1.2 命题公式及其赋值

一、命题变项与命题公式

- 命题变项
- 命题公式
- 命题公式的层次

二、公式的赋值

- 公式赋值
- 公式类型
- 真值表

命题公式的组成成分

（1）命题常项(Proposition Constants) 表示具体的命题，及表示常命题的*p*, *q*, *r*等和*t*, *f*;

（2）命题变项 或命题变元(Proposition Variables)：取值为1或0的变量（不是命题）；

常项与变项均用 $p, q, r, \ldots, p_i, q_i, r_i, \ldots,$ 等表示.

（3）命题公式 或 合式公式(Proposition formula) 由命题常元、变元和联结词组成的形式更为复杂的符号串.

注：命题变元与常元的关系如同初等数学中的变量和常量的关系。

命题公式

将命题变项用**联结词**和**圆括号**按照一定的逻辑关系联结起来的符号串称作**命题公式** 或者**合式公式**。

定义1.6 命题公式 或者**合式公式**（简称公式）的递归定义：

(1) 单个命题变项和命题常项是合式公式, 称作**原子命题公式**

(2) 若A是合式公式，则 $(\neg A)$也是

(3) 若A, B是合式公式，则$(A\wedge B)$, $(A\vee B)$, $(A\rightarrow B)$, $(A\leftrightarrow B)$也是

(4) 只有有限次地应用(1)—(3) 形成的符号串才是合式公式

命题公式

命题公式的例子：

$(\neg((p \wedge q)\rightarrow r))$ 是命题公式

以下都不是命题公式：

(pq)

$(p_1 \wedge (p_2 \wedge \ldots$

$p \wedge q \rightarrow r$ 按照严格定义这不是公式，缺少括号

命题公式

严格按照定义的命题公式太繁琐，需要简化约定，旨在减少括号数量

1. 外层括号可以省去:

$(\neg A)$，$(A\wedge B)$单独出现时，括号可以去掉为 $\neg A$，$A\wedge B$

2.定义优先级: $()\neg$, $[\wedge, \vee]$, $\to$, $\leftrightarrow$, 按照优先级从高到低，从左到右次序进行结合.

$((\neg p)\wedge q)$ 等同于 $\neg p\wedge q$

$p\to q\wedge r\to s$ 表示什么意思呢?

注：命题公式中必需的括号不能省略

命题变项与命题公式

几点说明：

1. 对象语言： 描述研究对象的语言，某个具体的公式
   例如 $p, p \wedge q, (p \wedge q) \rightarrow r$。

2. 元语言：描述对象语言的语言，表示任意的命题公式
   例如 A, B。

命题公式的层次

定义1.7

(1) 若公式A是单个命题变项，则称A为0层公式.

(2) 称 A 是 $n+1(n\geq 0)$ 层公式是指下面情况之一：

(a) $A=\neg B$, B 是 n 层公式；

(b) $A=B\wedge C$, 其中B,C 分别为 i 层和 j 层公式，且$n=\max(i, j)$；

(c) $A=B\vee C$, 其中 B,C 的层次及 n 同(*b*)；

(d) $A=B\rightarrow C$, 其中B,C 的层次及 n 同(*b*)；

(e) $A=B\leftrightarrow C$, 其中B,C 的层次及 n 同(*b*).

(3) 若公式A的层次为k, 则称A为k层公式.

命题公式的层次

例如 公式

$A=p,$

$B=\neg p,$

$C=\neg p\to q,$

$D=\neg(p\to q)\leftrightarrow r,$

分别为0层，1层，2层，3层公式.

$E=((\neg p\wedge q)\to r)\leftrightarrow(\neg r\vee s)$ 是几层公式呢？

命题公式的意义

注：命题公式的意义在于这些命题的真值通过联结词的组合发生了一个转换；

如果将联结词看作逻辑运算符，那么包含命题变元$p_1, p_2, \ldots p_n$的公式A，可以看作是关于$p_1, p_2, \ldots p_n$的一个真值函数(包含n个自变量)

每个变元的取值范围是 {0, 1}

真值函数值的取值范围也是 {0, 1}

公式赋值

定义1.8 设$p_1, p_2, \ldots, p_n$是出现在公式A中的全部命题变项，给$p_1, p_2, \ldots, p_n$各指定一个真值，称为对A的一个**赋值**或**解释**。若使A为1，则称这组值为A的**成真赋值**；若使A为0，则称这组值为A的**成假赋值**。

公式赋值

几点说明：

1. A中仅出现 $p_1, p_2, \ldots, p_n$，给A赋值$\alpha=\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$是指

$p_1=\alpha_1, p_2=\alpha_2, \ldots, p_n=\alpha_n$, $\alpha_i=0$或1, α_i之间不加标点符号

2. A中仅出现 $p, q, r, \ldots$, 给A赋值$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots$是指

$p=\alpha_1, q=\alpha_2, r=\alpha_3 \ldots$

3. 含n个命题变项的公式有2^n个赋值.

如 000, 010, 101, 110是$\neg(p\rightarrow q)\leftrightarrow r$的成真赋值，001, 011, 100, 111是成假赋值.

真值表

定义1.9 将命题公式A在所有赋值下取值的情况列成表, 称作A的**真值表**.

构造真值表的步骤:

(1) 找出公式中所含的全部命题变项$p_1, p_2, \ldots, p_n$(若无下角标，则按字母顺序排列), 列出2^n个全部赋值, 从00…0开始, 按二进制加法, 每次加1, 直至11…1为止.

(2) 按从低到高的顺序写出公式的各个层次.

(3) 对每个赋值依次计算各层次的真值, 直到最后计算出公式的真值为止.

真值表的计算

例1: 写出下列公式的真值表, 并求它们的成真赋值和成假赋值:

((1))$(p \vee q) \rightarrow \neg r$

((2))$(q \rightarrow p) \wedge q \rightarrow p$

(3) $\neg(\neg p \vee q) \wedge q$

真值表1

(1) $A = (p \vee q) \rightarrow \neg r$

$p\ \ q\ \ r$	$p \vee q$	$\neg r$	$(p \vee q) \rightarrow \neg r$
0 0 0	0	1	1
0 0 1	0	0	1
0 1 0	1	1	1
0 1 1	1	0	0
1 0 0	1	1	1
1 0 1	1	0	0
1 1 0	1	1	1
1 1 1	1	0	0

成真赋值:000,001,010,100,110; 成假赋值:011,101,111

真值表

小结：

当公式A($p_1, p_2, \ldots, p_n$)中包含有k个联结词时，公式A的真值表应该为多少行，多少列呢？

真值表应该为**2^n行，$k+n$**列（n个变元，k个联结词）

其中前n列为所有变元的取值组合，最后一列是公式A的真值。

真值表2

(2) $B=(q\to p)\land q\to p$

p q	$q\to p$	$(q\to p)\land q$	$(q\to p)\land q\to p$
0 0	1	0	1
0 1	0	0	1
1 0	1	0	1
1 1	1	1	1

成真赋值: 00,01,10,11; 无成假赋值

真值表3

(3) $C = \neg(\neg p \vee q) \wedge q$的真值表

p q	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$\neg(\neg p \vee q)$	$\neg(\neg p \vee q) \wedge q$
0 0	1	1	0	0
0 1	1	1	0	0
1 0	0	0	1	0
1 1	0	1	0	0

成假赋值: 00,01,10,11; 无成真赋值

命题公式的分类

定义1.10 （命题公式可以从真值的角度进行分类）

(1) 若A在它的任何赋值下均为真, 则称A为重言式或永真式(tautology);

(2) 若A在它的任何赋值下均为假, 则称A为矛盾式或永假式(contradiction);

(3) 若A不是矛盾式, 则称A是可满足式(contingency).

由例1可知, $(p \vee q) \rightarrow \neg r$, $(q \rightarrow p) \wedge q \rightarrow p$, $\neg(\neg p \vee q) \wedge q$ 分别为非重言式的可满足式, 重言式, 矛盾式.

再如：对于任意公式A

$A \vee \neg A$ 是重言式(排中律)　　$A \wedge \neg A$ (矛盾律)

命题公式的分类

注：1. 永真式都是可满足式；

2. 矛盾式都不是可满足式；

3. 非永真式并不都是永假式；

4. 如果A是永真式，则$\neg A$就是永假式，反之亦然。

如何证明一个命题公式是永真式呢？？

真值表的用途

真值表的用途:

1. 求出公式的全部成真赋值与成假赋值,;

2. 判断公式的类型

(1). 若真值表最后一列全为1，则为重言式;

(2). 若真值表最后一列全为0，则为矛盾式;

(3). 若真值表最后一列至少存在一个1，则为可满足式;

真值表的计算

例2: 下列公式中, 哪些具有相同的真值表:

((1))$p \rightarrow q$

((2))$\neg p \vee q$

(3) $(\neg p \vee q) \wedge ((p \wedge r) \rightarrow p)$

思考： 如果两个公式具有相同的真值表，说明什么呢？意味着什么呢？

课堂思考题

用真值表判断下面公式的类型

(1) $p \wedge r \wedge \neg(q \to p)$

(2) $((p \to q) \to (\neg q \to \neg p)) \vee r$

(3) $(p \to q) \leftrightarrow (p \to r)$

课后习题

P17:

16(2,4); **17;** **18;**

19(4,6); **20(4);** **21(3).**