

7.4 关系的性质

定义7.11 设 R 为 A 上的关系,

- (1) 若 $\forall x(x \in A \rightarrow \langle x, x \rangle \in R)$, 则称 R 在 A 上是**自反(Reflexive)**的.
- (2) 若 $\forall x(x \in A \rightarrow \langle x, x \rangle \notin R)$, 则称 R 在 A 上是**反自反(Irreflexive)**的.

实例:

自反: 全域关系 E_A , 恒等关系 I_A , 小于等于关系 L_A , 整除关系 D_A

反自反: 实数集上的小于关系、幂集上的真包含关系.

$A = \{1, 2, 3\}$, R_1, R_2, R_3 是 A 上的关系, 其中

$$R_1 = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle\}$$

$$R_2 = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 1, 2 \rangle\}$$

$$R_3 = \{\langle 1, 3 \rangle\}$$

R_2 自反, R_3 反自反, R_1 既不是自反的也不是反自反的.



对称性与反对称性

定义7.12 设 R 为 A 上的关系,

(1) 若 $\forall x \forall y (x, y \in A \wedge \langle x, y \rangle \in R \rightarrow \langle y, x \rangle \in R)$, 则称 R 为 A 上**对称(Symmetric)**的关系.

(2) 若 $\forall x \forall y (x, y \in A \wedge \langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, x \rangle \in R \rightarrow x = y)$, 则称 R 为 A 上的**反对称(Antisymmetric)**关系.

实例: 对称关系: A 上的全域关系 E_A , 恒等关系 I_A 和空关系 \emptyset

反对称关系: 恒等关系 I_A 和空关系也是 A 上的反对称关系.

设 $A = \{1, 2, 3\}$, R_1, R_2, R_3 和 R_4 都是 A 上的关系, 其中

$$R_1 = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle\}, \quad R_2 = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle\}$$

$$R_3 = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle\}, \quad R_4 = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 1, 3 \rangle\}$$

R_1 : 对称和反对称;

R_2 : 只有对称;

R_3 : 只有反对称;

R_4 : 不对称、不反对称

定义7.13 设 R 为 A 上的关系, 若

$$\forall x \forall y \forall z (x, y, z \in A \wedge \langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, z \rangle \in R \rightarrow \langle x, z \rangle \in R),$$

则称 R 是 A 上的**传递(Transitive)**关系.

实例: A 上的全域关系 E_A , 恒等关系 I_A 和空关系 \emptyset , 小于等于和小于关系, 整除关系, 包含与真包含关系

设 $A = \{1, 2, 3\}$, R_1, R_2, R_3 是 A 上的关系, 其中

$$R_1 = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle\}$$

$$R_2 = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle\}$$

$$R_3 = \{\langle 1, 3 \rangle\}$$

R_1 和 R_3 是 A 上的传递关系,

R_2 不是 A 上的传递关系.

关系的实例：

1. 空关系， $R=\{<1,2>, <1,3>\}$ 也是传递的，因为他们使得前件为假；
2. 对于所有非空集合，下面三种特殊的关系：

空关系：

反自反，对称，反对称，传递性

全关系：

自反，对称，传递

相等关系：

自反，对称，反对称，传递

关系性质成立的充要条件



定理7.9 设 R 为 A 上的关系, 则

- (1) R 在 A 上自反当且仅当 $I_A \subseteq R$
- (2) R 在 A 上反自反当且仅当 $R \cap I_A = \emptyset$
- (3) R 在 A 上对称当且仅当 $R = R^{-1}$
- (4) R 在 A 上反对称当且仅当 $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$
- (5) R 在 A 上传递当且仅当 $R \circ R \subseteq R$

证明 只证(1)、(3)、(4)、(5)

(1) 必要性

任取 $\langle x, y \rangle$, 由于 R 在 A 上自反必有

$$\langle x, y \rangle \in I_A \Rightarrow x, y \in A \wedge x = y \Rightarrow \langle x, y \rangle \in R$$

从而证明了 $I_A \subseteq R$

充分性.

任取 x , 有

$$x \in A \Rightarrow \langle x, x \rangle \in I_A \Rightarrow \langle x, x \rangle \in R$$

因此 R 在 A 上是自反的.

(3) 必要性.

任取 $\langle x, y \rangle$,

$$\langle x, y \rangle \in R \Leftrightarrow \langle y, x \rangle \in R \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in R^{-1}$$

所以 $R = R^{-1}$

充分性.

任取 $\langle x, y \rangle$, 由 $R = R^{-1}$ 得

$$\langle x, y \rangle \in R \Rightarrow \langle y, x \rangle \in R^{-1} \Rightarrow \langle y, x \rangle \in R$$

所以 R 在 A 上是对称的

(4) 必要性. 任取 $\langle x, y \rangle$, 有

$$\langle x, y \rangle \in R \cap R^{-1}$$

$$\Rightarrow \langle x, y \rangle \in R \wedge \langle x, y \rangle \in R^{-1}$$

$$\Rightarrow \langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, x \rangle \in R$$

$$\Rightarrow x=y \wedge x, y \in A$$

$$\Rightarrow \langle x, y \rangle \in I_A$$

这就证明了 $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$

(4)充分性.

任取 $\langle x, y \rangle$,

$$\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, x \rangle \in R$$

$$\Rightarrow \langle x, y \rangle \in R \wedge \langle x, y \rangle \in R^{-1}$$

$$\Rightarrow \langle x, y \rangle \in R \cap R^{-1}$$

$$\Rightarrow \langle x, y \rangle \in I_A$$

$$\Rightarrow x=y$$

从而证明了 R 在 A 上是反对称的.

(5) 必要性.

任取 $\langle x, y \rangle$ 有

$$\langle x, y \rangle \in R \circ R$$

$$\Rightarrow \exists t (\langle x, t \rangle \in R \wedge \langle t, y \rangle \in R)$$

$$\Rightarrow \langle x, y \rangle \in R$$

所以 $R \circ R \subseteq R$

充分性.

任取 $\langle x, y \rangle, \langle y, z \rangle \in R$, 则

$$\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, z \rangle \in R$$

$$\Rightarrow \langle x, z \rangle \in R \circ R \Rightarrow \langle x, z \rangle \in R$$

所以 R 在 A 上是传递的

关系性质的三种等价条件



	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
集合	$I_A \subseteq R$	$R \cap I_A = \emptyset$	$R = R^{-1}$	$R \cap R^{-1} \subseteq I_A$	$R \circ R \subseteq R$
关系矩阵	主对角线元素全是1	主对角线元素全是0	矩阵是对称矩阵	若 $r_{ij}=1$, 且 $i \neq j$, 则 $r_{ji}=0$	M^2 中1位置, M 中相应位置都是1
关系图	每个顶点都有环	每个顶点都没有环	两点之间有边, 是一对方向相反的边	两点之间有边, 是一条有向边	点 x_i 到 x_j 有边, x_j 到 x_k 有边, 则 x_i 到 x_k 也有边

关系性质的运算封闭性

1. 如何理解运算的封闭性？

举例： 加法和乘法运算对于自然数集是封闭的；
减法对于整数集是封闭的；
除法对于非零的有理数集是封闭的；

2. 关系的这些性质，对于集合的交、并、差、补、逆和合成这些运算具有封闭性吗？

关系性质的运算封闭性

	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
R_1^{-1}	√	√	√	√	√
$R_1 \cap R_2$	√	√	√	√	√
$R_1 \cup R_2$	√	√	√	×	×
$R_1 - R_2$	×	√	√	√	×
$R_1 \circ R_2$	√	×	×	×	×

下面选证部分结论.

关系性质的运算封闭性

1.对称性对于交运算封闭

证： 对称性， $xR_1 \cap R_2 y \Leftrightarrow xR_1 y \wedge xR_2 y \Leftrightarrow yR_1 x \wedge yR_2 x \Leftrightarrow yR_1 \cap R_2 x$

2.自反性对于并运算封闭

证： 自反性， $xR_1 x \Rightarrow xR_1 x \vee xR_2 x \Leftrightarrow xR_1 \cup R_2 x$ (并不要求 R_2 有自反性)

3.反对称对于差运算封闭

证： 反对称， $xR_1 - R_2 y \wedge yR_1 - R_2 x \Rightarrow xR_1 y \wedge yR_1 x \Rightarrow x=y$ (R_1 有反对称性)

4.传递性对于逆运算封闭

证： 传递， $xR_1^{-1} y \wedge yR_1^{-1} z \Leftrightarrow yR_1 x \wedge zR_1 y \Rightarrow zR_1 x \Leftrightarrow xR_1^{-1} z$

5.自反性对于合成运算封闭

证： 自反， $xR_1 x \wedge xR_2 x \Rightarrow xR_1 \circ R_2 x$



关系性质的运算封闭性

补充:

1.对称性对于补运算封闭

证: 反证法, $x \sim R_1 y$, 假设 $y \sim R_1 x$, 那么 $y R_1 x$, 则 $x R_1 y$, 与 $x \sim R_1 y$ 矛盾



课后习题

P140:

23 (做“传递性”)