

7.7 偏序关系

主要内容

- 偏序关系

 - 偏序关系的定义

 - 偏序关系的实例

- 偏序集与哈斯图

- 偏序集中的特殊元素及其性质

 - 极大元、极小元、最大元、最小元

 - 上界、下界、最小上界、最大下界

定义7.19

偏序关系：非空集合 A 上的自反、反对称和传递的关系，记作 \leq 。设 \leq 为偏序关系，如果 $\langle x, y \rangle \in \leq$ ，则记作 $x \leq y$ ，读作 x “小于或等于” y 。

实例

集合 A 上的恒等关系 I_A 是 A 上的偏序关系。

小于或等于关系，整除关系和包含关系也是相应集合上的偏序关系。

定义7.20 设 R 为非空集合 A 上的偏序关系,

(1) $x, y \in A$, x 与 y **可比** $\Leftrightarrow x \leq y \vee y \leq x$

(2) 任取元素 x 和 y , 可能有下述几种情况发生:

$x < y$ (或 $y < x$), $x = y$, x 与 y 不是可比的

定义7.21 R 为非空集合 A 上的偏序关系,

(1) $\forall x, y \in A$, x 与 y 都是可比的, 则称 R 为**全序** (或线序)

实例: 数集上的小于或等于关系是全序关系, 整除关系不是正整数集合上的全序关系

定义7.22 $x, y \in A$, 如果 $x < y$ 且不存在 $z \in A$ 使得 $x < z < y$, 则称 y

覆盖 x .

例如 $\{1, 2, 4, 6\}$ 集合上整除关系, 2 覆盖 1, 4 和 6 覆盖 2, 4 不覆盖 1.³

偏序集与哈斯图

定义7.23 集合 A 和 A 上的偏序关系 \leq 一起叫做**偏序集**, 记作 $\langle A, \leq \rangle$.

实例: $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle, \langle P(A), R_{\subseteq} \rangle$

哈斯图: 利用偏序关系的自反、反对称、传递性进行简化的关系图

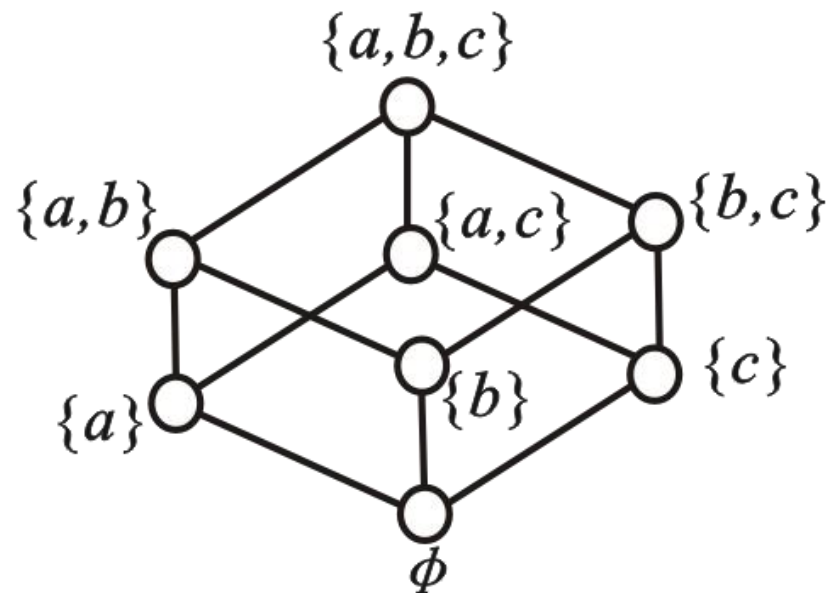
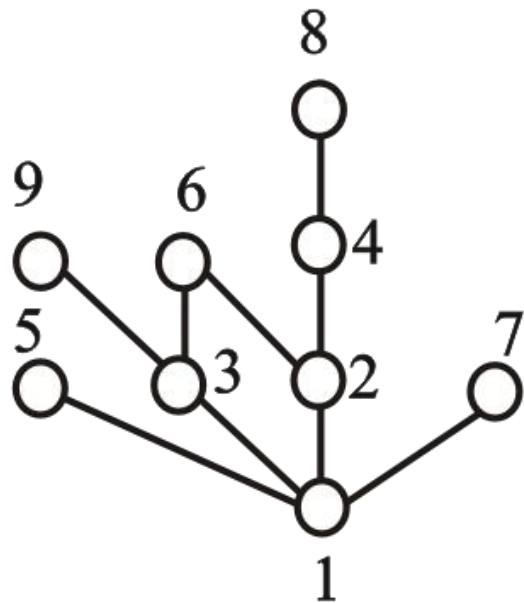
特点:

- (1) 每个结点没有环
- (2) 两个连通的结点之间的序关系通过结点位置的高低表示, 位置低的元素的顺序在前
- (3) 具有覆盖关系的两个结点之间连边

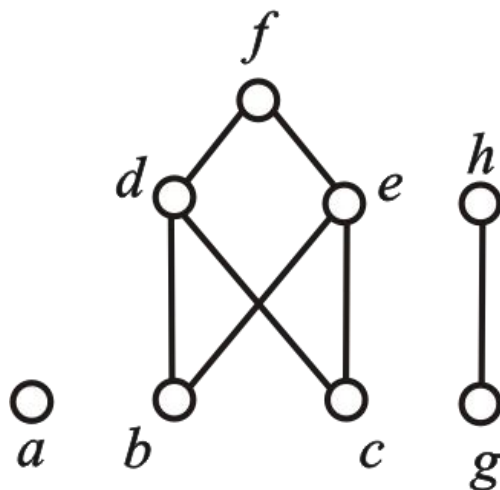
实例



例12 偏序集 $\langle \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}, R_{\text{整除}} \rangle$ 和 $\langle P(\{a,b,c\}), R_{\subseteq} \rangle$ 的哈斯图.



例13 已知偏序集 $\langle A, R \rangle$ 的哈斯图如下图所示, 试求出集合 A 和关系 R 的表达式.



解 $A = \{ a, b, c, d, e, f, g, h \}$

$R = \{ \langle b, d \rangle, \langle b, e \rangle, \langle b, f \rangle, \langle c, d \rangle, \langle c, e \rangle, \langle c, f \rangle, \langle d, f \rangle, \langle e, f \rangle, \langle g, h \rangle \} \cup I_A$

偏序集中的特殊元素

定义7.24 设 $\langle A, \leq \rangle$ 为偏序集, $B \subseteq A, y \in B$

- (1) 若 $\forall x(x \in B \rightarrow y \leq x)$ 成立, 则称 y 为 B 的**最小元**
- (2) 若 $\forall x(x \in B \rightarrow x \leq y)$ 成立, 则称 y 为 B 的**最大元**
- (3) 若 $\forall x(x \in B \wedge x \leq y \rightarrow x=y)$ 成立, 则称 y 为 B 的**极小元**
- (4) 若 $\forall x(x \in B \wedge y \leq x \rightarrow x=y)$ 成立, 则称 y 为 B 的**极大元**

性质:

- (1) 对于有穷集, 极小元和极大元一定存在, 可能存在多个.
- (2) 最小元和最大元不一定存在, 如果存在一定惟一.
- (3) 最小元一定是极小元; 最大元一定是极大元.
- (4) 孤立结点既是极小元, 也是极大元.

偏序集中的特殊元素

定义7.25 设 $\langle A, \leq \rangle$ 为偏序集, $B \subseteq A, y \in A$

- (1) 若 $\forall x(x \in B \rightarrow x \leq y)$ 成立, 则称 y 为 B 的**上界**
- (2) 若 $\forall x(x \in B \rightarrow y \leq x)$ 成立, 则称 y 为 B 的**下界**
- (3) 令 $C = \{y \mid y \text{ 为 } B \text{ 的上界}\}$, C 的最小元为 B 的**最小上界或上确界**
- (4) 令 $D = \{y \mid y \text{ 为 } B \text{ 的下界}\}$, D 的最大元为 B 的**最大下界或下确界**

性质:

- (1) 下界、上界、下确界、上确界不一定存在
- (2) 下界、上界存在不一定惟一
- (3) 下确界、上确界如果存在, 则惟一
- (4) 集合的最小元是其下确界, 最大元是其上确界; 反之不对.

实例



例14 设偏序集 $\langle A, \leq \rangle$, 求 A 的极小元、最小元、极大元、最大元, 设 $B = \{b, c, d\}$, 求 B 的下界、上界、下确界、上确界.

解

极小元: a, b, c, g ;

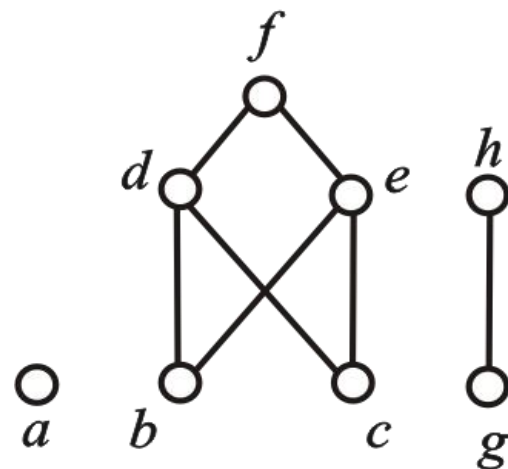
极大元: a, f, h ;

没有最小元与最大元.

B 的下界和最大下界都不存在;

上界有 d 和 f ,

最小上界为 d .



例15 设 X 为集合, $A = P(X) - \{\emptyset\} - \{X\}$, 且 $A \neq \emptyset$. 若 $|X| = n, n \geq 2$.
问:

- (1) 偏序集 $\langle A, R_{\subseteq} \rangle$ 是否存在最大元?
- (2) 偏序集 $\langle A, R_{\subseteq} \rangle$ 是否存在最小元?
- (3) 偏序集 $\langle A, R_{\subseteq} \rangle$ 中极大元和极小元的一般形式是什么?
并说明理由.

解 (1) $\langle A, R_{\subseteq} \rangle$ 不存在最小元和最大元, 因为 $n \geq 2$.

(2) $\langle A, R_{\subseteq} \rangle$ 的极小元就是 X 的所有单元集, 即 $\{x\}, x \in X$.

(3) $\langle A, R_{\subseteq} \rangle$ 的极大元恰好比 X 少一个元素, 即 $X - \{x\}, x \in X$.



课后习题

P143:

46