第十六章 Tree

1. 无向树和生成树
2. 根树

树

- 连通而不含回路的无向图称为无向树,简称树,常用T表示树.
- 连通分支数大于等于2,且每个连通分支均是树的非连通无向图称为森林.
- 平凡图称为平凡树.

树叶

- 设$T=\langle V,E\rangle$为一棵无向树,$v\in V$,若$d(v)=1$,则称v为T的**树叶**.若$d(v)\geq 2$,则称v为T的分支点.

定理 树的判定定理

- 设G＝<V,E>,则下面各命题是等价的:

  (1)G连通而不含回路;

  (2)G的每对顶点之间具有唯一的一条路径;

  (3)G是连通的且$n=m+1$;

  (4)G中无回路且$n=m+1$;

(5)G中无回路,但在G中任两个不相邻的顶点之间增加一条边,就形成唯一的一条初级回路;

(6)G是连通的且G中每条边都是桥;

(7)G是连通的,但删除任何一条边后,就不连通了.

- 其中n为G中顶点数,m为边数.

定理

- 设T＝<V,E>是n阶非平凡的树,则T中至少有2片树叶.

证明 因为T是非平凡树,所以T中每个顶点的度数都大于等于1,设有k片树叶,则有(n-k)个顶点度数大于等于2,由握手定理可知

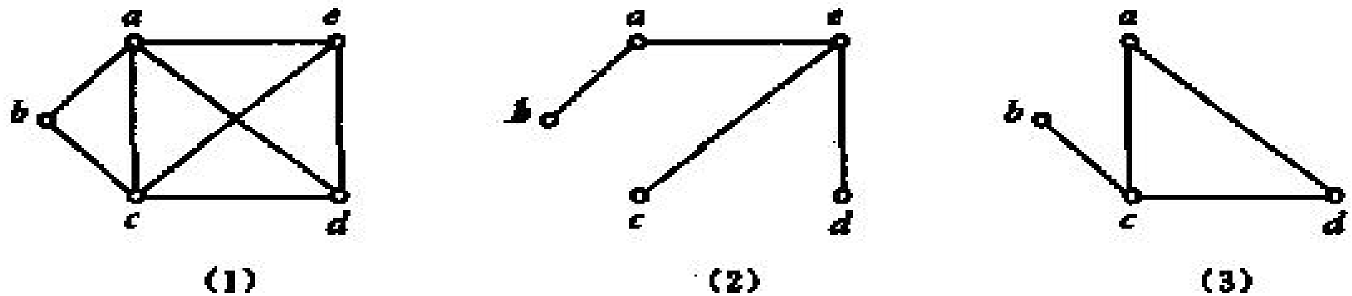
$$2m=\sum_{i=1}^{n} d(v_i) \geq k+2(n-k),$$

由定理9.1可知m＝n−1,将此结果代入上式经过整理得k⩾2,这说明T至少有2片树叶.

生成树

- 设G＝<V,E>是无向连通图,T是G的生成子图,并且T是树,则称T是G的生成树.
- G在T中的边称为T的树枝,
- G不在T中的边称为T的弦.
- T的所有弦的集合的导出子图称为T的余树.

Tree and spanning tree



(2)为(1)的一棵生成树T,(3)为T的余树,注意余树不一定是树.

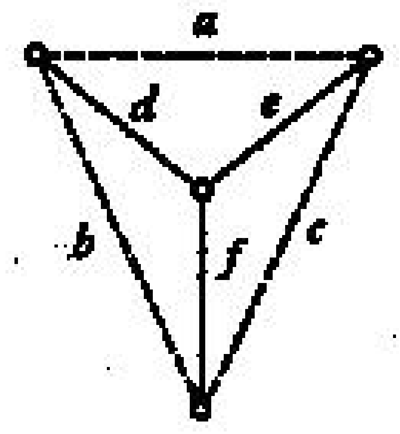
定理 任何连通图G至少存在一棵生成树.

推论1 设n阶无向连通图G有m条边,则$m \geq n-1$.

推论2 设n阶无向连通图G有m条边,T是G的生成树,T'是T的余树,则T'中有$m-n+1$条边.

Tree and spanning tree

图



基本回路

在图中,实边所示的子图是图G的一棵生成树T,d,e,f为T的树枝,a,b,c为T的弦.在T上加弦a,产生G的一个初级回路aed.在T上加弦b,产生G的一个初级回路bdf.在T上加弦c,产生G的一个初级回路cef.这3个回路中每一个回路都只含一条弦,其余的边都是树枝,这样的回路称为基本回路.

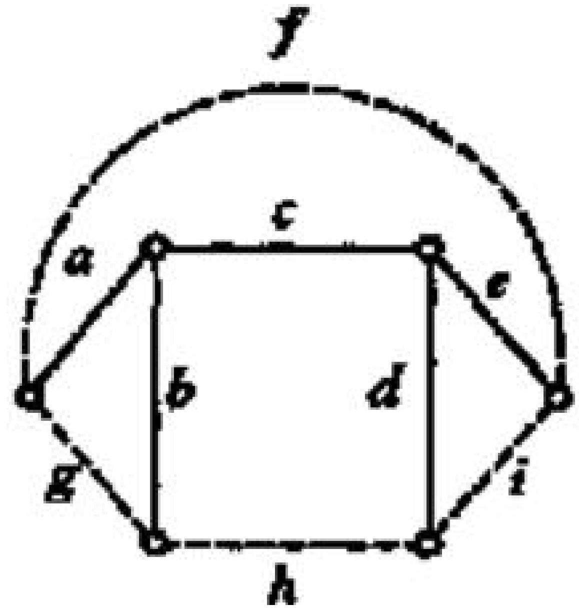
基本回路系统

定义 设T是n阶连通图$G=\langle V,E\rangle$的一棵生成树,G有n条边.设$e_1,e_2\cdots,e_{m-n+1}$为T的弦,设C_r是T加弦e_r产生的G的回路,$r=1,2,\ldots m-n+1$.称C_r为对应于弦e_r的基本回路,称$\{C_1,C_2,\cdots,C_{m-n+1}\}$为对应生成树T的基本回路系统.

基本割集系统

定义 设T是n阶连通图$G=\langle V,E\rangle$的一棵生成树,称T的n-1个树枝对应的G的n-1个割集(每个割集只含一个树枝,其余的边都是弦)$S_1,S_2,\cdots,S_{n-1}$为对应生成树T的G的基本割集,称$\{S_1,S_2,\cdots,S_{n-1}\}$为对应生成树T的**基本割集系统**.

对一个n阶连通图G来说,对应不同的生成树的基本割集可能不一样,但基本割集的个数必为n-1个,这也是G的固有特性.



例 图G中,实线边所构成的子图是G的一棵生成树T,求T对应的基本回路和基本回路系统,基本割集和基本割集系统.

解: G中顶点数$n=6$,边数$m=9$,基本回路个数为$m-n+1=4$,即T有4条弦f,g,h,i.对应的基本回路:

$C_f=facd$; $C_g=gba$;

$C_h=hdcb$; $C_i=ied$.

基本回路系统为$\{C_f,C_g,C_h,C_i\}$

T有5个树枝a,b,c,d,e,因而有5个基本割集:

$$S_a=\{a,g,f\};$$

$$S_b=\{b,g,h\};$$

$$S_c=\{c,f,h\};$$

$$S_d=\{d,i,h\};$$

$$S_e=\{e,f,i\};$$

基本割集系统为$\{S_a, S_b, S_c, S_d, S_e\}$.

Tree and spanning tree

定义 设无向连通带权图 $G=\langle V,E,W\rangle$, T是G的一棵生成树. T各边带权之和称为T的权, 记作$W(T)$. G的所有生成树中带权最小的生成树称为最小生成树.

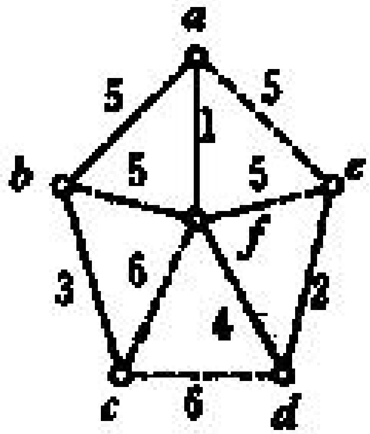
Kruskal算法

设n阶无向连通带权图$G=\langle V,E,W\rangle$中有m条边$e_1,e_2\cdots,e_m$,它们带的权分别为$a_1,a_2,\ldots a_m$,不妨设$a_1\leq a_2\leq\ldots\leq a_m$.

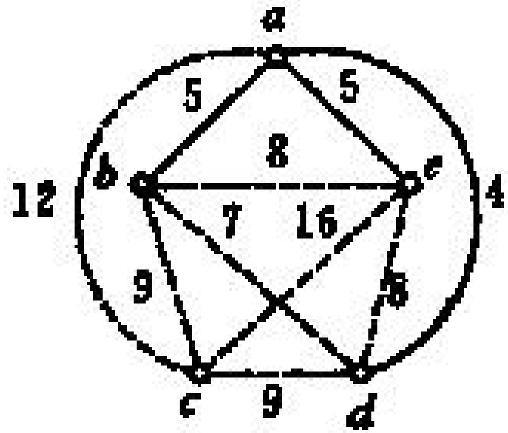
(1)取e_1在T中(e_1非环,若e_2为环,则弃e_1);

(2)若e_2不与e_1构成回路,取e_2在T中,否则弃e_2,再查e_3,继续这一过程,直到形成生成树T为止.用以上算法生成的T是最小生成树.

T 1 nning tree



(1)



(2)

实边所示的生成树均由避圈法得到的最小生成树.图(1)中,W(T)=15,图(2)中,W(T)=23.

课后习题

P340:

3; **24;** **25;**