第五部分 图论

引言： 图论的创立

图论的创立是从解决“柯尼斯堡七桥问题”开始创立的；

柯尼斯堡，现在的加里宁格勒，是欧洲的一个美丽的城市，有一条河横穿这座城市，河中间有两座小岛；

第五部分 图论

引言：图论的创立

人们为了交通方便，在两座小岛和河岸之间修建了七座桥，长久以来，人们想知道，我能不能从任何一个地点出发，穿过这七座桥只恰好一次？七座桥均被遍历一次，无数人进行了尝试，均无法做到，是否真的无法做到呢？

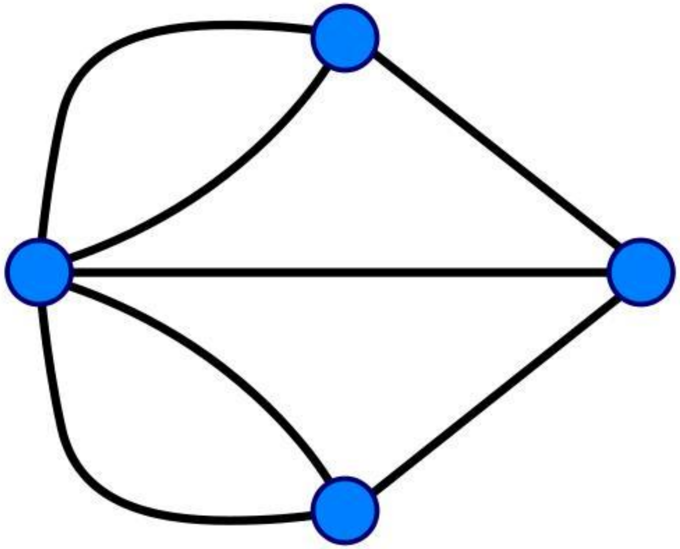
第五部分 图论

引言：图论的创立

1736年，欧拉解决了这个问题，在论文中欧拉证明了仅走一遍无法遍历七座桥，并提出和解决了"一笔画"的问题；

将小岛、河岸抽象成点，将桥抽象成边；

并通过讨论点的奇偶性来判断能否遍历；这标志着图论的创立。



第五部分 图论

本部分主要内容

- 图的基本概念
- 欧拉图、哈密顿图
- 树
- 平面图（略）
- 支配集、覆盖集、独立集、匹配与着色（略）

第14章 图的基本概念

14.1 无向图及有向图

图（Graph）：

由**结点**和联结结点的**边**所构成的离散结构，

记做$G=<V,E>$.

注： 1.这个离散结构分成两个部分：结点(Vertex)和边(Edge),形成了一个二元有序组;

2. 结点集V:非空集合；边集E：多重集合.

14.1 无向图及有向图

设A,B为两集合,称

$$\{\{a,b\} \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

为A与B的无序积,记作A&B.

将无序对{a,b}记作(a,b).

无向图

一个无向图(Indirected Graph)G是一个二元组<V,E>,即G＝<V,E>,其中,

(1)V是一个非空的集合,称为G的顶点集,V中元素称为顶点或结点;

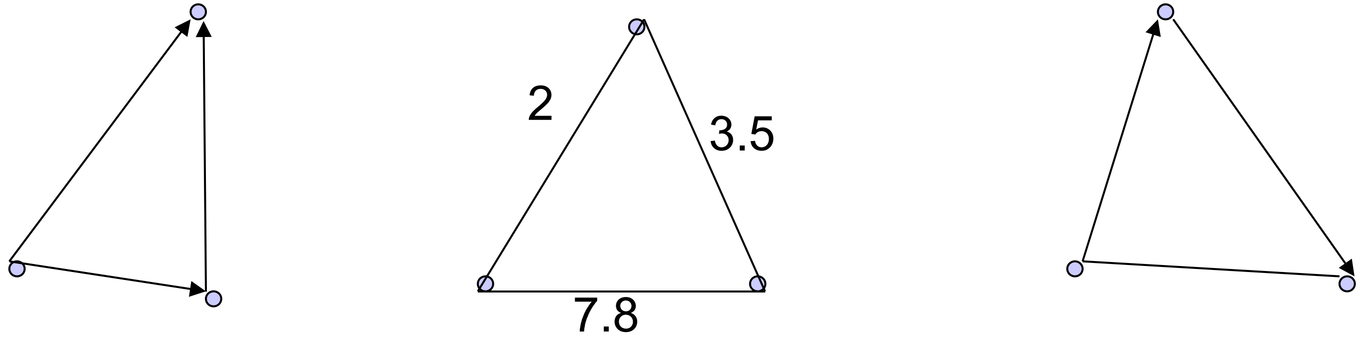
(2)E是无序积V & V的一个多重子集,称E为G的边集,E中元素称为无向边或简称边.

有向图

一个**有向图(Directed Graph)**D是一个二元组<V,E>,即D＝<V,E>,其中,

(1)V是无向图中的顶点集;

(2)E是卡氏积的多重子图,其元素称为**有向边**,也简称**边**.



给每条边赋与权的图G=<V,E>称为加权图，

记为G=<V,E,W >,其中W表示各边权的集合。

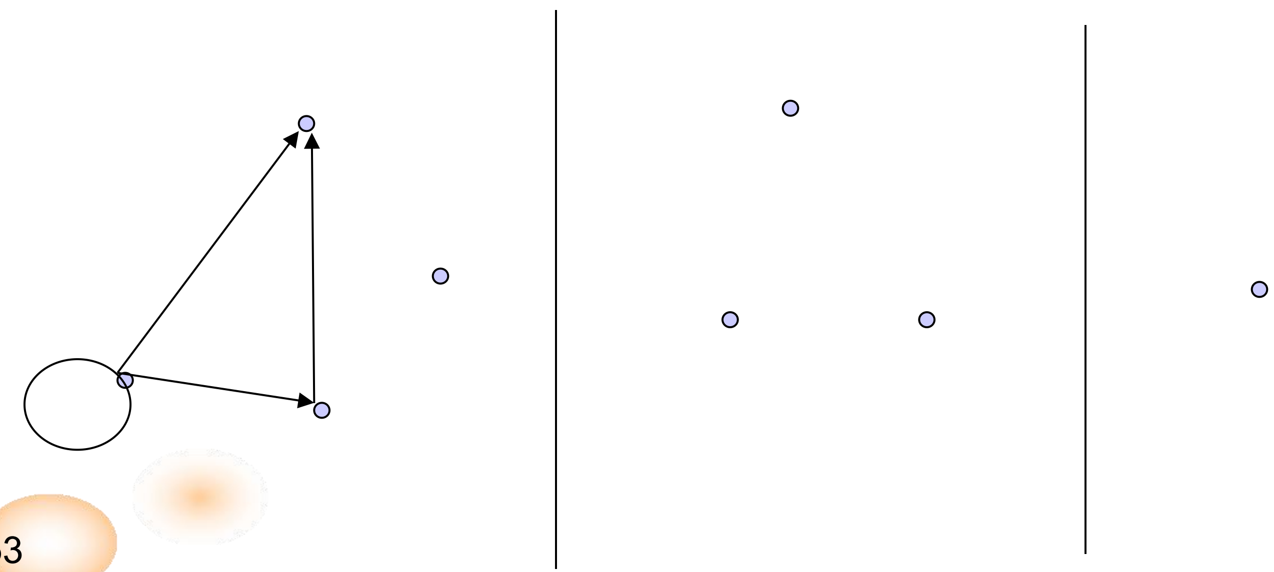
设$G=\langle V,E\rangle$为一无向图或有向图

(1)若V,E都是有穷集合,则称G是有限图.

(2)不与任何结点邻接的结点称为孤立结点(isolated vertex),全为孤立结 点组成的图(视为无向图有向图均可)称为零图($E=\varnothing$).

(3)若$|V|=n$,则称G为n阶图.

(4)若$E=\varnothing$,则G为零图. 特别是,若此时又有$|V|=1$,则称G为平凡图.

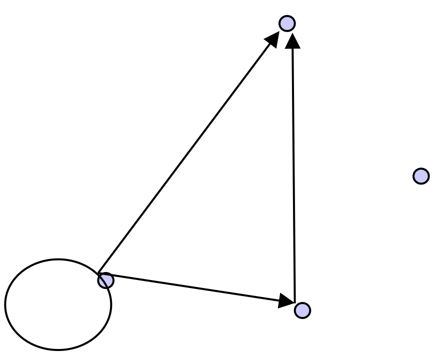


设$e_k=(v_i,v_j)$为无向图$G=<V,E>$中的一条边，

称v_i,v_j为e_k的端点，e_k与v_i(或v_j)是彼此关联的.

无边关联的顶点称为孤立点.

若一条边所关联的两个顶点重合,则称此边为环(loop).



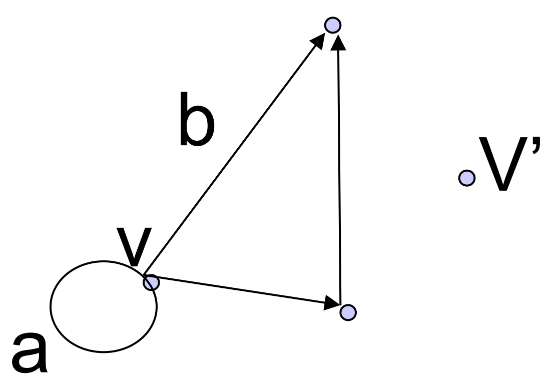
相邻

设无向图$G=\langle V,E\rangle$, $v_i, v_j \in V$, $e_k, e_l \in E$.

(1)若存在一条边e以v_i, v_j为端点,即$e=(v_i, v_j)$,则称v_i, v_j是彼此相邻的,简称相邻的.

(2)若e_k, e_l至少有一个公共端点,则称e_k, e_l是彼此相邻的,简称相邻的.

$$e_k\text{与}v_i(\text{或}v_j)\text{的关联次数}\begin{cases}1 & v_i \neq v_j,\\ 2 & v_i = v_j,\\ 0 & v_i(v_j)\text{不是}e_k\text{的端点}\end{cases}$$



始点 终点

以上两定义对有向图也是类似的

若$e_k = \langle v_i, v_j \rangle$,除称$v_i, v_j$是$e_k$的端点外,还称$v_i$是$e_k$的**始点**, v_j是e_k的**终点**,v_i**邻接到**v_j,v_j**邻接于**v_i.

度

设$G=\langle V,E\rangle$为一无向图,$v_j \in V$,称v_j作为边的端点的次数之和为v_i的度数,简称度,记作$d(v_j)$.

称度数为1的顶点为悬挂顶点(pendant node),它所对应的边为悬挂边.

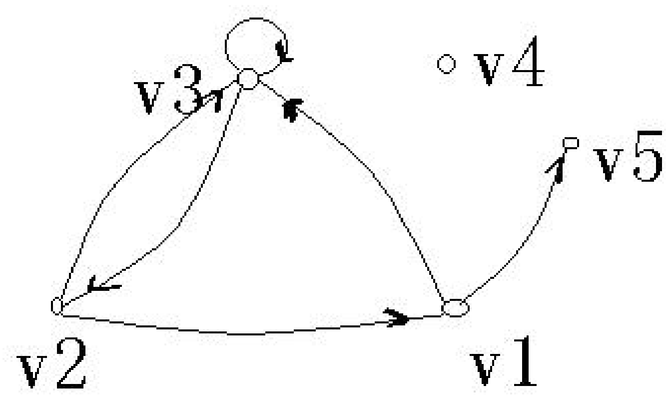
设$D=\langle V,E\rangle$为一有向图,$v_j\in V$,

称v_j作为边的始点的次数之和,为v_j的**出度**,记作$d^+(v_j)$;

称v_j作为边的终点的次数之和,为v_j的**入度**,记作$d^-(v_j)$;

称v_j作为边的端点的次数之和,为v_j的**度数**,简称**度(degree)**,记作$d(v_j)$.

显然$d(v_j)=d^+(v_j)+d^-(v_j)$.



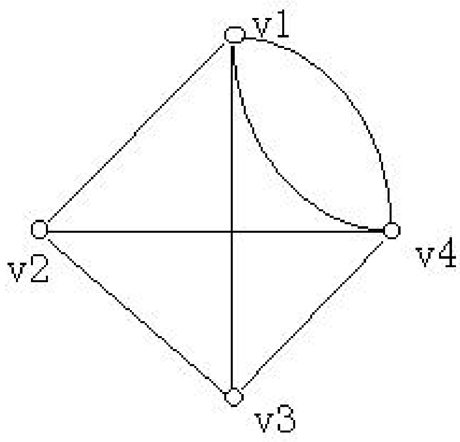
deg(v1)＝3， deg+(v1)＝2， deg-(v1)＝1；
deg(v2)＝3， deg+(v2)＝2， deg-(v2)＝1；
deg(v3)＝5， deg+(v3)＝2， deg-(v3)＝3；
deg(v4)＝deg+(v4)＝deg-(v4)＝0；
deg(v5)＝1， deg+(v5)＝0， deg-(v5)＝1；
其中， v5是悬挂结点， <v1， v5>为悬挂边

最大度和最小度

对于图$G=\langle V,E\rangle$,记

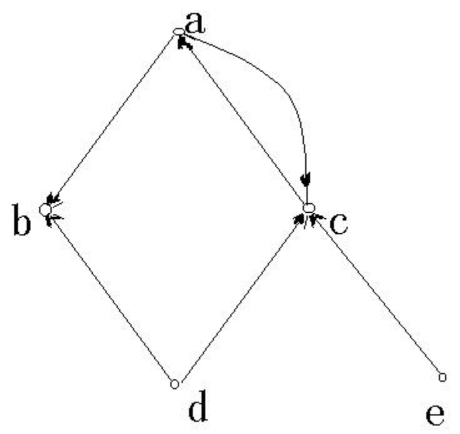
$\Delta(G)=\max\{d(v) \mid v\in V\}$,

$\delta(G)=\min\{d(v) \mid v\in V\}$,分别称为G的**最大度**和**最小度**.

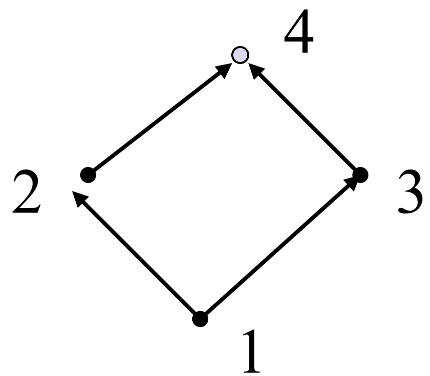


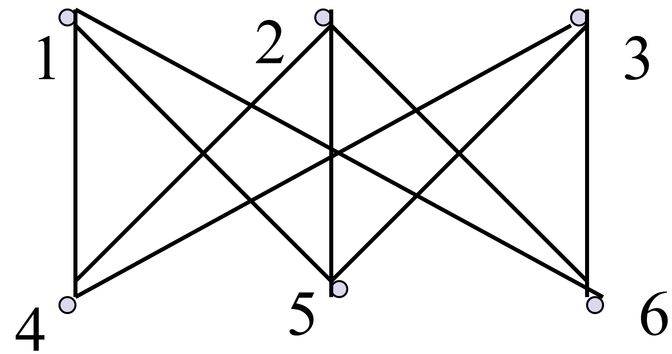
若D＝〈V, E〉是有向图, 除了Δ(D), δ(D)外, 还有**最大出度**、**最大入度**、**最小出度**、**最小入度**, 分别定义为

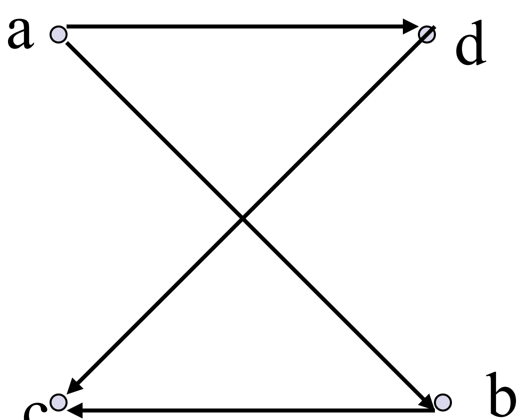
$$\Delta^+(D)=\max\{d^+(v)\,|\,v\in V\};$$
$$\Delta^-(D)=\max\{d^-(v)\,|\,v\in V\};$$
$$\delta^+(D)=\min\{d^+(v)\,|\,v\in V\};$$
$$\delta^-(D)=\min\{d^-(v)\,|\,v\in V\}。$$

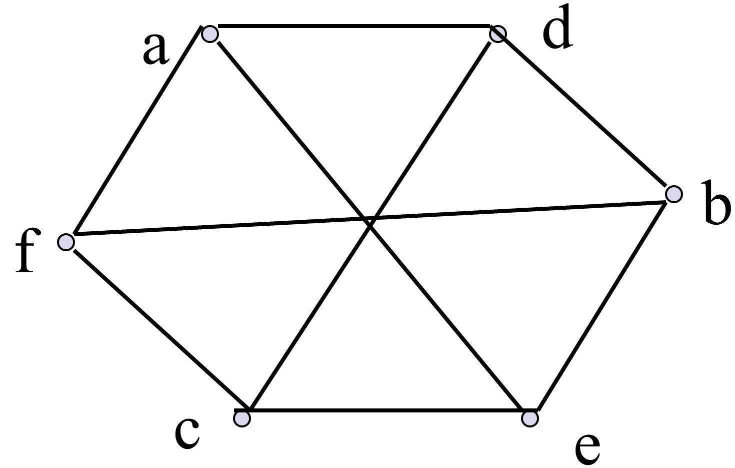


图的图示









$\deg^+(1)=2$, $\deg^-(1)=0$,
$\deg^+(2)=\deg^-(2)=1$, …
$\deg(1)=\ldots=\deg(4)=2$.

$\deg(1)=\deg(2)=\ldots$
$=\deg(6)=3$.

基本定理(握手定理)

设图$G=\langle V,E\rangle$为无向图或有向图,$V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$,$|E|=m$(m为边数),则

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2m.$$

证:对于公式(1)左边的和式,图的每条边贡献的度数恰为2,从而结论成立.

推论

任何图(无向的或有向的)中,度为奇数的顶点个数为偶数.

定理

设有向图D＝<V,E>,V＝{v_1,v_2,…,v_n},

｜E｜＝m,则

$$\sum_{i=1}^{n} d^{+}(V_i) = \sum_{i=1}^{n} d^{-}(V_i) = m.$$

度数序列

设$V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$为图G的顶点集，称$(d(v_1), d(v_2), \ldots, d(v_n))$为G的度数序列.

小结：度的性质

- 所有顶点度的总和为偶数，且为边数的两倍；
- 有向图中出度总和等于入度总和；
- 奇数度结点必为偶数个(反证法可证)；
- 自然数序列$(a_1,a_2,\ldots,a_n)$是某个图的度序列，当且仅当序列中所有数的总和为偶数；

平行边、重数、多重图、简单图

- 在无向图中,关联一对顶点的无向边如果多于1条,称这些边为平行边,又称为重边(mutltiple edge).

平行边的条数称为重数.

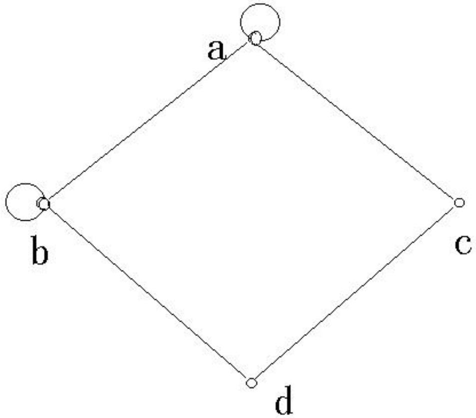
- 在有向图中,关联一对顶点的有向边如果多于1条,且它们的始点与终点相同,则称这些边为有向平行边,简称平行边.

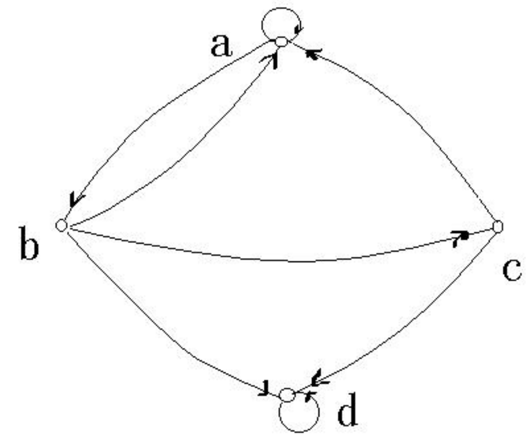
含平行边的图称为多重图(multiple graph).

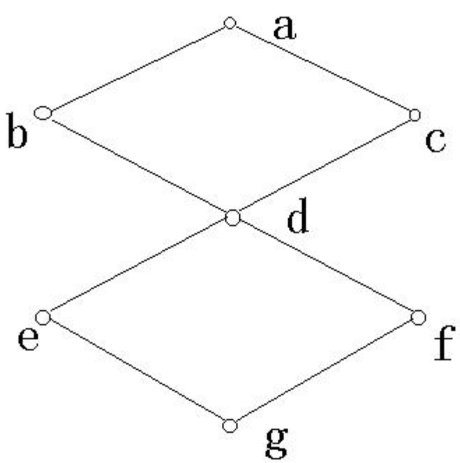
- 既不含平行边,也不含环的图称为简单图(simple graph).

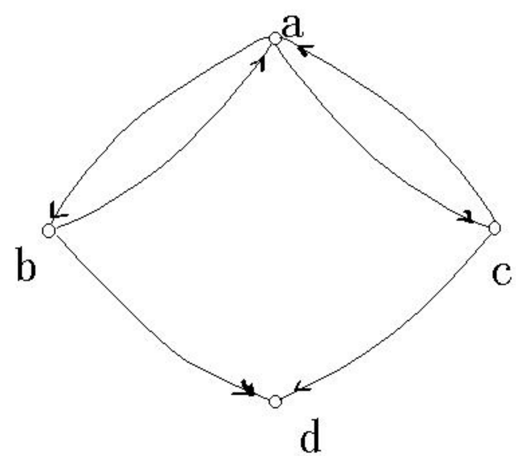
注: 我们以后主要讨论简单图.

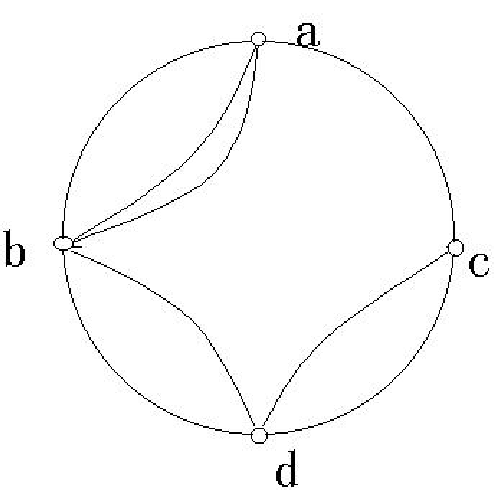
例

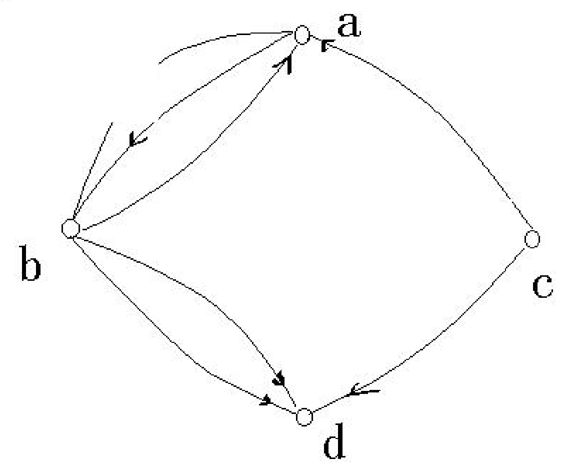








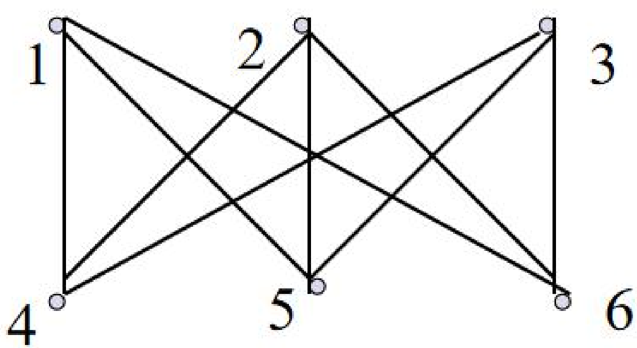




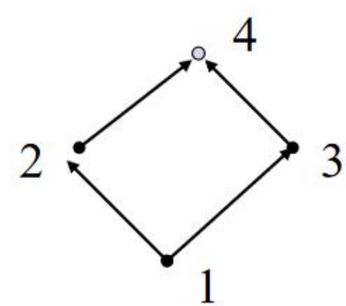
正则图

所有顶点的度均相同的图，称为**正则图**（regular graph），按照顶点的度数k，称为k-正则图.

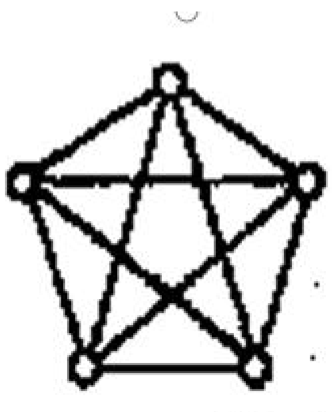
举例：



3-正则图



2-正则图



4-正则图

无向完全图、有向完全图

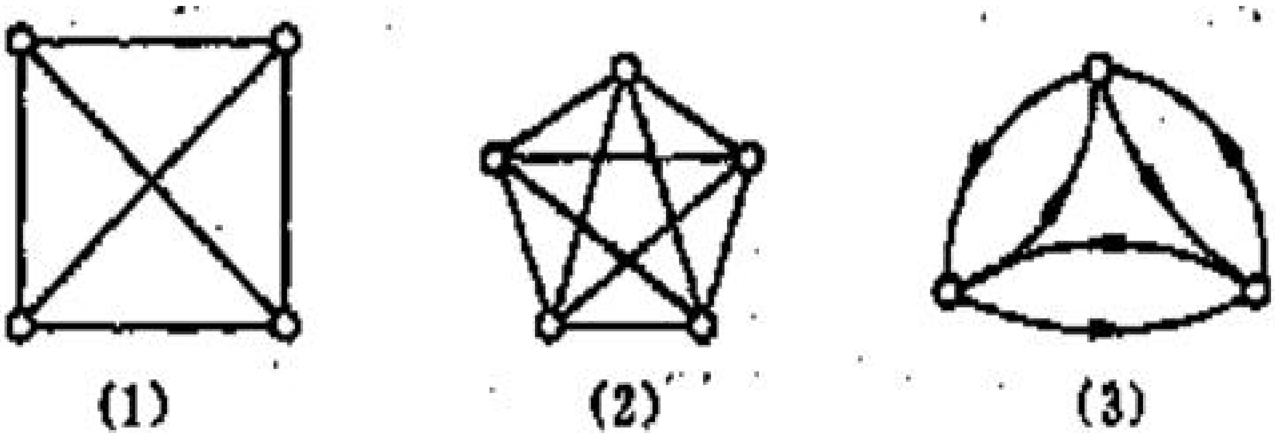
设G=<V,E>是n阶无向简单图,若G中任何顶点都与其余的$n-1$个顶点相邻,则称G为n阶无向完全图,记作K_n.

设D=<V,E>为n阶有向简单图,若对于任意的顶点u,v∈V(u≠v),既有有向边<u,v>,又有<v,u>,则称D是n阶有向完全图.

Kn均指无向完全图.

注：完全图一定是一个正则图.

图14.1



在图14.1(1)中所示为K_4, (2)所示为K_5,

(3)所示为3阶有向完全图.

子图、真子图

设$G=<V,E>$, $G'=<V',E'>$是两个图.若$V'\subseteq V$,且$E'\subseteq E$,则称G'是G的子图, G是G'的母图,记做$G'\subseteq G$.

若$G'\subseteq G$且$G'\neq G$(即$V'\subset V$或$E'\subset E$),则G'是G的真子图.

生成子图、导出子图

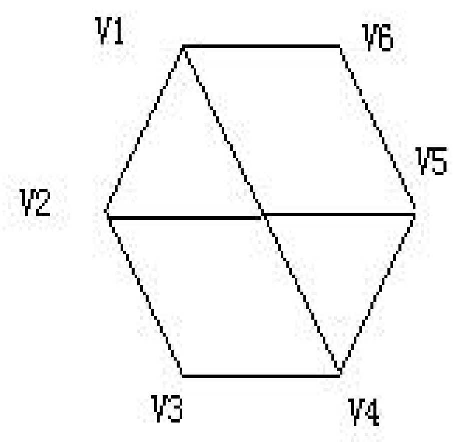
若$G'\subseteq G$且$V'=V$则称G'是G的生成子图.

设$V_1\subseteq V$,且$V_1\neq\varnothing$,以V_1为顶点集,以两端点均在V_1中的全体边为边集的G的子图,称为V_1导出的导出子图.

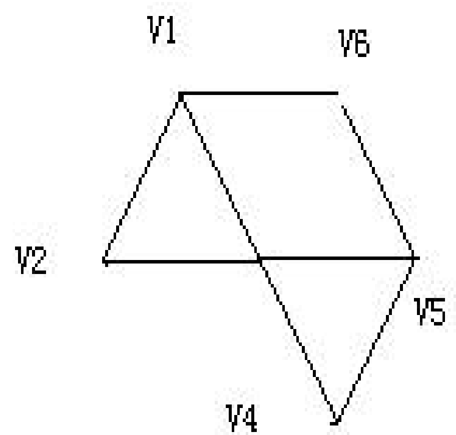
设$E_1\subseteq E$,且$E_1\neq\varnothing$,以E_1为边集,以E_1中关联的顶点的全体为顶点集的G的子图称为E_1导出的导出子图.

图G以及它的真子图G’和生成子图G″。

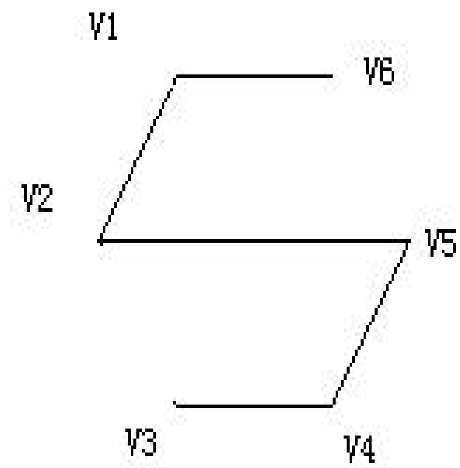
G’是结点集{v_1，v_2，v_4，v_5，v_6}的导出子图。



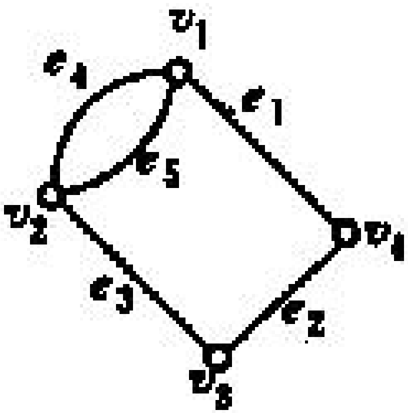
G



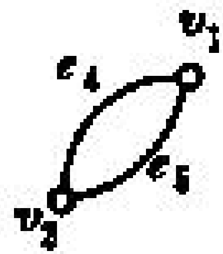
G′



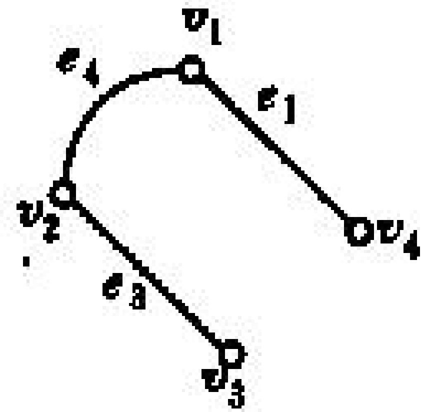
G″


v_1
e_4
e_1
e_5
v_2
v_4
e_3
e_2
v_3

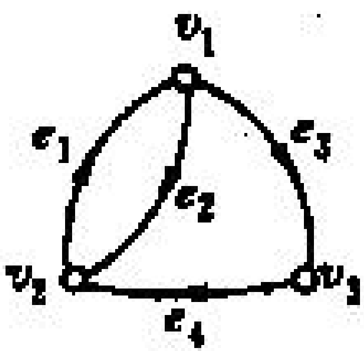
(1)


v_1
e_4
e_5
v_2

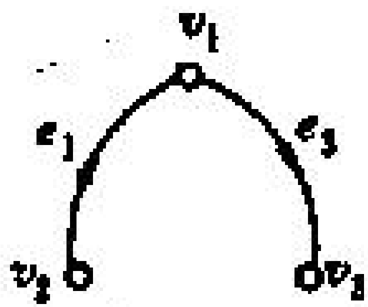
(2)


v_1
e_4
e_1
v_2
v_4
e_3
v_3

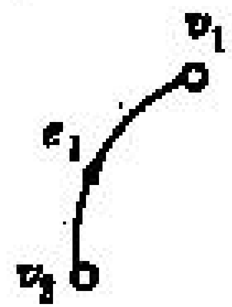
(3)


v_1
e_1
e_3
e_2
v_2
v_3
e_4

(4)

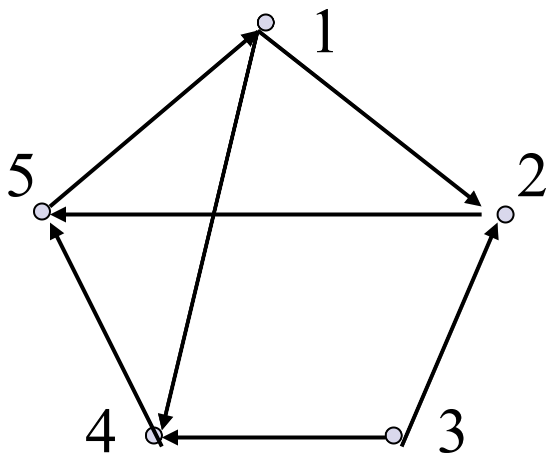

v_1
e_1
e_3
v_2
v_3

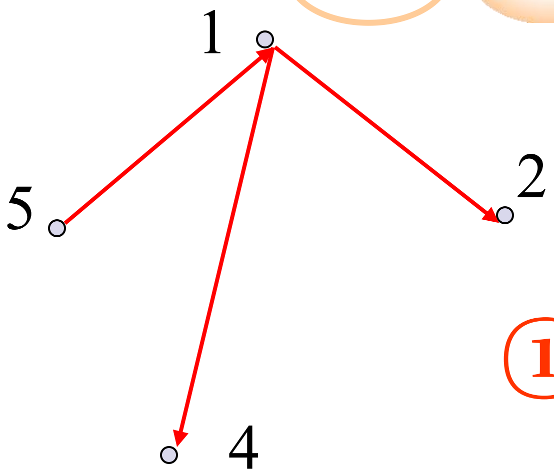
(5)

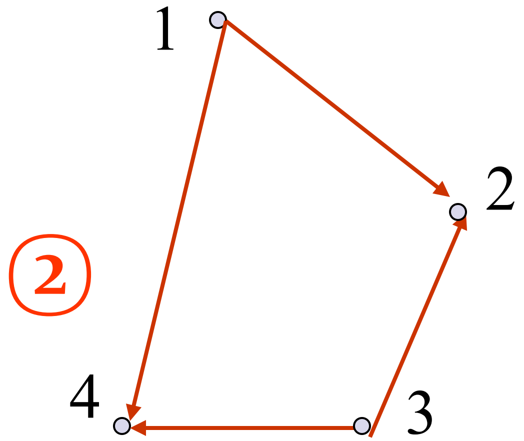

v_1
e_1
v_2

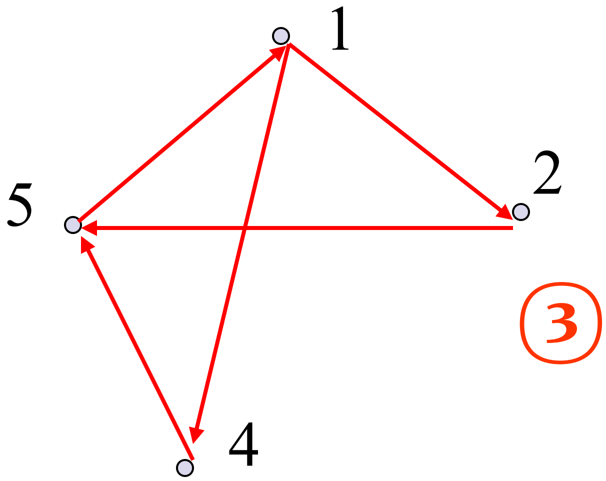
(6)

有向图子图举例









①：由$\{(1,2),(1,4),(5,1)\}$导出的子图；

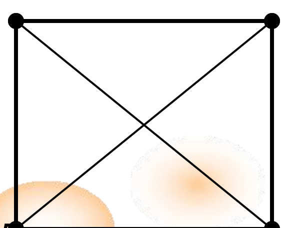
②：由$\{(1,2),(3,2),(3,4),(1,4)\}$导出的子图（也是此4点导出的子图）； ③：由$\{1,2,4,5\}$导出的子图.

17:17:54

完全图与补图

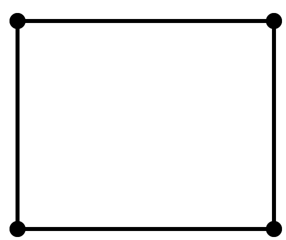
$E=V\times V$的有向图$G=\langle V,E\rangle$称为**有向完全图**. n个结点的**无向简单图**如果任二不同结点都相邻时，称为n结点**无向完全图**，记为 K_n.

n 结点线图$G=\langle V,E\rangle$与$H=\langle V,E'\rangle$称**互为补图**(记为$G=H'$ 或$H=G'$)，如果E'是n结点完全图的边集与E的差集. 下列二无向图G与H互为补图.



K_4

G



H

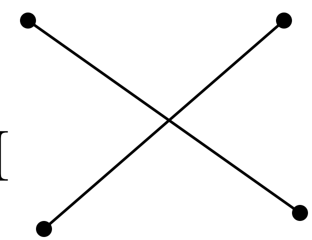
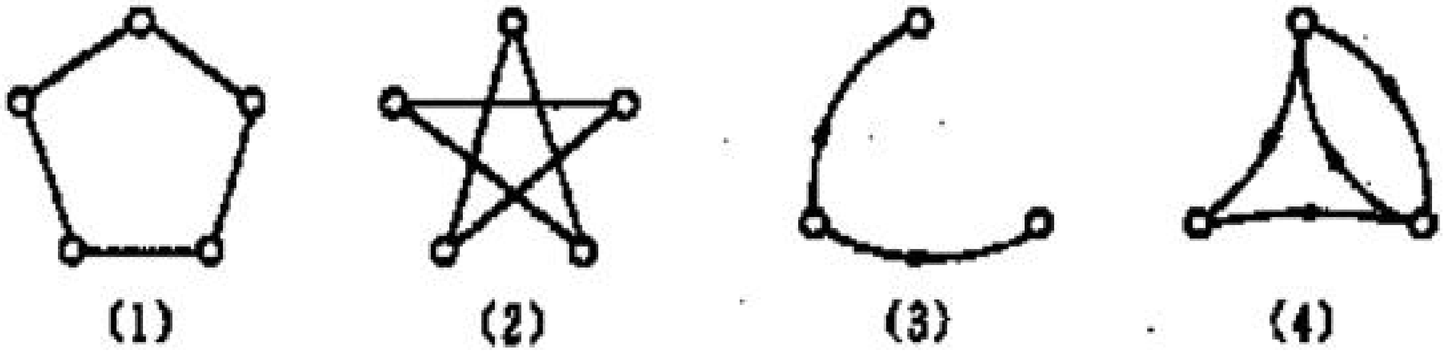


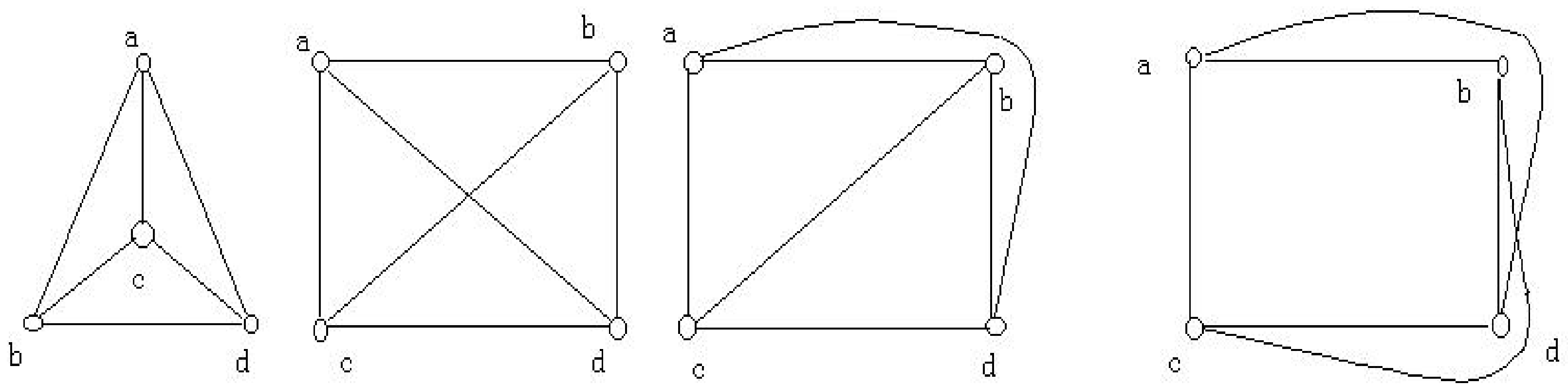
图14.2



图的同构

例 如下图(a)、(b)、(c)、(d)所示，

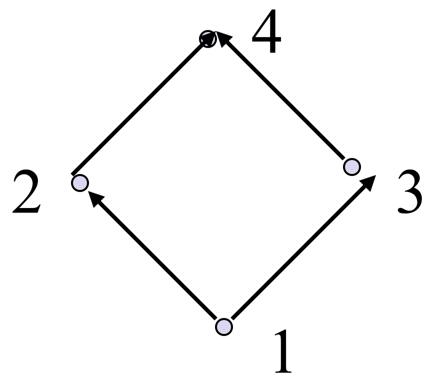
图(a)、图(b)、图(c)和图(d)所表示的图形实际上都是一样的。



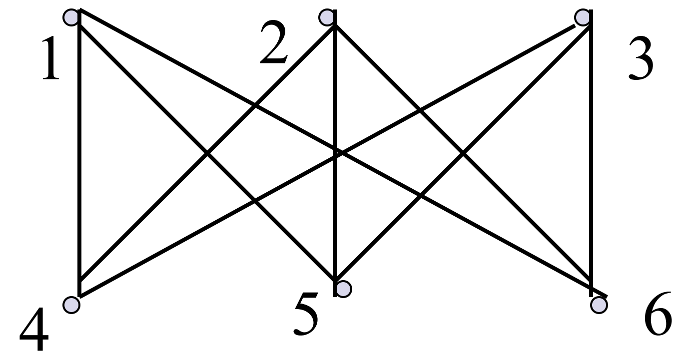
同构

设两个无向图 $G_1=<V_1,E_1>$, $G_2=<V_2,E_2>$,如果存在双射函数θ: $V_1 \to V_2$,使得对于任意的 $e=(v_i,v_j) \in E_1$ 当且仅当 $e'=(\theta(v_i), \theta(v_j)) \in E_2$,并且e与e'的重数相同,则称 G_1 与 G_2 是**同构**的,记作 $G_1 \cong G_2$.

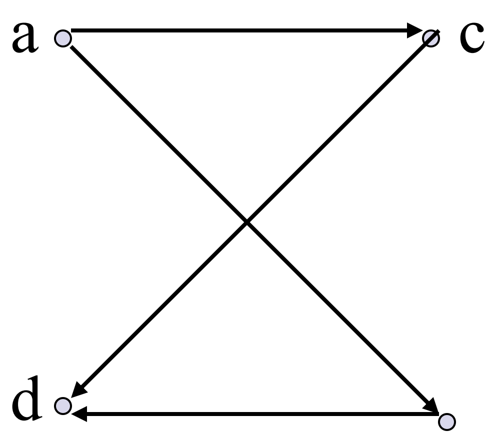
同构图举例



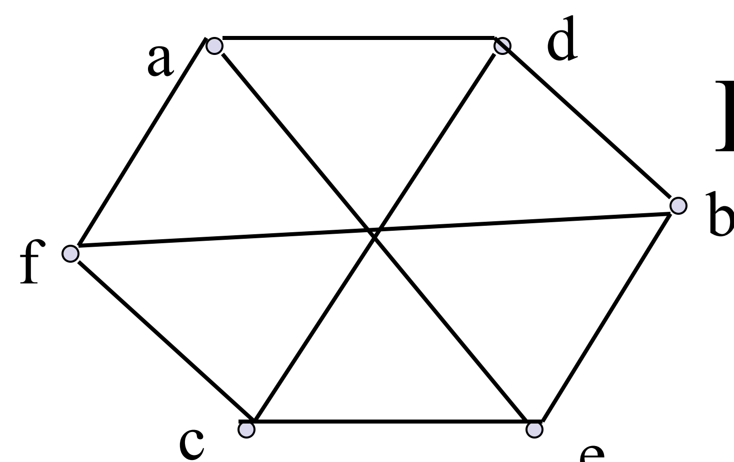
G



H



G’



H’

G ≅ G’

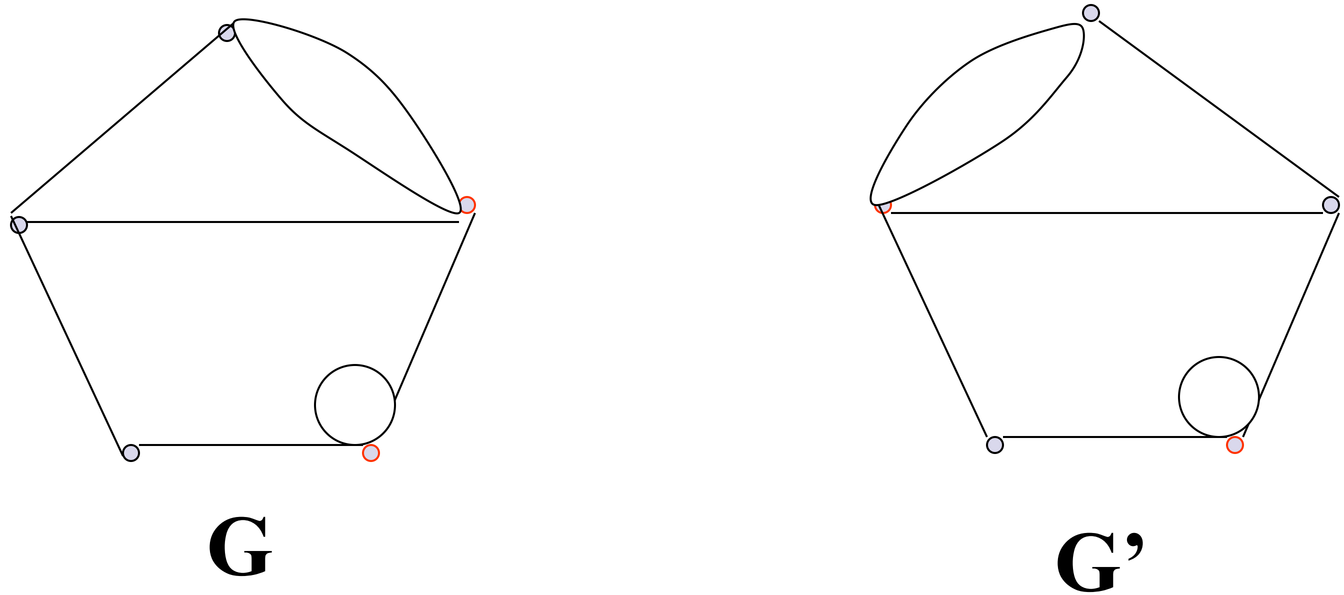
1→a, 2→b, 3→c, 4→d

H ≅ H’

1→a, 2→b, 3→c, 4→d, 5→e, 6→f

非同构图举例

存在结点数及每个结点对应度都相等的两个图仍然不同构的情况. 一例如下：(注意：两个4度点或邻接或不相邻接)



有向图的同构

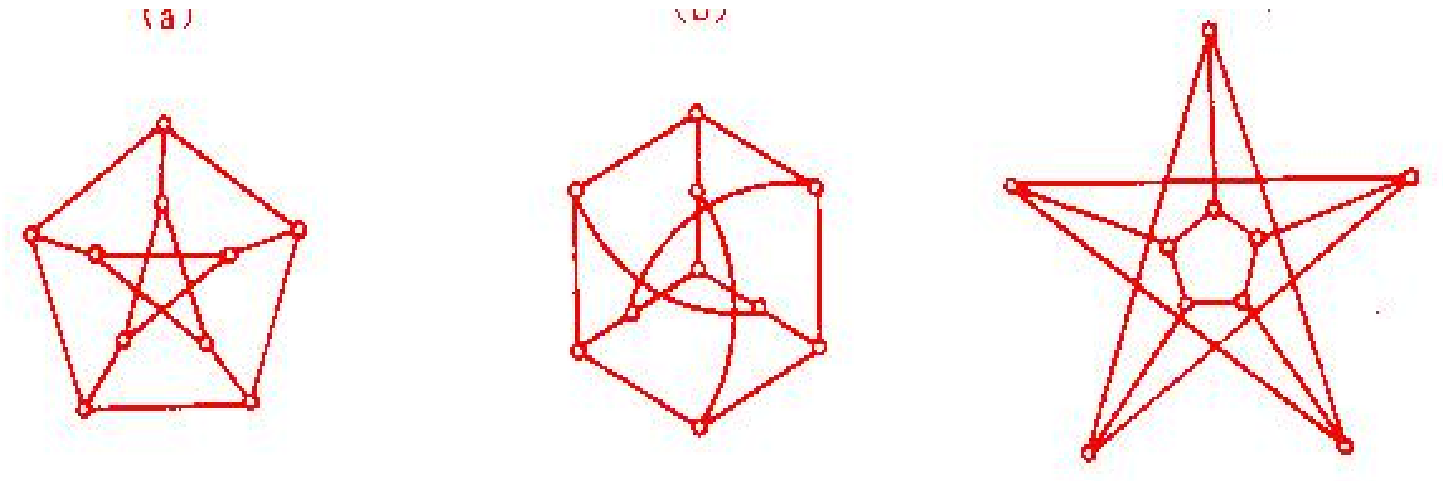
定义:对给定两个有向图 $D=\langle V,E\rangle, D'=\langle V',E'\rangle$,若存在双射 $f:V\to V'$ 使对任意$a,b\in V$,

$(a,b)\in E \Leftrightarrow (f(a),f(b))\in E'$,并且$(a,b)$与$(f(a),f(b))$有相同重数,则称 G 与 G′同构,记为$G\cong G'$.(注意:要保持方向不变)

两图同构$\Rightarrow$1、顶点个数相同

2、边的条数相同

3、度数相同的结点数相同

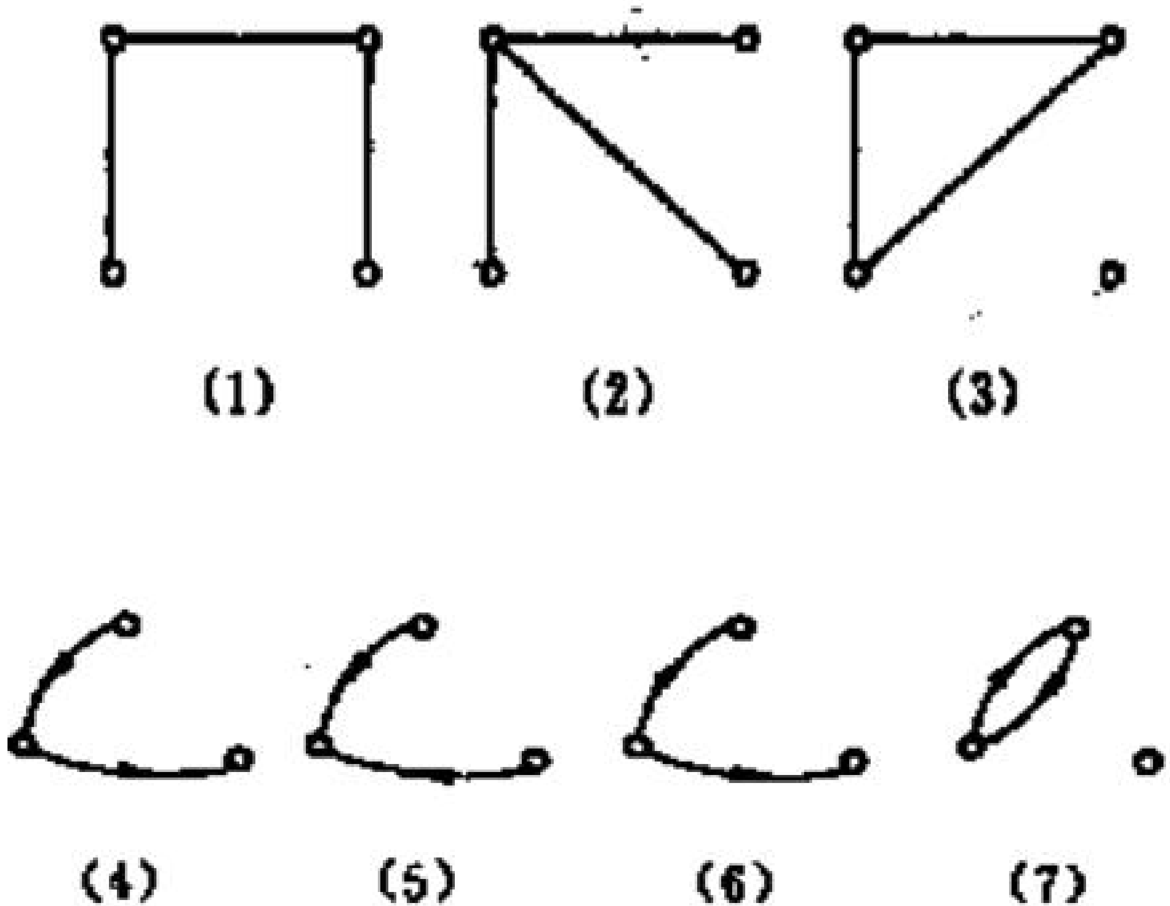


(d) (e) (f)

(d)$\cong$(e)$\cong$(f). (d)所示图称为彼德森图.

例14.3 (1)画出4个顶点3条边的所有可能非同构的无向简单图；

(2)画出3个顶点2条边的所有可能非同构的有向简单图.


(1)
(2)
(3)
(4)
(5)
(6)
(7)

课后习题

P312-313:

7;　　　　14;　　　　20;