关系的基本运算

定义7.6 关系的**定义域(domain)**、**值域(range)**与**域(field)**分别定义为

$$\mathrm{dom}R = \{\, x \mid \exists y\, (\langle x,y\rangle \in R) \,\}$$

$$\mathrm{ran}R = \{\, y \mid \exists x\, (\langle x,y\rangle \in R) \,\}$$

$$\mathrm{fld}R = \mathrm{dom}R \cup \mathrm{ran}R$$

例5 $R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 4,3\rangle\}$, 则

$$\mathrm{dom}R=\{1, 2, 4\}$$

$$\mathrm{ran}R=\{2, 3, 4\}$$

$$\mathrm{fld}R=\{1, 2, 3, 4\}$$

关系运算(逆与合成)

定义7.7 关系的逆运算

$$R^{-1} = \{ <y, x> \mid <x, y> \in R \}$$

定义7.8 关系的合成运算

$$R \circ S = \{ <x, z> \mid \exists y\, (<x, y> \in R \wedge <y, z> \in S) \}$$

例6 $R = \{<1,2>, <2,3>, <1,4>, <2,2>\}$

$S = \{<1,1>, <1,3>, <2,3>, <3,2>, <3,3>\}$

$R^{-1} = \{<2,1>, <3,2>, <4,1>, <2,2>\}$

$R \circ S = \{<1,3>, <2,2>, <2,3>\}$

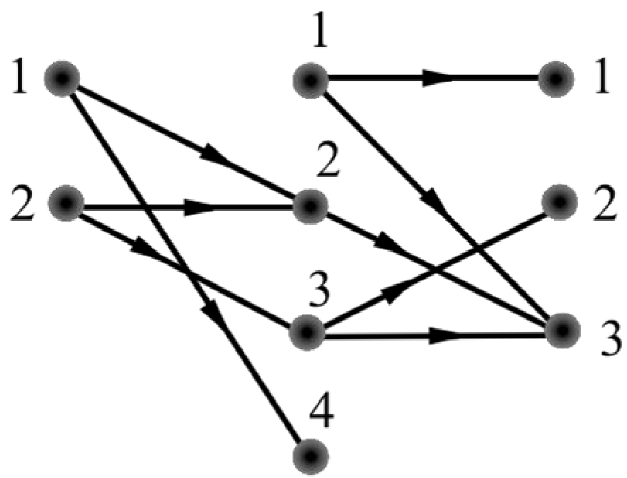
$S \circ R = \{<1,2>, <1,4>, <3,2>, <3,3>\}$

合成的图示法

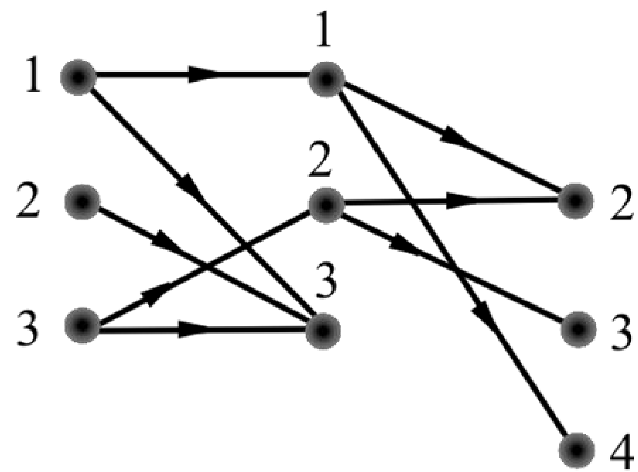
利用图示（不是关系图）方法求合成

$R \circ S = \{\langle 1,3\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,3\rangle\}$

$S \circ R = \{\langle 1,2\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 3,3\rangle\}$



$R \circ S$



$S \circ R$

$R = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 2,2\rangle\}$

$S = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 3,3\rangle\}$

关系运算的性质

定理7.1 设F是任意的关系, 则

(1) $(F^{-1})^{-1}=F$

(2) $\mathrm{dom}F^{-1}=\mathrm{ran}F$, $\mathrm{ran}F^{-1}=\mathrm{dom}F$

证 (1) 任取$<x,y>$, 由逆的定义有

$$<x,y>\in(F^{-1})^{-1} \Leftrightarrow <y,x>\in F^{-1} \Leftrightarrow <x,y>\in F.$$

所以有$(F^{-1})^{-1}=F$.

(2) 任取x,

$$x\in\mathrm{dom}F^{-1} \Leftrightarrow \exists y(<x,y>\in F^{-1})$$

$$\Leftrightarrow \exists y(<y,x>\in F) \Leftrightarrow x\in\mathrm{ran}F$$

所以有 $\mathrm{dom}F^{-1}=\mathrm{ran}F$.

同理可证 $\mathrm{ran}F^{-1}=\mathrm{dom}F$.

关系运算的性质

定理7.2 设F, G, H是任意的关系, 则

(1) $(F\circ G)\circ H = F\circ(G\circ H)$

(2) $(F\circ G)^{-1} = G^{-1}\circ F^{-1}$

证 (1) 任取$<x,y>$,

$$
\begin{aligned}
& <x,y>\in(F\circ G)\circ H \\
\Leftrightarrow\ & \exists t\,(<x,t>\in F\circ G \land <t,y>\in H) \\
\Leftrightarrow\ & \exists t\,(\exists s\,(<x,s>\in F \land <s,t>\in G) \land <t,y>\in H) \\
\Leftrightarrow\ & \exists t\,\exists s\,(<x,s>\in F \land <s,t>\in G \land <t,y>\in H) \\
\Leftrightarrow\ & \exists s\,(<x,s>\in F \land \exists t\,(<s,t>\in G \land <t,y>\in H)) \\
\Leftrightarrow\ & \exists s\,(<x,s>\in F \land <s,y>\in G\circ H) \\
\Leftrightarrow\ & <x,y>\in F\circ(G\circ H)
\end{aligned}
$$

所以 $(F\circ G)\circ H = F\circ(G\circ H)$

证明

(2) 任取$<x,y>$,

$$<x,y>\in(F\circ G)^{-1}$$
$$\Leftrightarrow <y,x>\in F\circ G$$
$$\Leftrightarrow \exists t\,(<y,t>\in F\wedge<t,x>\in G)$$
$$\Leftrightarrow \exists t\,(<x,t>\in G^{-1}\wedge<t,y>\in F^{-1})$$
$$\Leftrightarrow <x,y>\in G^{-1}\circ F^{-1}$$

所以 $(F\circ G)^{-1}=G^{-1}\circ F^{-1}$

关系运算的性质

定理7.3 设R为A上的关系, 则

$$R\circ I_A = I_A\circ R = R$$

证　任取$<x,y>$

$$<x,y>\in R\circ I_A$$

$$\Leftrightarrow \exists t\,(<x,t>\in R \wedge <t,y>\in I_A)$$

$$\Leftrightarrow \exists t\,(<x,t>\in R \wedge t=y \wedge y\in A)$$

$$\Leftrightarrow <x,y>\in R$$

关系运算的性质

定理7.4

(1) $F\circ(G\cup H) = F\circ G\cup F\circ H$ (2) $(G\cup H)\circ F = G\circ F\cup H\circ F$

(3) $F\circ(G\cap H) \subseteq F\circ G\cap F\circ H$ (4) $(G\cap H)\circ F \subseteq G\circ F\cap H\circ F$

只证 (3) 任取$<x,y>$,

$$<x,y>\in F\circ(G\cap H)$$

$$\Leftrightarrow \exists t\,(<x,t>\in F\wedge <t,y>\in G\cap H)$$

$$\Leftrightarrow \exists t\,(<x,t>\in F\wedge <t,y>\in G\wedge <t,y>\in H)$$

$$\Leftrightarrow \exists t\,((<x,t>\in F\wedge <t,y>\in G)\wedge(<x,t>\in F\wedge <t,y>\in H))$$

$$\Rightarrow \exists t\,(<x,t>\in F\wedge <t,y>\in G)\wedge\exists t\,(<x,t>\in F\wedge <t,y>\in H)$$

$$\Leftrightarrow <x,y>\in F\circ G\wedge <x,y>\in F\circ H$$

$$\Leftrightarrow <x,y>\in F\circ G\cap F\circ H$$

所以有 $F\circ(G\cap H)\subseteq F\circ G\cap F\circ H$

推广

定理7.4 的结论可以推广到有限多个关系

$$R\circ(R_1\cup R_2\cup\ldots\cup R_n) = R\circ R_1\cup R\circ R_2\cup\ldots\cup R\circ R_n$$

$$(R_1\cup R_2\cup\ldots\cup R_n)\circ R = R_1\circ R\cup R_2\circ R\cup\ldots\cup R_n\circ R$$

$$R\circ(R_1\cap R_2\cap\ldots\cap R_n) \subseteq R\circ R_1\cap R\circ R_2\cap\ldots\cap R\circ R_n$$

$$(R_1\cap R_2\cap\ldots\cap R_n)\circ R \subseteq R_1\circ R\cap R_2\circ R\cap\ldots\cap R_n\circ R$$

关系运算(限制与像)

定义7.9 设R为二元关系, A是集合

(1) R在A上的**限制**记作 $R\upharpoonright A$, 其中

$$R\upharpoonright A = \{ <x,y> \mid xRy \wedge x \in A \}$$

(2) A在R下的**像**记作$R[A]$, 其中

$$R[A]=\mathrm{ran}(R\upharpoonright A)$$

说明：

- R在A上的限制 $R\upharpoonright A$是 R 的子关系，即 $R\upharpoonright A \subseteq R$
- A在R下的像 $R[A]$ 是 $\mathrm{ran}R$ 的子集，即 $R[A]\subseteq \mathrm{ran}R$

实例

例7 设$R=\{<1,2>,<1,3>,<2,2>,<2,4>,<3,2>\}$, 则

$$R\upharpoonright\{1\}=\{<1,2>,<1,3>\}$$

$$R\upharpoonright\varnothing=\varnothing$$

$$R\upharpoonright\{2,3\}=\{<2,2>,<2,4>,<3,2>\}$$

$$R[\{1\}]=\{2,3\}$$

$$R[\varnothing]=\varnothing$$

$$R[\{3\}]=\{2\}$$

关系运算的性质

定理7.5 设F为关系, A, B为集合, 则

(1) $F\upharpoonright(A\cup B) = F\upharpoonright A\cup F\upharpoonright B$

(2) $F[A\cup B] = F[A]\cup F[B]$

(3) $F\upharpoonright(A\cap B) = F\upharpoonright A\cap F\upharpoonright B$

(4) $F[A\cap B] \subseteq F[A]\cap F[B]$

证明

证 只证 (1) 和 (4).

(1) 任取$<x,y>$

$$<x,y> \in F \upharpoonright (A \cup B)$$

$$\Leftrightarrow <x,y> \in F \wedge x \in A \cup B$$

$$\Leftrightarrow <x,y> \in F \wedge (x \in A \vee x \in B)$$

$$\Leftrightarrow (<x,y> \in F \wedge x \in A) \vee (<x,y> \in F \wedge x \in B)$$

$$\Leftrightarrow <x,y> \in F \upharpoonright A \vee <x,y> \in F \upharpoonright B$$

$$\Leftrightarrow <x,y> \in F \upharpoonright A \cup F \upharpoonright B$$

所以有$F \upharpoonright (A \cup B) = F \upharpoonright A \cup F \upharpoonright B$.

证明

(4) 任取y,

$$y \in F[A \cap B]$$

$$\Leftrightarrow \exists x\,(\langle x,y\rangle \in F \wedge x \in A \cap B)$$

$$\Leftrightarrow \exists x\,(\langle x,y\rangle \in F \wedge x \in A \wedge x \in B)$$

$$\Leftrightarrow \exists x\,((\langle x,y\rangle \in F \wedge x \in A) \wedge (\langle x,y\rangle \in F \wedge x \in B))$$

$$\Rightarrow \exists x\,(\langle x,y\rangle \in F \wedge x \in A) \wedge \exists x\,(\langle x,y\rangle \in F \wedge x \in B)$$

$$\Leftrightarrow y \in F[A] \wedge y \in F[B]$$

$$\Leftrightarrow y \in F[A] \cap F[B]$$

所以有$F[A \cap B] \subseteq F[A] \cap F[B]$.

关系的幂运算

定义7.10

设 R 为 A 上的关系, n为自然数, 则 R 的 n 次幂定义为：

(1) $R^0 = \{ <x,x> \mid x \in A \} = I_A$

(2) $R^{n+1} = R^n \circ R$

注意：

- 对于A上的任何关系 R_1 和 R_2 都有 $R_1^0 = R_2^0 = I_A$
- 对于A上的任何关系 R 都有 $R^1 = R$

幂的求法

例 8 设$A = \{a,b,c,d\}$, $R = \{<a,b>,<b,a>,<b,c>,<c,d>\}$, 求$R$的各次幂, 分别用矩阵和关系图表示.

解 R 与 R^2的关系矩阵分别是:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

幂的求法

R^3和R^4的矩阵是：

$$M^3=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\quad M^4=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

因此$M^4=M^2$, 即$R^4=R^2$. 因此可以得到

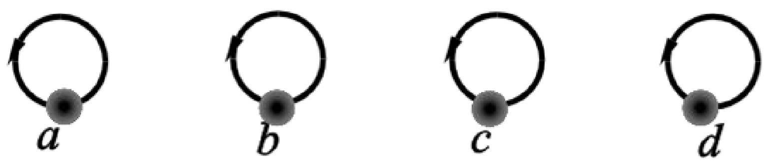
$$R^2=R^4=R^6=\ldots,\quad R^3=R^5=R^7=\ldots$$

R^0的关系矩阵是

$$M^0=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

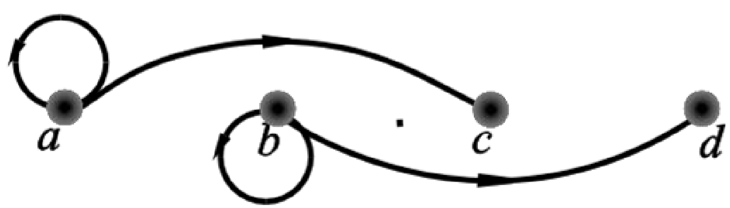
关系图

$R^0, R^1, R^2, R^3,\ldots$的关系图如下图所示.

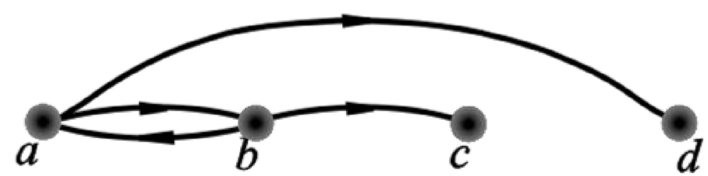


R^0

R^1



$R^2=R^4=\ldots$



$R^3=R^5=\ldots$

幂运算的性质

定理7.6 设 A 为 n 元集, R 是A上的关系, 则存在自然数 s 和 t, 使得 $R^s = R^t$.

证 R 为A上的关系,
由于$|A|=n$, A上的不同关系只有 2^{n^2}个.
列出 R 的各次幂

$$R^0, R^1, R^2, \ldots , R^{2^{n^2}} , \ldots,$$

必存在自然数 s 和 t 使得 $R^s = R^t$

幂运算的性质

定理7.7 设 R 是 A上的关系， $m, n\in$N, 则

(1) $R^m\circ R^n = R^{m+n}$

(2) $(R^m)^n = R^{mn}$

证 用归纳法

(1) 对于任意给定的$m\in$N, 施归纳于n.

若n=0, 则有

$$R^m\circ R^0 = R^m\circ I_A = R^m = R^{m+0}$$

假设 $R^m\circ R^n = R^{m+n}$, 则有

$$R^m\circ R^{n+1} = R^m\circ(R^n\circ R) = (R^m\circ R^n)\circ R = R^{m+n+1} ,$$

所以对一切$m,n\in$N 有 $R^m\circ R^n = R^{m+n}$.

证明

(2) 对于任意给定的$m \in \mathrm{N}$, 施归纳于n.

若$n=0$, 则有

$$(R^m)^0 = I_A = R^0 = R^{m \times 0}$$

假设 $(R^m)^n = R^{mn}$, 则有

$$(R^m)^{n+1} = (R^m)^n \circ R^m = (R^{mn}) \circ R^n$$

$$= R^{mn+m} = R^{m(n+1)}$$

所以对一切$m,n \in \mathrm{N}$ 有 $(R^m)^n = R^{mn}$.

幂运算的性质

定理7.8 设R 是A上的关系,

若存在自然数 s, t $(s<t)$ 使得 $R^s=R^t$, 则

(1) 对任何 $k\in N$有 $R^{s+k} = R^{t+k}$

(2) 对任何 $k, i\in N$有 $R^{s+kp+i} = R^{s+i}$, 其中 $p = t-s$

(3) 令$S = \{R^0,R^1,\ldots,R^{t-1}\}$, 则对于任意的 $q\in N$ 有$R^q\in S$

证 (1) $R^{s+k} = R^s\circ R^k = R^t\circ R^k = R^{t+k}$

(2) 对k归纳. 若k=0, 则有 $R^{s+0p+i} = R^{s+i}$

假设 $R^{s+kp+i} = R^{s+i}$, 其中$p = t-s$, 则

$$R^{s+(k+1)p+i} = R^{s+kp+i+p} = R^{s+kp+i}\circ R^p$$

$$= R^{s+i}\circ R^p = R^{s+p+i} = R^{s+t-s+i} = R^{t+i} = R^{s+i}$$

由归纳法命题得证.

证明

(3) 任取 $q \in \mathrm{N}$,

若 $q < t$, 显然有 $R^q \in S$,

若$q \geq t$, 则存在自然数 k 和 i 使得

$$q = s+kp+i, \text{其中} 0 \leq i \leq p-1.$$

于是

$$R^q = R^{s+kp+i} = R^{s+i}$$

而

$$s+i \leq s+p-1 = s+t-s-1 = t-1$$

从而证明了 $R^q \in S$.

课后习题

P140:

18 (2)

19 (2)

22