格的定义

定义13.1 设<S,≤>是偏序集,如果 $\forall$ x, y$\in$S,{x,y}都有**最小上界**和**最大下界**,则称S关于≤构成一个**格**.

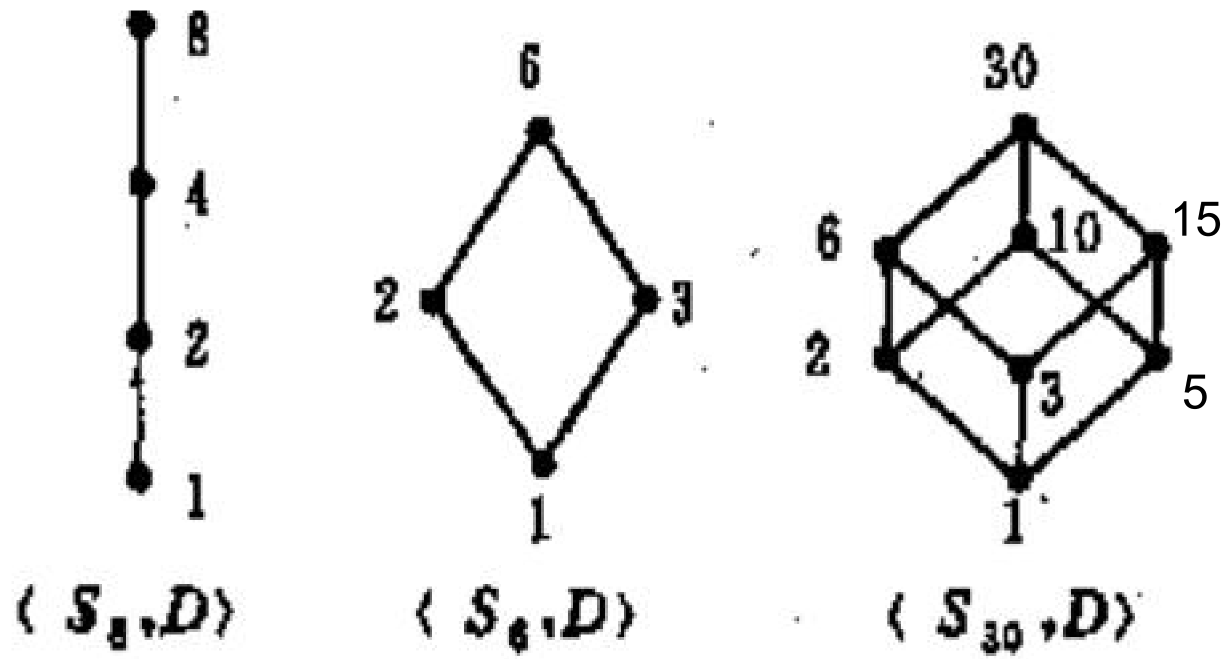
x∨y表示x和y的最小上界

x∧y表示x和y的最大下界

例13.1 设n为正整数，S_n为n的正因子的集合，D为整除关系，则$<S_n,D>$构成格.

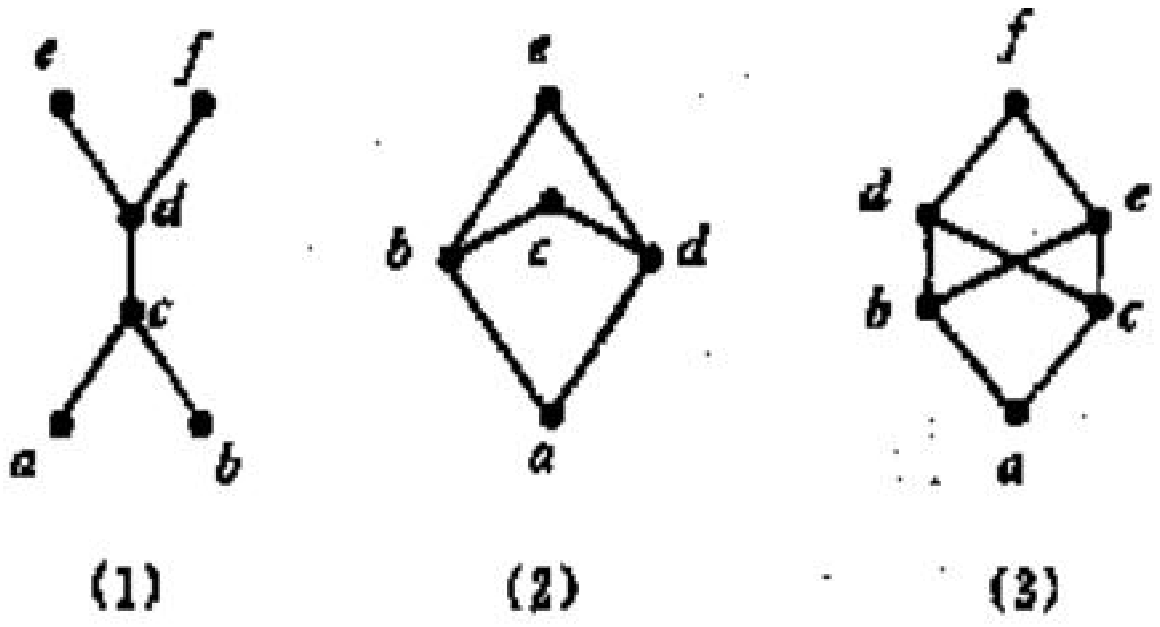
$\forall x, y \in S_n$, $x \vee y$是x,y的最小公倍数[x,y], $x \wedge y$是x,y的最大公约数(x,y)

格$<S_8,D>$,$<S_6,D>$和$<S_{30},D>$



x∨y是x,y的最小公倍数[x,y]，x∧y是x,y的最大公约数(x,y)

例13.2 判断图中偏序集是否构成格，说明为什么.



对偶原理

设f是含有格中的元素以及符号=,≤,≥,∨,∧的命题,令f*是将f中的≤改写成≥,将≥改写成≤,∨改写成∧,∧改写成∨所得到的命题,称为f的**对偶命题**.

对偶原理：若 f对一切格为真,则f*也对一切格为真. 如,在格中有

$(a \vee b) \wedge c \leqslant c$ 成立, 则有

$(a \wedge b) \vee c \geqslant c$ 成立.

定理13.1 设$<L,\le>$为格,则运算$\vee$和$\wedge$适合交换律、结合律、幂等律和吸收律,即

(1) $\forall a,b\in L$有 $a\vee b=b\vee a$, $a\wedge b=b\wedge a$

(2) $\forall a,b,c\in L$有 $(a\vee b)\vee c=a\vee(b\vee c)$,
$(a\wedge b)\wedge c=a\wedge(b\wedge c)$.

(3) $\forall a\in L$有 $a\vee a=a$, $a\wedge a=a$.

(4) $\forall a,b\in L$, 有 $a\vee(a\wedge b)=a$,
$a\wedge(a\vee b)=a$.

(2) $\forall$ a,b,c∈L有 $(a\vee b)\vee c = a\vee(b\vee c)$,

$(a\wedge b)\wedge c = a\wedge(b\wedge c)$.

证明:

由最小上界的定义有 $(a\vee b)\vee c \geq a\vee b \geq a$, (13.1)

$(a\vee b)\vee c \geq a\vee b \geq b$, (13.2)

$(a\vee b)\vee c \geq c$. (13.3)

由式13.2和13.3得 $(a\vee b)\vee c \geq b\vee c$, (13.4)

再由式13.1和13.4得 $a\vee b)\vee c \geq a\vee(b\vee c)$,

同理可证 $(a\vee b)\vee c \leq a\vee(b\vee c)$

根据偏序的反对称性有 $(a\vee b)\vee c = a\vee b\vee c$

类似地可以证明 $(a\wedge b)\wedge c = a\wedge(b\wedge c)$

(3)$\forall a \in L$有 $a \vee a = a$, $a \wedge a = a$.

证明： 显然$a \leq a \vee a$. 又由$a \leq a$可得

$a \vee a \leq a$.

根据偏序的反对称性有

$a \vee a = a$

同理可证$a \wedge a = a$

(4) $\forall$ a,b$\in$L,有

$$a\vee(a\wedge b)=a,\ a\wedge(a\vee b)=a.$$

证明: $a\vee(a\wedge b)\geqslant a$

又由$a\leq a$, $a\wedge b\leq a$ 所以,有

$$a\vee(a\wedge b)\leq a.$$

由这两个式子可得

$$a\vee(a\wedge b)=a.$$

同理可证 $a\wedge(a\vee b)=a$

小结：（1）利用偏序定义了格<L,≤>；

（2）则∨、∧为集合L上的运算，从而<L,∨,∧>构成了一个代数系统；

（3）<L,∨,∧>代数系统的运算∨,∧满足交换律，结合律，幂等律和吸收律；

问题：格能生成一个代数系统；反过来，规定运算及其性质，能否从代数系统的角度定义格呢？

答案是肯定的！！

格的另一个等价的定义.

定理11.4 设$<S,*,\circ>$是具有两个二元运算的代数系统，若对于$*$和$\circ$运算适合交换律、结合律、吸收律，则可以适当定义S中的偏序$\preccurlyeq$，使得$<S,\preccurlyeq>$构成格，且$\forall a,b\in S$有

$$a\preccurlyeq b \Leftrightarrow a*b=a \Leftrightarrow a\circ b=b$$

证明思路： （1）利用吸收律证明幂等律；

（2）定义关系$a\,Rb \Leftrightarrow a\circ b=b$，证明其为偏序关系；

（3）证明该偏序关系是格，即$\forall a,b\in S$，$a\wedge b$，$a\vee b$存在.

可证明$a\wedge b=a*b, a\vee b=a\circ b$

格的另一个等价的定义.

设$\langle S,*,\circ\rangle$是具有两个二元运算的代数系统,

且对于*和°运算适合交换律、结合律、吸收律,

则可以适当定义S中的偏序≤使得$\langle S,\le\rangle$构成一个格,

且$\forall\ a,b\in S$ 有

$$a\wedge b=a*b,$$

$$a\vee b=a\circ b.$$

格的运算性质

问题2：格作为一个代数系统，运算满足交换律、结合律，是否满足分配律呢？

答案是否定的！！

格的性质：保序

定理11.3 设L是格, $\forall a,b,c,d\in L$，若$a\leqslant b$ 且 $c\leqslant d$, 则

$a\wedge c\leqslant b\wedge d$, $a\vee c\leqslant b\vee d$

例3： 设L是格, 证明$\forall a,b,c\in L$有

$$a\vee(b\wedge c)\leqslant (a\vee b)\wedge(a\vee c).$$

证 由 $a\leqslant a$, $b\wedge c\leqslant b$ 得 $a\vee(b\wedge c)\leqslant a\vee b$
由 $a\leqslant a$, $b\wedge c\leqslant c$ 得 $a\vee(b\wedge c)\leqslant a\vee c$
从而得到 $a\vee(b\wedge c)\leqslant (a\vee b)\wedge(a\vee c)$

注意：一般说来, 格中的$\vee$和$\wedge$运算不满足分配律.

子格及其判别法

定义11.4 设$<L,\wedge,\vee>$是格, S是L的非空子集, 若S关于L中的运算$\wedge$和$\vee$仍构成格, 则称S是L的**子格**.

例4: 设格L如图所示. 令

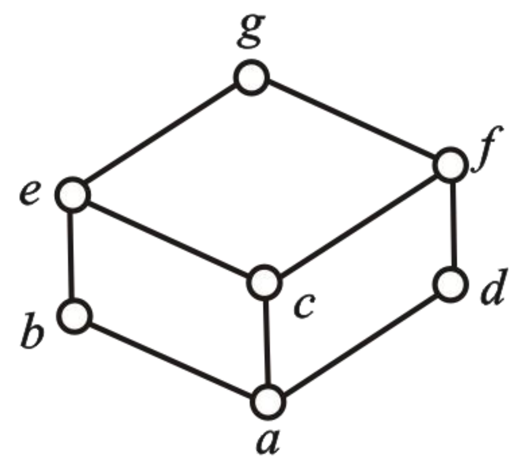
$S_1=\{a, e, f, g\}$,

$S_2=\{a, b, e, g\}$

S_1不是L的子格, 因为$e, f\in S_1$ 但

$e\wedge f = c\notin S_1$.

S_2是L的子格.



作业

P232

1. 4.