

一、单项选择题

1. 设直线 l 的方程为 $x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$, 平面 π 的方程为 $x + y - z = 1$, 则 【 】.

A. $l // \pi$; B. $l \perp \pi$; C. l 与 π 斜交; D. l 在 π 上。

2. 函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 连续是它在该点偏导数存在的 【 】.

A. 充分非必要条件; B. 必要非充分条件;
C. 充要条件; D. 既非充分又非必要条件。

3. 设 $f(x, y) = x^3 - 4x^2 + 2xy - y^2$, 则 【 】

A. (0,0) 是极大值点; B. (0,0) 是极小值点;

C. (2,2) 是极大值点; D. (2,2) 是极小值点。

4. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{\sin nx}{n^2} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$ 【 】

A. 发散; B. 绝对收敛; C. 条件收敛; D. 收敛性与 x 有关。

5. 函数 $f(x) = \begin{cases} 1, & -1 \leq x \leq 0 \\ x^2, & 0 < x < 1 \end{cases}$ 的 Fourier 级数

$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\pi x + b_n \sin n\pi x)$ 在 $x = 0$ 【 】.

A. 发散; B. 收敛于 1; C. 收敛于 0; D. 收敛于 0.5.

二、填空题

1. 与向量 $\vec{a} = (1, 0, -1)$, $\vec{b} = (0, 1, 1)$ 都垂直的单位向量是_____.

2. 曲面 $z - e^z + 2xy = 3$ 在点 (1, 2, 0) 处的切平面方程是_____.

3. 函数 $f(x, y) = xy + x \ln y$ 在点 (1, 2) 处方向导数的最大值为_____.

4. 交换积分次序, $\int_0^2 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy =$ _____.

5. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n}$ 的收敛域为_____.

三、设 $f(u, v)$ 有连续二阶偏导数, $z = f(x^2 + y^2, 2xy)$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

四、计算二重积分 $\iint_D \frac{\sin y}{y} dx dy$, 其中 D 为 $y = x$, $y = \sqrt{x}$ 所围成的区域.

五、计算曲线积分 $I = \int_L (e^x \sin y - x - y)dx + (e^x \cos y - 2x)dy$,

其中 L 为从 $A(2,0)$ 沿曲线 $y = \sqrt{2x - x^2}$ 到 $O(0,0)$ 的一段弧.

六、计算曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} (2x + z)dydz + zdx dy$, 其中 Σ 为曲面 $z = x^2 + y^2 (0 \leq z \leq 1)$ 的下侧 .

七、求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{2n-1}$ 的和函数 $S(x)$.

八、设有半径为 R 的球体, 它在点 (x, y, z) 处的密度 $\rho(x, y, z)$ 与该点到原点的距离成正比, 比例系数为 k , 求球体对它的直径的转动惯量.