

# 第三章 命题逻辑的推理理论



## 3.1 推理的形式结构

推理的正确与错误

推理的形式结构

判断推理正确的方法

推理定律

## 3.2 自然推理系统 $P$

形式系统的定义与分类

自然推理系统 $P$

在 $P$ 中构造证明:直接证明法、附加前提证明法、归谬法



# 3.1 推理的形式结构

**定义3.1** 设 $A_1, A_2, \dots, A_k, B$ 为命题公式. 若对于每组赋值,  
 $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k$  为假, 或当 $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k$ 为真时,  $B$ 也为真,  
则称由**前提** $A_1, A_2, \dots, A_k$ 推出**结论** $B$ 的推理是**有效的或正确**  
**的**, 并称 $B$ 是**有效结论**. (有些课本将这个称为**逻辑蕴涵**)

## 推理的形式结构

1. 前提:  $A_1, A_2, \dots, A_k$

结论:  $B$

2. 记为:  $\{A_1, A_2, \dots, A_k\} \vdash B$

若推理正确, 记为 $\{A_1, A_2, \dots, A_n\} \models B$

# 形式结构的等价形式



**定理3.1** 由命题公式 $A_1, A_2, \dots, A_k$ 推 $B$ 的推理正确当且仅当 $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k \rightarrow B$ 为重言式。

若推理正确, 记为 $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k \Rightarrow B$

理解:

(1)  $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k \Rightarrow B$ 可以理解为公式 $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k$ 为真时, 公式 $B$ 一定为真; 反过来当 $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k$ 为假时, 公式 $B$ 可真可假。

所以, 推理正确不能保证结论一定正确

(2) 推理正确, 其实反映了两个公式 $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k$ 与 $B$ 之间的一种关系, 即 $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k$ 为真, 则 $B$ 一定为真。

# 形式结构的等价形式



**问题：**如何判断一个推理  $\{A_1, A_2, \dots, A_k\} \vdash B$  是否正确呢？

判断推理是否正确的方法：

1. 真值表法
2. 等值演算法
3. 主析取范式法

# 推理实例



**例1:** 判断下面推理是否正确

- (1) 若今天是1号, 则明天是5号. 今天是1号. 所以, 明天是5号.
- (2) 若今天是1号, 则明天是5号. 明天是5号. 所以, 今天是1号.

解 设  $p$ : 今天是1号,  $q$ : 明天是5号.

推理的形式结构:  $(p \rightarrow q) \wedge p \rightarrow q$

(1) 用等值演算法

$$\begin{aligned} & (p \rightarrow q) \wedge p \rightarrow q \\ \Leftrightarrow & \neg((\neg p \vee q) \wedge p) \vee q \\ \Leftrightarrow & \neg p \vee \neg q \vee q \Leftrightarrow 1 \end{aligned}$$

由定理3.1可知推理正确

# 推理实例



推理的形式结构:  $(p \rightarrow q) \wedge q \rightarrow p$

(2) 用主析取范式法

$$(p \rightarrow q) \wedge q \rightarrow p$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge q \rightarrow p$$

$$\Leftrightarrow \neg ((\neg p \vee q) \wedge q) \vee p$$

$$\Leftrightarrow \neg q \vee p$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)$$

$$\Leftrightarrow m_0 \vee m_2 \vee m_3$$

结果不含  $m_1$ , 故01是成假赋值, 所以推理不正确

# 推理实例



**例2：**判断下面推理是否正确

(1) 下午马芳或去看电影或去游泳；她没去看电影；所以，她去游泳了。

解 设  $p$ ：马芳下午去看电影， $q$ ：马芳下午去游泳。

推理的形式结构： $((p \vee q) \wedge \neg p) \rightarrow q$

用等值演算法  $((p \vee q) \wedge \neg p) \rightarrow q$

$$\Leftrightarrow ((p \wedge \neg p) \vee (q \wedge \neg p)) \rightarrow q$$

$$\Leftrightarrow (q \wedge \neg p) \rightarrow q$$

$$\Leftrightarrow \neg(q \wedge \neg p) \vee q$$

$$\Leftrightarrow \neg q \vee p \vee q \Leftrightarrow 1$$

可知推理正确

# 推理实例



**例2：**判断下面推理是否正确

(2) 若下午气温超过30度，则马芳必去游泳；若她去游泳，她就不去看电影；所以，若马芳没去看电影，则气温一定超过30度。

解 设  $p$ ：下午气温超过30度， $q$ ：马芳下午去游泳，

$r$ ：马芳下午去看电影

前提： $p \rightarrow q$ ， $q \rightarrow \neg r$

结论： $\neg r \rightarrow p$

推理的形式结构：

$$((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow \neg r)) \rightarrow (\neg r \rightarrow p)$$

上面了解了逻辑蕴涵式的定义和判别方法，下面我们来看一些**重要的逻辑蕴涵式**。



# 推理定律——重言蕴涵式



- |  |             |
|--|-------------|
| 1. $A \Rightarrow (A \vee B)$  | 附加律         |
| 2. $(A \wedge B) \Rightarrow A$  | 化简律         |
| 3. $(A \rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B$  | 假言推理        |
| 4. $(A \rightarrow B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$  | 拒取式         |
| 5. $(A \vee B) \wedge \neg B \Rightarrow A$  | 析取三段论       |
| 6. $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \Rightarrow (A \rightarrow C)$                                | 假言三段论       |
| 7. $(A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C) \Rightarrow (A \leftrightarrow C)$                    | 等价三段论       |
| 8. $(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \wedge (A \vee C) \Rightarrow (B \vee D)$                     | 构造性二难       |
| $(A \rightarrow B) \wedge (\neg A \rightarrow B) \Rightarrow B$  | 构造性二难(特殊形式) |
| 9. $(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \wedge (\neg B \vee \neg D) \Rightarrow (\neg A \vee \neg C)$ | 破坏性二难       |

每个等值式可产生两个推理定律

如, 由  $A \leftrightarrow \neg\neg A$  可产生  $A \Rightarrow \neg\neg A$  和  $\neg\neg A \Rightarrow A$

# 课后习题



**P57:**

**6(1,3,5,6);**

**7(1);**

**8(1);**

**9;**

**10;**

