通　　路

给定图$G=<V,E>$.

设G中顶点和边的交替序列为

$\Gamma=v_0e_1v_1e_2\ldots e_lv_l$,若Γ满足如下条件:

v_{i-1}和v_i是e_i的端点(在G是有向图时,要求v_{i-1}是e_i的始点,v_i是e_i的终点),$i=1,2,\ldots,l$,则称Γ为顶点v_0到v_l的通路.

v_0和v_l分别称为此通路的起点和终点,Γ中边的数目l称为Γ的长度.

当$v_0=v_l$时,此通路称为回路.

简单通路或迹

若Γ中的所有边$e_1,e_2,\cdots,e_l$互不相同，则称Γ为简单通路或一条迹.

若回路中的所有边互不相同，称此回路为简单回路或一条闭迹.

初级通路

若通路的所有顶点$V_0, V_1 \cdots, V_l$互不相同(从而所有边互不相同),则称此通路为初级通路或一条路径.

若回路中,除$V_0 = V_l$外,其余顶点各不相同,所有边也各不相同,则称此回路为初级回路或圈.

长度为奇(偶)数的圈称为奇(偶)圈

复杂通路

有边重复出现的通路称为复杂通路,

有边重复出现的回路称为复杂回路.

由定义可知,初级通路(回路)是简单通路(回路),但反之不真.

短程线(无向图)

设v_i,v_j为无向图G中的任意两点,若v_i与v_j是连通的,则称v_i与v_j之间长度最短的通路为v_i与v_j之间的短程线,短程线的长度称为v_i与v_j之间的距离,记作$d(v_i,v_j)$.

短程线(有向图)

设v_i,v_j为有向图D中任意两点,若v_i可达v_j,则称从v_i到v_j长度最短的通路为v_i到v_j的短程线,

短程线的长度称为v_i到v_j的距离,记作$d<v_i,v_j>$.

$d<v_i,v_j>$的性质

(1) $d<v_i,v_j> \geq 0$, $v_i = v_j$时,等号成立.

(2) 满足三角不等式,即

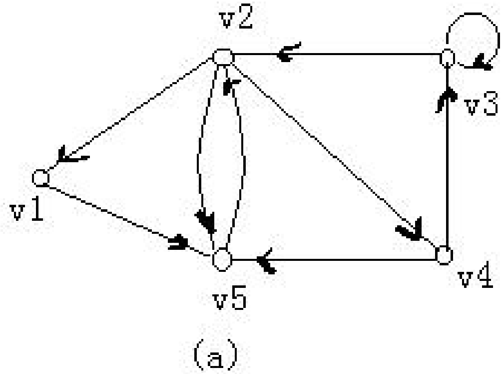
$$d<v_i,v_j> + d<v_j,v_k> \geq d<v_i,v_k>.$$

(3) 在无向图中,还有对称性,即

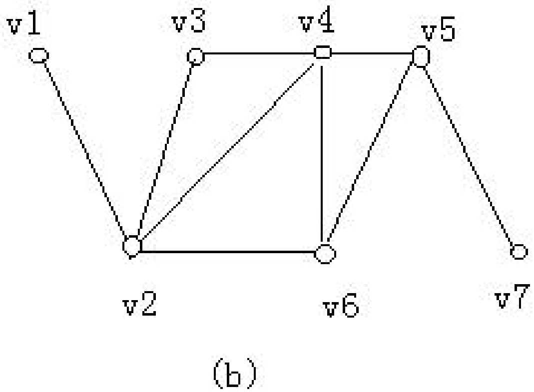
$$d(v_i,v_j) = d(v_j,v_i).$$

若v_i不可达v_j,规定$d<v_i, v_j> = \infty$.

例



(a)



(b)

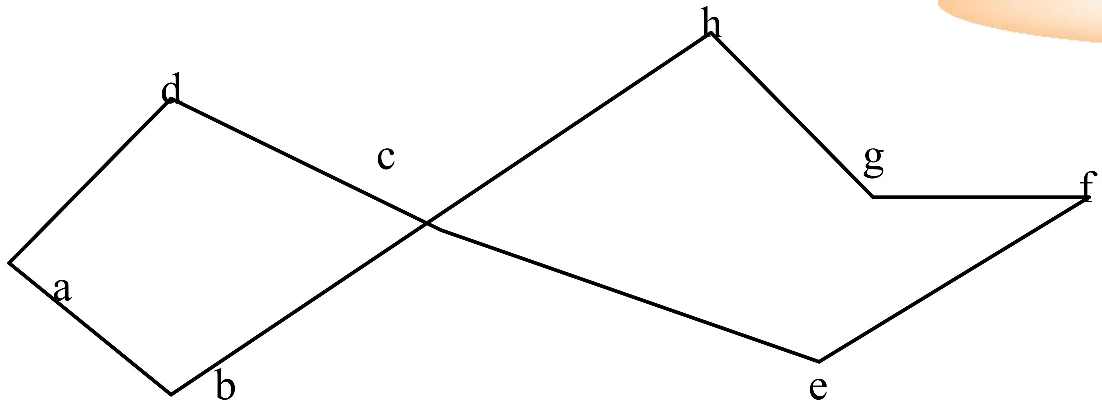
在(a)中有：

$d(v2, v1)=1$, $d(v1, v2)=2$,

$d(v3, v1)=2$, $d(v1, v3)=4$;

在(b)中有：

$d(v1, v3)=2$, $d(v3, v7)=3$, $d(v1, v7)=4$。



（g，h，c，d，a，b，c，e，f，g）是回路，但不是圈(初级回路)；

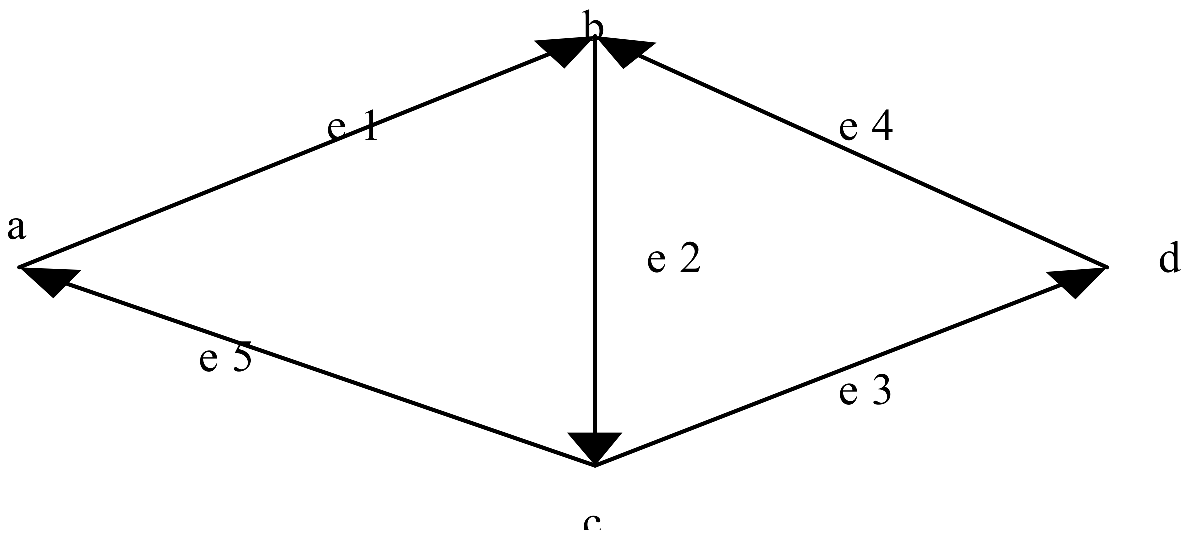
（h，c，d，a，b，c，e，f）是简单通路，但不是初级通路；

（a，b，c，d，a）是圈(初级回路)；

（h，c，e，f）是一条通路，但它不是h与f之间的短程；

（h，g，f）是h与f之间的短程。

通路示例



（e_5， e_1， e_2， e_3， e_4）是简单通路，

不是初级通路，

因为（c， a， b， c， d， b)中 b， c 均出现了两次。

定　理

在一个n阶图中，若从顶点v_i到$v_j(v_i \neq v_j)$存在通路，则从v_i到v_j存在长度$\leq n-1$的通路.

推 论

在一个n阶图中,若从顶点v_i到v_j($v_i \neq v_j$)存在通路,则从v_i到v_j存在长度$\leq n-1$的初级通路(路径).

定理及推论

定理 在一个n阶图中,如果存在v_i到自身的回路,则从v_i到自身存在长度≤n的回路.

推论 在一个n阶图中,如果v_i到自身存在一条简单回路,则从v_i到自身存在长度≤n的初级回路.

连通

在一个无向图G中,若从顶点V_i到V_j存在通路(当然从V_j到V_i也存在通路),则称V_i与V_j是连通的.规定V_i到自身总是连通的.

在一个有向图D中,若从顶点V_i到V_j存在通路,则称V_i可达V_j.规定V_i到自身总是可达的.

连通图(无向图)

若无向图G是平凡图,或G中任意两顶点都是连通的,则称G是连通图;否则,称G是非连通图.

连通性

无向图中,顶点之间的连通关系是等价关系.

设G为一个无向图,R是G中顶点之间的连通关系,

按照R可将V(G)划分成k($k\geq 1$)个等价类,

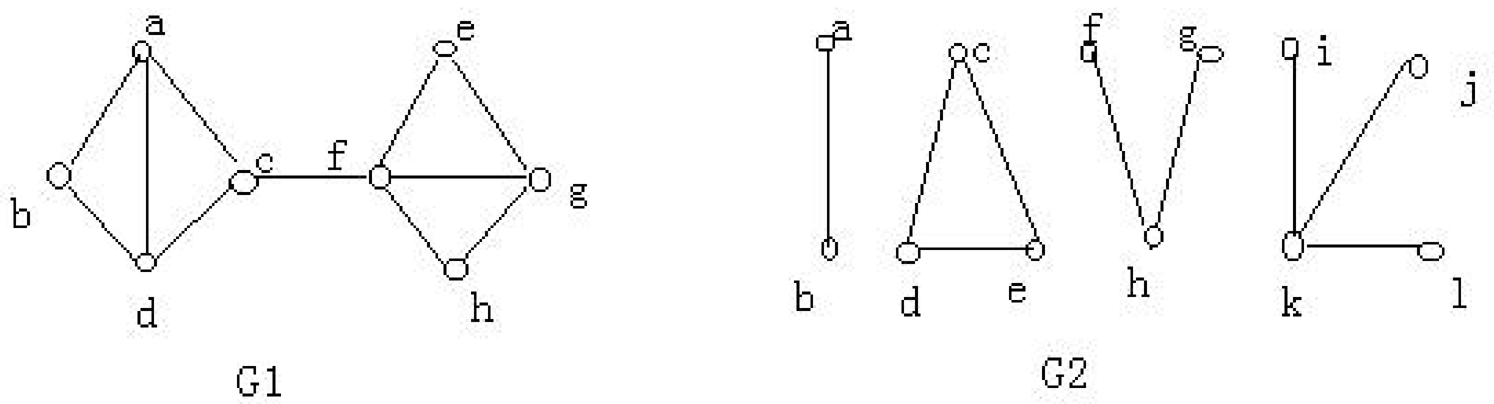
记成$V_1, V_2, \cdots, V_k$,

由它们导出的导出子图

$G[V_1], G[V_2], \ldots, G[V_k]$称为G的连通分支,

其个数记为p(G).

例



G1是连通图，p(G1)＝1；

G2是非连通图，且p(G2)＝4。

连通图(有向图)

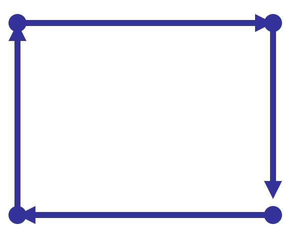
设D是一个有向图,如果略去D中各有向边的方向后所得无向图G是连通图,则称D是连通图,或称D是弱连通图.

若D中任意两顶点至少一个可达另一个,则称D是单向连通图.

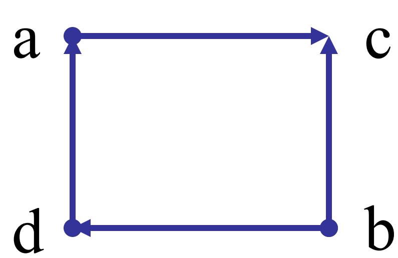
若D中任何一对顶点都是相互可达的,则称D是强连通图.

有向图的连通性

易见：强连通性 ⇒ 单向连通性 ⇒弱连通性；　但反之不真. 反例如下：

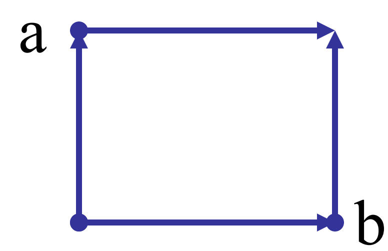


强连通



单向连通非强连通

从a到b不可达



弱连通非单向连通

从a到b不可达且

从b到a不可达

点割集

设无向图$G=\langle V,E\rangle$,

若存在顶点子集$V'\subset V$,使G删除V'

(将V'中顶点及其关联的边都删除)后,

所得子图$G-V'$的连通分支数与G的连通分支数满足

$p(G-V')>p(G)$,

而删除V'的任何真子集V''后,$p(G-V'')=p(G)$,

则称V'为G的一个**点割集**.

若点割集中只有一个顶点v,则称v为**割点**.

边割集

若存在边集子集$E' \subset E$,

使G删除E'(将E'中的边从G中全删除)后,

所得子图的连通分支数与G的连通分支数

满足$p(G-E') > p(G)$,

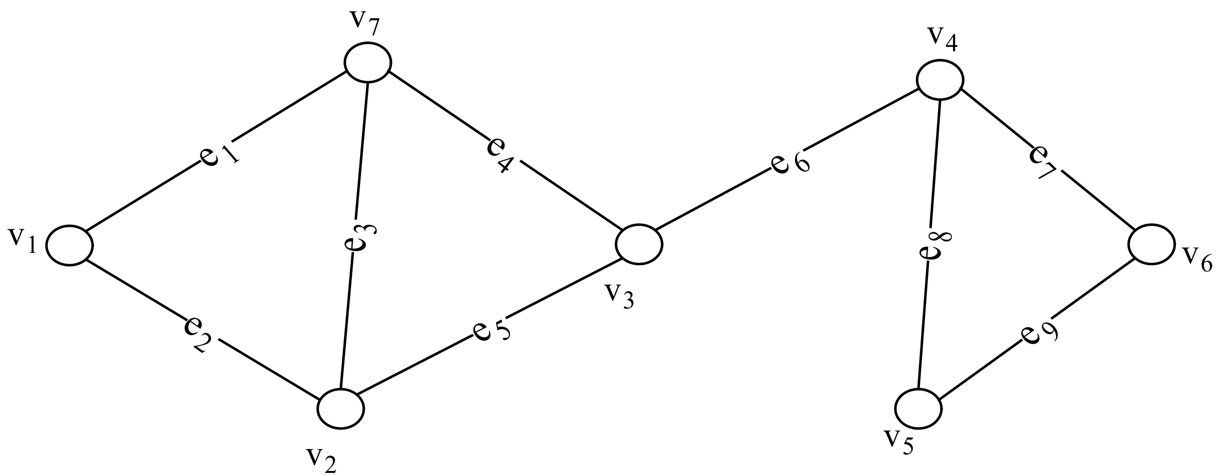
而删除E'的任何真子集E''后,$p(G-E'') = p(G)$,

则称E'是G的一个**边割集**.

若边割集中只有一条边e,则称e为**割边**或**桥**.

注: 完全图没有割边和割点.

例



$\{v_2, v_7\}$，$\{v_3\}$，$\{v_4\}$为点割集，$\{v_3\}$，$\{v_4\}$为割点
$\{e_1, e_2\}$，$\{e_1, e_3, e_4\}$，$\{e_6\}$，$\{e_7, e_8\}$，$\{e_2, e_3, e_4\}$等都是割集，其中e6是桥。

连 通 度

定义：　设G=(V,E)是连通图，$k(G)=\min\{|V_i|\ |V_i$是G的点割集$\}$称为G的**点连通度**，

k(G)越大，则点连通程度越高.

约定：K_n 的点连通度为n-1;非连通图的点连通度为0.

$\lambda(G)=\min\{|S|\ |S$是G的边割集$\}$称为G的**边连通度**。

λ(G)越大，则边连通程度越高.

约定：非连通图的边连通度为0.

定理

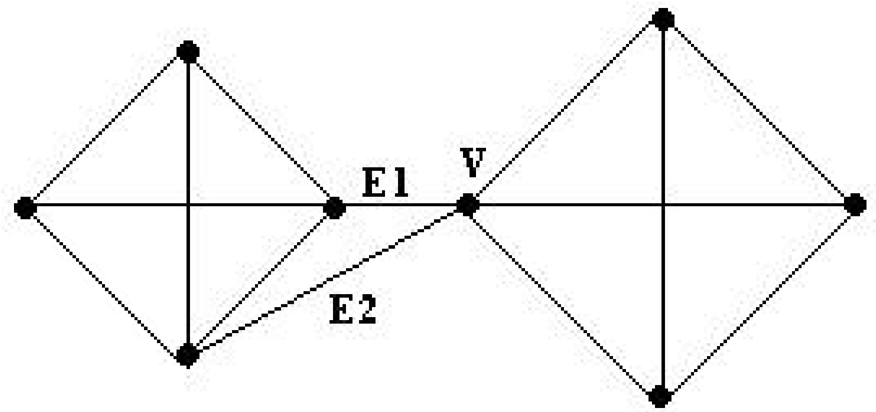
对任意的无向图G=(V,E),有

$$K(G) \le \lambda(G) \le \delta(G)$$

(证明略)

connected graph

例 在下图中, $k(G) = 1$, $\lambda(G) = 2$, $\delta(G) = 3$



定义 设有图$G = (V, E)$, 若$k(G)\geq h$, 则称G是h-连通的; 若$\lambda(G)\geq h$, 则称G是h-边连通的。

例 上面所示的图是1-连通的, 是2-边连通的。

连通度性质

1. 简单的连通图都是1-连通的和1-边连通的。
2. n阶完全图是(n–1)-连通的和(n–1)-边连通的。
3. 对于任何n阶连通图，当且仅当无割点时，它是2-连通的；
4. 当且仅当没有割边时，它是2-边连通的。

连通度

由前面定理，若图G是h-连通的，则G也是h-边连通的。($k(G) \le \lambda(G)$)

由定义可知，若$h_1 > h_2$，图G是h_1-连通的，则G也是h_2-连通的。

若$h_1 > h_2$，图G是h_1-边连通的，则G也是h_2-边连通。

一个图的连通度越大，它的连通性能就越好。

connected graph

二部图(bipartite graph)

若能将无向图G=<V,E>的顶点集V划分成两个子集V_1和V_2($V_1 \cap V_2=\varnothing$),使得G中任何一条边的两个端点一个属于V_1,另一个属于V_2,则称G为二部图(也称为偶图).

V_1,V_2称为互补顶点子集,此时可将G记成G=< V_1,V_2,E>;

二部图$G=\langle X, E, Y\rangle$称为完全二部图,如果X的每一点都与Y的每一点邻接,完全二部图常记为$K_{m,n}$,其中,$m=|X|$,$n=|Y|$.

在下图中,(1)所示为$K_{2,3}$,(2)所示为$K_{3,3}$. $K_{3,3}$是重要的完全二部图,它与K_5一起在平面图中起着重要作用.

(1)　　(2)

connected graph

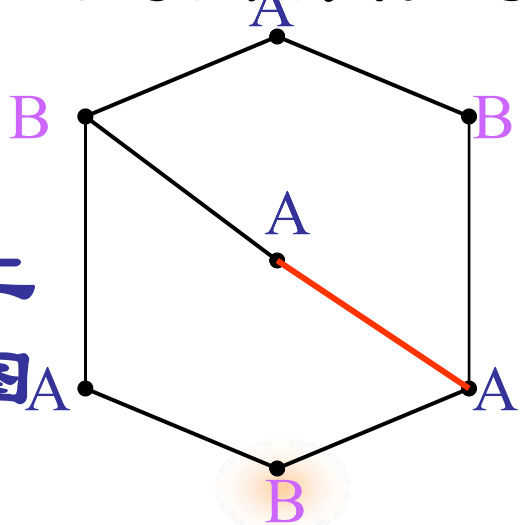
用结点标记法判断已知图G是否为二部图

步骤：① 任选一点标为A；

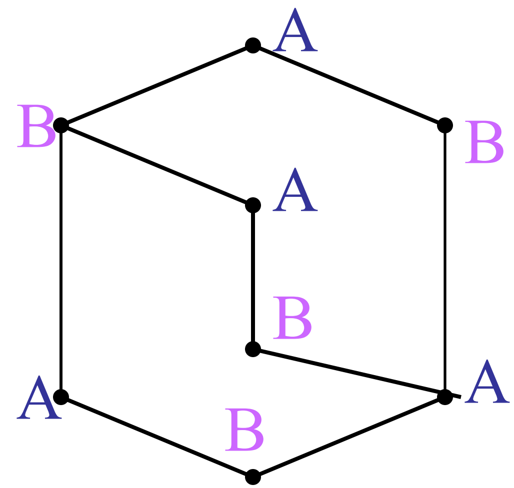
② 把所有与上一步标为A(B)的点相邻的点标为B(A)，照此继续，直到每点都被标记为止.

③ **判断原则**：如果标记后的图**没有任何相邻二点有相同的标记**，则G是二部图，其互补结点子集X，Y分别为两种标记点的集；否则，G不是二部图.

非二部图



二部图



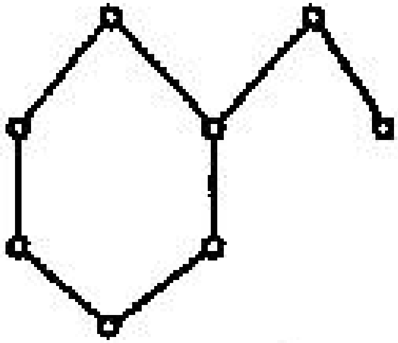
connected graph

判断二部图的定理

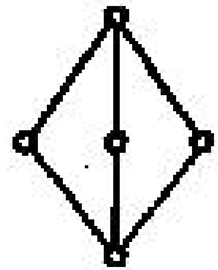
定理：一个无向图G=<V,E>是二部图当且仅当G中无奇数长度的回路.

connected graph

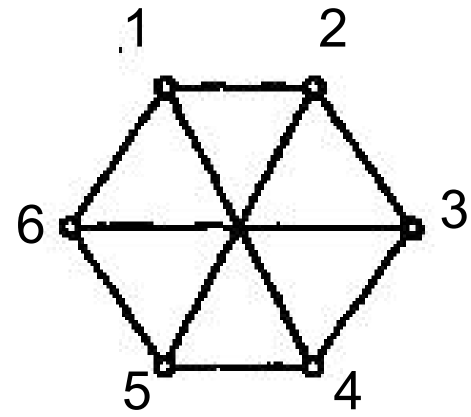
图例



(1)



(2)



(3)