第九章 代数系统

第一节 二元运算及性质

一、二元运算。

1、**定义**：设 s 为集合，函数 $f:S\times S\to S$ 称为 S 上的**二元运算**(即 $\forall x,y\in S$，$x\circ y\in S$，运算封闭)

n 元运算，$f:\underbrace{S\times S\times\cdots\times S}_{n\text{个}}\to S$

掌握 $n=1$，$n=2$，即一元，二元运算。

一、二元运算。

2、记号：用$\circ, *, \bullet, \cdots$ 等符号表示二元运算，

称为**算符**。

例如：$f\left(\langle x, y\rangle\right) = z$ 记为$x \circ y = z$ (二元运算)

$f(a) = b$记为$\circ(a) = b$ (一元运算)

例1、(1) N 上的加法，乘法都是二元运算，

但减法，除法不是。

(2) Z 上的加法，乘法，减法都是二元运算，

但除法不是。Z 上求相反数的运算是一元运算。

(3) 非零实数集 R^* 上的乘法和除法都是二元运算。

但加法，减法不是，而求倒数是一元运算。

(4) $M_n(R)$ 表示所有 n 阶实矩阵的集合$(n \geq 2)$，

则矩阵的加法和乘法都是二元运算。

(5) 集合S的幂集$P(S)$上的$\cup, \cap, -, \oplus$都是二元运算，而绝对补集(S为全集)是一元运算。

(6) 所有命题公式的集合上的$\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$都是二元运算，而否定$\neg$为一元运算。

(7) S^S表示集合S上的所有函数的集合，函数的合成运算$\circ$是S^S上的二元运算。

3、一元，二元运算表。

当 S 为有穷集时，S 上的一元和二元运算都可以用运算表给出。

例2、(1) 设 $S=\{1,2\}$，给出 $P(S)$ 上的运算绝对补集 ~ 和对称差 $\oplus$ 的运算表。

解：$P(S)=\{\phi,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$， “~”为一元运算，“ $\oplus$”为二元运算，其运算表如下：

a_i	$\sim a_i$
ϕ	$\{1,2\}$
$\{1\}$	$\{2\}$
$\{2\}$	$\{1\}$
$\{1,2\}$	ϕ

$\oplus$	ϕ	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$
ϕ	ϕ	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$
$\{1\}$	$\{1\}$	ϕ	$\{1,2\}$	$\{2\}$
$\{2\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$	ϕ	$\{1\}$
$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{2\}$	$\{1\}$	ϕ

例2、(2) 设$S=\{0,1,2,3,4\}$，定义S上的两个

二元运算如下：

$x\circ y=(x+y)\bmod 5 \quad (\forall x,y\in S)$

$x*y=(xy)\bmod 5 \quad (\forall x,y\in S)$

求运算$\circ$和$*$的运算表。

解：$(x+y)\bmod 5$，$(xy)\bmod 5$分别是x,y的和

与积除以5的余数，运算表如下：

∘	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

*	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

二、有关运算律。

设 $\circ, *$ 是 S 上的二元运算，$\forall x, y, z \in S$

1、若 $x \circ y = y \circ x$，则称 $\circ$ 在 S 上**可交换**。

(或称满足**交换律**)

2、若 $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$，则称 $\circ$ 在 S 上**可结合**。

(或称满足**结合律**)

二、有关运算律。

设 $\circ, *$ 是 S 上的二元运算，$\forall x, y, z \in S$

若 $$x*(y\circ z)=(x*y)\circ(x*z)$$

$$(y\circ z)*x=(y*x)\circ(z*x)$$

则称运算 $*$ 对 $\circ$ 是**可分配**的。

(或称 $*$ 对 $\circ$ 满足**分配律**)

例3、(1) 普通的加法和乘法在N,Z,Q,R上都是可结合的，且是可交换的，乘法对加法是可分配的。

(2) 矩阵的加法和乘法在$M_n(R)$上是可结合的，加法可交换，但乘法不可交换，乘法对加法是可分配的。

(3) $\cup, \cap, \oplus$ 在幂集 $P(S)$ 上可结合，可交换，

但是相对补不可结合，不可交换，$\cup$ 和 $\cap$

是互相可分配的。

(4) $\wedge, \vee$ 在全体命题公式集合上可结合，可交换，

$\wedge$ 和 $\vee$ 是相互可分配的。

三、一些特殊元素。

设$\circ$为S上的二元运算，

1、**幺元 $\boldsymbol{e}$：**若$\exists e \in S$，对$\forall x \in S$，$e \circ x = x \circ e = x$

则称e为运算$\circ$的**幺元**。

注：(1) 若幺元存在必唯一。

(2) 若只有$e_l \circ x = x$或只有$x \circ e_r = x$，

则 e_l，e_r 称为左幺元或右幺元。

例如：在N,Z,Q,R上，加法的幺元是0，

乘法的幺元是1。在Z上的减法运

算没有幺元，只有右幺元0 $(x-0=x)$

在$M_n(R)$上，矩阵加法的幺元是n阶0矩阵，

矩阵乘法的幺元是n阶单位矩阵。

在幂集$P(S)$上，运算$\bigcup$的幺元是ϕ，运算$\bigcap$

的幺元是全集S。

例4、在 R^*(非零实数集)上定义运算如下：

$$a \circ b = a \quad (\forall a, b \in R^*)$$

则R^*中的任何元素都是右幺元，

但没有左幺元 e_l ，使 $e_l \circ b = b$ $(\forall b \in R^*)$ ，

从而没有幺元。

2、**零元$\boldsymbol{\theta}$：** 若$\exists\theta\in S$，对$\forall x\in S$，

$\theta\circ x=x\circ\theta=\theta$，则称$\theta$为运算$\circ$的**零元**。

注： (1) 若零元存在必唯一。

(2) 若只有$\theta_l\circ x=\theta_l$，或只有$x\circ\theta_r=\theta_r$，

则θ_l,θ_r分别称为左零元或右零元。

如例4 $(a\circ b=a), R^*$ 的任何元素都是左零元，

但没有右零元θ_r，从而也没有零元。

例如：在 N, Z, Q, R 上加法没有零元，

乘法的零元是0。

在 $M_n(R)$ 上矩阵加法没有零元，矩阵乘法的零元是 n 阶0矩阵。

在幂集 $P(S)$ 上，运算 $\cup$ 的零元是 S，运算 $\cap$ 的零元是 ϕ。

3、**逆元**：设$\circ$为S上的二元运算，$e \in S$为运算$\circ$的幺元，若对$x \in S$，存在$x^{-1} \in S$，使$x^{-1} \circ x = x \circ x^{-1} = e$，则称$x^{-1}$为$x$的**逆元**。

注：(1) 逆元是针对某个元素x而言的

(可能有些元素有逆元，有些没有)

(2) 若二元运算$\circ$满足结合律且x的逆元存在则必唯一。

3、**逆元**：设$\circ$为S上的二元运算，$e \in S$为运算$\circ$的幺元，若对$x \in S$，存在$x^{-1} \in S$，使$x^{-1} \circ x = x \circ x^{-1} = e$，则称$x^{-1}$为$x$的**逆元**。

注：(3) 若只有$x_l^{-1} \circ x = e$或只有$x \circ x_r^{-1} = e$，则x_l^{-1}, x_r^{-1}称为左逆元或右逆元。

例如：普通加法运算在N,Z,Q,R上有幺元0，仅在Z,Q,R上任意元素x有逆元$(-x)$，满足

$$(-x)+x=x+(-x)=0$$

在N上只有0有逆元0，而其它的自然数就没有逆元。

在$M_n(R)$上矩阵的乘法只有可逆矩阵存在逆元。

幂集$P(S)$上关于运算$\bigcup$有幺元ϕ，但除了ϕ外，其余元素都没有逆元。

例5、判断普通的加法和乘法运算在下列集合中是否二元运算。

(1) $S_1 = \{1, 2\}$

解：加法，乘法都不是二元运算。

(2) $S_2 = \{0, 1\}$

解：加法不是二元运算，乘法是二元运算。

例5、判断普通的加法和乘法运算在下列集合中是否二元运算。

(3) $S_3 = \left\{ 2x \middle| x \in Z^+ \right\}$

解：加法，乘法都是二元运算。

(4) $S_4 = \left\{ 2x-1 \middle| x \in Z^+ \right\}$

解：加法不是二元运算，乘法是二元运算。

例5、判断普通的加法和乘法运算在下列集合中是否二元运算。

(5) $S_5=\left\{x=2^n, n\in Z^+\right\}$

解：加法不是二元运算，乘法是二元运算。

例6、在实数集 R 上定义运算$*$如下：$\forall a,b \in R$

$$a * b = a + b + 2ab$$

(1) $*$是 R 上的二元运算吗？

解：因$a * b = a + b + 2ab \in R$，是二元运算。

(2) $*$在 R 上满足交换律，结合律吗？

解：因 $a * b = b * a$，满足交换律，

$(a * b) * c = a * (b * c)$，满足结合律。

例6、在实数集 R 上定义运算$*$如下：$\forall a, b \in R$

$$a * b = a + b + 2ab$$

(3) R关于$*$有幺元，零元吗？

解： 因对 $\forall a \in R$，$a * 0 = 0 * a = a$，

故0为幺元，

因 $a * (-\frac{1}{2}) = (-\frac{1}{2}) * a = -\frac{1}{2}$，

故 $-\frac{1}{2}$ 为零元。

例6、在实数集 R 上定义运算$*$如下：$\forall a, b \in R$

$$a * b = a + b + 2ab$$

(4) R关于$*$每个元素有逆元吗？

解： $\forall a \in R$ 且 $a \neq -\frac{1}{2}$，有

$$\left(-\frac{a}{1+2a}\right) * a = a * \left(-\frac{a}{1+2a}\right) = 0$$

故 $a \neq -\frac{1}{2}$ 时，$a^{-1} = -\frac{a}{1+2a}$，$a = -\frac{1}{2}$ 时，无逆元。

例7、设 $A=\{a,b,c,d\}$，二元运算$\circ$和$*$如下表定义，问运算$\circ$和$*$是否可交换的；是否有零元；是否有幺元；如果有幺元，指出哪些元素有逆元；逆元是什么？

(1)

$\circ$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

解： 运算$\circ$可交换，没有零元，a是幺元，

a,b,c,d都有逆元，且$a^{-1}=a$，$c^{-1}=c$

b,d互为逆元。

(2)

*	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	b	c	d
c	d	c	a	b
d	d	d	c	c

解： 运算$*$不可交换，a是左零元，b是幺元，只有b有逆元，$b^{-1}=b$，由于$c*d=b$，故c是d的左逆元，d是c的右逆元，

(2)

*	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	b	c	d
c	d	c	a	b
d	d	d	c	c

解： 但它们的逆元都不存在。

四、其它一些运算律和特殊元素。(了解)

1、设$\circ$和$*$都是S上的可交换的二元运算，

若$\forall x, y \in S$，

$$x*(x\circ y)=x$$

$$x\circ(x*y)=x$$

则称$\circ$和$*$满足**吸收律**。

四、其它一些运算律和特殊元素。(了解)

2、设$\circ$是 S上的二元关系，

若 $\forall x, y, z \in S$ (x 不是零元)

满足：(1) 若 $x \circ y = x \circ z$ ，则$y = z$

(2) 若 $y \circ x = z \circ x$ ，则$y = z$

就称运算$\circ$满足**消去律**。

四、其它一些运算律和特殊元素。(了解)

3、幂等元。

设$\circ$是S上的二元运算，对 $x \in S$，

若$x \circ x = x$，则称x为**幂等元**。

若S上所有元素都是幂等元，

则称运算$\circ$满足**幂等律**。

例如：$P(S)$ 上的运算$\bigcap$和$\bigcup$，全体命题公式集合上的运算 $\vee$ 和 $\wedge$ 都满足吸收律，又分别满足幂等律，但都不满足消去律 (如 $A \bigcap B = A \bigcap C$，不一定有 $B = C$)。

N, Z, Q, R 上的加法运算都不满足幂等律，

但它们都有幂等元，幺元就是幂等元。

第二节　代数系统及其子代数和积代数

内容：代数系统，子代数，积代数。

重点：掌握代数系统，

子代数的有关概念。

了解：积代数的概念。

一、代数系统。

1、**定义：** 非空集合S和S上的k个运算

$f_1, f_2, \cdots, f_k$ (其中f_i为n_i元运算，$i = 1, 2, \cdots, k$)

组成的系统称为一个**代数系统**，简称**代数**，

记作$\langle S, f_1, f_2, \cdots, f_k \rangle$。

例如：$\langle N, + \rangle$，$\langle Z, +, \bullet \rangle$，$\langle R, +, \bullet \rangle$，$\langle M_n(R), +, \bullet \rangle$，

$\langle P(S), \cup, \cap, \sim \rangle$都是代数系统。

2、代数常数 (特异元素)。

在某些代数系统中对于给定的二元运算存在幺元或零元，它们对该系统的性质起着重要作用，称为**代数常数(特异元素)**。

例如：$\langle Z,+\rangle$的幺元0，也可记为$\langle Z,+,0\rangle$，$\langle P(S),\cup,\cap,\sim\rangle$中$\cup$和$\cap$的幺元分别为$\phi$和$S$，同样可记为$\langle P(S),\cup,\cap,\sim,\phi,S\rangle$。

二、子代数系统。

1、**定义**：设 $V=\langle S,f_1,f_2,\cdots,f_k\rangle$ 是代数系统，$B\subseteq S$ 且 $B\neq\phi$，若 B 对运算 $f_1,f_2,\cdots,f_k$ 都是封闭的，且 B 和 S 含有相同的代数常数，则称 $\langle B,f_1,f_2,\cdots,f_k\rangle$ 为 V 的**子代数系统**，简称**子代数**。

例如：$\langle N,+\rangle$是$\langle Z,+\rangle$的子代数，

$\langle N,+,0\rangle$是$\langle Z,+,0\rangle$的子代数，

但$\langle N-\{0\},+\rangle$是$\langle Z,+\rangle$的子代数，

却不是$\langle Z,+,0\rangle$的子代数，

因代数常数$0\notin N-\{0\}$。

2、平凡子代数，真子代数。

设$V'=\langle B, f_1, f_2, \cdots, f_k \rangle$是代数系统

$V=\langle S, f_1, f_2, \cdots, f_k \rangle$的子代数，当$B=S$和

$B=\{V$中的代数常数$\}$时，称为**平凡子代数**

(分别是最大和最小的子代数)，

当$B \subset S$时，称V'为V的**真子代数**。

例1、设 $V=\langle Z,+,0\rangle$，令

$nZ=\{nz|z\in Z\}$，n 为自然数，

那么$\langle nZ,+,0\rangle$是V的子代数。

证明： $\forall nz_1,nz_2\in nZ$，$z_1,z_2\in Z$，则

$$nz_1+nz_2=n(z_1+z_2)\in nZ$$

即 nZ 对+封闭，又$0=n\bullet 0\in nZ$，所以

$\langle nZ,+,0\rangle$是V的子代数。

例1、设 $V=\langle Z,+,0\rangle$，令

$nZ=\{nz \mid z\in Z\}$，n 为自然数，

那么 $\langle nZ,+,0\rangle$ 是 V 的子代数。

证明： 当 $n=1$ 时，$nZ=Z$，

当 $n=0$ 时，$0Z=\{0\}$，

它们是 V 的平凡子代数，而其它的子代数都是 V 的非平凡的真子代数。

例1、设 $V=\langle Z,+,0\rangle$，令

$nZ=\{nz \mid z\in Z\}$，n 为自然数，

那么 $\langle nZ,+,0\rangle$ 是 V 的子代数。

当 $n=1$ 时，$nZ=Z$，

当 $n=0$ 时，$0Z=\{0\}$，

它们是 V 的平凡子代数，而其它的子代数都是 V 的非平凡的真子代数。

三、积代数。

设 $V_1=\langle S_1,\circ\rangle$，$V_2=\langle S_2,*\rangle$ 是代数系统，

其中 $\circ$ 和 $*$ 是二元运算，

令 $S=S_1\times S_2$，对 $\forall\langle x_1,y_1\rangle,\langle x_2,y_2\rangle\in S_1\times S_2$

$$\langle x_1,y_1\rangle\bullet\langle x_2,y_2\rangle=\langle x_1\circ x_2,y_1*y_2\rangle$$

则 $\langle S,\bullet\rangle$ 为代数系统，称为 V_1,V_2 的**积代数**，

记 $V_1\times V_2$ 。

例如：$V_1=\langle Z,+\rangle$， $V_2=\langle M_3(R),\bullet\rangle$，

V_1和V_2的积代数为$V_1\times V_2=\langle Z\times M_3(R),\circ\rangle$，

其中运算$\circ$为二元运算，

对$\forall\langle z_1,M_1\rangle,\langle z_2,M_2\rangle\in Z\times M_3(R)$

$$\langle z_1,M_1\rangle\circ\langle z_2,M_2\rangle=\langle z_1+z_2,M_1\bullet M_2\rangle$$

例如：$V_1=\langle Z,+\rangle$，$V_2=\langle M_3(R),\bullet\rangle$，

V_1和V_2的积代数为$V_1\times V_2=\langle Z\times M_3(R),\circ\rangle$，

V_1有代数常数0，V_2有代数常数$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，

$V_1\times V_2$有代数常数$\left\langle 0,\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\right\rangle$。

第五章 小结与例题

一、二元运算及其性质。

1、基本概念。

一元运算和二元运算；二元运算的结合律，交换律，分配律，幂等律，吸收律，消去律；二元运算的特殊元素：幺元，零元，逆元；一元运算和二元运算的运算表。

一、二元运算及其性质。

2、运用。

(1) 判断给定的二元运算是否满足结合律，交换律，分配律，幂等律，吸收律，消去律等。

(2) 求幺元，零元，逆元。

(3) 列出一元运算和二元运算的运算表。

二、代数系统及其子代数和积代数。

1、基本概念。

代数系统；子代数；积代数。

2、运用。

判断代数系统的子集能否构成子代数系统。

例1、数的加，减，乘，除是否为下述集合上的二元运算。

(1) 实数集 R

解：加、减、乘是二元运算，除不是二元运算。

(2) 非零实数集 $R^* = R - \{0\}$

解：加、减不是二元运算，乘、除是二元运算。

例1、数的加，减，乘，除是否为下述集合上的二元运算。

(3) 正整数集 Z^+

解：加、乘是二元运算，减、除不是二元运算。

(4) $A = \left\{ 2n+1 \middle| n \in Z \right\}$

解：乘是二元运算，加、减、除都不是二元运算。

例1、 数的加，减，乘，除是否为下述集合上的二元运算。

(5) $B = \left\{ 2^n \middle| n \in Z \right\}$

解： 乘、除是二元运算，

加、减不是二元运算。

例2、 正整数集 Z^+ 上的二元运算 $*$ 表示两个数的最小公倍数。

(1) 求 $4*6$　　　**解：** $4*6=12$

(2) 问 $*$ 在 Z^+ 上满足交换律，结合律，幂等律吗？

解： 因对任意的正整数 x,y,z

有 $x*y=y*x$，$(x*y)*z=x*(y*z)$，$x*x=x$

故 $*$ 满足交换律，结合律，幂等律。

例2、 正整数集 Z^+上的二元运算 $*$表示两个数的最小公倍数。

(3) 求幺元，零元。

解： 因 $x*1=1*x=x$ ，故1是幺元，

不存在零元。

(4) Z^+中任意元都有逆元吗？

解： Z^+中只有1有逆元，其它元素都没有逆元。

例3、在有理数集 Q上定义二元运算$*$，

$\forall x, y \in Q$ 有 $x * y = x + y - xy$

(1) 求$2 * (-5)$，$7 * \dfrac{1}{2}$

解：$2 * (-5) = 2 + (-5) - 2 \times (-5) = 7$

$$7 * \frac{1}{2} = 7 + \frac{1}{2} - 7 \times \frac{1}{2} = 4$$

例3、在有理数集 Q上定义二元运算$*$，

$$\forall x, y \in Q \text{ 有 } x * y = x + y - xy$$

(2) $*$在 Q 上满足结合律吗？

解：对任意的 $x, y, z \in Q$

$$(x * y) * z = x + y + z - xy - xz - yz + xyz$$

$$x * (y * z) = x + y + z - xy - xz - yz + xyz$$

故$*$满足结合律。

例3、在有理数集 Q上定义二元运算$*$，

$$\forall x, y \in Q \text{ 有 } x * y = x + y - xy$$

(3) 求幺元。

解：对任意的$x \in Q$

$$x * 0 = x + 0 - x \bullet 0 = x$$

$$0 * x = 0 + x - 0 \bullet x = x$$

故0是幺元。

例3、在有理数集 Q上定义二元运算$*$，

$$\forall x, y \in Q \text{ 有 } x * y = x + y - xy$$

(4) Q 中哪些元素存在逆元？

解：对任意的$x \in Q$，设x^{-1}是x的逆元，则

$$0 = x * x^{-1} = x + x^{-1} - x \bullet x^{-1}$$

解得：$x^{-1} = \dfrac{x}{x-1} \quad (x \neq 1)$

即 $x \neq 1$时，有逆元 $\dfrac{x}{x-1}$

例4、如下定义实数集R上的二元运算$*$，判断是否可交换，可结合？是否有幺元？若有幺元，指出R中哪些元素有逆元？

(1) $x*y=|x-y|$

解：可交换；但不可结合，

如：$(1*2)*3=||1-2|-3|=2$，

而 $1*(2*3)=|1-|2-3||=0$，

即$(1*2)*3\neq 1*(2*3)$；无幺元。

例4、如下定义实数集R上的二元运算$*$，判断是否可交换，可结合？是否有幺元？若有幺元，指出R中哪些元素有逆元？

(2) $x * y = \sqrt{x^2 + y^2}$

解：可交换，

可结合，

无幺元。

例4、如下定义实数集R上的二元运算$*$，判断是否可交换，可结合？是否有幺元？若有幺元，指出R中哪些元素有逆元？

(3) $x*y=x+2y$

解：不可交换，

如$2*1=2+2=4$，$1*2=1+4=5$

即$2*1\neq 1*2$。

例4、如下定义实数集R上的二元运算$*$，判断是否可交换，可结合？是否有幺元？若有幺元，指出R中哪些元素有逆元？

(3) $x*y=x+2y$

解：不可结合，

如$1*(2*3)=17$，$(1*2)*3=11$

即$1*(2*3)\neq(1*2)*3$，

无幺元。

例4、如下定义实数集R上的二元运算$*$，判断是否可交换，可结合？是否有幺元？若有幺元，指出R中哪些元素有逆元？

(4) $x*y=\frac{1}{2}(x+y)$

解：可交换，不可结合，

如$(2*4)*6=4\frac{1}{2}$，$2*(4*6)=3\frac{1}{2}$

即$(2*4)*6\neq 2*(4*6)$，无幺元。

例5、设 $V_1=\langle S_1,\circ\rangle$，$V_2=\langle S_2,*\rangle$，其中

$S_1=\{a,b,c,d\}$，$S_2=\{0,1,2,3\}$，$*$和$\circ$如下：

$\circ$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	b	d	d
c	c	d	c	d
d	d	d	d	d

(1) V_1满足交换律吗?

解： 由于运算表关于主对角线对称，

所以$\circ$是可交换的。

例5、设 $V_1 = \langle S_1, \circ \rangle$，$V_2 = \langle S_2, * \rangle$，其中

$S_1 = \{a, b, c, d\}$，$S_2 = \{0, 1, 2, 3\}$，$*$和$\circ$如下：

$\circ$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	b	d	d
c	c	d	c	d
d	d	d	d	d

(2) V_1有幺元、零元吗？

解： V_1有幺元a，零元d。

例5、设 $V_1=\langle S_1,\circ\rangle$，$V_2=\langle S_2,*\rangle$，其中 $S_1=\{a,b,c,d\}$，$S_2=\{0,1,2,3\}$，$*$和$\circ$如下：

$\circ$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	b	d	d
c	c	d	c	d
d	d	d	d	d

(3) 设$A_1=\{b,d\}$，$A_2=\{b,c\}$，$A_3=\{a,c,d\}$，问$\langle A_1,\circ\rangle$，$\langle A_2,\circ\rangle,\langle A_3,\circ\rangle$是否为代数系统$V_1$的子代数？

解：由于 A_1,A_2,A_3 都是S_1的非空子集，其中A_1,A_3对运算$\circ$是封闭的，故$\langle A_1,\circ\rangle$，$\langle A_3,\circ\rangle$是V_1的子代数。

例5、设 $V_1=\langle S_1,\circ\rangle$，$V_2=\langle S_2,*\rangle$，其中 $S_1=\{a,b,c,d\}$，$S_2=\{0,1,2,3\}$，$*$和$\circ$如下：

$\circ$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	b	d	d
c	c	d	c	d
d	d	d	d	d

(3) 设$A_1=\{b,d\}$，$A_2=\{b,c\}$，$A_3=\{a,c,d\}$，问$\langle A_1,\circ\rangle$，$\langle A_2,\circ\rangle$，$\langle A_3,\circ\rangle$是否为代数系统V_1的子代数？

解：但A_2对运算$\circ$不封闭，

如$b\circ c=d\notin A_2$，故$\langle A_2,\circ\rangle$不是V_1的子代数。