,r_{max})$有关，且前向纠错范围为U_k和U_{k+1}共$2h$个相邻比特。根据(4-3)，错误校验范围为l_{min}。

以上分析过程和编译码是基于$\varphi(0)=r_{max}p(0)$，$\varphi(1)=r_{max}p(1)$。当$\varphi(1)=1$时，根据推论 3.3，$\varphi(0)\le\frac{1}{t+1}$，则序列$Q$中符号 0 的加权概率仅与$t$有关。于是信源处理方法$(s\to\infty,t=1)$和$(s=1,t=2)$中符号 0 的加权概率$\varphi(0)$最大值分别为$\frac{1}{2}$和$\frac{1}{3}$。

因$(s\to\infty,t=1)$和$(s=1,t=2)$均使得序列Q存在n个符号 0，根据(3-16)当$\varphi(1)=1$时序列Q中符号 1 不携带信息，所以序列Q中仅符号 0 的个数决定了加权模型编码后输出的比特位数。

以$(s=1,t=2)$为例，令序列X中符号 0 的概率$p=\frac{1}{2}$，因$p=\frac{1}{2}$，所以$H(X)=1$。$H\left(Q,\varphi(0)=\frac{1}{3},\varphi(1)=1\right)=-\log_2\frac{1}{3}$，可得$R=1/(-\log_2\frac{1}{3})$。于是序列$Q$中每编码一个符号 0 输出$-\log_2\frac{1}{3}$个比特，设编码输出$2h$个比特需$\alpha$个符号 0，则：

$$\alpha=\lceil 2h/(-\log_2\frac{1}{3})\rceil \tag{4-4}$$

由于α个符号 0 在序列Q中存在两种边界组合，其一为α个符号“10”（或“01”）组成序列Q，其二为α个符号“110”（或“011”）组成序列Q，所以序列Y'的长度值必然属于整数区间$[2\alpha,3\alpha]$。但译码时序列Y'的长度不可知，当错误校验范围设为3α时满足所有序列Y'的校验，即每次译码出长度为3α的序列Y'进行错误校验。

序列Q的3α个符号中符号 0 的个数最大值为$\lceil 3\alpha/2\rceil$，最小值为α。根据(4-4)和(3-16)可得，$\lceil 3\alpha/2\rceil$

个符号 0 编码出的$3h$个相邻比特为前向纠错范围，即$\frac{3}{2}\lceil 2h/(-\log_2\frac{1}{3})\rceil(-\log_2\frac{1}{3})=3h$。

通过上述分析，不同的信源处理方法和加权概率，则错误校验范围与前向纠错范围不同。具体情况需具体分析。

4.7 限制纠错位数的译码错误概率

设长度为m的序列U中存在e个比特错误，BSC 信道中e与误比特率ξ有关，BEC 信道中e与误比特率ε有关。根据定理 2.1 和 2.2，因$\lim_{l\to\infty}P_{err}=0$，所以序列$U$中任何错误均可被发现。根据 4.3 节和 4.4 节，可限制前向纠错的比特个数为τ。当$e>\tau$时，接收端通知发送端重新发送序列V；当$e\le\tau$时，接收端基于序列U进行前向纠错译码。m个比特中出现大于τ个比特错误的概率为：

$$P_{\mathrm{BSC}}(\tau)=\sum_{i=\tau+1}^{m}C_m^i\xi^i(1-\xi)^{m-i} \tag{4-5}$$

$$P_{\mathrm{BEC}}(\tau)=\sum_{i=\tau+1}^{m}C_m^i\varepsilon^i(1-\varepsilon)^{m-i} \tag{4-6}$$

(4-5)和(4-6)分别为 BSC 和 BEC 信道的重新传输序列V的概率，τ可被定义为已知整数。因$e>\tau$时接收端不进行前向纠错译码，所以$e\le\tau$时前向纠错的译码错误概率分别为：

$$P_{err}=P_{\mathrm{BSC}}(\tau)+\mathrm{P}(Y\ne Q|Y\in E) \tag{4-7}$$

$$P_{err}=P_{\mathrm{BEC}}(\tau)+\mathrm{P}(Y\ne Q|Y\in E) \tag{4-8}$$

因$\lim_{l\to\infty}\mathrm{P}(Y\ne Q|Y\in E)=0$，所以 BSC 信道$\lim_{l\to\infty}P_{err}=P_{\mathrm{BSC}}(\tau)$，BEC 信道$\lim_{l\to\infty}P_{err}=P_{\mathrm{BEC}}(\tau)$。

5 仿真实验

实验采用$(s=1,t=2)$为信源处理方法，在码率$R=\frac{1}{2}$情形下，实现本文方法与 Polar 码、LDPC 码和 Turbo 码的误块率(BLER)比较。设长度为n的二进制信源序列X中符号 0 的概率为p。当$p=\frac{1}{2}$时 DMC 信道传输速率最大，于是$nH(X)=n$。经信源处理，序列Q的长度$l=\frac{5}{2}n$。为了确保$R=\frac{1}{2}$，根据推论 3.3，$t=2$，所以$\varphi(0)\le\frac{1}{3}$，$\varphi(1)=1$。当$\varphi(0)=\frac{1}{4}$时：

$$lH\left(Q,\varphi(0)=\frac{1}{4},\varphi(1)=1\right)=-n\log_2\frac{1}{4}=2n$$

得：

$$R=\frac{nH(X)}{lH\left(Q,\varphi(0)=\frac{1}{4},\varphi(1)=1\right)}=\frac{n}{2n}=\frac{1}{2} \tag{5-1}$$

5.1 编码

根据加权模型，编码序列X中的符号 0 时，因实际编码“01”，所以$R_i = R_{i-1}\varphi(0)\,\varphi(1)$，$L_i = L_{i-1} + R_{i-1}\varphi(0)^2$。编码序列$X$中符号 1，因实际编码“101”，所以$R_i = R_{i-1}\varphi(0)\varphi(1)^2$，$L_i = L_{i-1} + R_{i-1}\varphi(0)^2\varphi(1)$。

前向纠错算法如下。

Algorithm(6)：基于$(s = 1, t = 2)$的加权模型编码

输入：长度为n的序列X的比特数组$XBitArray$

输出：序列V的比特数组$VBitArray$

```
R_0 ← 1; L_0 ← 0;
φ(0) ← 1/4; φ(1) ← 1;
for i ← 1 to n
    if XBitArray[i − 1] = 0 then
        R_i = R_{i−1}φ(0) φ(1);
        L_i = L_{i−1} + R_{i−1}φ(0)^2;
    else
        R_i = R_{i−1}φ(0)φ(1)^2;
        L_i = L_{i−1} + R_{i−1}φ(0)^2φ(1);
    end if
end for
VBitArray ← L_n;
return VBitArray;
```

5.2 译码校验

译码时，首先校验译码结果是否正确，即$Y \in E$则译码结果正确，否则U错误。前向纠错译码算法如下。

Algorithm(7)：基于$(s = 1, t = 2)$的错误校验译码

输入：序列U的比特数组$UBitArray$和c

输出：序列Y的比特数组$YBitArray$或null

```
R_0 ← 1; L_0 ← 0; i ← 1; j ← 1; H ← 0; s_1 = s_2 ← −1;
U ← UBitArray;
φ(0) ← 1/4; φ(1) ← 1;
while i < n
    H ← L_{j−1} + rp(0)R_{j−1};
    if U < H then
        if s_2 = s_1 = −1 then
            s_1 ← 0;
            R_j = R_{j−1}φ(0);
        else if s_2 = −1 and s_1 = 1 then
            s_2 ← 1; s_1 ← 0;
            R_j = R_{j−1}φ(0);
        else if s_2 = 1 and s_1 = 1 then
            return null;
        else if s_1 = 0 then
```

```
            return null;
        end if
        j ← j + 1;
    else
        if s_2 = s_1 = −1 then
            R_j ← R_{j−1}φ(1);
            L_j = L_{j−1} + R_{j−1}φ(0);
        else if s_2 = −1 and s_1 = 0 then
            R_j ← R_{j−1}φ(1);
            L_j = L_{j−1} + R_{j−1}φ(0);
            YBitArray[i] = 0;
            i ← i + 1;
            s_2 ← −1; s_1 ← −1;
        else if s_2 = −1 and s_1 = 1 then
            R_j ← R_{j−1}φ(1);
            L_j = L_{j−1} + R_{j−1}φ(0);
            s_2 ← 1; s_1 ← 1;
        else if s_2 = 1 and s_1 = 0 then
            R_j ← R_{j−1}φ(1);
            L_j = L_{j−1} + R_{j−1}φ(0);
            YBitArray[i] = 1;
            i ← i + 1;
            s_2 ← −1; s_1 ← −1;
        else if s_2 = 1 and s_1 = 1 then
            return null;
        end if
        j ← j + 1;
    end if
end while
return YBitArray;
```

当Algorithm(7)返回null则说明U错误，需采用 4.3 或 4.4 节的方法实现前向纠错和译码。

5.3 BSC(ξ)信道仿真实验

仿真实验生成二进制伯努利序列X，长度为$n = 1024$bit，其中符号 0 的概率为$p = \frac{1}{2}$。经$(s = 1, t = 2)$信源处理后序列Q的长度为$l = 2560$，根据定理 2.2 有 $P_{err} = 0$。因$\varphi(0) = \frac{1}{4}$，$\varphi(1) = 1$，符号 1 不携带信息量，序列Q经加权编码后序列V的长度为$lH\left(Q, \varphi(0) = \frac{1}{4}, \varphi(1) = 1\right) = -1024 \log_2 \frac{1}{4} = 2048$ bit。序列V经 BSC(ξ) 传输。U为接收端接收到的二进制序列。

根据 4.5、4.6 和 4.7 节分析，令$h = 32$，32 是计算机中 INT 数据类型的位长，于是数据校验范围为$3\alpha = 3\lceil 2h/(-\log_2 \frac{1}{3})\rceil = 122$，前向纠错范围为$3h = 96$，由(2-10)(2-11)(2-12)得译码错误概率为$P_{err} \le 2.50254E - 22$。然后根据 4.3 节的前向纠错译码算法，令$\tau = 8,12,16,18$，则译码错误概率由(4-

7)给出，实验中无法纠错译码时重新传输当前帧，然后通过统计重传次数求出误块率(BLER)。

Turbo 码仿真基于 WCDMA 和 LTE 标准，Log-MAP 解码算法最大迭代$I_{max}=8$，码长为 1024。

LDPC 码仿真基于 WiMax 标准，采用标准 BP 算法，且最大迭代$I_{max}=200$，码长为 1056。

Polar 码仿真基于循环冗余码(CRC)辅助的列表串行消除(Successive-Cancellation List,SCL)译码算法（CRC-Asistant SCL）构造，列表大小为 32，最大码长为 1024。

仿真二进制输入的加性高斯白噪声信道（Binary Input Additive White Gaussian Noise,BIAWGN）信道，基于二进制相移键控（Binary Phase Shift Keying,BPSK）调制解调方法，帧数大于10^5，四种编码方法的码率$R=\frac{1}{2}$。实验得出本文方法、Turbo 码、LDPC 码和 Polar 码，在不同的信噪比E_b/N_0(SNR)下误块率(BLER)如图 8。

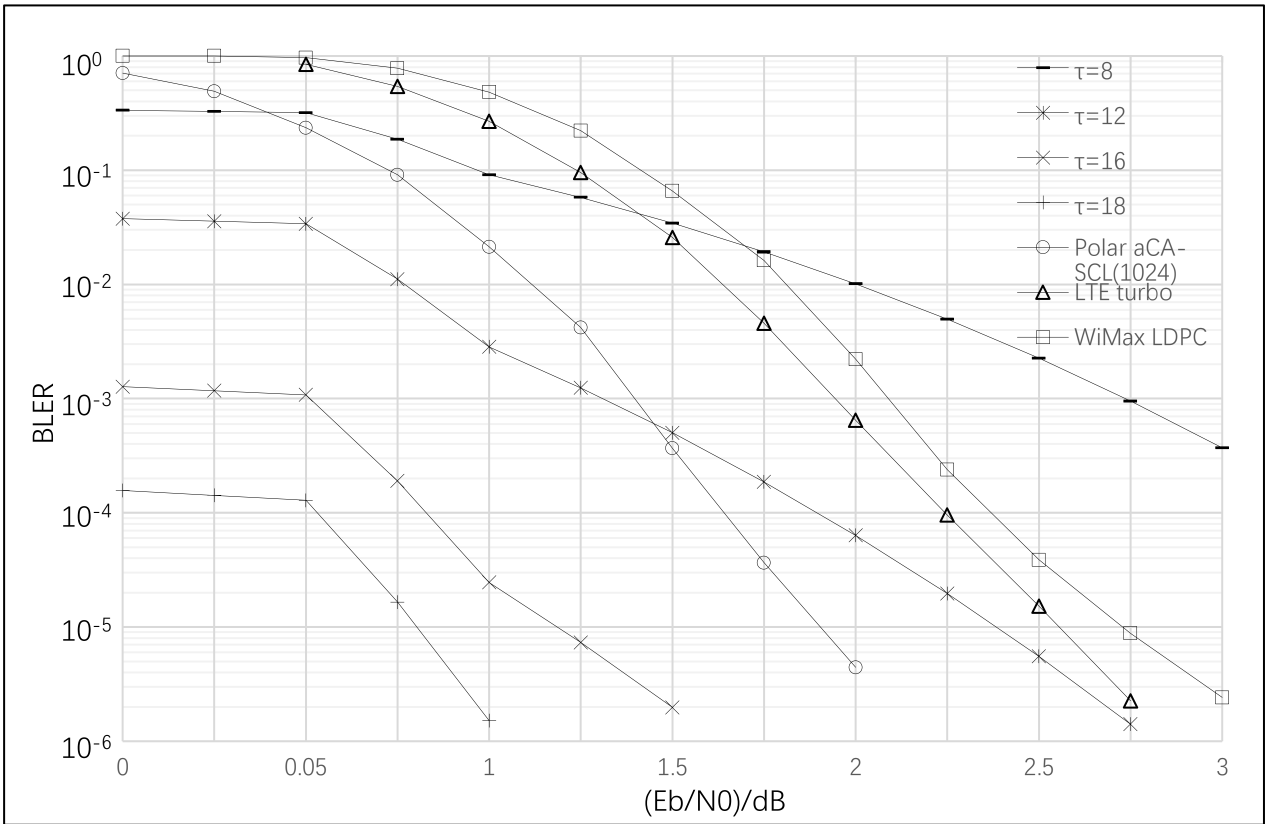

图 8 本文纠错方法（τ不变）与 Polar、Turbo、LDPC 的性能比较

由图 8 可得本文方法纠错性能优于 LDPC 码和 Polar 码，当$\tau=12$时，信噪比低于 1.4dB 时，本文方法优于 Polar 码。当$\tau=18$时，本文方法相比 Polar 码有 1.0dB 的增益，相比于 LDPC 码和 Turbo 码有 1.8~2.2dB 的增益。

根据图 8，实验结果符合(4-5)，且τ的值在任意信噪比下保持不变。接下来，实验不同的信噪比采用不同的τ值，比如 0dB 时$\tau=12$；0dB 到 1dB 时$\tau=13$；1dB 到 1.5dB 时$\tau=15$；大于等于 1.5dB 时$\tau=18$。通过仿真实验得出本文方法、Turbo 码、LDPC 码和 Polar 码，在不同的信噪比E_b/N_0(SNR)下误块率(BLER)如图 9。

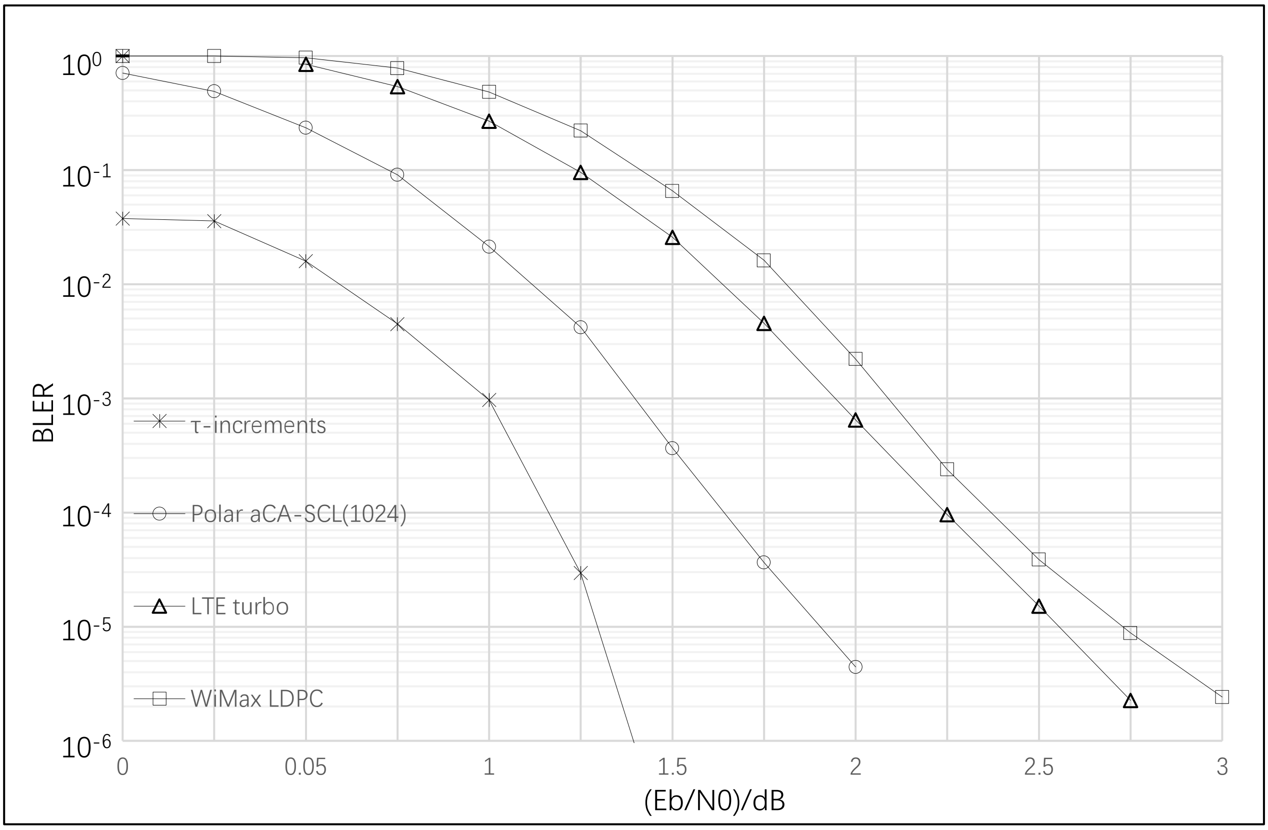

图 9 本文纠错方法（τ递增）与 Polar、Turbo、LDPC 的性能比较

5 总结

本文提出了一种新的信道检错纠错思路，并给出具体方法。因方法种类众多，本文举例了两种方法，分别对应于不同的码率和译码错误概率，通过证明可达到信道容量。方法简单，易于软硬件实现。可自适应于信道的干扰情况，通过增大τ的值提高纠错率。控制τ的大小后，可构造前向纠错与数据校验重传一体的信道编码方法。τ越大运算量成指数增长，一方面基于可接受的译码错误概率下降低h，另一方面比特错误位置与数据校验位置存在关联，可根据数据校验位置细化纠错范围从而提高运算效率。通过 4.1 节中加权模型编码也是信源编码，未来可构造具备信源和信道双重编码的算法。

参考文献

1 Erdal Arikan. Channel Polarization: A Method for Constructing Capacity-Achieving Codes for Symmetric Binary-Input Memoryless Channels. IEEE Transactions on Information Theory, Volume:55 , Issue:7, 3051 - 3073, July 2009.

2 R. G. Gallager, “Low-Density Parity-Check Codes,” M.I.T. Press, Cambridge, Massachusetts, 1963.

3 Axel Huebner,Kamil Sh. Zigangirov, Daniel J. Costello.Laminated turbo codes: A new class of block-convolutional codes. IEEE Transactions on Information Theory,Volume: 54 , Issue: 7 , July 2008

4 C. E. Shannon. A mathematical theory of communication. Bell Syst. Tech. J., 27:379–423,623–656, 1948.

5 Ian H.Witten, Radford M.Neal,John G.Cleary. Arithmetic Coding for Data Compression.Communications of the ACM. 1987,30(6):520~539.

6 G. N. N. Martin, Range encoding: an algorithm for removing redundancy from a digitised message. Video & Data Recording Conference, held in Southampton July 24-27 1979.

7 Marpe D , Schwarz H , Wiegand T . Context-based adaptive binary arithmetic coding in the H.264/AVC video compression standard[J]. IEEE Transactions on Circuits & Systems for Video Technology, 2003, 13(7):620-636.

8 T.M.Cover and J.A.Thomas,Elements of Information Theory.New YorK,Wiley 1991.

9 F.j.MacWilliams and N.J.A Slone.Theory of Error-Correcting Codes.Amsterdam.The Netherlands:North-Hollend.1977.

10 Berrou C , Glavieux A . Near optimum error correcting coding and decoding: turbo-codes[J]. IEEE Transactions on Communications, 1996, 44(10):P.1261-1271.

11 Ghassan M. Kraidy.On Progressive Edge-Growth Interleavers for Turbo Codes.IEEE Communications Letters,Volume: 20 , Issue: 2 , Feb. 2016.

12 Fang Yuan,Bin Tian. Double-Parity-Check CA-SCL Encoding and Decoding for Polar Codes.2018 14th IEEE International Conference on Signal Processing.

13 Mishra A , Raymond A J , Amaru L G , et al. A successive cancellation decoder ASIC for a 1024-bit polar code in 180nm CMOS[C] IEEE Asian Solid-state Circuits Conference. IEEE, 2012.

14 Mao-Ching Chiu.Interleaved Polar (I-Polar) Codes.IEEE Transactions on Information Theory,Volume: 66 , Issue: 4 , April 2020.

15 Ali Dehghan,Amir H. Banihashemi.On the Tanner Graph Cycle Distribution of Random LDPC, Random Protograph-Based LDPC, and Random Quasi-Cyclic LDPC Code Ensembles.IEEE Transactions on Information Theory,Volume: 64 , Issue: 6 , June 2018.

16 Mansour M M , Shanbhag N R . High-Throughput LDPC decoders[J]. IEEE Transactions on Very Large Scale Integration (VLSI) Systems, 2004, 11(6):976-996.

17 Eran Pisek,Dinesh Rajan,Joseph R. Cleveland.Trellis-Based QC-LDPC Convolutional Codes Enabling Low Power Decoders.IEEE Transactions on Communications,Volume: 63 , Issue: 6 , June 2015.

18 Alireza Tasdighi,Amir H. Banihashemi,Mohammad-Reza Sadeghi.Symmetrical Constructions for Regular Girth-8 QC-LDPC Codes. IEEE Transactions on Communications, Volume: 65 , Issue: 1 , Jan. 2017.

Channel Coding of Weighted Probabilistic Model

Jielin WANG

Hunan International Economics University, Changsha 410000, *Hunan, China*

* Corresponding author. E-mail: 254908447@qq.com

Abstract Let the binary Bernoulli source sequence input into the symmetric discrete memoryless channel (DMC) be X, and linearly replace the “1” in X with “10” to obtain the sequence Q, then the sequence Q satisfies the condition that each “1” is separate by one or multiple “1”. There are many ways to convert sequence X into sequence Q, which are collectively referred to as source processing. The transmitting end uses a weighted probability model to linearly encode the sequence Q. The receiving end performs weighted probability model decoding. If more than one “1” is continuously decoded, the data transmission has errors. Then the forward error correction decoding method is constructed based on the characteristics of BSC(ξ) and BEC(ε) channel models. It has been proved that when the code length approaches infinity, the coding method in this paper enables the transmission rate to approximate the channel capacity, and the average decoding error probability approaches 0. Simulated with 1/2 code rate in the Binary Input Additive White Gaussian Noise (BIAWGN) channel, the block error rate (BLER) of this method is lower than that of polarized codes and LDPC codes.

Keywords Information entropy, Channel capacity, Channel error-correcting, Weighted probability

Jielin WANG was born in 1985. He is the professor of Hunan Foreign Economics College, and his research interests include probability theory, information theory and random process. His research focuses on the application of weighted probability model in various coding fields. Besides, he discovers some core algorithms of China's independent intellectual property rights, such as encryption, compression, error detection and correction, random number and digital fingerprint.