3.2 自然推理系统P

引言：

真值计算，以代入和替换原理进行推演，难以反映人类思维推理过程，需要建立严密的符号推理体系(数理逻辑的初衷).

先介绍一下自然推理系统的相关概念：

1. 形式系统（形式系统就是一个符号体系）

形式系统包括三个部分：

(1) 系统中的概念由符号表示(符号系统);

(2) 以若干最基本的重言式作为基础，称作公理(Axioms);

(3) 系统内符号变换的依据是若干确保由重言式导出重言式的规则称作推理规则(Rules of Inference)

公理和推理规则确保系统内由正确的前提总能得到正确的推理结果.

3.2 自然推理系统P

引言：

2. 证明与演绎

(1) 证明（Proof）

公式序列$A_1,A_2,\dots,A_m$,前面的每一个公式或者是公理，或者是由前面的公式应用推理规则得到的结论，则称作A_m的证明

(2) 演绎(Deduction)

演绎是存在前提条件的，把它们归在一起成为一个公式集合记为Γ. 称Γ和Γ中的成员为A_m的前提(Hypothesis)

注：证明和演绎就差一个Γ这个前提，证明是演绎在Γ为空集时的特例, 本书没有区分证明和演绎，统称为证明.

形式系统就是要将证明和演绎，严格的形式化.

3.2 自然推理系统P

引言：

人们构建了一些形式系统，但证明和演绎的过程过于繁复.

而且人们发现，在形式系统中引入带有假设的推理规则，能够使推理过程更加接近人的思维，更加高效和便捷.

因此人们定义了如下的自然推理系统(Natural Deduction)！

3.2 自然推理系统P

定义3.3 自然推理系统 P 定义如下:

1. 字母表

(1) 命题变项符号：$p, q, r, \ldots, p_i, q_i, r_i, \ldots$

(2) 联结词符号：$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

(3) 括号与逗号：(,), ,

2. 命题公式（同定义1.6）

3. 推理规则

(1) **前提引入规则：** 在证明的任何步骤都可以引入前提.

(2) **结论引入规则:** 在证明的任何步骤所得的结论都可以作为后继证明的前提

(3) **置换规则**

推理规则

(4) 假言推理规则

$$\frac{\begin{array}{c}A \to B \\ A\end{array}}{\therefore B}$$

(5) 附加规则

$$\frac{A}{\therefore A \vee B}$$

(6) 化简规则

$$\frac{A \wedge B}{\therefore A}$$

(7) 拒取式规则

$$\frac{\begin{array}{c}A \to B \\ \neg B\end{array}}{\therefore \neg A}$$

(8) 假言三段论规则

$$\frac{\begin{array}{c}A \to B \\ B \to C\end{array}}{\therefore A \to C}$$

(9) 析取三段论规则

$$\frac{\begin{array}{c}A \vee B \\ \neg B\end{array}}{\therefore A}$$

推理规则

(10) 构造性二难推理规则

$$\frac{A\to B \quad C\to D \quad A\vee C}{\therefore B\vee D}$$

(11) 破坏性二难推理规则

$$\frac{A\to B \quad C\to D \quad \neg B\vee\neg D}{\therefore \neg A\vee\neg C}$$

(12) 合取引入规则

$$\frac{A \quad B}{\therefore A\wedge B}$$

在自然推理系统P中构造证明

设前提$A_1, A_2,\ldots, A_k$,结论B及公式序列$C_1, C_2,\ldots, C_l$. 如果每一个$C_i(1\leq i\leq l)$是某个A_j, 或者可由序列中前面的公式应用推理规则得到, 并且$C_l=B$, 则称这个公式序列是由$A_1, A_2,\ldots, A_k$推出B的**证明(Proof)**。

在自然推理系统P中构造证明

例1：构造下面推理的证明：

若明天是星期二或星期四，我明天就有课. 若我明天有课，今天必备课. 我今天没备课. 所以，明天不是星期二、也不是星期四.

解 (1) 设 p：明天是星期二，q：明天是星期四，

r：我明天有课，　s：我今天备课

(2) 写出证明的形式结构

前提：$(p\vee q)\rightarrow r$, $r\rightarrow s$, $\neg s$

结论：$\neg p\wedge\neg q$

直接证明法

(3) 证明

① $r \to s$	前提引入
② $\neg s$	前提引入
③ $\neg r$	①②拒取式
④ $(p \vee q) \to r$	前提引入
⑤ $\neg(p \vee q)$	③④拒取式
⑥ $\neg p \wedge \neg q$	⑤置换

构造证明

例2: 在系统P中构造下面推理的证明：

如果今天是周六，我们就到颐和园或圆明园玩. 如果颐和园游人太多，就不去颐和园. 今天是周六，并且颐和园游人太多. 所以, 我们去圆明园或动物园玩.

证明：

(1) 设 p：今天是周六，q：到颐和园玩，

r：到圆明园玩，s：颐和园游人太多

t：到动物园玩

(2) 前提：$p\to(q\vee r)$，$s\to\neg q$，p，s

结论：$r\vee t$

构造证明

(3) 证明：

① $p\to(q\vee r)$	前提引入
② p	前提引入
③ $q\vee r$	①②假言推理
④ $s\to\neg q$	前提引入
⑤ s	前提引入
⑥ $\neg q$	④⑤假言推理
⑦ r	③⑥析取三段论
⑧ $r\vee t$	⑦附加

附加前提证明法

附加前提证明法　适用于结论为蕴涵式

欲证　前提：$A_1, A_2, \ldots, A_k$

　　　结论：$C \to B$

等价地证明

前提：$A_1, A_2, \ldots, A_k, C$

结论：B

理由：

$$(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k) \to (C \to B)$$

$$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k) \vee (\neg C \vee B)$$

$$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge C) \vee B$$

$$\Leftrightarrow (A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge C) \to B$$

附加前提证明法实例

例3： 构造下面推理的证明

2是素数或合数. 若2是素数，则π是无理数. 若π是无理数，则4不是素数. 所以，如果4是素数，则2是合数.

解 用附加前提证明法构造证明

(1) 设 p：2是素数， q：2是合数，

r：π是无理数，s：4是素数

(2) 推理的形式结构

前提：$p \lor q$, $p \to r$, $r \to \neg s$

结论：$s \to q$

附加前提证明法实例

(3) 证明

① s	附加前提引入
② $p\rightarrow r$	前提引入
③ $r\rightarrow\neg s$	前提引入
④ $p\rightarrow\neg s$	②③假言三段论
⑤ $\neg p$	①④拒取式
⑥ $p\vee q$	前提引入
⑦ q	⑤⑥析取三段论

归谬法（反证法）

欲证：

前提：$A_1, A_2, \ldots, A_k$

结论：B

做法：在前提中加入$\neg B$，推出矛盾(反证法).

理由

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow B$$
$$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k) \vee B$$
$$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge \neg B)$$
$$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge \neg B) \vee 0$$
$$\Leftrightarrow A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge \neg B \rightarrow 0$$

归谬法实例

例4：在系统P中构造下面推理的证明：

如果小张守第一垒并且小李向B队投球，则A队一定获胜；或者A队未获胜，或者A队成为联赛冠军；A队没有成为联赛冠军；小张守第一垒。因此，小李没有向B队投球。

证明：(1) 设 p：小张守第一垒， q：小李向B队投球，

r：A队一定获胜， s：A队成为联赛冠军

(2) 前提：$(p\wedge q)\rightarrow r$, $\neg r\vee s$, $\neg s$, p

结论：$\neg q$

归谬法实例

证明 用归缪法

① q	结论否定引入
② $\neg r \vee s$	前提引入
③ $\neg s$	前提引入
④ $\neg r$	②③析取三段论
⑤ $(p \wedge q) \rightarrow r$	前提引入
⑥ $\neg(p \wedge q)$	④⑤拒取式
⑦ $\neg p \vee \neg q$	⑥置换
⑧ p	前提引入
⑨ $\neg q$	⑦⑧析取三段论
⑩ $\neg q \wedge q$	①⑨合取

课后习题

P57:

11;　14(4,6);

15(2);　16(2);　17.