第七章 二元关系

主要内容

- 有序对与笛卡儿积
- 二元关系的定义与表示法
- 关系的运算
- 关系的性质
- 关系的闭包
- 等价关系与划分
- 偏序关系

7.1 有序对与笛卡儿积

定义7.1 由两个元素 x 和 y，按照一定的顺序组成的二元组称为**有序对**，记作$<x,y>$.

有序对性质:

(1) 有序性 $<x,y> \neq <y,x>$ （当$x \neq y$时）

(2) $<x,y>$与$<u,v>$相等的充分必要条件是

$$<x,y> = <u,v> \Leftrightarrow x=u \wedge y=v.$$

笛卡儿积

定义7.2 设A,B为集合，A与B的**笛卡儿积**记作$A\times B$，且

$$A\times B = \{<x,y>|\ x\in A\wedge y\in B\}.$$

例1 $A=\{1,2,3\}$, $B=\{a,b,c\}$

$A\times B$

$=\{<1,a>,<1,b>,<1,c>,<2,a>,<2,b>,<2,c>,<3,a>,<3,b>,<3,c>\}$

$B\times A$

$=\{<a,1>,<b,1>,<c,1>,<a,2>,<b,2>,<c,2>,<a,3>,<b,3>,<c,3>\}$

$A=\{\varnothing\}$, $B=\varnothing$

$P(A)\times A = \{<\varnothing,\varnothing>, <\{\varnothing\},\varnothing>\}$

$P(A)\times B = \varnothing$

笛卡儿积的性质

(1) 不适合交换律

$$A\times B \neq B\times A \quad (A\neq B,\ A\neq\varnothing,\ B\neq\varnothing)$$

(2) 不适合结合律

$$(A\times B)\times C \neq A\times(B\times C) \quad (A\neq\varnothing,\ B\neq\varnothing,\ C\neq\varnothing)$$

(3) 对于并或交运算满足分配律

$$A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C) \qquad (B\cup C)\times A = (B\times A)\cup(C\times A)$$

$$A\times(B\cap C) = (A\times B)\cap(A\times C) \qquad (B\cap C)\times A = (B\times A)\cap(C\times A)$$

(4) 若 A 或 B 中有一个为空集，则 $A\times B$ 就是空集.

$$A\times\varnothing = \varnothing\times B = \varnothing$$

(5) 若 $|A| = m,\ |B| = n$, 则 $|A\times B| = mn$

性质证明

证明 $A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$

证： 任取$<x,y>$

$$
\begin{aligned}
& <x,y>\in A\times(B\cup C) \\
\Leftrightarrow\ & x\in A\wedge y\in B\cup C \\
\Leftrightarrow\ & x\in A\wedge(y\in B\vee y\in C) \\
\Leftrightarrow\ & (x\in A\wedge y\in B)\vee(x\in A\wedge y\in C) \\
\Leftrightarrow\ & <x,y>\in A\times B\vee <x,y>\in A\times C \\
\Leftrightarrow\ & <x,y>\in(A\times B)\cup(A\times C)
\end{aligned}
$$

所以有$A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$.

实例

例2

(1) 证明$A=B, C=D \Rightarrow A\times C=B\times D$

(2) $A\times C = B\times D$是否推出 $A=B, C=D$? 为什么？

解 (1) 任取$<x,y>$

$$
\begin{aligned}
&<x,y>\in A\times C \\
\Leftrightarrow\ & x\in A\wedge y\in C \\
\Leftrightarrow\ & x\in B\wedge y\in D \\
\Leftrightarrow\ & <x,y>\in B\times D
\end{aligned}
$$

(2) 不一定.反例如下：

$A=\{1\}$，$B=\{2\}$, $C = D = \varnothing$, 则$A\times C = B\times D$但是$A \neq B$.

课后习题

P139:

1