第二章 命题逻辑等值演算

主要内容

2.1 等值式

等值演算与置换规则

2.2 析取范式与合取范式

主析取范式与主合取范式

2.3 联结词完备集

2.1 等值式

定义2.1 若等价式$A \leftrightarrow B$是重言式，则称A与B**等值**，记作$A \Leftrightarrow B$，并称$A \Leftrightarrow B$是**等值式**

也可称为 A与B**逻辑等价**，$A \Leftrightarrow B$是**逻辑等价式**

几点说明：

1. 定义中$\Leftrightarrow$不是联结符，为元语言符号，它表示的命题公式间的一种关系；

2. A或B中可能有哑元出现；

例如 $(p \to q) \Leftrightarrow ((\neg p \vee q) \vee (\neg r \wedge r))$ r为左边公式的哑元.

3. 如何检验两个命题公式是否等值呢？

真值表是其中的一种方法，可检查两个公式是否等值.

真值表检验等值

例1： 判断下列各组公式是否等值:

(1) $p \to (q \to r)$ 与 $(p \wedge q) \to r$

真值表检验等值

p q r	$q\to r$	$p\to(q\to r)$	$p\wedge q$	$(p\wedge q)\to r$
0 0 0	1	1	0	1
0 0 1	1	1	0	1
0 1 0	0	1	0	1
0 1 1	1	1	0	1
1 0 0	1	1	0	1
1 0 1	1	1	0	1
1 1 0	0	0	1	0
1 1 1	1	1	1	1

结论：$p\to(q\to r) \Leftrightarrow (p\wedge q) \to r$

等值式例题

(2) $p\rightarrow(q\rightarrow r)$ 与 $(p\rightarrow q)\rightarrow r$

等值式例题

$p\ \ q\ \ r$	$q\to r$	$p\to(q\to r)$	$p\to q$	$(p\to q)\to r$
0 0 0	1	1	1	0
0 0 1	1	1	1	1
0 1 0	0	1	1	0
0 1 1	1	1	1	1
1 0 0	1	1	0	1
1 0 1	1	1	0	1
1 1 0	0	0	1	0
1 1 1	1	1	1	1

结论：$p\to(q\to r)$ 与 $(p\to q)\to r$ 不等值

等值式例题

小结：等值体现了两个命题公式之间的一种关系：在任何赋值状况下，它们都等值。（即使得*A*成真的，*B*也成真；*A*为假的，*B*也为假。）

下面我们来看一些重要的等价式，其中*A*,*B*,*C*为任意的命题公式

基本等值式

- 双重否定律 $\neg\neg A \Leftrightarrow A$
- 幂等律 $A \vee A \Leftrightarrow A$, $A \wedge A \Leftrightarrow A$
- 交换律 $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$, $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$
- 结合律 $(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$, $(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$
- 分配律 $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$,

  $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
- 德摩根律 $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

  $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$
- 吸收律 $A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$, $A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$

基本等值式

- 零律　$A\vee 1\Leftrightarrow 1$，$A\wedge 0\Leftrightarrow 0$
- 同一律　$A\vee 0\Leftrightarrow A$．$A\wedge 1\Leftrightarrow A$
- 排中律　$A\vee\neg A\Leftrightarrow 1$
- 矛盾律　$A\wedge\neg A\Leftrightarrow 0$
- 蕴涵等值式　$A\rightarrow B\Leftrightarrow\neg A\vee B$
- 等价等值式　$A\leftrightarrow B\Leftrightarrow(A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A)$
- 假言易位　$A\rightarrow B\Leftrightarrow\neg B\rightarrow\neg A$
- 等价否定等值式　$A\leftrightarrow B\Leftrightarrow\neg A\leftrightarrow\neg B$
- 归谬论　$(A\rightarrow B)\wedge(A\rightarrow\neg B)\Leftrightarrow\neg A$

特别提示：必须牢记这16组等值式，这是继续学习的基础

等值演算与置换规则

1. 等值演算——由已知的等值式推演出新的等值式的过程

2. 置换规则 (Rule of Replacement)

设 $\Phi(A)$ 是含公式 A 的命题公式，$\Phi(B)$ 是用公式 B 置换 $\Phi(A)$ 中所有的 A 后得到的命题公式。

$$\text{若 } B\Leftrightarrow A\text{，则 } \Phi(B)\Leftrightarrow\Phi(A)$$

3. 代入规则 (Rule of Substitution)

将重言式A中的某个命题变元p的所有出现都代换为命题公式B，得到的命题公式记作$A(B/p)$，则$A(B/p)$也是重言式.

代入规则与置换规则

小结：代入原理与替换原理的区别

	代入原理	替换原理
使用对象	任意永真式	任意命题公式
代换对象	任意命题变元	任意子公式
代换物	任意命题公式	任意与代换对象等值的公式
代换方式	代换同一命题变元的所有出现	代换子公式的某些出现
代换结果	仍为永真式	与原公式等值

等值演算的应用举例

证明两个公式等值

例2：　证明 $p\to(q\to r)\Leftrightarrow(p\wedge q)\to r$

证：　$p\to(q\to r)$

$\Leftrightarrow\neg p\vee(\neg q\vee r)$　（蕴涵等值式，置换规则）

$\Leftrightarrow(\neg p\vee\neg q)\vee r$　（结合律，置换规则）

$\Leftrightarrow\neg(p\wedge q)\vee r$　（德摩根律，置换规则）

$\Leftrightarrow(p\wedge q)\to r$　（蕴涵等值式，置换规则）

今后在注明中省去置换规则

注意：用等值演算不能直接证明两个公式不等值

等值演算的应用举例

证明两个公式不等值

例3： 证明 $p\to(q\to r)$ 与 $(p\to q)\to r$ 不等值

证　方法一 真值表法, 见例1(2)

方法二 观察法. 观察到000, 010是左边的成真赋值，是右边的成假赋值

方法三 先用等值演算化简公式，然后再观察

$$p\to(q\to r)\Leftrightarrow\neg p\vee\neg q\vee r$$

$$(p\to q)\to r\Leftrightarrow\neg(\neg p\vee q)\vee r\Leftrightarrow(p\wedge\neg q)\vee r$$

核心： 找出这样的赋值，使得分别是左边的成真赋值和右边的成假赋值

等值式的证明

小结：证明等值式的方法：

（1）真值表法 .（当公式规模比较大时，真值表会很大）

（2）推演法：利用已知的重言式，采用代入原理和替换原理进行推演.(需要大家非常熟练16个常用的重言式)

证明两个命题公式不是等值式，则可以讨论两个公式的赋值情况.

判断公式类型

判断公式类型: A为矛盾式当且仅当$A \Leftrightarrow 0$

A为重言式当且仅当$A \Leftrightarrow 1$

例4: 用等值演算法判断下列公式的类型

(1) $q \wedge \neg(p \rightarrow q)$

(2) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$

(3) $((p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)) \wedge r)$

判断公式类型

解 (1) $q\wedge\neg(p\rightarrow q)$

$\Leftrightarrow q\wedge\neg(\neg p\vee q)$ （蕴涵等值式）

$\Leftrightarrow q\wedge(p\wedge\neg q)$ （德摩根律）

$\Leftrightarrow p\wedge(q\wedge\neg q)$ （交换律，结合律）

$\Leftrightarrow p\wedge 0$ （矛盾律）

$\Leftrightarrow 0$ （零律）

矛盾式

判断公式类型

(2) $(p\to q)\leftrightarrow(\neg q\to\neg p)$

$\Leftrightarrow (\neg p\vee q)\leftrightarrow(q\vee\neg p)$ （蕴涵等值式）

$\Leftrightarrow (\neg p\vee q)\leftrightarrow(\neg p\vee q)$ （交换律）

$\Leftrightarrow 1$

重言式

(3) $((p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q))\wedge r)$

$\Leftrightarrow (p\wedge(q\vee\neg q))\wedge r$ （分配律）

$\Leftrightarrow p\wedge 1\wedge r$ （排中律）

$\Leftrightarrow p\wedge r$ （同一律）

可满足式，101和111是成真赋值，000和010等是成假赋值.

综合实例

例5：（综合实例） 在某次研讨会的中间休息时间，3名与会者根据王教授的口音对他是哪个省市的人进行判断如下：

甲：王教授不是苏州人，是上海人；

乙：王教授不是上海人，是苏州人；

丙：王教授既不是上海人，也不是杭州人。

听完3人的判断后，王教授笑着说，你们3人中有1人说得全队，有1人说对了一半，另一人说得全不对。试用逻辑演算分析王教授到底是哪里人

课后习题

P42:

2; 3; 4(3,4).