7.5 关系的闭包

主要内容

- 闭包定义
- 闭包的构造方法

  集合表示

  矩阵表示

  图表示
- 闭包的性质

闭包定义

定义7.14 设R是非空集合A上的关系, R的自反(对称或传递)闭包是A上的关系R', 使得R'满足以下条件:

(1) R'是自反的(对称的或传递的)

(2) $R\subseteq R'$

(3) 对A上任何包含R的自反(对称或传递)关系R'' 有$R'\subseteq R''$

R的自反闭包记作$r(R)$, 对称闭包记作$s(R)$, 传递闭包记作$t(R)$.

定理7.10 设R为A上的关系, 则有

(1) $r(R)=R\cup R^0$

(2) $s(R)=R\cup R^{-1}$

(3) $t(R)=R\cup R^2\cup R^3\cup \ldots$

说明：对有穷集$A(|A|=n)$上的关系, (3)中的并最多不超过R^n

证明

证 只证(1)和(3).

(1) 由$I_A=R^0\subseteq R\cup R^0$知 $R\cup R^0$是自反的, 且满足$R\subseteq R\cup R^0$

设R''是A上包含R的自反关系, 则有$R\subseteq R''$和$I_A\subseteq R''$. 从而有

$R\cup R^0\subseteq R''$. $R\cup R^0$满足闭包定义, 所以$r(R)=R\cup R^0$.

(3) 先证 $R\cup R^2\cup\ldots\subseteq t(R)$成立.

用归纳法证明对任意正整数n 有$R^n\subseteq t(R)$.

$n=1$时有$R^1=R\subseteq t(R)$. 假设$R^n\subseteq t(R)$成立, 那么对任意的$<x,y>$

$$<x,y>\in R^{n+1}=R^n\circ R \Rightarrow \exists t\,(<x,t>\in R^n \wedge <t,y>\in R)$$

$$\Rightarrow \exists t\,(<x,t>\in t(R) \wedge <t,y>\in t(R))$$

$$\Rightarrow <x,y>\in t(R)$$

这就证明了$R^{n+1}\subseteq t(R)$. 由归纳法命题得证.

证明

再证 $t(R)\subseteq R\cup R^2\cup\ldots$成立, 为此只须证明$R\cup R^2\cup\ldots$传递.
任取$<x,y>,<y,z>$, 则

$<x,y>\in R\cup R^2\cup\ldots\wedge<y,z>\in R\cup R^2\cup\ldots$

$\Rightarrow \exists t\,(<x,y>\in R^t)\wedge\exists s(<y,z>\in R^s)$

$\Rightarrow \exists t\,\exists s\,(<x,z>\in R^t\circ R^s)$

$\Rightarrow \exists t\,\exists s\,(<x,z>\in R^{t+s})$

$\Rightarrow <x,z>\in R\cup R^2\cup\ldots$

从而证明了$R\cup R^2\cup\ldots$是传递的.

闭包的矩阵表示和图表示

设关系R, $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$的关系矩阵分别为M, M_r, M_s和 M_t

则 $M_r=M+E$ $M_s=M+M'$ $M_t=M+M^2+M^3+\ldots$

E 是单位矩阵, M'是 转置矩阵，相加时使用逻辑加.

设关系R, $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$的关系图分别记为G, G_r, G_s, G_t, 则G_r, G_s, G_t 的顶点集与G 的顶点集相等. 除了G 的边以外, 以下述方法添加新的边:

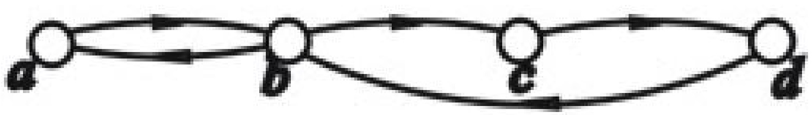
(1) 考察G 的每个顶点, 若没环就加一个环，得到G_r

(2) 考察G 的每条边, 若有一条 x_i 到 x_j 的单向边, $i\neq j$, 则在G 中加一条 x_j 到 x_i 的反向边, 得到G_s

(3) 考察G 的每个顶点 x_i, 找 x_i 可达的所有顶点 x_j (允许$i=j$)，如果没有从 x_i 到 x_j 的边, 就加上这条边, 得到图G_t

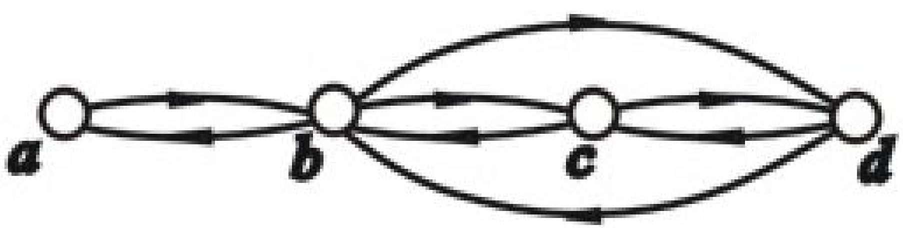
实例

例9　设$A=\{a,b,c,d\}$, $R=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,d\rangle,\langle d,b\rangle\}$, R和$r(R)$, $s(R)$, $t(R)$的关系图如下图所示.

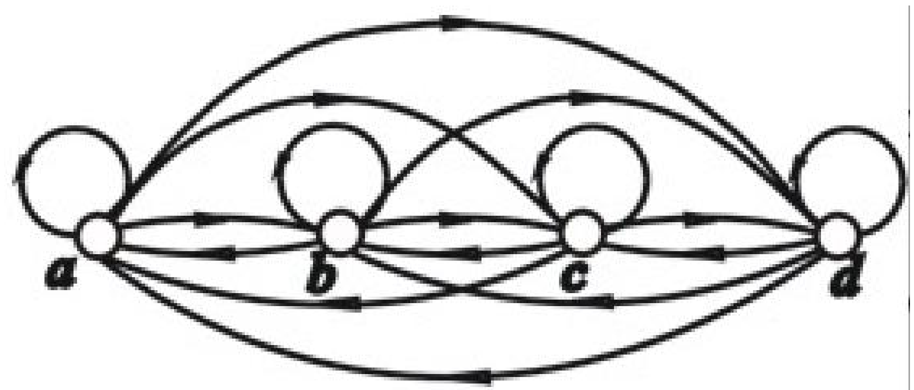


R

$r(R)$



$s(R)$



$t(R)$

闭包的性质

定理7.11 设R是非空集合A上的关系, 则

(1) R是自反的当且仅当 $r(R)=R$.

(2) R是对称的当且仅当 $s(R)=R$.

(3) R是传递的当且仅当 $t(R)=R$.

定理7.12 设R_1和R_2是非空集合A上的关系, 且 $R_1 \subseteq R_2$, 则

(1) $r(R_1) \subseteq r(R_2)$

(2) $s(R_1) \subseteq s(R_2)$

(3) $t(R_1) \subseteq t(R_2)$

证明 略

闭包的性质

定理7.13 设R是非空集合A上的关系,

(1) 若R是自反的, 则 $s(R)$ 与 $t(R)$ 也是自反的

(2) 若R是对称的, 则 $r(R)$ 与 $t(R)$ 也是对称的

(3) 若R是传递的, 则 $r(R)$ 是传递的.

说明：如果需要进行多个闭包运算，比如求R的自反、对称、传递的闭包 $tsr(R)$，运算顺序如下：

$$tsr(R) = rts(R) = trs(R)$$

证明 略

课后习题

P140:

25