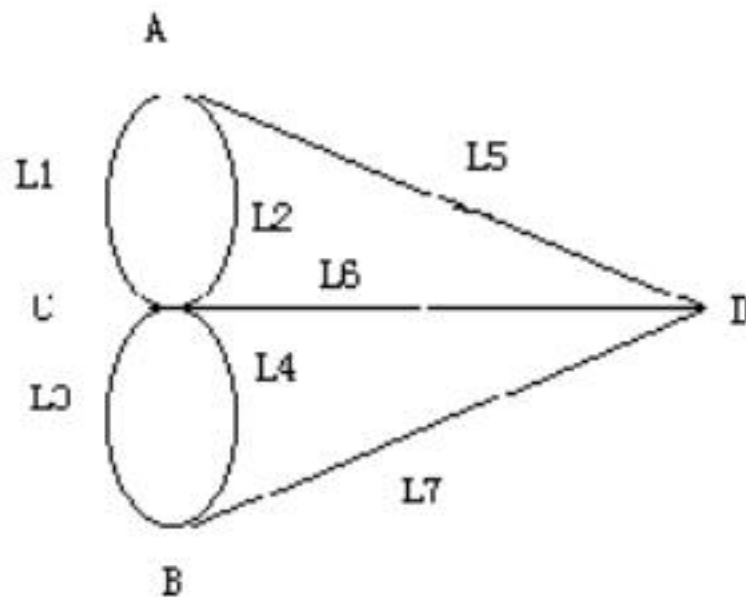
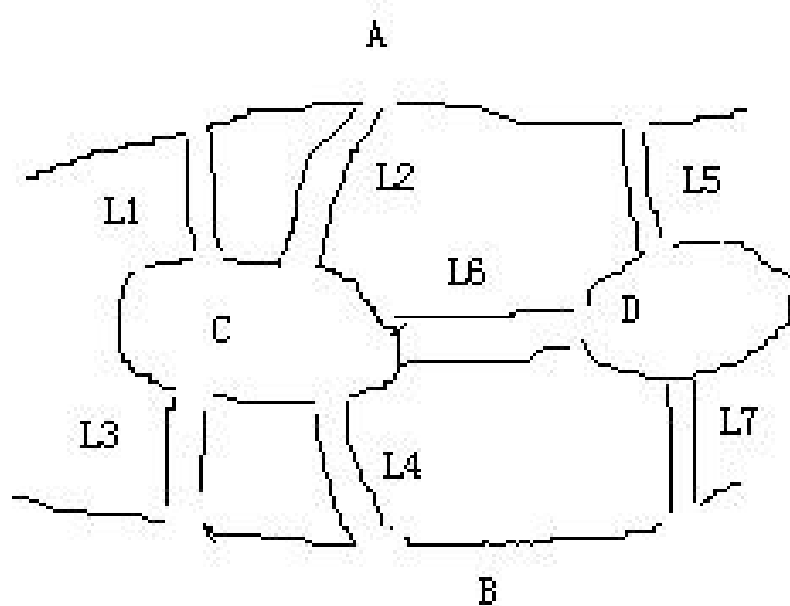


一、Euler图

哥尼斯堡七桥问题：



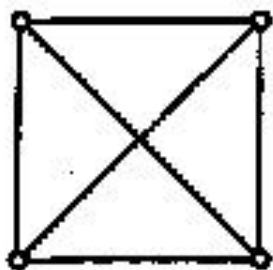


无向图的欧拉通路、欧拉图 (即一笔画问题)

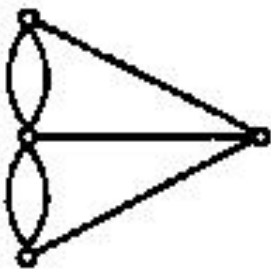
经过图中每条边一次且仅一次并且行遍图中每个顶点的通路(回路),称为**欧拉通路**或**欧拉回路**.

存在欧拉回路的图,称为**欧拉图**.

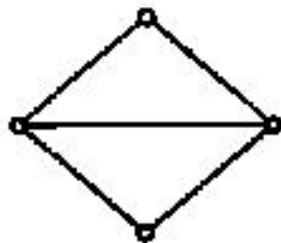




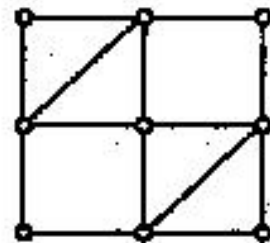
(1)



(2)

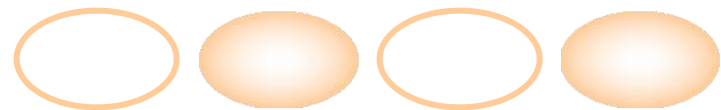


(3)



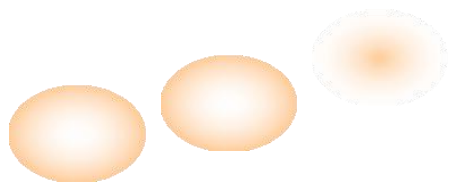
(4)

图中,(3) 不是欧拉图, (4) 是欧拉图.



定理 无向图 G 具有欧拉通路,当且仅当 G 是连通图且有零个或两个奇度顶点.若无奇度顶点,则通路为回路;若有两个奇度顶点,则它们是每条欧拉通路的端点.

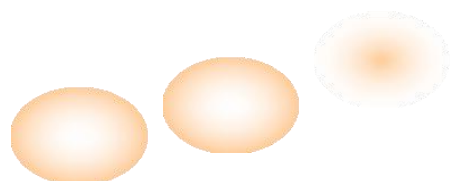
推论 无向图 G 为欧拉图(具有欧拉回路)当且仅当 G 是连通的,且 G 中无奇度顶点.

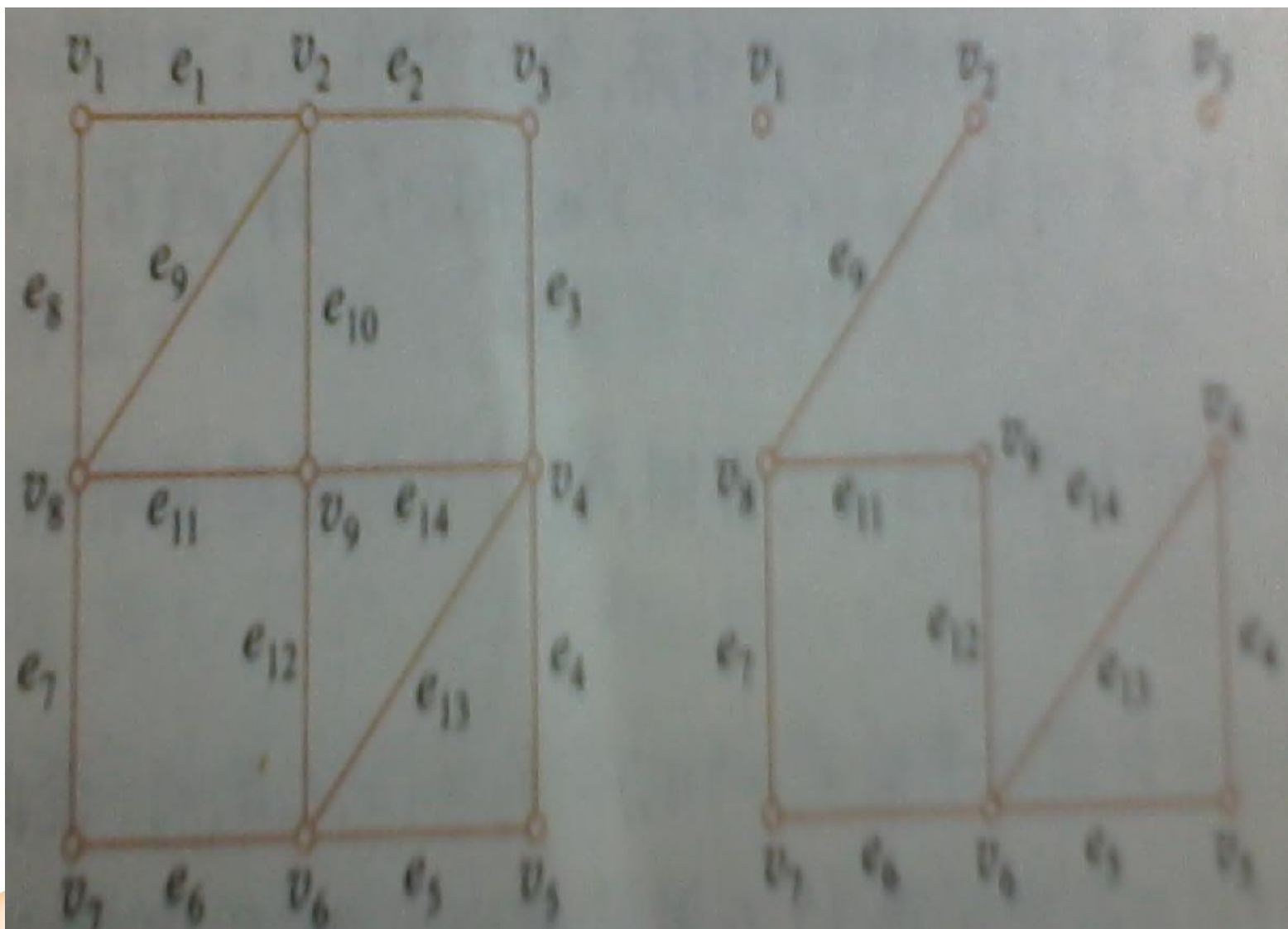
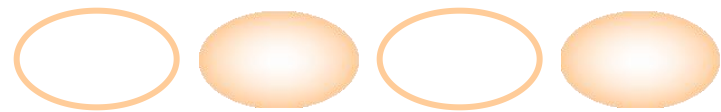


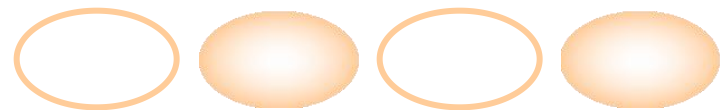


推论的证明(充分性):Fleury算法

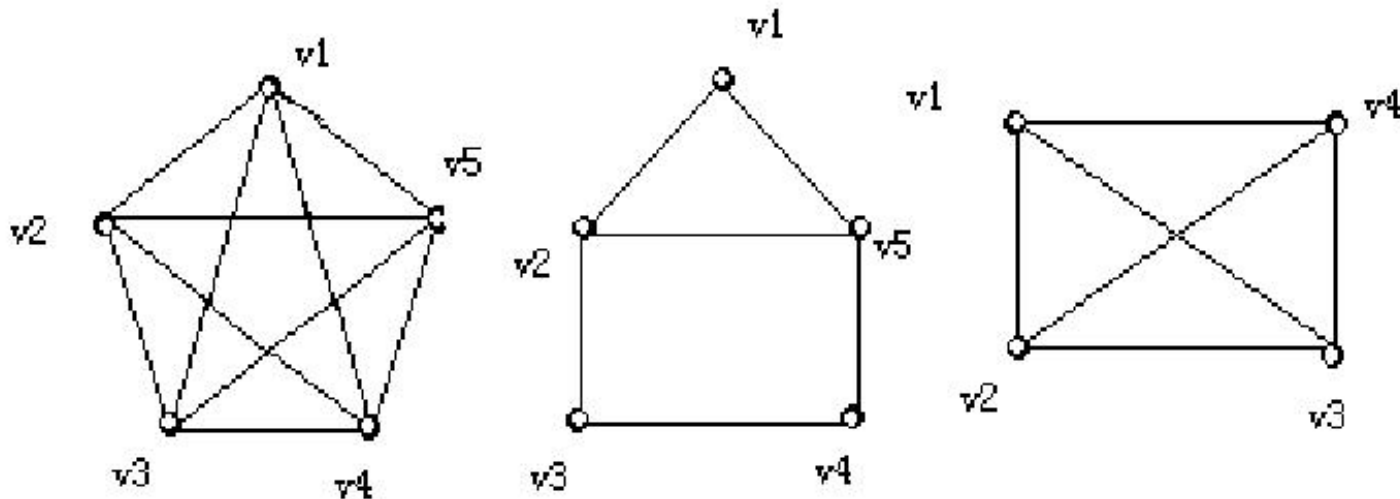
构造性证明

- 1.任取一个顶点
 - 2.寻找没有走过的并且不是余图的桥的关联边(除非别无选择),到达下一个顶点.
 - 3.重复2,直至无边可走.
- 

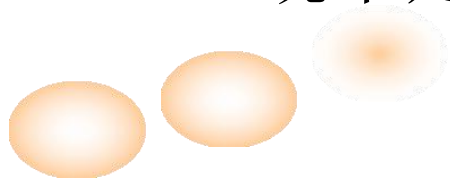




例

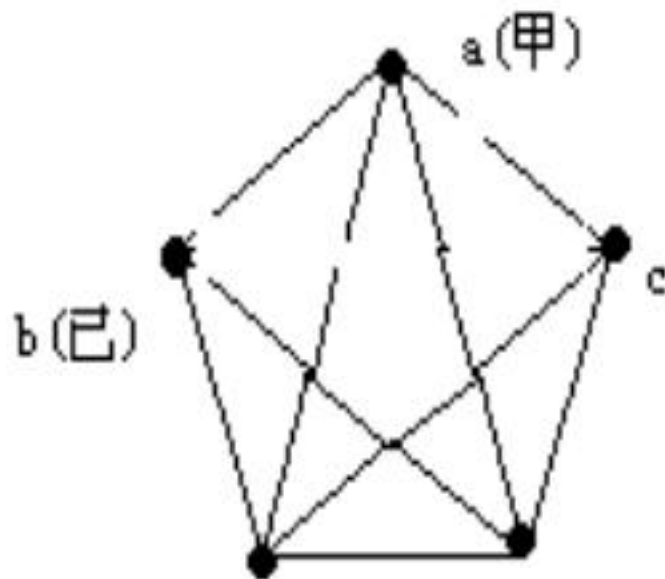


1. 是欧拉图;
2. 不是欧拉图, 但存在欧拉通路;
3. 既不是欧拉图, 也不存在欧拉通路。

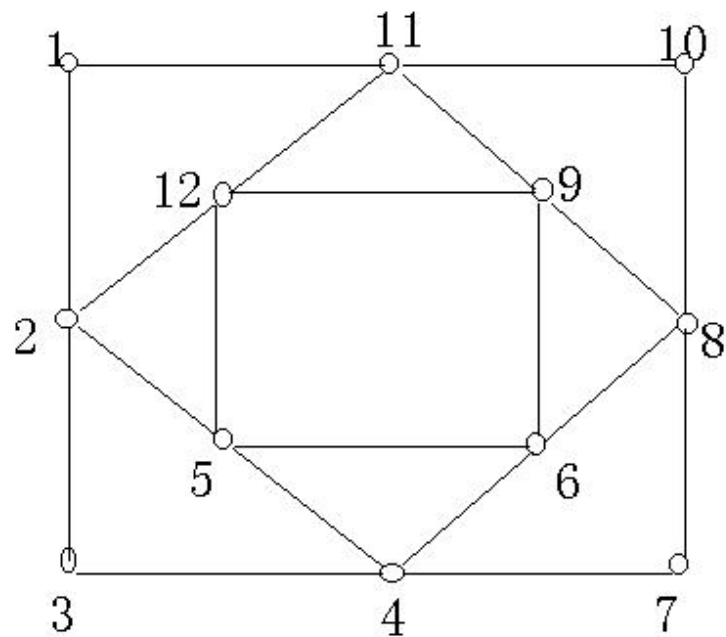


例(蚂蚁比赛问题)

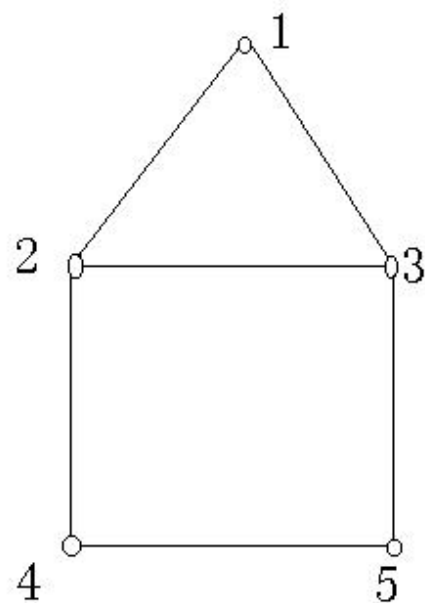
甲、乙两只蚂蚁分别位于如下图中的结点a, b处, 并设图中的边长度是相等的。甲、乙进行比赛: 从它们所在的结点出发, 走过图中的所有边最后到达结点c处。如果它们的速度相同, 问谁先到达目的地?



2. 一笔画问题



(a)

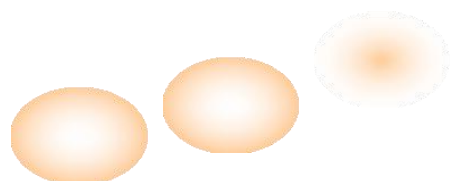


(b)



有向图的Euler图

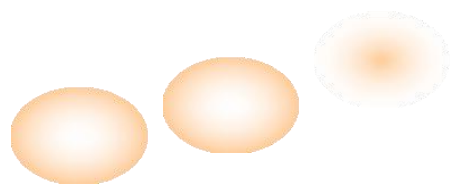
给定 G 是一个无孤立结点的有向图，若存在一条单向通路(回路)，经过图中每边一次且仅仅一次，则称此单向通路(回路)为该图的一条单向欧拉通路(回路)。具有单向欧拉回路的图称为欧拉图。

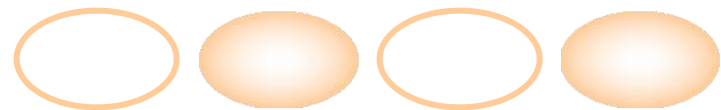




有向图的Euler图

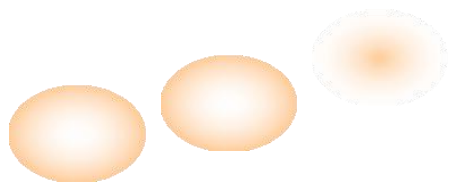
定理: 一个有向图 D 具有欧拉通路,当且仅当 D 是连通的,且除了两个顶点外,其余顶点的入度均等于出度.这两个特殊的顶点中,一个顶点的入度比出度大1.另一个顶点的入度比出度小1.

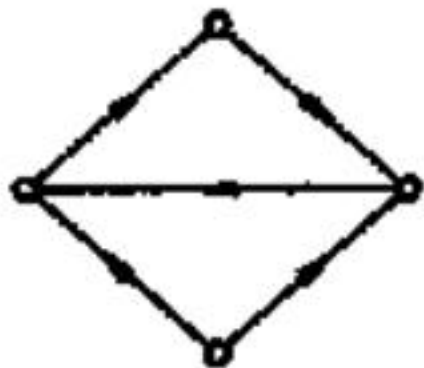




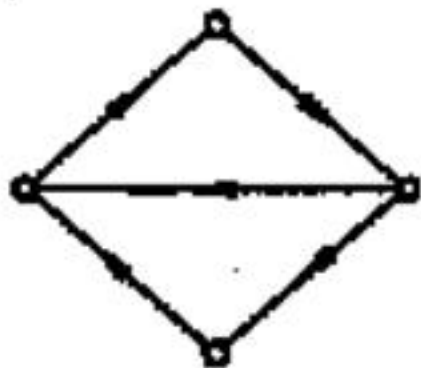
推论: 一个有向图 D 是欧拉图(具有欧拉回路),当且仅当 D 是连通的,且所有顶点的入度等于出度.

只具欧拉通路,无欧拉回路的图不是欧拉图.

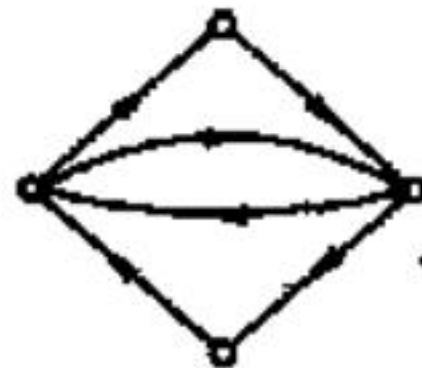




(1)



(2)

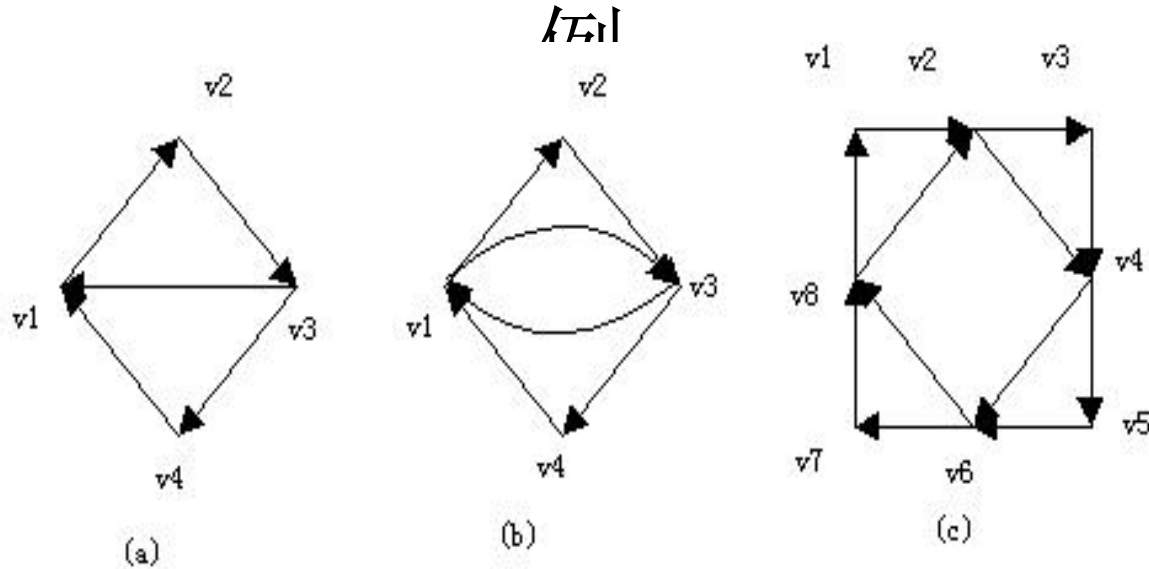


(3)

(1)既无欧拉回路,也无欧拉通路.

(2)中存在欧拉通路,但无欧拉回路.

(3)中存在欧拉回路.

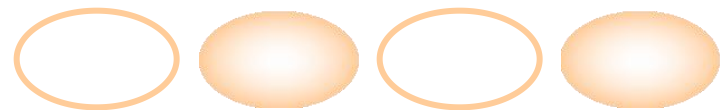


图a) 存在一条欧拉通路: $v_3v_1v_2v_3v_4v_1$;

图(b) 中存在欧拉回路 $v_1v_2v_3v_4v_1v_3v_1$, 因而 (b) 是欧拉图;

图(c) 中有欧拉回路 $v_1v_2v_3v_4v_5v_6v_7v_8v_2v_4v_6v_8v_1$ 因而 (c) 是欧拉图。





课后习题

P326:

3;

6;

