2.3 联结词的完备集

引言：

当我们研究主析取和主合取范式时，我们发现三个联结词 $\neg, \wedge, \vee$ 足以表示所有公式了.

问题：那么 $\neg, \wedge, \vee$ 三个还能再精简吗？

下面就让我们讨论一下，联结词集合的完备性.

先来介绍一下真值函数.

2.3 联结词的完备集

一、真值函数

定义2.6 称$F:\{0,1\}^n \to \{0,1\}$ 为n元真值函数.

$\{0,1\}^n=\{00\ldots0, 00\ldots1, \ldots, 11\ldots1\}$，包含 2^n个长为n的0,1符号串.

共有 2^{2^n}个不同的n元真值函数.

一元真值函数

p	$F_0^{(1)}$	$F_1^{(1)}$	$F_2^{(1)}$	$F_3^{(1)}$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

二元真值函数

p q	$F_0^{(2)}$	$F_1^{(2)}$	$F_2^{(2)}$	$F_3^{(2)}$	$F_4^{(2)}$	$F_5^{(2)}$	$F_6^{(2)}$	$F_7^{(2)}$
0 0	0	0	0	0	0	0	0	0
0 1	0	0	0	0	1	1	1	1
1 0	0	0	1	1	0	0	1	1
1 1	0	1	0	1	0	1	0	1
p q	$F_8^{(2)}$	$F_9^{(2)}$	$F_{10}^{(2)}$	$F_{11}^{(2)}$	$F_{12}^{(2)}$	$F_{13}^{(2)}$	$F_{14}^{(2)}$	$F_{15}^{(2)}$
0 0	1	1	1	1	1	1	1	1
0 1	0	0	0	0	1	1	1	1
1 0	0	0	1	1	0	0	1	1
1 1	0	1	0	1	0	1	0	1

真值函数

理解：既然真值函数被称为一个函数，我们就从函数的三要素（定义域、值域和对应法则）来理解一下这类函数：

(1) 定义域：每个变元的定义域是{0,1}；

(2) 值域：值域是{0,1}；

(3) 对应法则

思考一下，真值函数的对应法则有多少种？

假设有n个变元的真值函数，

每个变元有{0,1}两种取值，因此自变量的取值个数有$N=2^n$；

每个自变量的取值有两种对应法则，分别对应0或1，则不同对应法则有2^N种，即一共有2^N个不同的真值函数.

公式与真值函数

公式与真值函数的关系：

(1) 每个**真值函数**都与唯一的一个**主析取范式**等值;

$F_0^{(2)} \Leftrightarrow 0$(矛盾式) $F_1^{(2)} \Leftrightarrow p \wedge q \Leftrightarrow m_3$ $F_2^{(2)} \Leftrightarrow p \wedge \neg q \Leftrightarrow m_2$

(2) 真值函数与等值类是一一对应的;

(3) 真值函数与相应等值类中的每个公式等值.

例如：$p \rightarrow q, \neg p \vee q$ 都对应 $F_{13}^{(2)}$

联结词完备集

二、完备性

定义2.7 设S是一个联结词集合，如果任何$n(n\geq1)$元真值函数都可以由仅含S中的联结词构成的公式表示，则称S是联结词完备集

要点：若S是联结词完备集, 则任何命题公式都可由S中的联结词表示

比如，$\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$是完备集

问题：还有其他的完备集吗?

定理2.6 $S = \{\neg, \wedge, \vee\}$是联结词完备集

冗余联结词

冗余联结词：

在联结词集中，如果某个联结词可以用集合中其它联结词来定义，则这个联结词称作冗余联结词.

要点：若S是联结词完备集, 则任何命题公式都可由S中的联结词表示.

比如，$\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$中存在冗余联结词吗？

$A\rightarrow B \Leftrightarrow \neg A\vee B$，所以→是冗余联结词;

$\{\neg, \wedge, \vee, \leftrightarrow\}$中存在冗余联结词吗？

$A\leftrightarrow B \Leftrightarrow (\neg A\vee B)\wedge(A\vee\neg B)$，所以↔是冗余联结词;

$\{\neg, \wedge, \vee\}$中还存在冗余联结词吗？

联结词完备集

推论 以下都是联结词完备集

(1) $S_1 = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$

(2) $S_2 = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$

(3) $S_3 = \{\neg, \wedge\}$

(4) $S_4 = \{\neg, \vee\}$

(5) $S_5 = \{\neg, \rightarrow\}$

证明思路：从一个完备集中，去掉冗余联结词，直到得到。

注意：$\{\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow\}$不是联结词完备集, 0不能用它表示；

它的子集$\{\wedge\}$,$\{\vee\}$,$\{\rightarrow\}$,$\{\leftrightarrow\}$,$\{\wedge,\vee\}$,$\{\wedge,\vee,\rightarrow\}$等都不是。

极小的功能完备集

定义：如果一个完备集中不含冗余联结词，则称这个完备集为极小完备集.

比如，$\{\neg, \wedge\}$，$\{\neg, \vee\}$，$\{\neg, \rightarrow\}$都是极小完备集.

问题：有仅包含单个联结词的完备集吗？

有！！

复合联结词

定义2.8 设 p, q 为两个命题, $\neg(p\wedge q)$称作p与q的与非式, 记作 $p\uparrow q$, 即 $p\uparrow q \Leftrightarrow \neg(p\wedge q)$, $\uparrow$称为与非联结词。

$\neg(p\vee q)$ 称作 p 与 q 的或非式, 记作 $p\downarrow q$, 即 $p\downarrow q \Leftrightarrow \neg(p\vee q)$, $\downarrow$称为或非联结词

定理2.7 $\{\uparrow\}$、$\{\downarrow\}$都为联结词完备集.

证明思路： 用$\downarrow$去定义已知完备集中的每个联结词，如$\{\neg, \vee\}$.

$\neg p\Leftrightarrow\neg(p\vee p)\Leftrightarrow p\downarrow p$, $p\vee q\Leftrightarrow\neg\neg(p\vee q)\Leftrightarrow\neg(p\downarrow q)\Leftrightarrow(p\downarrow q)\downarrow(p\downarrow q)$

课后习题

P44:

21(2);　　　　22(1,3);