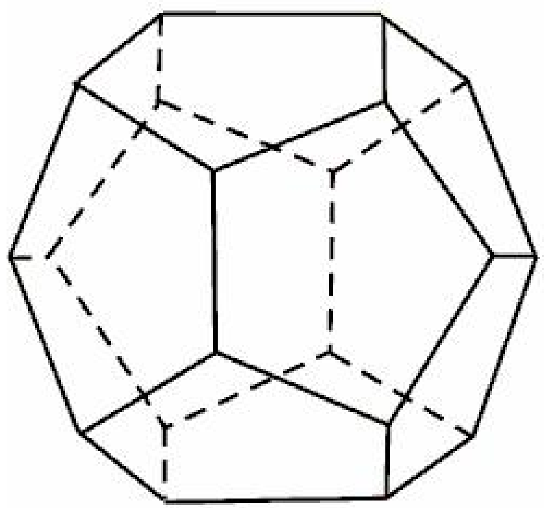
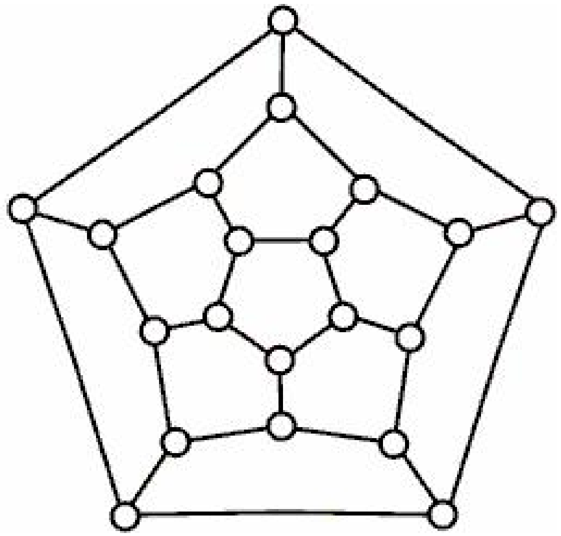
- 历史背景：哈密顿周游世界问题与哈密顿图



(1)



(2)

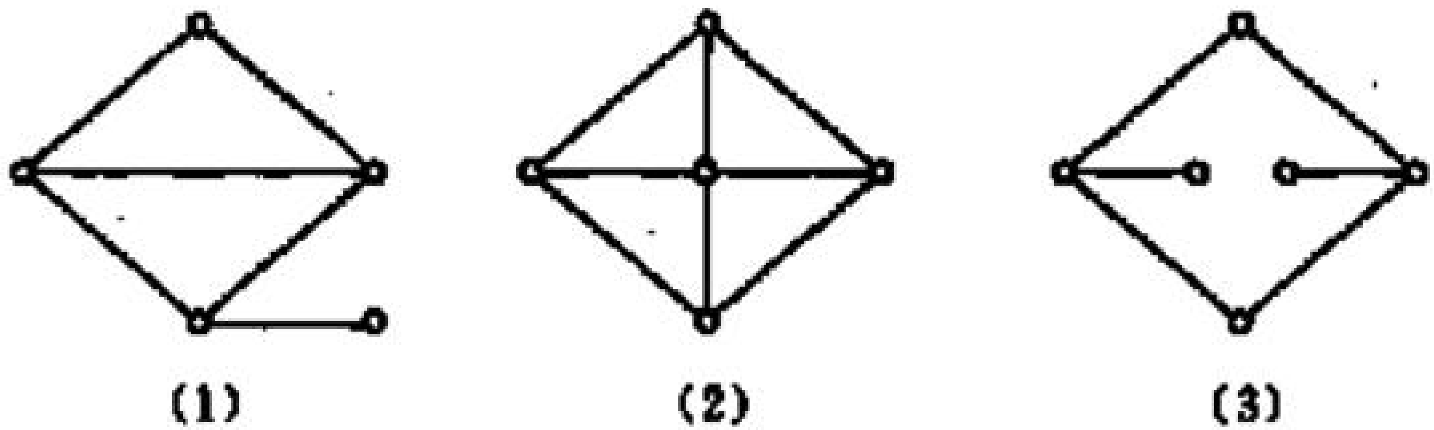
Hamilton

哈密尔顿通路(回路)、哈密尔顿图

经过图中每个顶点一次且仅一次的通路(回路)称为**哈密尔顿通路**(回路).存在哈密尔顿回路的图称为**哈密尔顿图**.

Hamilton

是不是哈密尔顿图?



图中 (1), (3),不是哈密尔顿图,(2)
为哈密尔顿图.

哈密尔顿图的判定

定理(必要条件1) 设无向图G=<V,E>是哈密尔顿图,V_1是V的任意的非空子集,

$$\Rightarrow p(G-V_1) \le |V_1|.$$

其中, $p(G-V_1)$为从G中删除V_1(删除V_1中各顶点及关联的边)后所得图的连通分支数.

Hamilton

证明:设C为G中的一条哈密尔顿回路.

(1)若V_1中的顶点在C上彼此相邻,则

$$p(C-V_1)=1\leq |V_1|$$

(2)设V_1中的顶点在C上存在$r(2\leq r\leq |V_1|)$个互不相邻,则

$$p(C-V_1)= r\leq|V_1|$$

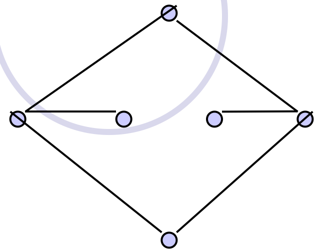
一般说来,V_1中的顶点在C上既有相邻的,又有不相邻的,因而总有

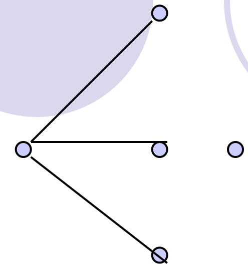
$$p(C-V_1)\le |V_1|.$$

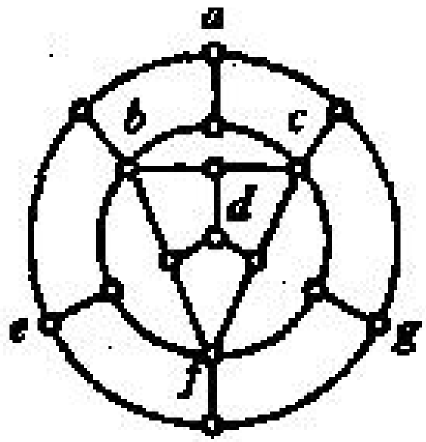
又因为C是G的生成子图,故

$$p(G-V_1)\le p(C-V_1)\le |V_1|.$$

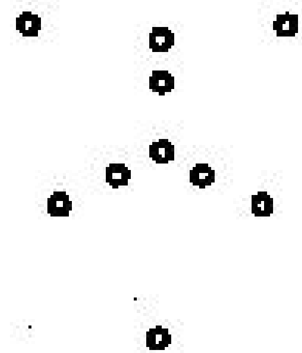
Hamilton







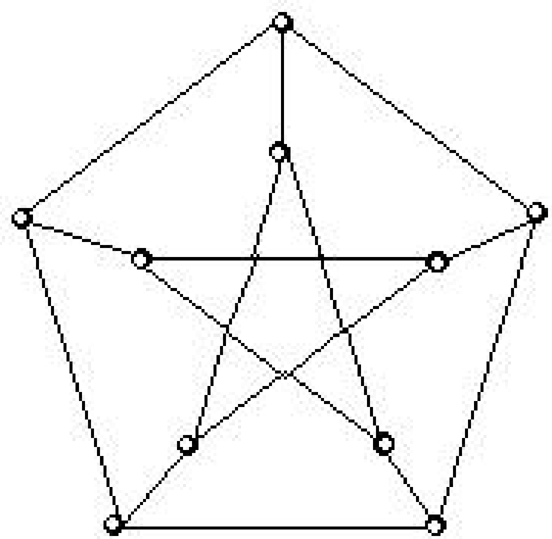
(3)



(4)

(1)图不是哈密尔顿图. (3) 图也不是哈密尔顿图.

Hamilton



在图中，虽然对任意的结点集合V_1，都满足$p(G-V_1)\le|V_1|$，但它仍然不是哈密尔顿图。

定理（充分条件1）设$G=\langle V, E\rangle$是简单无向图。

如果对任意两个不相邻的结点$u, v\in V$，均有：

$$\deg(u)+\deg(v)\geq|V|-1,$$

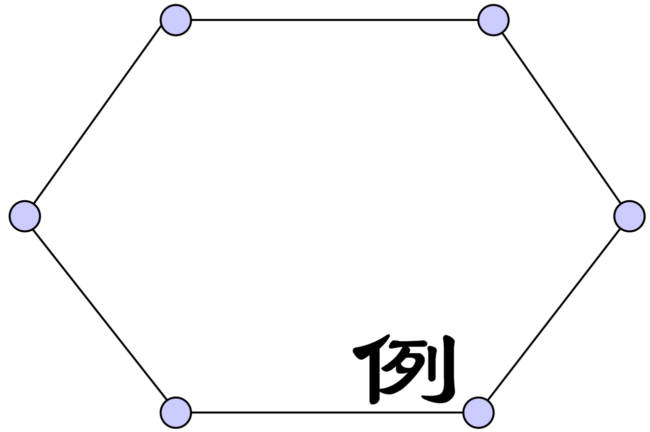
则G中存在哈密尔顿通路；

如果对任意两个不相邻的结点$u, v\in V$，均有：

$$\deg(u)+\deg(v)\geq|V|,$$

则G中存在哈密尔顿回路，即G是哈密尔顿图。

Hamilton



例

在图中，任意两个结点的度数之和为4，结点数为6，即有$4\leq 6$，，但它仍然是哈密尔顿图。

定理6. G有n个顶点，m条边，如果 $m \geq \frac{1}{2}(n^2-3n+6)$，则G是Hamilton图。

证明.任取不相邻的两个顶点u，v∈G，G中去掉u，v后导出子图G',G'有n－2个顶点，至多 $C_{n-2}^2=\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ 条边,u,v到G'的边数有 $m-C_{n-2}^2 \geq \frac{n^2-3n+6}{2}-\frac{(n-2)(n-3)}{2}=n$

D(u)+D(v)≥n.

由充分条件1得，G是Hamilton图。

- 推论 n阶简单无向图G中， n>2,任意顶点的度数大于等于n/2，则G有Hamilton回路。

充分条件2

完全图Kn，n>2，是Hamilton图。

归纳可证。

定理 在n(n≥2)阶有向图D=<V,E>中,如果所有有向边均用无向边代替,所得无向图中含生成子图K_n,则有向图D中存在哈密尔顿通路.

推论 n(n≥3)阶有向完全图为哈密尔顿图.

例题1 考虑在七天内安排七门课程的考试，使得同一位教师所任的两门课程考试不排在接连的两天中，试证明如果没有教师担任多于四门课程，则符合上述要求的考试安排总是可能的。

证明 设G为具有七个结点的图，每个结点对应于一门课程考试，如果这两个结点对应的课程考试是由不同教师担任的，那么这两个结点之间有一条边，因为每个教师所任课程数不超过4，故每个结点的度数至少是3，任两个结点的度数之和至少是6，故G总是包含一条汉密尔顿路，它对应于一个七门考试课目的一个适当的安排。

思考:

一个售货员希望去访问n个城市的每一个,开始和结束于v_1城市。每两城市间都有一条直接通路,我们记v_i城市到v_j城市的距离为$W(i,j)$,问题是去设计一个算法,它将找出售货员能采取的最短路径。

Hamilton

数学问题:

用图论术语叙述就是:$G=\langle V,E,W\rangle$ 是n个顶点的无向完全图,其中W是从E到正实数集的一个函数,对在V中任意三点 v_i, v_j, v_k 满足

$$W(i,j)+W(j,k)\geq W(i,k)$$

试求出赋权图上的最短哈密尔顿回路。

Hamilton

至今未找出有效的方法,但已找到了若干近似算法. 最邻近算法,它为巡回售货员问题得出近似解。

- 选任意点作为始点,找出一个与始点最近的点,形成一条边的初始路径。
- 设x表示最新加到这条路径上的点,从不在路径上的所有点中,选一个与x最邻近的点,把连接x与此点的边加到这条路径中。
- 重复这一步,直至G中所有顶点包含在路径中。
- 把始点和最后加入的顶点之间的边放入,这样就得出一个回路。

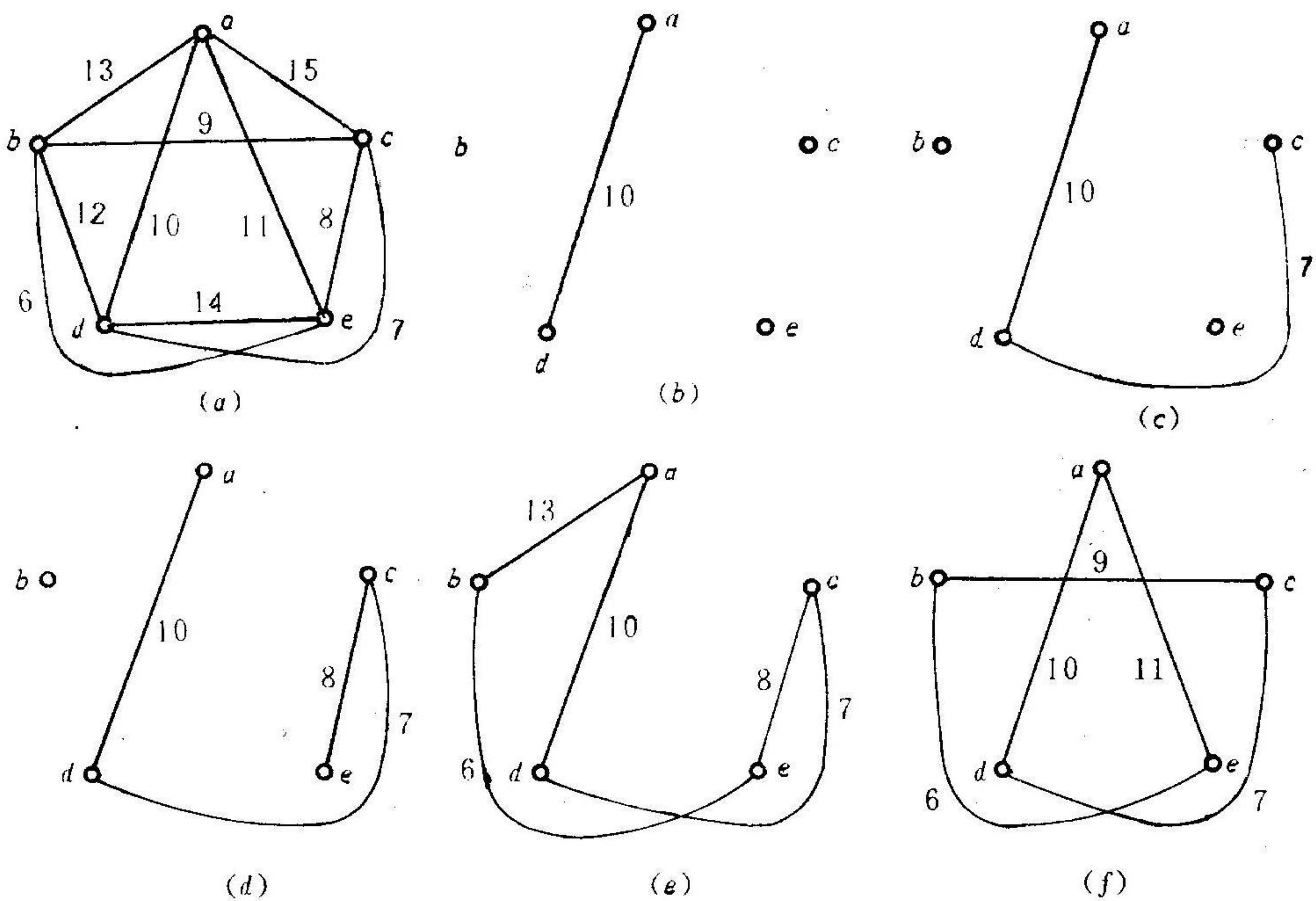


图 15.2

Hamilton

例如,对于上面所示的图,如果我们从*a*点开始,根据最邻近算法构造一个哈密尔顿回路,过程如图(*b*)到(*e*)所示,所得回路的总距离是44,

其实图15.2 (*a*)的最小哈密尔顿回路应如(*f*)所示,总距离是43。

Dijkstra算法

Dijkstra算法的名字从荷兰计算机科学家

Edsger. **Dijkstra(**迪杰斯特拉)

该**算法**在1959年被提出。

它是用来寻找最短路径两个非负节点图。

Dijkstra算法被广泛用于路由。

Hamilton

记号

- 设G=(V,E,W)是赋权图， S是V的一个子集，u∈S, 且T=V-S, 对于x ∈T,用$l_s(x)$表示u 到x的不含T中其它顶点的通路中最短通路的长度。
- 显然， $l_s(x)$不一定等于d(u,x),因为从u 到 x的最短通路可能含有T中除x外其他的顶点。

定理1

设$G=(V,E,W)$是赋权图，S是V的一个子集，$u \in S$，且$T=V-S$，若 $t \in T$，且 $l_s(t)=\min\{l_s(x) \mid x \in T\}$，则有 $l_s(t)=d(u,t)$。

证明：用反证法。

定理2

设G=(V,E,W)是赋权图，S是V的一个子集，u∈S, T=V-S, t ∈T, $l_s(t)=\min\{l_s(x) \mid x \in T\}$，且对于任何s∈S , $l_s(s) \le l_s(t)$,令$S'=S \cup \{t\}$, $T'=T-\{t\}$, 那么对于任意的 x ∈T', 有： $l_{s'}(x)= \min\{ l_s(x), l_s(t)+w(t,x)\}$。

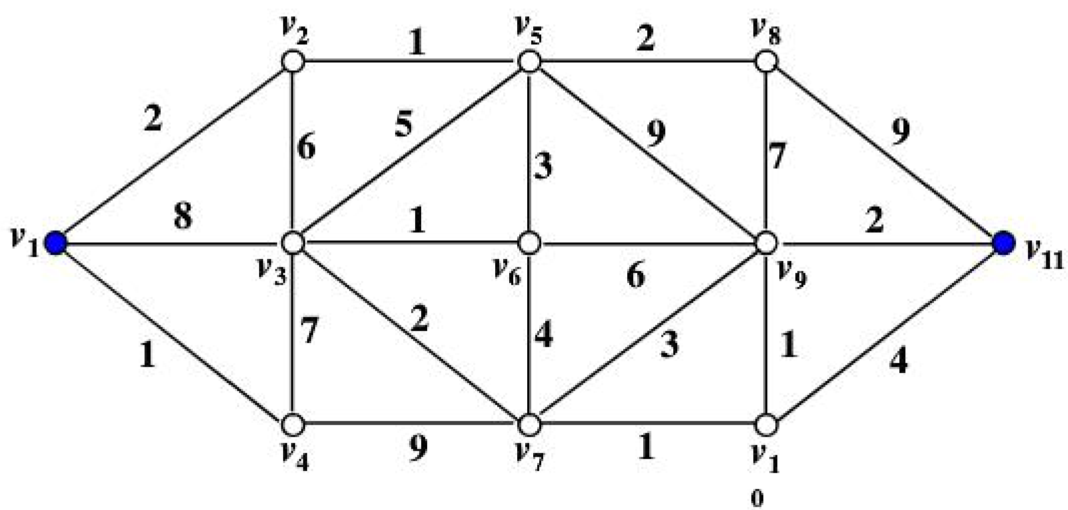
证明：从u 到 x 的 不经过T'中顶点的最短通路可能有以下两种情形：

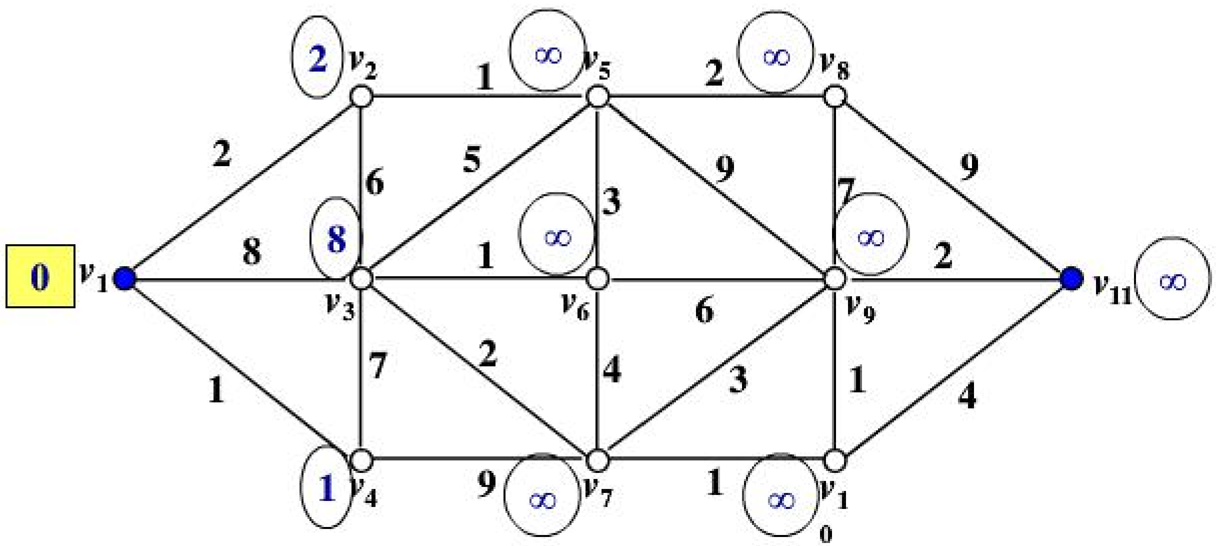
（1） 该通路上的顶点均在S中，则 $l_{S'}(x)= l_S(x)$,

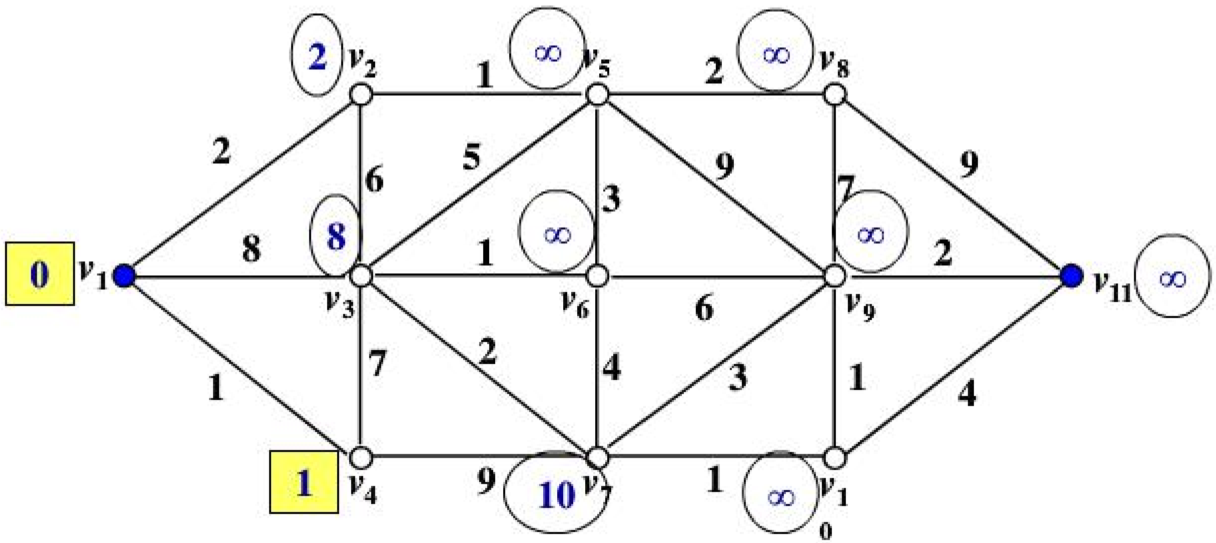
(2)该通路经过S中的顶点，再经过t到x， 则在S中$l_{S'}(x)=l_S(x)+w(t,x)$。

所以有: $ls'(x)= \min\{ ls(x), ls(x)+w(t,x)\}$。

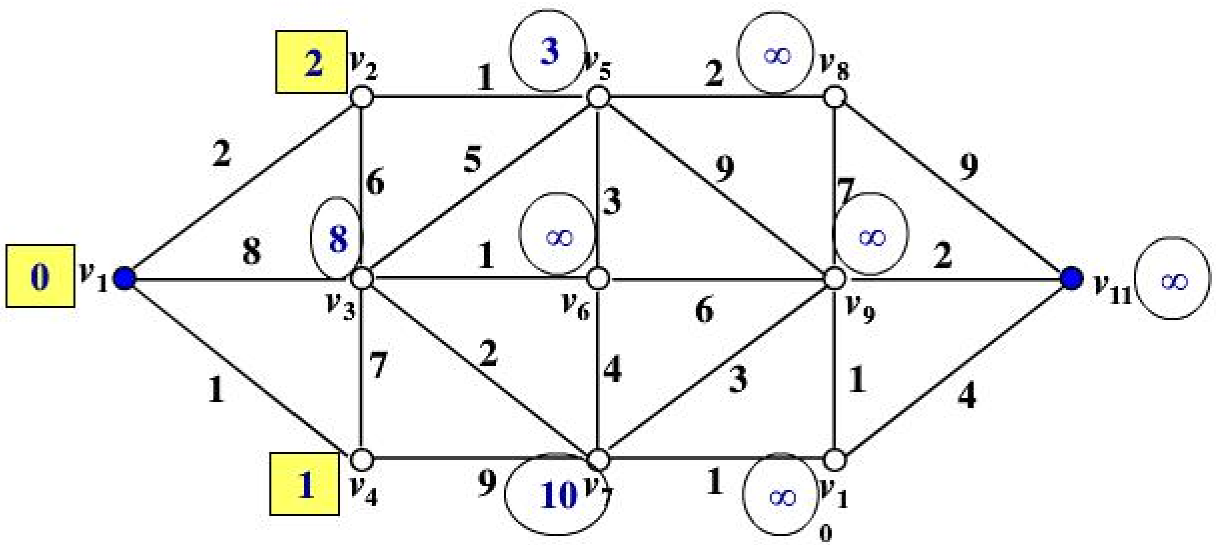
Hamilton




0
v1
2
v2
1
∞
v5
2
∞
v8
2
6
5
3
9
7
9
8
8
v3
1
∞
v6
∞
v9
2
v11
∞
6
7
2
4
3
1
1
4
1
v4
9
∞
v7
1
∞
v10

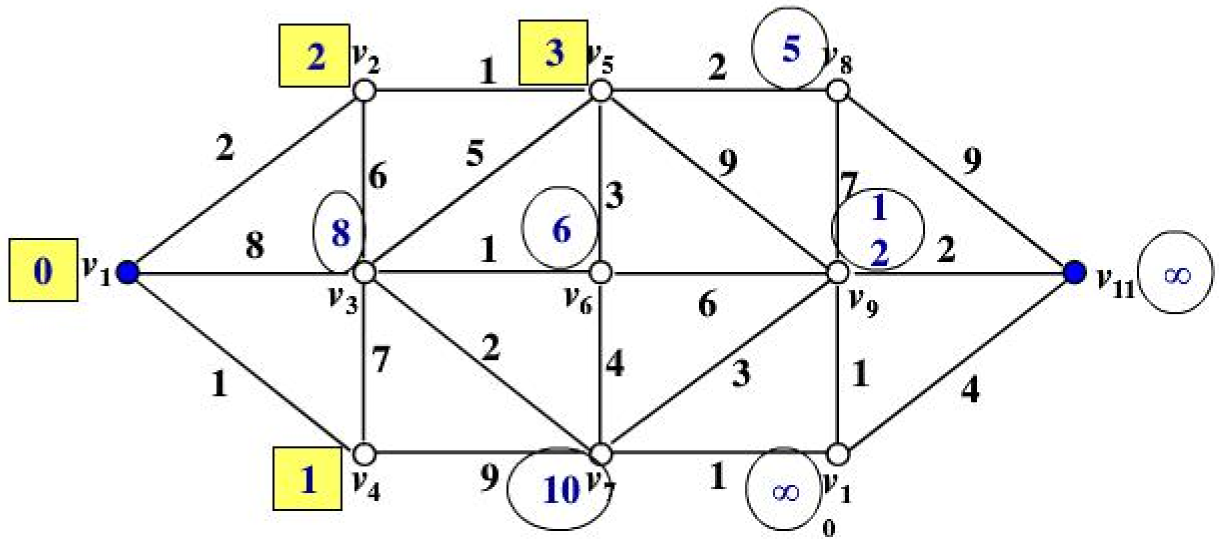

0
v_1
2
v_2
8
v_3
1
v_4
∞
v_5
∞
v_6
10
v_7
∞
v_8
∞
v_9
∞
v_{10}
∞
v_{11}
2
8
1
1
6
7
5
1
2
9
3
4
2
9
6
3
1
7
1
9
2
4

Hamilton



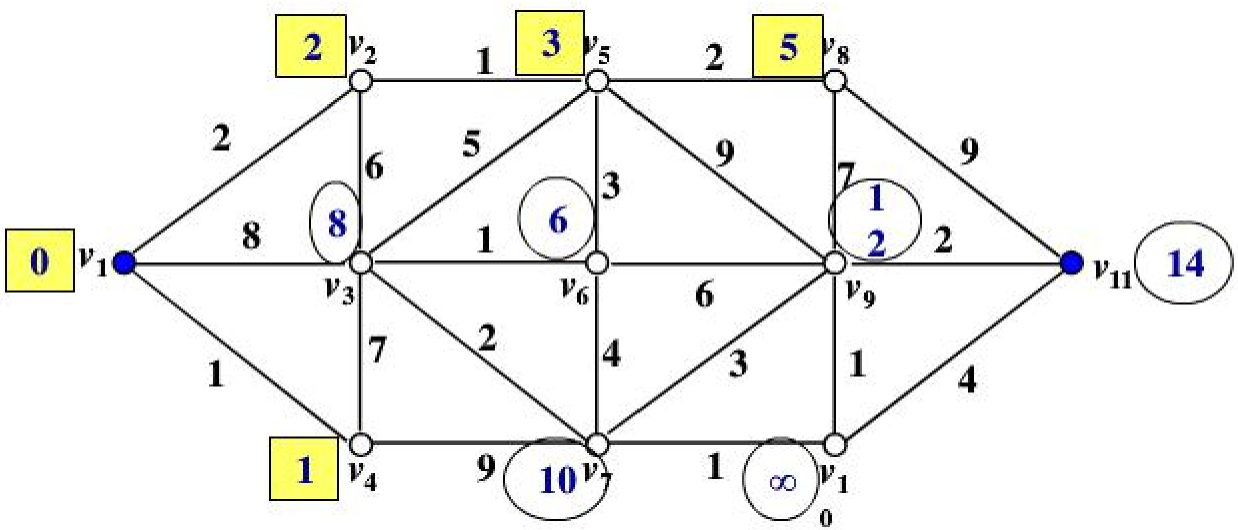
0
v1
2
v2
1
v4
1
3
v5
2
∞
v8
2
6
5
9
3
8
9
7
8
1
∞
∞
2
∞
v11
v3
v6
6
v9
7
2
4
3
1
1
4
9
10
v7
1
∞
v10

Hamilton



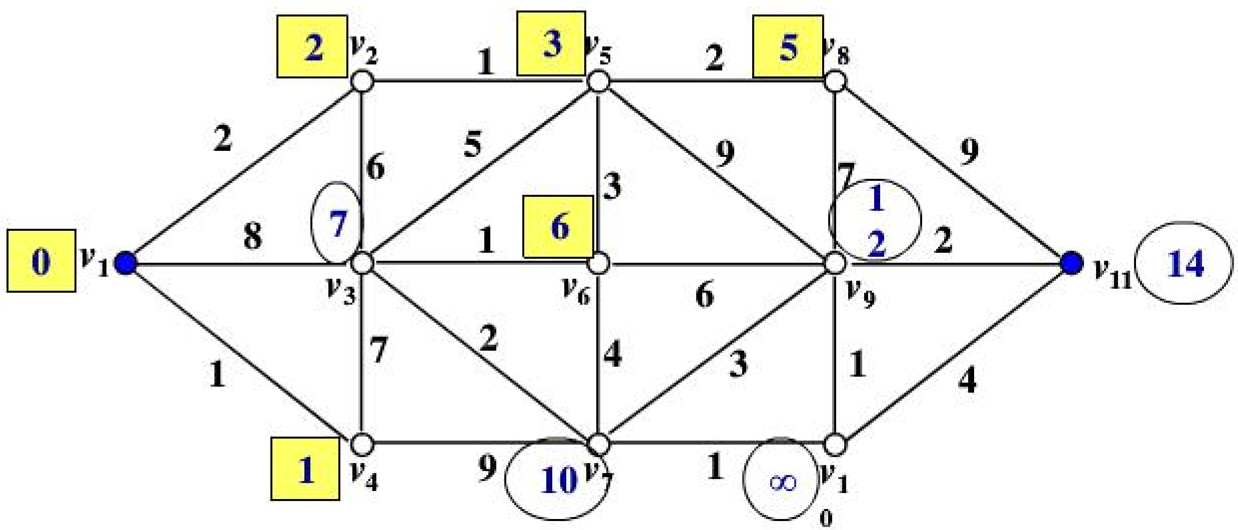
0
2
3
5
1
8
6
1
2
∞
10
∞
v1
v2
v3
v4
v5
v6
v7
v8
v9
v10
v11
2
1
8
1
6
7
1
5
2
9
2
3
4
1
9
6
3
7
1
9
2
4
1

Hamilton



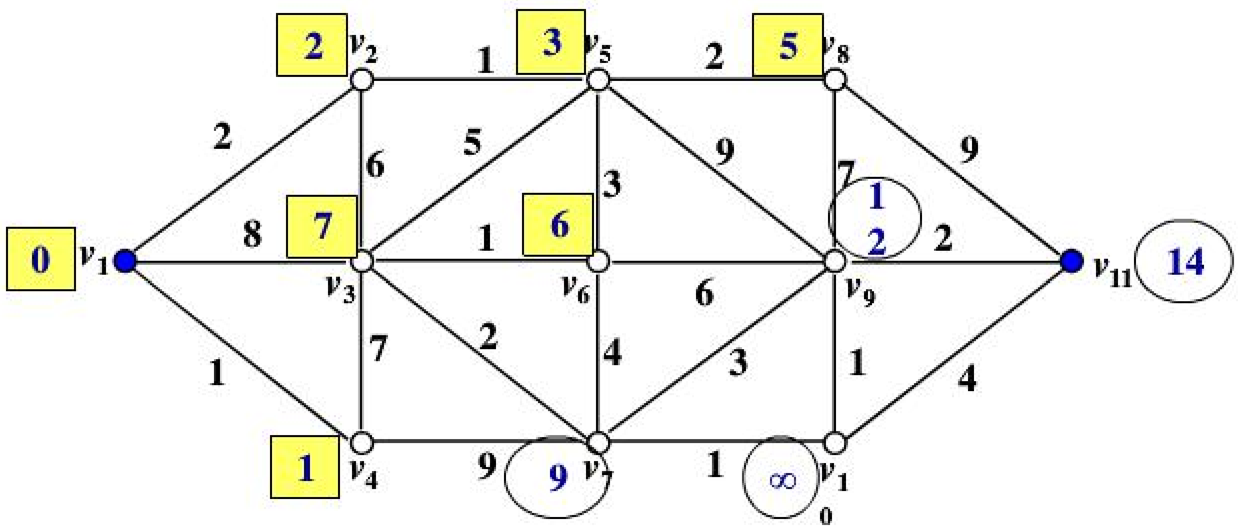
0
v_1
2
v_2
3
v_5
5
v_8
1
v_4
v_3
v_6
v_7
v_9
v_{10}
v_{11}
8
6
12
14
10
∞
2
8
1
1
2
6
5
3
9
7
9
1
2
6
7
2
4
3
1
4
9
1

Hamilton

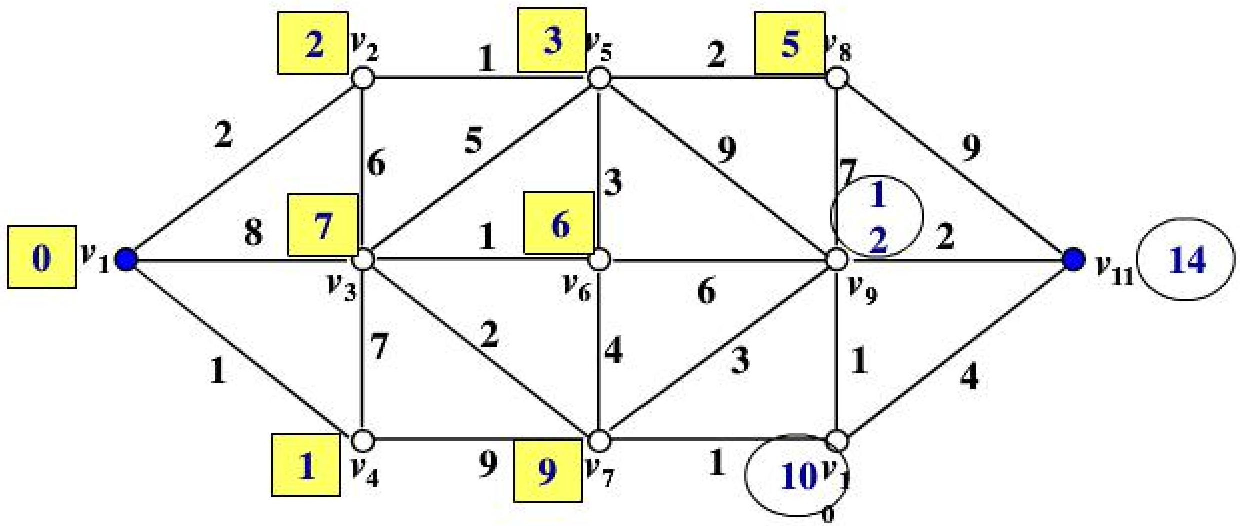


0
v_1
2
v_2
1
3
v_5
2
5
v_8
2
6
5
3
9
7
9
8
7
1
6
1
2
2
v_3
v_6
6
v_9
v_{11}
14
1
7
2
4
3
1
4
1
v_4
9
10
v_7
1
∞
v_{10}

Hamilton

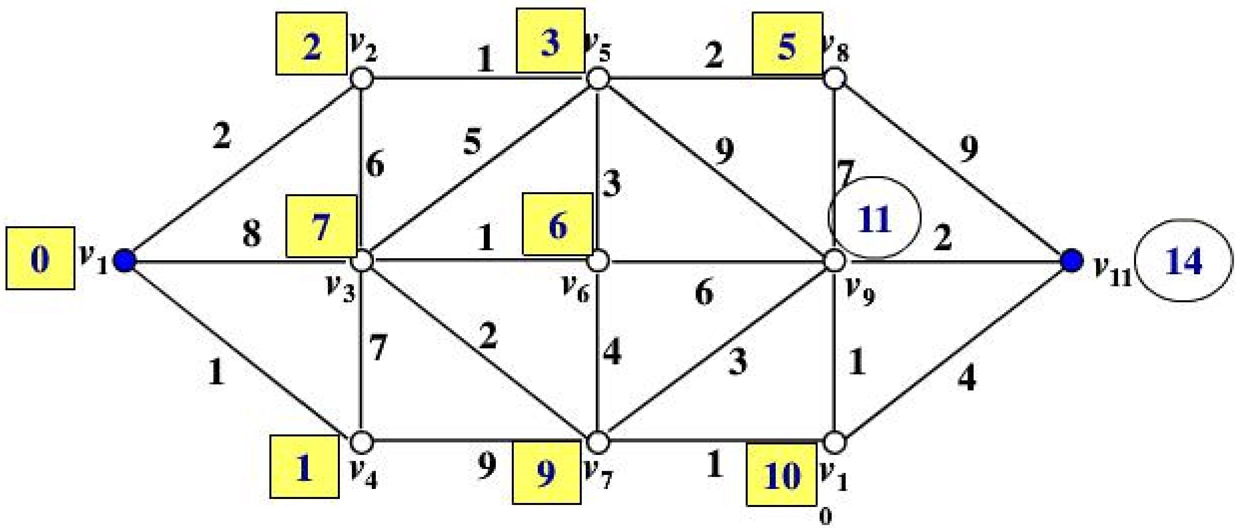


Hamilton



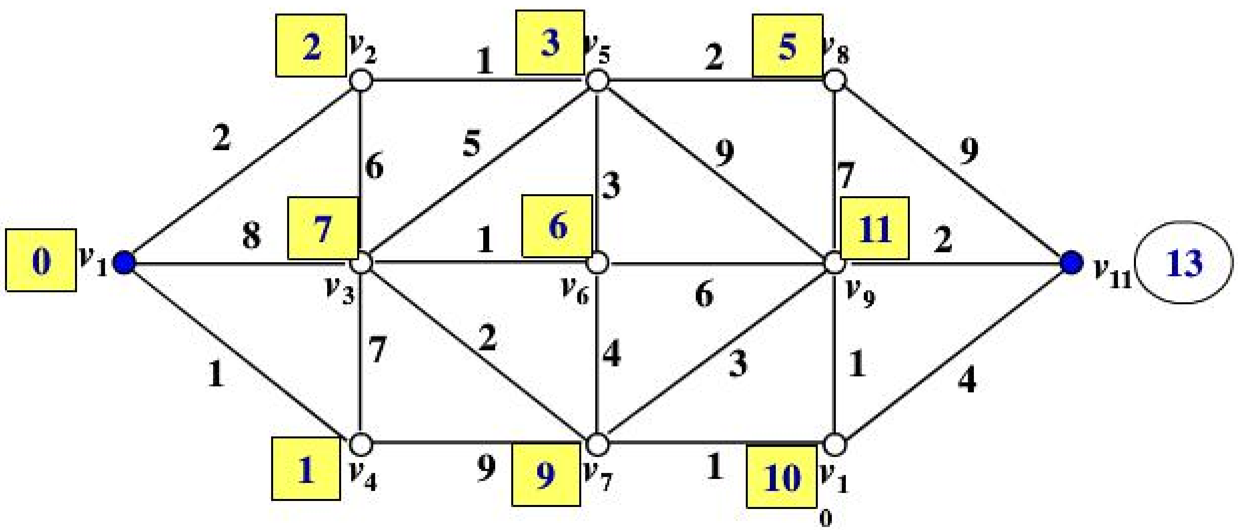
0
v_1
2
v_2
7
v_3
1
v_4
3
v_5
6
v_6
9
v_7
5
v_8
12
v_9
10
v_{10}
v_{11}
14
2
8
1
1
6
7
5
1
2
9
3
4
2
9
6
3
1
7
9
2
1
4

Hamilton



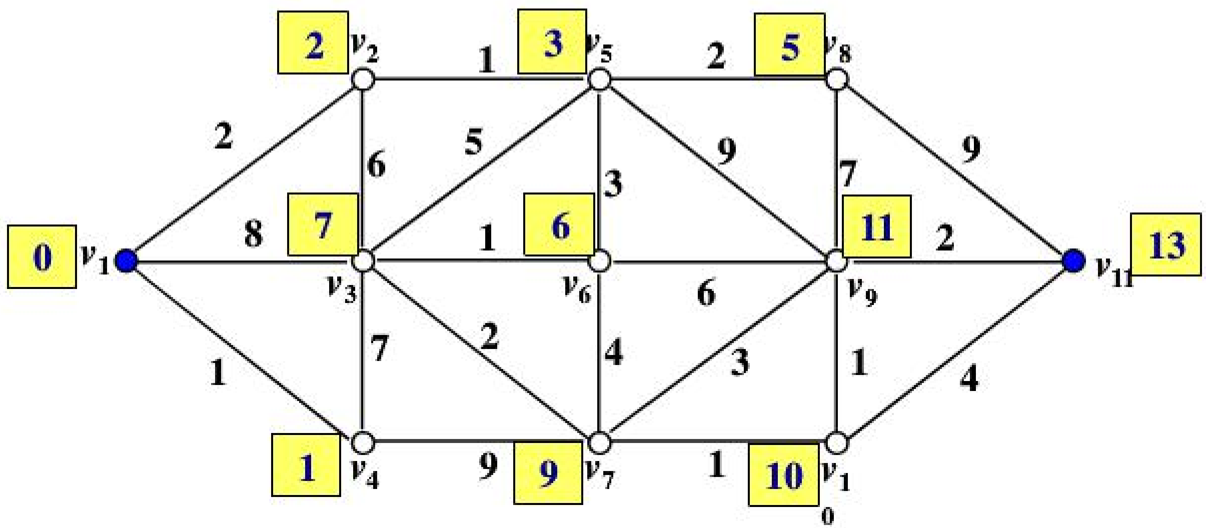
0
v1
2
v2
7
v3
1
v4
3
v5
6
v6
9
v7
5
v8
11
v9
10
v10
14
v11
2
8
1
1
1
2
6
5
3
9
7
9
2
1
6
7
2
4
3
1
4
9
1

Hamilton



0
v_1
2
v_2
3
v_5
5
v_8
7
v_3
6
v_6
11
v_9
v_{11}
13
1
v_4
9
v_7
10
v_{10}
2
1
2
6
5
3
9
7
9
8
1
2
6
7
2
4
3
1
4
1
9
1

Hamilton



算法步骤：

1.给始点v_s以P标号 $P(v_s)=0$，这表示从v_s到 v_s的最短距离为0，其余节点均给T标号，$P(v_i)=+\infty \quad (i=2,3,\cdots,n)$ 。

2.设节点 v_i 为刚得到P标号的点，考虑点v_j，其中 $(v_i, v_j)\in E$ ，且v_j为T标号。对v_j的T标号进行如下修改：

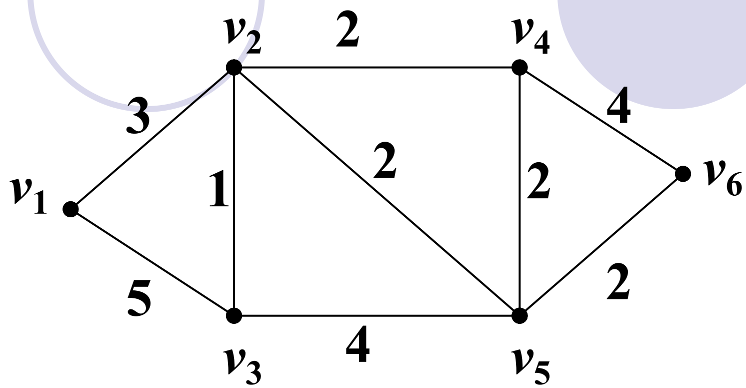
$$T(v_j)=\min[T(v_j),P(v_i)+l_{ij}]$$

3.比较所有具有T标号的节点，把最小者改为P标号，即：

$$P(v_k)=\min[T(v_i)]$$

当存在两个以上最小者时，可同时改为P标号。若全部节点均为P标号，则停止，否则用v_k代替v_i，返回步骤（2）。

例一、 用Dijkstra算法求下图从v_1到v_6的最短路。



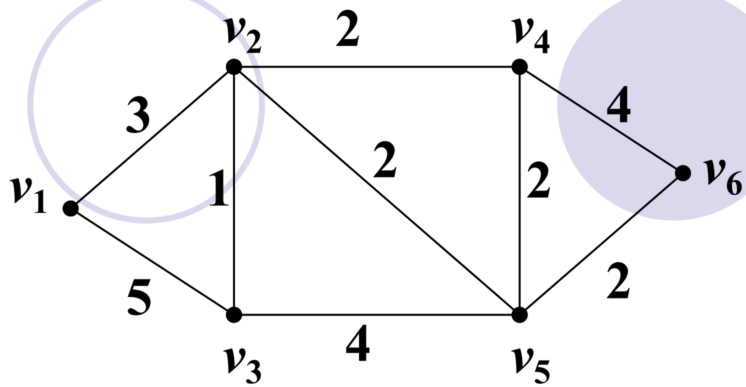
解 （1）首先给$\boldsymbol{v_1}$以P标号，给其余所有点T标号。

$$P(v_1) = 0 \qquad T(v_i) = +\infty \quad (i = 2, 3, \cdots, 6)$$

（2）
$$T(v_2) = \min[T(v_2), P(v_1) + l_{12}] = \min[+\infty, 0 + 3] = 3$$
$$T(v_3) = \min[T(v_3), P(v_1) + l_{13}] = \min[+\infty, 0 + 5] = 5$$

（3） $P(v_2) = 3$

（4）
$$T(v_3) = \min[T(v_3), P(v_2) + l_{23}] = \min[5, 3 + 1] = 4$$
$$T(v_4) = \min[T(v_4), P(v_2) + l_{24}] = \min[+\infty, 3 + 2] = 5$$
$$T(v_5) = \min[T(v_5), P(v_2) + l_{25}] = \min[+\infty, 3 + 2] = 5$$



（5） $P(v_3)=4$

（6） $T(v_5)=\min[T(v_5),P(v_3)+l_{35}]=\min[6,\ 4+4]=8$

（7） $P(v_4)=5$ $\quad P(v_5)=5$

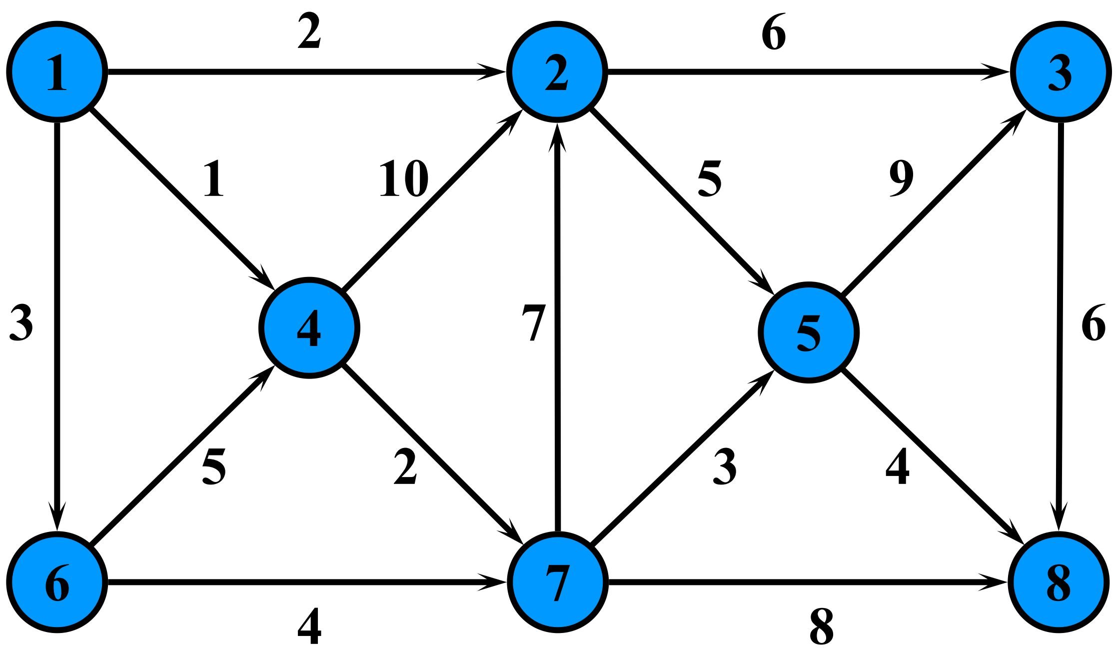
（8） $T(v_6)=\min[T(v_6),P(v_4)+l_{46}]=\min[+\infty,\ 5+4]=9$

（9） $T(v_6)=\min[T(v_6),P(v_5)+l_{56}]=\min[+\infty,\ 5+2]=7$

（10） $P(v_6)=7$

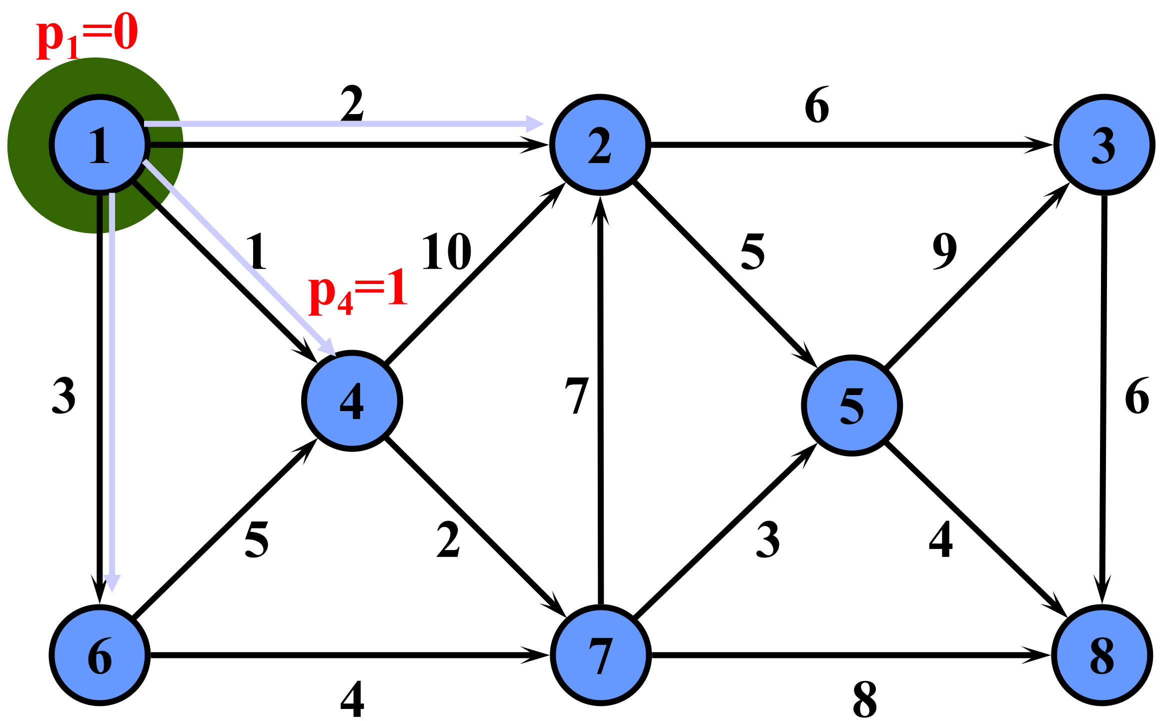
反向追踪得v_1到v_6的最短路为：$v_1\to v_2\to v_5\to v_6$

求从1到8的最短路径



Hamilton

$X=\{1\},\ w_1=0$

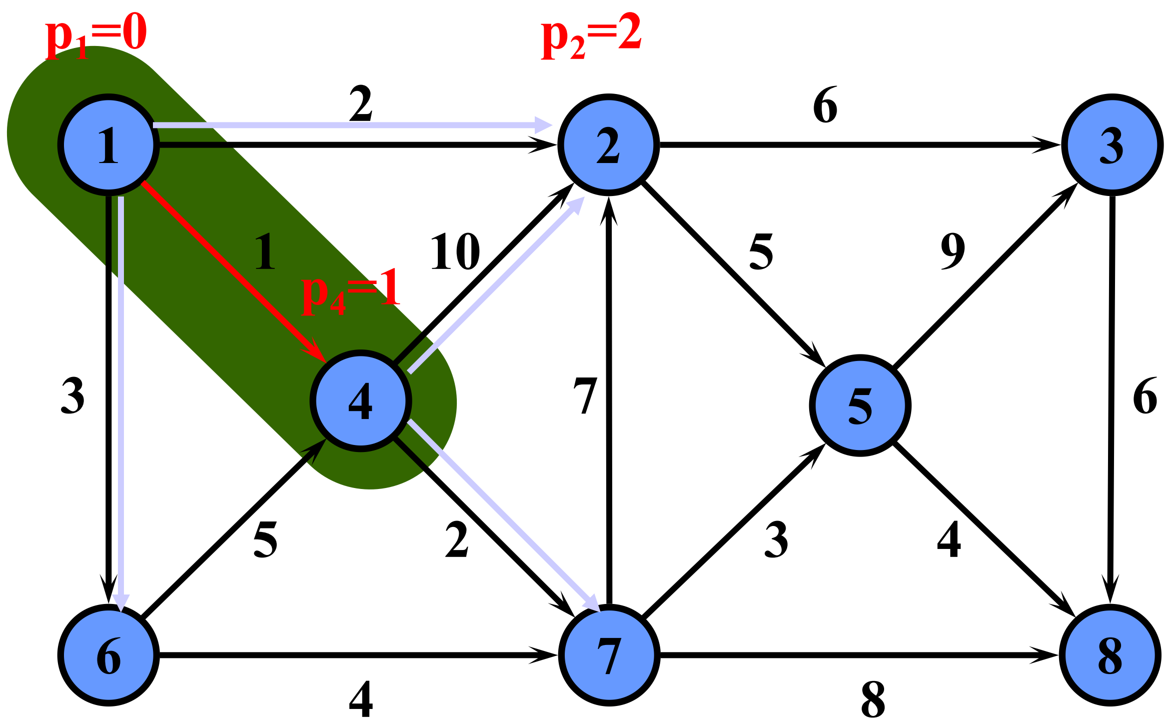


$\min\{c_{12},c_{14},c_{16}\}=\min\{0+2,0+1,0+3\}=\min\{2,1,3\}=1$

$X=\{1,4\},\ p_4=1$

Hamilton

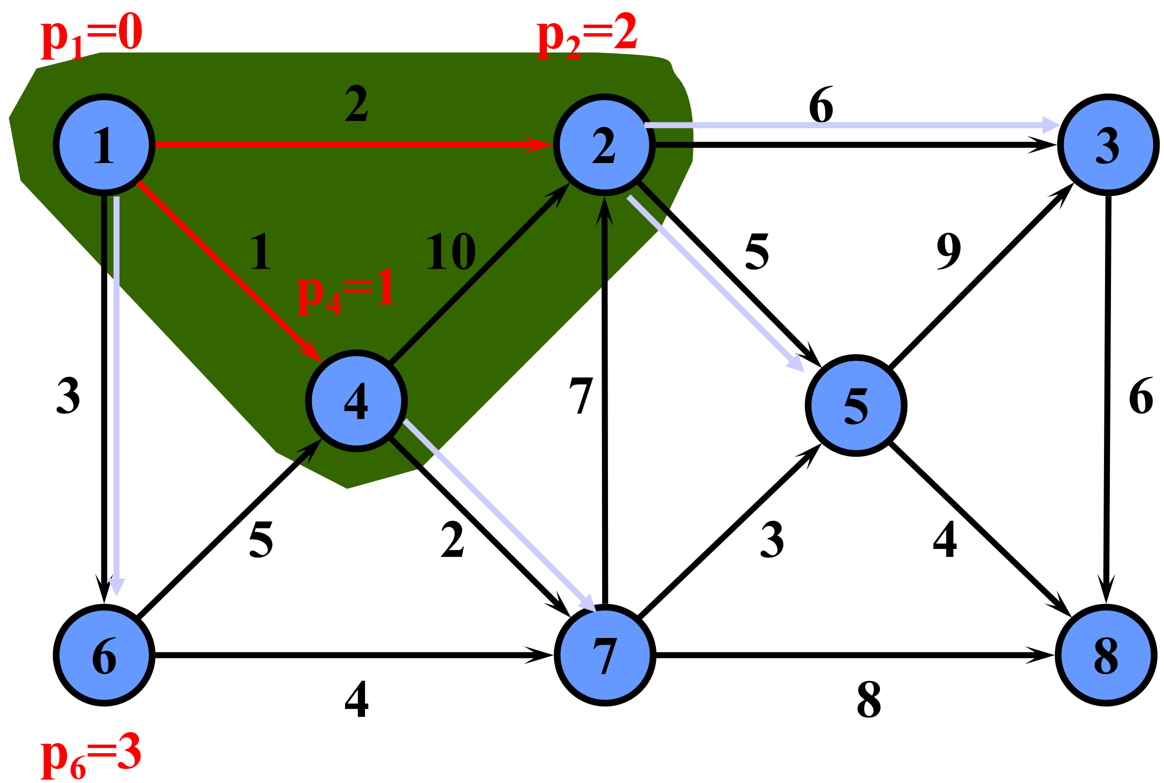
$X=\{1,4\}$



$\min\{c_{12},c_{16},c_{42},c_{47}\}=\min\{0+2,0+3,1+10,1+2\}=\min\{2,3,11,3\}=2$

$X=\{1,2,4\}$, $p_2=2$

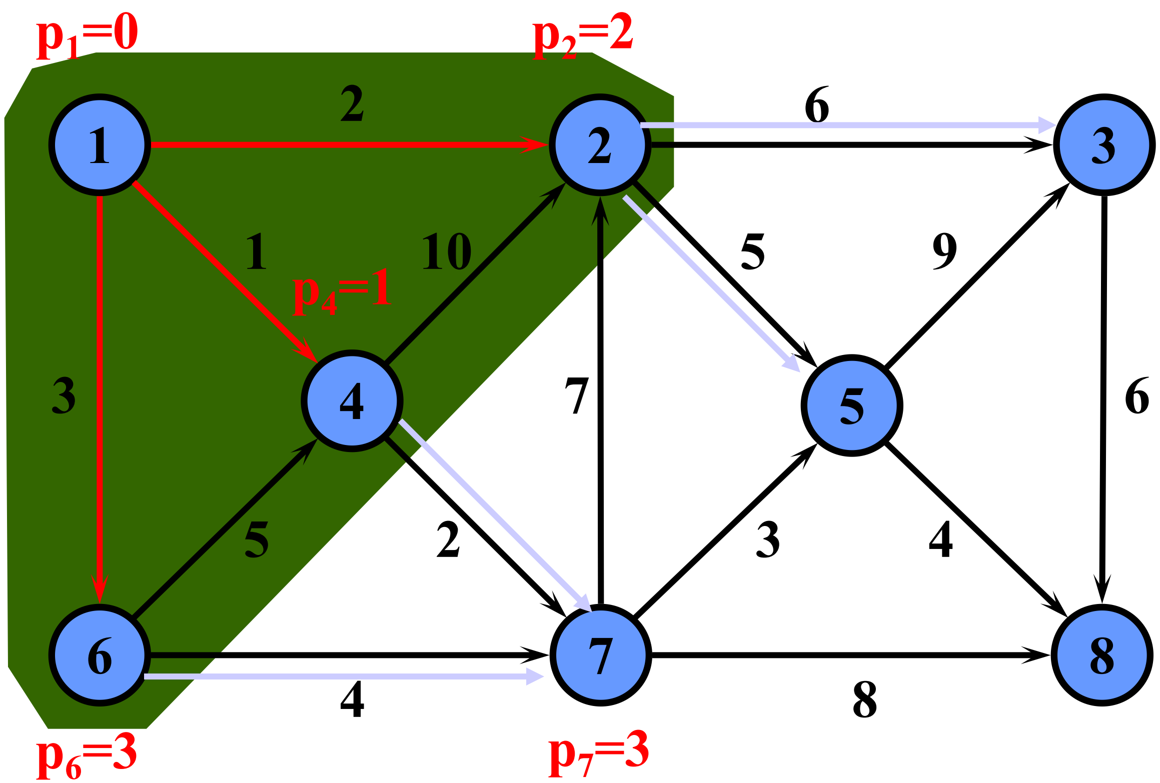
X={1,2,4}



min $\{c_{13},c_{23},c_{25},c_{47}\}$=min {0+3,2+6,2+5,1+2}=min {3,8,7,3}=3

X={1,2,4,6}, p_6=3

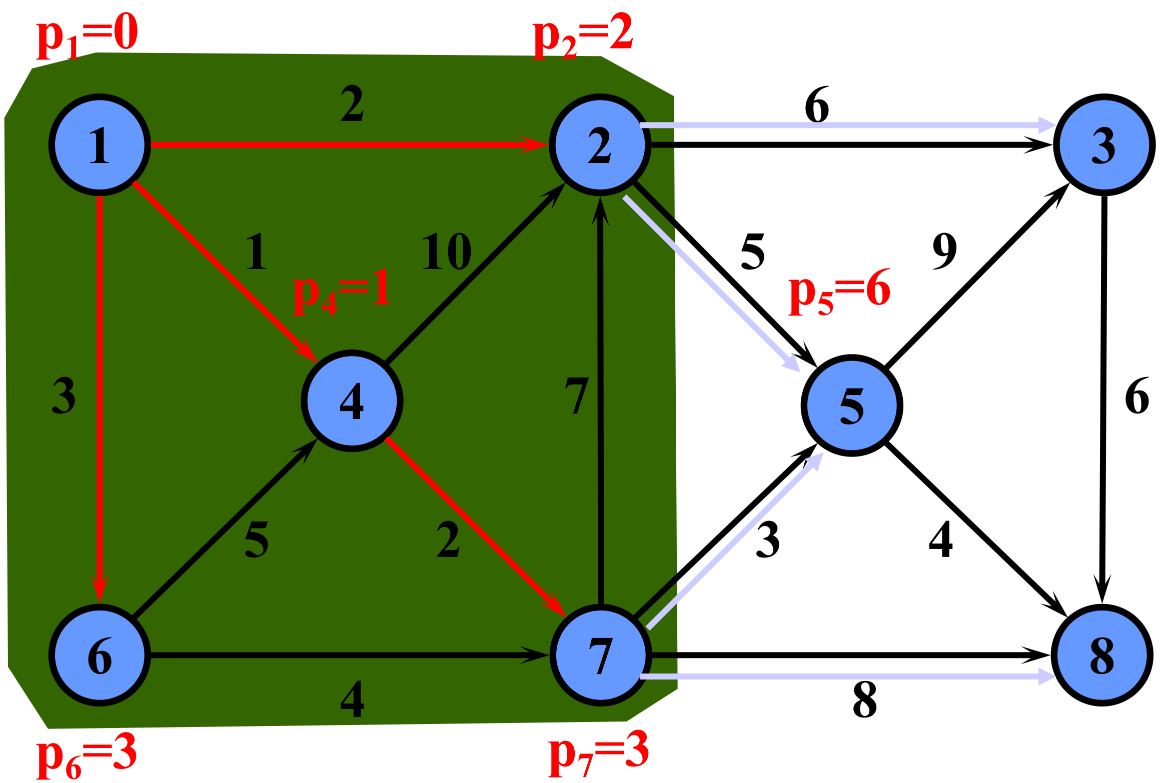
$X=\{1,2,4,6\}$



$\min\{c_{23},c_{25},c_{47},c_{67}\}=\min\{2+6,2+5,1+2,3+4\}=\min\{8,7,3,7\}=3$

$X=\{1,2,4,6,7\}$, $p_7=3$

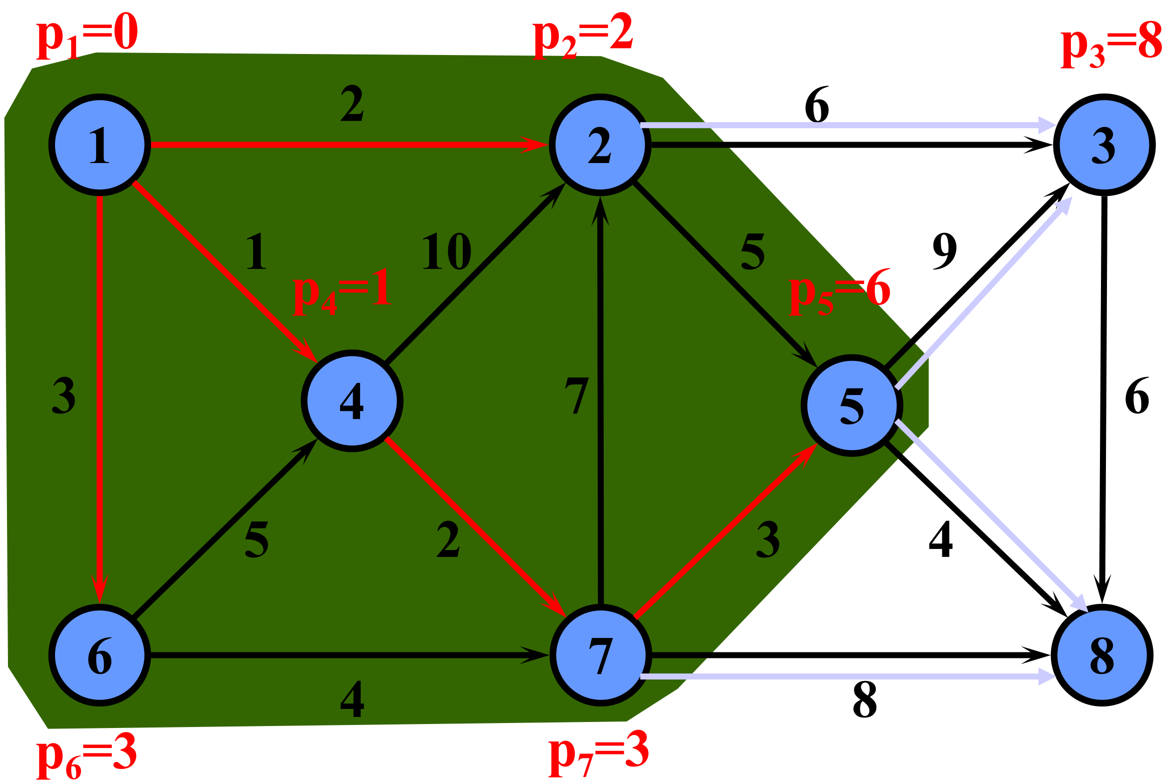
X={1,2,4,6,7}



min $\{c_{23},c_{25},c_{75},c_{78}\}$=min {2+6,2+5,3+3,3+8}=min {8,7,6,11}=6

X={1,2,4,5,6,7}, $p_5=6$

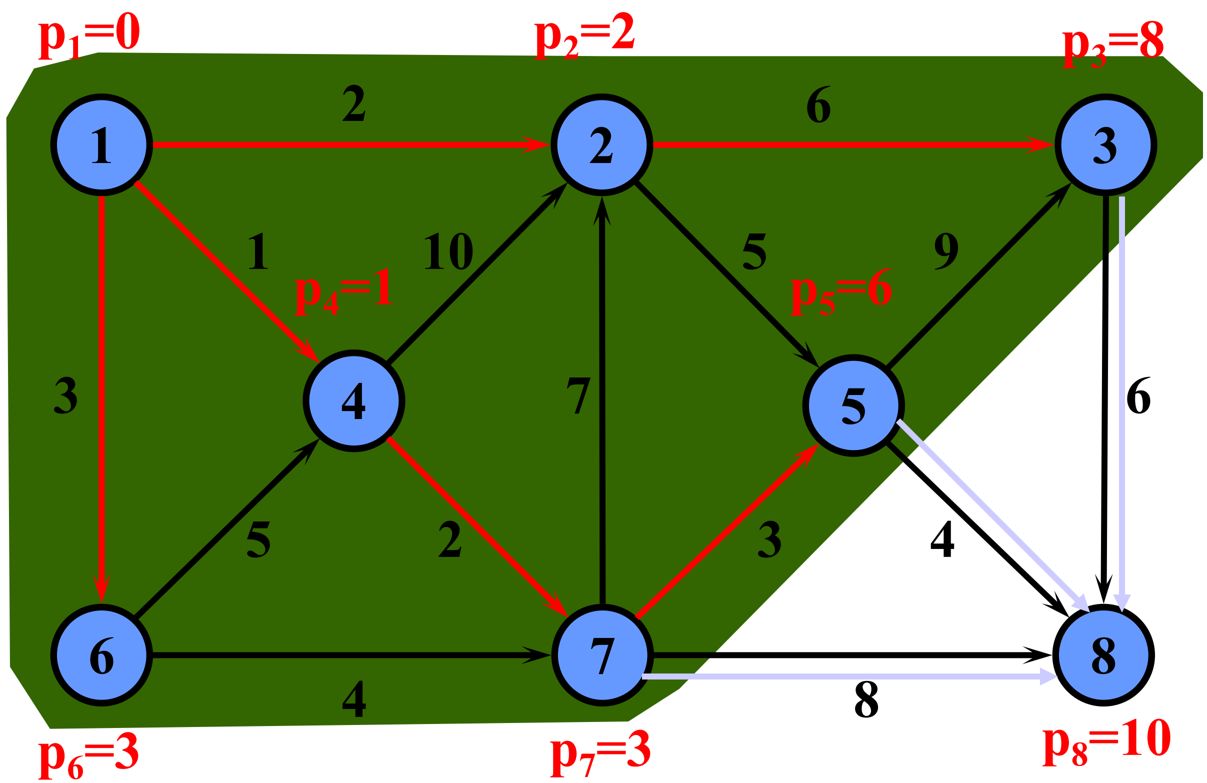
$X=\{1,2,4,6,7\}$



$\min\{c_{23},c_{53},c_{58},c_{78}\}=\min\{2+6,6+9,6+4,3+8\}=\min\{8,15,10,11\}=8$

$X=\{1,2,3,4,5,6,7\}$, $p_3=8$

$X=\{1,2,3,4,6,7\}$

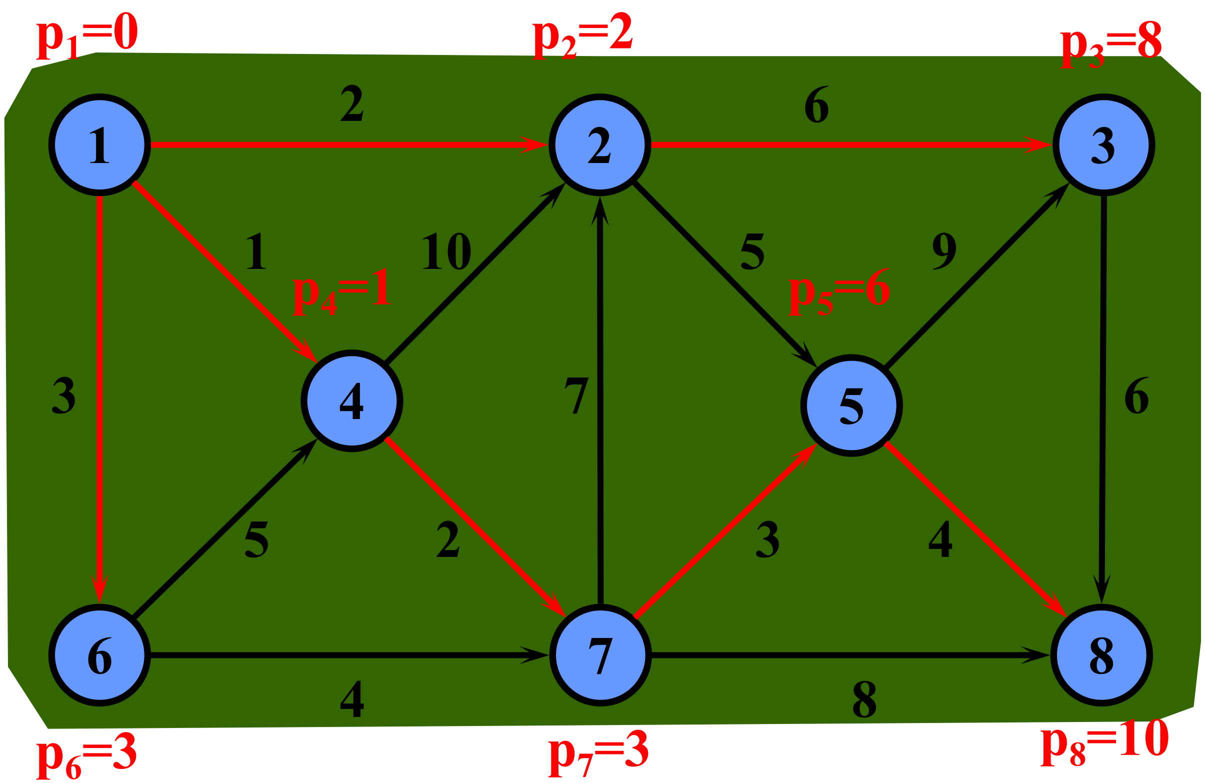


$$\min\{c_{38},c_{58},c_{78}\}=\min\{8+6,6+4,3+7\}=\min\{14,10,11\}=10$$

$X=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, $p_8=10$

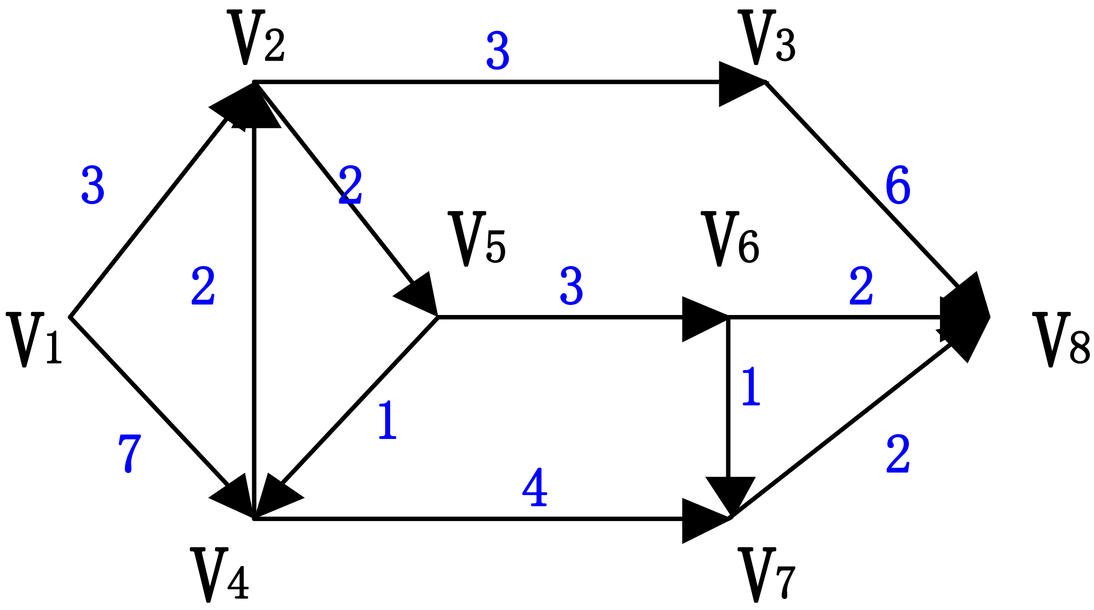
Hamilton

X={1,2,3,4,6,7,8}



1到8的最短路径为{1，4，7，5，8}，长度为10。

求从V_1 到 V_8 的最短路线。



V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7	V_8
① P=0	T=+∞	T=+∞	T=+∞	T=+∞	T=+∞	T=+∞	T=+∞
②	P=T=3	T=+∞	T=7	T=+∞	T=+∞	T=+∞	T=+∞
	③	T=6	T=7	P=T=5	T=+∞	T=+∞	T=+∞
	④	P=T=6	T=6		T=8	T=+∞	T=+∞
		⑤	P=T=6		T=8	T=9	T=12
				⑥	P=T=8	T=10	T=10
					⑦	P=T=9	T=11
再无其它T 标号，所以 $T(V_8)=P(V_8)=10$; min $L(\mu)=10$						⑧	P=T=10

课后习题

P327-328:

10; **14;**