2.2 析取范式与合取范式

引言：

由上一节，我们可以看到每个命题公式都会存在很多与之逻辑等价的公式，虽然逻辑等价，但这些公式之间相差很大。

范式：在命题公式的多个逻辑等价的形式中，较为符合"标准"或"规范"的一种形式.

可以作为这一类，相互等价的命题公式的代表.

2.2 析取范式与合取范式

介绍范式之前，需要定义一些基本术语

定义2.2

(1) 文字(Literals)——命题变项（包括命题常元）及其否定的总称

(2) 简单析取式(disjunctive clauses)——有限个文字构成的析取式

$p, \neg q, p\vee\neg q, p\vee q\vee r, \ldots$

(3) 简单合取式(conjunctive clauses)——有限个文字构成的合取式

$p, \neg q, p\wedge\neg q, p\wedge q\wedge r, \ldots$

简单析取式与合取式

定理 2.1

1. 一个简单析取式是重言式当且仅当它同时含某个命题变项 p及它的否定式$\neg p$。
2. 一个简单合取式是矛盾式当且仅当它同时含某个命题变项 p及它的否定式$\neg p$。

析取范式与合取范式

定义2.3

(1) 析取范式(disjunctive normal form)——由有限个简单合取式组成的析取式

$$p,\ \neg p\vee q,\ p\vee\neg q,\ (p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q\wedge\neg r)\vee(q\wedge r)$$

(2) 合取范式(conjunctive normal form)——由有限个简单析取式组成的合取式

$$p,\ \ p\wedge\neg q,\ \neg p\wedge q,\ (p\vee q\vee\neg p)\wedge(p\vee\neg q\vee\neg r)$$

(3) 范式(normal form)——析取范式与合取范式的总称

说明：

1. 单个文字既是简单析取式，又是简单合取式

2. 形如 $p\wedge\neg q\wedge r$，$\neg p\vee q\vee\neg r$ 的公式既是析取范式，又是合取范式

析取范式与合取范式

举例：

$p \to q$ 的析取范式为$\neg p \vee q$ (同时也为其合取范式)

$((p \to q) \wedge \neg p) \vee \neg q$ 的析取范式为$\neg p \vee (q \wedge \neg p) \vee \neg q$

合取范式为$(\neg p \vee 1) \wedge (\neg p \wedge \neg q)$或者$\neg p \wedge \neg q$

析取范式与合取范式

定理 2.2

1. 一个析取范式是矛盾式当且仅当它的每个简单合取式都是矛盾式。
2. 一个合取范式是重言式当且仅当它的每个简单析取式都是重言式。

范式存在定理

定理2.3（范式存在定理）

任何命题公式都存在与之等值的析取范式与合取范式。

求公式的范式的步骤

公式A的析取(合取)范式——与A等值的析取(合取)范式

※求公式A的范式的一般步骤：

(1) 消去A中的$\rightarrow$, $\leftrightarrow$（若存在）

$$A\rightarrow B\Leftrightarrow\neg A\vee B$$

$$A\leftrightarrow B\Leftrightarrow(\neg A\vee B)\wedge(A\vee\neg B)$$

(2) 否定联结词$\neg$的内移或消去

$$\neg\neg A\Leftrightarrow A$$

$$\neg(A\vee B)\Leftrightarrow\neg A\wedge\neg B$$

$$\neg(A\wedge B)\Leftrightarrow\neg A\vee\neg B$$

(3) 使用分配律

$A\vee(B\wedge C)\Leftrightarrow(A\vee B)\wedge(A\vee C)$ 求合取范式

$A\wedge(B\vee C)\Leftrightarrow(A\wedge B)\vee(A\wedge C)$ 求析取范式

求命题公式的范式

例1： 求下列公式的析取范式与合取范式

(1) $(p\to\neg q)\vee\neg r$

(2) $(p\to\neg q)\to r$

求公式的范式

解 (1) $(p\rightarrow\neg q)\vee\neg r$

$\Leftrightarrow(\neg p\vee\neg q)\vee\neg r$ （消去→）

$\Leftrightarrow\neg p\vee\neg q\vee\neg r$ （结合律）

最后结果既是析取范式(由3个简单合取式组成的析取式)，又是合取范式(由一个简单析取式组成的合取式)

(2) $(p\rightarrow\neg q)\rightarrow r$

$\Leftrightarrow(\neg p\vee\neg q)\rightarrow r$ （消去第一个→）

$\Leftrightarrow\neg(\neg p\vee\neg q)\vee r$ （消去第二个→）

$\Leftrightarrow(p\wedge q)\vee r$ （否定号内移——德摩根律) 析取范式

$\Leftrightarrow(p\vee r)\wedge(q\vee r)$ （∨对∧分配律） 合取范式

主范式的引入

范式的存在性问题解决了，那么范式是否具有唯一性呢？

以$\neg p \to \neg(p \to q)$为例

p, $p \vee (p \wedge \neg q)$, $(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$ 都是其析取范式；

p, $p \wedge (p \vee \neg q)$, $(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$ 都是其合取范式.

能否找到“最为规范”的范式呢？

使其析取或合取范式具备唯一性呢？

下面就来介绍一下主范式

先介绍一下，主范式相关的基本概念

极小项与极大项

定义2.4

在含有n个命题变项的简单合取式（简单析取式）中，若每个命题变项均以文字的形式在其中出现且仅出现一次，而且第i个文字出现在左起第i位上（$1 \le i \le n$），称这样的简单合取式（简单析取式）为极小项（极大项）.

极小项与极大项

几点说明：

1. n个命题变项有2^n个极小项和2^n个极大项

2. 2^n个极小项（极大项）均互不等值

3. m_i : 第i个极小项.;其中i是该成真赋值的十进制表示

   M_i: 第i个极大项;其中i是该成假赋值的十进制表示

两个命题的极小项与极大项

由两个命题变项 p, q 形成的极小项与极大项

极小项			极大项		
公式	成真赋值	名称	公式	成假赋值	名称
$\neg p \wedge \neg q$	0 0	m_0	$p \vee q$	0 0	M_0
$\neg p \wedge q$	0 1	m_1	$p \vee \neg q$	0 1	M_1
$p \wedge \neg q$	1 0	m_2	$\neg p \vee q$	1 0	M_2
$p \wedge q$	1 1	m_3	$\neg p \vee \neg q$	1 1	M_3

三个命题的极小项与极大项

由三个命题变项 p, q, r 形成的极小项与极大项.

极小项			极大项		
公式	成真赋值	名称	公式	成假赋值	名称
$\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r$	0 0 0	m_0	$p\vee q\vee r$	0 0 0	M_0
$\neg p\wedge\neg q\wedge r$	0 0 1	m_1	$p\vee q\vee\neg r$	0 0 1	M_1
$\neg p\wedge q\wedge\neg r$	0 1 0	m_2	$p\vee\neg q\vee r$	0 1 0	M_2
$\neg p\wedge q\wedge r$	0 1 1	m_3	$p\vee\neg q\vee\neg r$	0 1 1	M_3
$p\wedge\neg q\wedge\neg r$	1 0 0	m_4	$\neg p\vee q\vee r$	1 0 0	M_4
$p\wedge\neg q\wedge r$	1 0 1	m_5	$\neg p\vee q\vee\neg r$	1 0 1	M_5
$p\wedge q\wedge\neg r$	1 1 0	m_6	$\neg p\vee\neg q\vee r$	1 1 0	M_6
$p\wedge q\wedge r$	1 1 1	m_7	$\neg p\vee\neg q\vee\neg r$	1 1 1	M_7

极小项与极大项的关系

定理2.4　m_i与M_i的关系：$\neg m_i \Leftrightarrow M_i$，　$\neg M_i \Leftrightarrow m_i$

主析取范式与主合取范式

定义2.5

主析取范式——由极小项构成的析取范式

主合取范式——由极大项构成的合取范式

例如，n=3, 命题变项为 p, q, r 时，

$(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r) \Leftrightarrow m_1\vee m_3$ ——主析取范式

$(p\vee q\vee\neg r)\wedge(\neg p\vee\neg q\vee\neg r) \Leftrightarrow M_1\wedge M_7$——主合取范式

注意：公式A的主析取(合取)范式——与A 等值的主析取(合取)范式

极小项与主析取范式的关系

极小项与主析取范式的关系：

例子：$(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r) \Leftrightarrow m_1\vee m_3$ ——主析取范式

（1）主析取范式包含的极小项的成真赋值，也是主析取范式的成真赋值；

（2）主析取范式的任意一个成真赋值是其包含的某个极小项的成真赋值;

（3）主析取范式不包括的极小项的成真赋值是主析取范式的成假赋值.

极大项与主合取范式的关系也是类似，成真赋值改为成假赋值即可.

主范式的存在惟一定理

定理2.5 (主范式的存在惟一定理)

任何命题公式都存在与之等值的主析取范式和主合取范式, 并且是惟一的。

证明思路提示:

(1) 存在性证明，构造性证明;

(2) 唯一性证明，反证法证明.

求公式主范式的步骤

※求公式主析取范式的步骤:

设公式A含命题变项$p_1,p_2,\ldots,p_n$

(1) 求A的析取范式$A'=B_1\vee B_2\vee \ldots \vee B_s$, 其中$B_j$是简单合取式 $j=1,2,\ldots,s$

(2) 若某个B_j既不含p_i, 又不含$\neg p_i$, 则将B_j展开成

$$B_j \Leftrightarrow B_j\wedge(p_i\vee\neg p_i) \Leftrightarrow (B_j\wedge p_i)\vee(B_j\wedge\neg p_i)$$

重复这个过程, 直到所有简单合取式都是长度为n的极小项为止

(3) 消去重复出现的极小项, 即用m_i代替$m_i\vee m_i$

(4) 将极小项按下标从小到大排列

实例

例2： 求公式 $A=(p\to\neg q)\to r$ 的主析取范式

实例

解 $(p\to\neg q)\to r$

$\Leftrightarrow (p\wedge q)\vee r$ （析取范式） ①

$(p\wedge q)$

$\Leftrightarrow (p\wedge q)\wedge(\neg r\vee r)$

$\Leftrightarrow (p\wedge q\wedge\neg r)\vee(p\wedge q\wedge r)$

$\Leftrightarrow m_6\vee m_7$ ②

r

$\Leftrightarrow (\neg p\vee p)\wedge(\neg q\vee q)\wedge r$

$\Leftrightarrow (\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge r)$

$\Leftrightarrow m_1\vee m_3\vee m_5\vee m_7$ ③

②, ③代入①并排序，得

$(p\to\neg q)\to r \Leftrightarrow m_1\vee m_3\vee m_5\vee m_6\vee m_7$ （主析取范式）

求公式主范式的步骤

求公式的主合取范式的步骤:

设公式A含命题变项$p_1,p_2,\ldots,p_n$

(1) 求A的合取范式$A'=B_1\wedge B_2\wedge \ldots \wedge B_s$, 其中$B_j$是简单析取式 $j=1,2,\ldots,s$

(2) 若某个B_j既不含p_i, 又不含$\neg p_i$, 则将B_j展开成

$$B_j \Leftrightarrow B_j\vee(p_i\wedge\neg p_i) \Leftrightarrow (B_j\vee p_i)\wedge(B_j\vee\neg p_i)$$

重复这个过程, 直到所有简单析取式都是长度为n的极大项为止

(3) 消去重复出现的极大项, 即用M_i代替$M_i\wedge M_i$

(4) 将极大项按下标从小到大排列

实例

例3： 求公式 $A=(p\rightarrow\neg q)\rightarrow r$ 的主合取范式

实例

解： $(p\to\neg q)\to r$

$\Leftrightarrow (p\vee r)\wedge(q\vee r)$ （合取范式） ④

$p\vee r$

$\Leftrightarrow p\vee(q\wedge\neg q)\vee r$

$\Leftrightarrow (p\vee q\vee r)\wedge(p\vee\neg q\vee r)$

$\Leftrightarrow M_0\wedge M_2$ ⑤

$q\vee r$

$\Leftrightarrow (p\wedge\neg p)\vee q\vee r$

$\Leftrightarrow (p\vee q\vee r)\wedge(\neg p\vee q\vee r)$

$\Leftrightarrow M_0\wedge M_4$ ⑥

⑤, ⑥代入④ 并排序，得

$(p\to\neg q)\to r \Leftrightarrow M_0\wedge M_2\wedge M_4$ （主合取范式）

实例

解： $(p\to\neg q)\to r$

$\Leftrightarrow (p\vee r)\wedge(q\vee r)$ （合取范式） ④

$p\vee r$

$\Leftrightarrow p\vee(q\wedge\neg q)\vee r$

$\Leftrightarrow (p\vee q\vee r)\wedge(p\vee\neg q\vee r)$

$\Leftrightarrow M_0\wedge M_2$ ⑤

$q\vee r$

$\Leftrightarrow (p\wedge\neg p)\vee q\vee r$

$\Leftrightarrow (p\vee q\vee r)\wedge(\neg p\vee q\vee r)$

$\Leftrightarrow M_0\wedge M_4$ ⑥

⑤, ⑥代入④ 并排序，得

$(p\to\neg q)\to r \Leftrightarrow M_0\wedge M_2\wedge M_4$ （主合取范式）

主范式的理解

小结：

(1) 具有相同的主析取范式的公式都是等值的，属于同一个等值类，否则属于不同的等值类；

(2) 虽然公式的数量是无限多的，但等值类的数量是有限的：

假设公式A中包括n个命题变元

极小项的数量为$N=2^n$；

由极小项组合成的主析取范式的数量为2^N；

等值类的数量等于主析取范式的数量.

主合取范式也有类似规律.

主范式的应用

1. 求公式的成真、成假赋值

设公式A含n个命题变项, A的主析取范式有s个极小项, 则A有s个成真赋值, 它们是极小项下标的二进制表示, 其余2^n-s个赋值都是成假赋值

例如 $(p\to\neg q)\to r \Leftrightarrow m_1\vee m_3\vee m_5\vee m_6\vee m_7$

成真赋值为 001, 011, 101, 110, 111,

成假赋值为 000, 010, 100.

类似地，由主合取范式也立即求出成假赋值和成真赋值.

主范式的应用

2. 判断公式的类型

设A含n个命题变项.

A为重言式 $\Leftrightarrow$ A的主析取范式含全部2^n个极小项

$\Leftrightarrow$ A的主合取范式不含任何极大项.

A为矛盾式 $\Leftrightarrow$ A的主合析取范式含全部2^n个极大项

$\Leftrightarrow$ A的主析取范式不含任何极小项0.

A为非重言式的可满足式

$\Leftrightarrow$ A的主析取范式中至少含一个、但不是全部极小项.

$\Leftrightarrow$ A的主合取范式中至少含一个、但不是全部极大项.

主范式的应用

例4: 用主析取范式判断公式的类型:

((1)) $A \Leftrightarrow \neg(p \rightarrow q) \wedge q$

(2) $B \Leftrightarrow p \rightarrow (p \vee q)$

(3) $C \Leftrightarrow (p \vee q) \rightarrow r$

主范式的应用

解

(1) $A \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \wedge q \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \wedge q \Leftrightarrow 0$ 矛盾式

(2) $B \Leftrightarrow \neg p \vee (p \vee q) \Leftrightarrow 1 \Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee m_2 \vee m_3$ 重言式

(3) $C \Leftrightarrow \neg(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee r$

$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r)$

$\vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r)$

$\Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_7$ 非重言式的可满足式

主范式的应用

3. 判断两个公式是否等值

例5: 用主析取范式判断以下公式是否等值

$p\to(q\to r)$ 与 $(p\to q)\to r$

主范式的应用

解　$p \to (q \to r) = m_0 \vee m_1 \vee m_2 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_7$

$(p \to q) \to r = m_1 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_7$

显见，不等值.

主范式的应用

4. 解实际问题

例9 某单位要从A,B,C三人中选派若干人出国考察, 需满足下述条件:

(1) 若A去, 则C必须去;

(2) 若B去, 则C不能去;

(3) A和B必须去一人且只能去一人.

问有几种可能的选派方案?

主范式的应用

解 记 p:派A去, q:派B去, r:派C去

(1) $p\to r$, (2) $q\to\neg r$, (3) $(p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q)$

求下式的成真赋值

$$A=(p\to r)\wedge(q\to\neg r)\wedge((p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q))$$

求A的主析取范式

$$
\begin{aligned}
A&=(p\to r)\wedge(q\to\neg r)\wedge((p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q))\\
&\Leftrightarrow (\neg p\vee r)\wedge(\neg q\vee\neg r)\wedge((p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q))\\
&\Leftrightarrow ((\neg p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge\neg r)\vee(r\wedge\neg q)\vee(r\wedge\neg r))\wedge((p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q))\\
&\Leftrightarrow ((\neg p\wedge\neg q)\wedge(p\wedge\neg q))\vee((\neg p\wedge\neg r)\wedge(p\wedge\neg q))\\
&\qquad\vee((r\wedge\neg q)\wedge(p\wedge\neg q))\vee((\neg p\wedge\neg q)\wedge(\neg p\wedge q))\\
&\qquad\vee((\neg p\wedge\neg r)\wedge(\neg p\wedge q))\vee((r\wedge\neg q)\wedge(\neg p\wedge q))\\
&\Leftrightarrow (p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge\neg r)
\end{aligned}
$$

成真赋值:101,010. 结论: 方案1 派A与C去, 方案2 派B去

用成真赋值和成假赋值确定主范式

由主析取范式确定主合取范式

例10 设A有3个命题变项, 且已知$A= m_1 \vee m_3 \vee m_7$, 求A的主合取范式.

解　A的成真赋值是1,3,7的二进制表示, 成假赋值是在主析取范式中没有出现的极小项的下角标0,2,4,5,6的二进制表示, 它们恰好是A的主合取范式的极大项的下角标, 故

$$A \Leftrightarrow M_0 \wedge M_2 \wedge M_4 \wedge M_5 \wedge M_6$$

课后习题

P42:

5(2,3); **6(1,3);** **7(1);**

8(2,3); **11(1,2);** **15(1,2).**