6.4 集合恒等式

集合算律

1．只涉及一个运算的算律： 交换律、结合律、幂等律

	$\cup$	$\cap$	$\oplus$
交换	$A\cup B=B\cup A$	$A\cap B=B\cap A$	$A\oplus B=B\oplus A$
结合	$(A\cup B)\cup C$ $=A\cup(B\cup C)$	$(A\cap B)\cap C=$ $A\cap(B\cap C)$	$(A\oplus B)\oplus C$ $=A\oplus(B\oplus C)$
幂等	$A\cup A=A$	$A\cap A=A$	

集合算律

2．涉及两个不同运算的算律：

分配律、吸收律

	∪与∩	∩与⊕
分配	$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$	$A\cap(B\oplus C)=(A\cap B)\oplus(A\cap C)$
吸收	$A\cup(A\cap B)=A$ $A\cap(A\cup B)=A$	

集合算律

3．涉及补运算的算律：

DM律，双重否定律

	$-$	$\sim$
*D.M*律	$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$ $A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$	$\sim(B\cup C)=\sim B\cap\sim C$ $\sim(B\cap C)=\sim B\cup\sim C$
双重否定		$\sim\sim A=A$

集合算律

4．涉及全集和空集的算律：

补元律、零律、同一律、否定律

	$\varnothing$	E
补元律	$A\cap\sim A=\varnothing$	$A\cup\sim A=E$
零律	$A\cap\varnothing=\varnothing$	$A\cup E=E$
同一律	$A\cup\varnothing=A$	$A\cap E=A$
否定	$\sim\varnothing=E$	$\sim E=\varnothing$

集合证明题

证明方法：命题演算法、等式代入法

命题演算证明法的书写规范 (以下的X和Y代表集合公式)

(1) 证$X \subseteq Y$

任取x， $x \in X \Rightarrow \ldots \Rightarrow x \in Y$

(2) 证$X = Y$

方法一 分别证明 $X \subseteq Y$ 和 $Y \subseteq X$

方法二 任取x，$x \in X \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x \in Y$

注意：在使用方法二的格式时，必须保证每步推理都是充分必要的

命题演算法

方法一：命题演算法

例1 证明$A\cup(A\cap B) = A$ （吸收律）

证 任取x,

$$x\in A\cup(A\cap B) \Leftrightarrow x\in A\vee x\in A\cap B$$

$$\Leftrightarrow x\in A\vee(x\in A\wedge x\in B) \Leftrightarrow x\in A$$

因此得 $A\cup(A\cap B) = A$.

命题演算法

例2 证明 $A-(B\cup C) = (A-B)\cap(A-C)$

等式代入法

方法二：等式代入法

例3 假设交换律、分配律、同一律、零律已经成立，证明吸收律.

证 $A\cup(A\cap B)$

$= (A\cap E)\cup(A\cap B)$ （同一律）

$= A\cap(E\cup B)$ （分配律）

$= A\cap(B\cup E)$ （交换律）

$= A\cap E$ （零律）

$= A$ （同一律）

包含等价条件的证明

例4　证明$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A - B = \varnothing$

①　②　③　④

证明思路：

确定问题中含有的命题：本题含有命题 ①, ②, ③, ④

确定证明顺序：①⇒②，②⇒③，③⇒④，④⇒①

按照顺序依次完成每个证明（证明集合相等或者包含）

证明

证明$A\subseteq B \Leftrightarrow A\cup B=B \Leftrightarrow A\cap B=A \Leftrightarrow A-B=\varnothing$

①　②　③　④

证 ①⇒②

显然$B\subseteq A\cup B$，下面证明$A\cup B\subseteq B$.

任取x，

$$x\in A\cup B \Leftrightarrow x\in A\vee x\in B \Rightarrow x\in B\vee x\in B \Leftrightarrow x\in B$$

因此有$A\cup B\subseteq B$. 综合上述②得证.

②⇒③

$A=A\cap(A\cup B) \Rightarrow A=A\cap B$ (由②知$A\cup B=B$，将$A\cup B$用B代入)

证明

③⇒④

假设$A-B\neq\varnothing$, 即$\exists x\in A-B$，那么知道$x\in A$且$x\notin B$. 而

$$x\notin B \Rightarrow x\notin A\cap B$$

从而与$A\cap B=A$矛盾.

④⇒①

假设$A\subseteq B$不成立，那么

$$\exists x(x\in A\wedge x\notin B) \Rightarrow x\in A-B \Rightarrow A-B\neq\varnothing$$

与条件④矛盾.

证明例题

例5 已知$A \oplus B = A \oplus C$, 证明 $B=C$.

小结

集合恒等式. (6.1)-(6.23)

集合证明题方法. 命题演算法、等式代入法

课后习题

P108:

31; **32;** **35;**