第一部分 数理逻辑

引言

一、什么是数理逻辑？

逻辑学，是探索、阐述和确定有效推理原则的学科，逻辑学最早由古希腊哲学家亚里士多德创立

数理逻辑学，用数学的方法研究关于推理、证明等问题的学科叫做数理逻辑（也称为符号逻辑）（用将逻辑推理形式化、抽象化）

二、数理逻辑的历史

十七世纪，莱布尼兹曾设想能不能创造一种通用的“科学语言”；

1847年，英国数学家**G.Boole**发表了《逻辑的数学分析》，建立了“布尔代数”，创造一套符号系统和运算法则，初步奠定了数理逻辑的基础；

第一部分 数理逻辑

1884年，德国数学家弗雷格(Frege)出版了《数论的基础》一书，在书中首次引入了量词的符号；

美国人皮尔斯（Peirce），进一步引入更多逻辑符号，从而数理逻辑逐步成为一门独立的学科；

数理逻辑内容主要包括:命题演算和谓词演算两个部分，我们这门课只介绍第一部分，即第1-3章内容。

第一部分 数理逻辑

第1章. 命题逻辑基本概念

第2章. 命题逻辑等值演算

第3章. 命题逻辑推理理论

第1章 命题逻辑的基本概念

1.1 命题与联结词

1.2 命题公式及其赋值

1.1 命题与联结词

一、命题

命题与真值

- 命题：判断结果惟一、非真即假的陈述句
- 命题的真值：判断的结果
- 真值的取值：真或假
- 真命题与假命题

1.1 命题与联结词

举例：

判断以下哪些是命题：

雪是白的.

2+2=5.

您贵姓？

$x+y<10$.

注： 识别命题的两个要点：

（1）陈述句；（2）是否有唯一真值。

命题概念

例1： 下列句子中那些是命题？

(1) π是有理数. 假命题

(2) $2 + 5 = 7.$ 真命题

(3) $x + 5 > 3.$ 不是命题，结果依赖x

(4) 你去教室吗？ 不是命题，疑问句

(5) 这个苹果真大呀！ 不是命题，感叹句

(6) 请不要上课讲话！ 不是命题，祈使句

(7) 2050年元旦下大雪. 命题，但真值现在不知道

命题概念

再举几个例（命题概念的理解）：

判断以下哪些是命题：

2050年元旦下大雪.

大于2的偶数均可以分解为两个素数之和.（哥德巴赫猜想）

请把脚挪一下！

这句话是错的.

2是偶数而且3也是偶数.

注：(1)真值是命题的属性，不过能否知道真值是另一回事；

(2)悖论（自相矛盾）不能作为命题，因为它们的真值根本不存在；

(3)命题非真既假，不能兼而有之，也不能不真不假，这种非真既假是命题的基本假设，称之为排中律（后面会做介绍）

命题符号化

二、命题符号化

回看刚才的一个命题：

2是偶数而且3也是偶数.

这是由两个小命题，通过“而且”连接而成，从而组成一个新命题，并产生了真值。

两个小命题有其真值，联结词犹如一种运算规则，从而得到一个新的真值，这种将逻辑思维过程形式化，犹如算术那样简明正是数理逻辑的初衷。

为了符号化，我们下面引入三个重要的概念：

命题符号化

命题分类：简单命题（也称原子命题）与复合命题

逻辑联结词(logical connectives)：连接命题，对真值进行运算的词；

简单命题(atom proposition)：不能被分解为更简单的命题；

复合命题(compound proposition)：由简单命题通过联结词联结而成的命题。

简单命题符号化

用小写英文字母 $p, q, r, \ldots, p_i, q_i, r_i$ $(i\geq 1)$表示简单命题

用 “1”表示真，用 “0”表示假

例如，令

p：π是有理数，则 p 的真值为0，

q：$2+5=7$，则 q 的真值为1

命题符号化

例2 ： 将下列命题符号化：

(1) π是有理数是不对的.

(2) 2是偶素数.

(3) 2或4是素数.

(4) 若2是素数，则3也是素数.

(5) 2是素数当且仅当3是素数.

逻辑联结词

逻辑联结词有几种呢？

逻辑联结词（一）
否定、合取、析取联结词

一、否定词(negation)

定义1.1 设 p为命题，复合命题“非p”(或“p的否定”)称为p的否定式，记作$\neg p$，符号$\neg$称作否定联结词. 规定$\neg p$为真当且仅当p为假.

如： π是有理数是不对的.

注：在包含多个对象判断的命题否定时，要注意其意义的变化。

如：天鹅都是白色的.

逻辑联结词（一）
否定、合取、析取联结词

二、合取词(conjunction)

定义1.2 设p,q为两个命题，复合命题“p并且q”(或“p与q”)称为p与q的合取式，记作$p\wedge q$，$\wedge$称作合取联结词. 规定$p\wedge q$为真当且仅当p与q同时为真.

如:2是偶素数.

注：自然语言中许多表示并且的联结词都可以符号化为$\wedge$

“既…又…”、“不但…而且…”、“虽然…但是…”、“不是…而是…”

逻辑联结词（一）
否定、合取、析取联结词

三、析取词(disconjunction)

定义1.3 设p, q为两个命题，复合命题 “p或q” 称作p与q的析取式，记作$p \vee q$，$\vee$称作析取联结词. 规定$p \vee q$为假当且仅当p与q同时为假.

如：2或4是素数.

注：自然语言中的“或”可以符号化为∨，但要注意原命题中的“或”可能表示排斥或和相容或

如：李四学过德语或法语.（相容或）

张三生于1972年或1973年.（排斥或）

联结词的真值定义

p q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$
0 0	1	0	0
0 1	1	0	1
1 0	0	0	1
1 1	0	1	1

合取联结词的实例

例3： 将下列命题符号化：

(1) 吴颖既用功又聪明.

(2) 吴颖不仅用功而且聪明.

(3) 吴颖虽然聪明，但不用功.

(4) 张辉与王丽都是三好生.

(5) 张辉或王丽是是三好生.

解：

(1) 令p: 吴颖用功， q: 吴颖聪明 $p\wedge q$

(2) $p\wedge q$

(3) $\neg p\wedge q$

(4) p: 张辉是三好生， q: 王丽是三好生

$p\wedge q$

(5) $p\vee q$

相容或、排斥或

例4 ：将下列命题符号化：

(1) 晓静爱唱歌或爱听音乐

(2) 晓静只能挑选202或203房间.

(3) 晓静是湖北人或湖南人.

(4) 人固有一死，或重于泰山，或轻于鸿毛

析取联结词的实例

课堂练习题：　将下列命题符号化

(1) 2 或 4 是素数.

(2) 小元只能拿一个苹果或一个梨.

(3) 王小红生于 1975 年或 1976 年.

蕴涵联结词

定义1.4 设p, q为两个命题，复合命题"如果p, 则q"称作p与q的蕴涵式，记作$p\to q$，并称p是蕴涵式的前件，q为蕴涵式的后件，$\to$称作蕴涵联结词.

规定：$p\to q$为假

当且仅当p为真q为假.

如：如果天气好，那么我去接你.

p	q	$p\to q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

蕴涵联结词

(1) $p \rightarrow q$ 的逻辑关系：q为 p 的必要条件

(2) “如果 p, 则 q” 有很多不同的表述方法:

若p，就q

只要p，就q

p仅当q

只有q 才p

除非q, 才p

除非q，否则非p，….

(3) 当 p 为假时，$p \rightarrow q$恒为真，称为空证明

蕴涵联结词的实例

例5：设 p：天冷，q：小王穿羽绒服，将下列命题符号化

(1) 只要天冷，小王就穿羽绒服. $p \to q$

(2) 因为天冷，所以小王穿羽绒服. $p \to q$

(3) 若小王不穿羽绒服，则天不冷. $\neg q \to \neg p$

(4) 只有天冷，小王才穿羽绒服. $q \to p$

(5) 除非天冷，小王才穿羽绒服. $q \to p$

(6) 除非小王穿羽绒服，否则天不冷. $p \to q$

(7) 如果天不冷，则小王不穿羽绒服. $\neg p \to \neg q$

(8) 小王穿羽绒服仅当天冷的时候. $q \to p$

注意：$p \to q$ 与 $\neg q \to \neg p$ 等值（真值相同）

蕴涵联结词的理解

注：(1)自然语言中许多条件联结词都可以符号化为→，但要注意条件的顺序：

“只要...就...”、“如果...那么...”表示充分条件，前面为前件;

“只有...才...”表示必要条件，注意颠倒一下;

如：只有天黑了，夜猫子才出来活动.

(2) 自然语言中，条件语句一般都具有内在的联系，而数理逻辑中的蕴涵，则是命题的一种逻辑连接（逻辑运算）,不一定具备什么内在联系;

如：只要2是偶数，雪就是白的.

(3)在蕴涵式中，只有p为真q为假时，p→q才为假.

如：如果天气好，那么我去接你.

等价联结词

定义1.5 设 p, q为两个命题，复合命题"p当且仅当q"称作p与q的等价式，记作$p\leftrightarrow q$，$\leftrightarrow$称作等价联结词. $p\leftrightarrow q$ 的逻辑关系：p与q互为充分必要条件

规定：$p\leftrightarrow q$为真当且仅当

p与q同时为真或同时为假.

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

等价联结词

例6：求下列复合命题的真值

(1) 2 + 2 ＝ 4 当且仅当 3 + 3 ＝ 6. 1

(2) 2 + 2 ＝ 4 当且仅当 3 是偶数. 0

(3) 2 + 2 ＝ 4 当且仅当 太阳从东方升起. 1

(4) 2 + 2 ＝ 4 当且仅当 美国位于非洲. 0

(5) 函数 $f(x)$ 在 x_0 可导的充要条件是 它在 x_0 连续. 0

小结连接词的真值定义

$p \quad q$	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
0 0	1	0	0	1	1
0 1	1	0	1	1	0
1 0	0	0	1	0	0
1 1	0	1	1	1	1

复合命题

用以上介绍的联结词，可以形式化许多更为复杂的命题。

这些联结词的组合是一定规则的，联结词的运算顺序：()¬, ∧, ∨, →, ↔, 同级按先出现者先运算.

举两个例子：

（1） 如果3是合数，则4是素数，并且如果4是素数，则它不能被2整除.

$$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow \neg r)$$

（2）如果2+3>5当且仅当5是合数，则2和3都是有理数.

$$(p \leftrightarrow q) \rightarrow (r \wedge s)$$

复合命题的真值

例7：令 p:北京比天津人口多;

q: $2 + 2 = 4$;

r: 乌鸦是白色的;

求下列复合命题的真值

(1) $(q \vee r) \rightarrow (p \rightarrow \neg r)$

(2) $(\neg p \vee r) \leftrightarrow (p \wedge \neg r)$

(3) $((\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)) \rightarrow r$.

课堂思考题

设 p: π是无理数，

q: 3是奇数，

r: 苹果是方的，

s: 太阳绕地球转

则复合命题 $(p \rightarrow q) \leftrightarrow ((r \wedge \neg s) \vee \neg p)$ 是真命题还是假命题？

小　结

1. 本小节中$p, q, r, \ldots$ 均表示命题.

2. 联结词集为$\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$，$\neg p, p\wedge q, p\vee q, p\rightarrow q, p\leftrightarrow q$为基本复合命题. 其中要特别注意理解$p\rightarrow q$的涵义. 反复使用$\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$中的联结词组成更为复杂的复合命题.

3. 联结词的运算顺序：$()\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$, 同级按先出现者先运算.

课后习题

P14:

3; **4(3,5);**

5(2,4); **8(2,4,6);** **15.**