7.6 等价关系与划分

主要内容

- 等价关系的定义与实例
- 等价类及其性质
- 商集与集合的划分
- 等价关系与划分的一一对应

等价关系的定义与实例

定义7.15 设R为非空集合上的关系. 如果R是自反的、对称的和传递的, 则称R为A上的等价关系. 设 R 是一个等价关系, 若 $<x,y>\in R$, 称 x等价于y, 记做$x\sim y$.

实例 设 $A=\{1,2,\ldots,8\}$, 如下定义A上的关系R:

$$R=\{<x,y> \mid x,y\in A \land x\equiv y \pmod 3\}$$

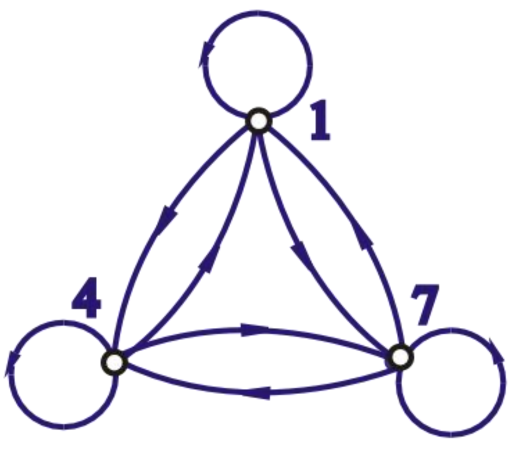
其中$x\equiv y \pmod 3$叫做 x与 y 模3相等, 即x除以3的余数与y除以3的余数相等. 不难验证 R 为A上的等价关系, 因为

(1) $\forall x\in A$, 有 $x\equiv x \pmod 3$

(2) $\forall x,y\in A$, 若$x\equiv y \pmod 3$, 则有$y\equiv x \pmod 3$

(3) $\forall x,y,z\in A$, 若$x\equiv y \pmod 3$, $y\equiv z \pmod 3$, 则有$x\equiv z \pmod 3$

等价关系的实例



模 3 等价关系的关系图

思考：三种特殊的关系，空关系、全关系和相等关系，哪些属于等价关系呢？

等价类定义

定义7.16 设R为非空集合A上的等价关系, $\forall x\in A$， 令

$$[x]_R = \{y \mid y\in A \wedge xRy\}$$

称$[x]_R$为x关于R的等价类, 简称为x的等价类, 简记为$[x]$或$\overline{x}$

实例 $A=\{1, 2, \ldots , 8\}$上模3等价关系的等价类:

$$[1] = [4] = [7] = \{1, 4, 7\}$$

$$[2] = [5] = [8] = \{2, 5, 8\}$$

$$[3] = [6] = \{3, 6\}$$

等价类的性质

定理7.14 设R是非空集合A上的等价关系, 则

(1) $\forall x \in A$, $[x]$是A的非空子集

(2) $\forall x,y \in A$, 如果 xRy, 则 $[x] = [y]$

(3) $\forall x,y \in A$, 如果 $x \not R y$, 则 $[x]$与$[y]$不交

(4) $\cup\{[x] \mid x \in A\} = A$

证 (1) 由定义, $\forall x \in A$有$[x] \subseteq A$. 又$x \in [x]$, 即$[x]$非空.

(2) 任取 z, 则有

$$z \in [x] \Rightarrow \langle x,z \rangle \in R \Rightarrow \langle z,x \rangle \in R$$

$$\langle z,x \rangle \in R \wedge \langle x,y \rangle \in R \Rightarrow \langle z,y \rangle \in R \Rightarrow \langle y,z \rangle \in R$$

从而证明了$z \in [y]$. 综上所述必有 $[x] \subseteq [y]$. 同理可证 $[y] \subseteq [x]$. 这就得到了$[x] = [y]$.

证明

(3) 假设 $[x]\cap[y]\neq\varnothing$, 则存在 $z\in[x]\cap[y]$, 从而有$z\in[x]\wedge z\in[y]$, 即$\langle x,z\rangle\in R\wedge\langle y,z\rangle\in R$成立. 根据$R$的对称性和传递性必有$\langle x,y\rangle\in R$, 与 $x\not R y$矛盾

(4) 先证$\cup\{[x]\mid x\in A\}\subseteq A$. 任取$y$,

$$y\in\cup\{[x]\mid x\in A\}\Leftrightarrow\exists x(x\in A\wedge y\in[x])$$

$$\Rightarrow y\in[x]\wedge[x]\subseteq A\Rightarrow y\in A$$

从而有$\cup\{[x]\mid x\in A\}\subseteq A$

再证$A\subseteq\cup\{[x]\mid x\in A\}$. 任取$y$,

$$y\in A\Rightarrow y\in[y]\wedge y\in A\Rightarrow y\in\cup\{[x]\mid x\in A\}$$

从而有$\cup\{[x]\mid x\in A\}\subseteq A$成立.

综上所述得$\cup\{[x]\mid x\in A\}=A$.

思考：上述结论可以得到什么结论呢？

商集与划分

定义7.17 设 R 为非空集合A上的等价关系, 以 R 的所有等价类作为元素的集合称为A关于R的**商集**, 记做A/R,

$$A/R = \{[x]_R \mid x \in A\}$$

实例 设 A={1,2,…,8}，A关于模3等价关系R的商集为

$$A/R = \{\{1,4,7\}, \{2,5,8\}, \{3,6\}\}$$

A关于恒等关系和全域关系的商集为:

$$A/I_A = \{\{1\}, \{2\}, \ldots, \{8\}\}, \quad A/E_A = \{\{1,2,\ldots,8\}\}$$

定义7.18 设A为非空集合, 若A的子集族π($\pi \subseteq P(A)$)满足:

(1) $\varnothing \notin \pi$

(2) $\forall x \forall y(x,y \in \pi \wedge x \neq y \rightarrow x \cap y = \varnothing)$

(3) $\cup \pi = A$

则称π是A的一个**划分**, 称π中的元素为A的**划分块**.

划分实例

例10 设 $A=\{a, b, c, d\}$, 给定 $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6$如下：

$\pi_1=\{\{a, b, c\},\{d\}\}$

$\pi_2=\{\{a, b\}, \{c\}, \{d\}\}$

$\pi_3=\{\{a\}, \{a, b, c, d\}\}$

$\pi_4=\{\{a, b\}, \{c\}\}$

$\pi_5=\{\varnothing,\{a, b\}, \{c, d\}\}$

$\pi_6=\{\{a, \{a\}\}, \{b, c, d\}\}$

则 π_1和 π_2是A的划分, 其他都不是A的划分.

思考：划分和商集之间是什么关系呢?

显然，商集是一种划分，划分能否对应一种商集，即对应一种等价关系呢?

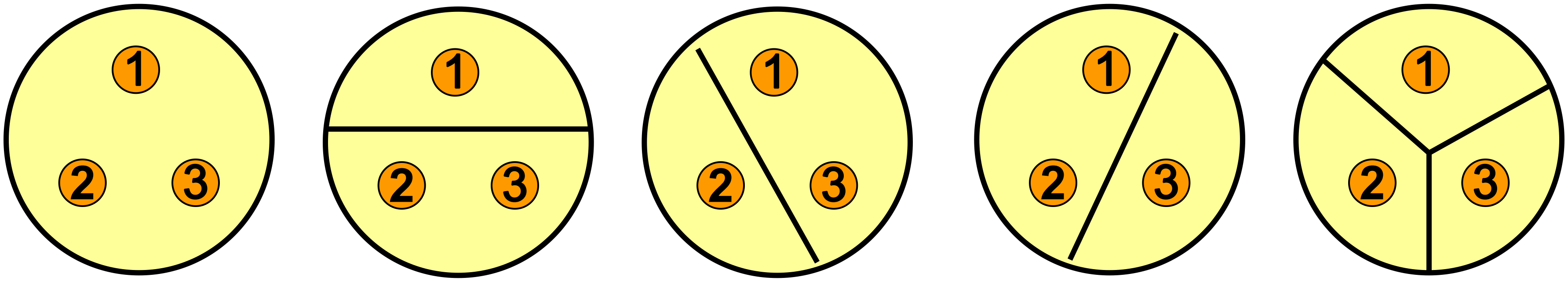
答案是肯定的，等价关系与划分是一一对应的！

下给一个实例，不做证明

实例

例11 给出 $A=\{1,2,3\}$上所有的等价关系

解 先做出A的划分, 从左到右分别记作 $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5$.



π_1 π_2 π_3 π_4 π_5

π_1对应 E_A, π_5对应 I_A, π_2, π_3 和 π_4分别对应 R_2, R_3和 R_4.

$$R_2=\{<2,3>,<3,2>\}\cup I_A$$

$$R_3=\{<1,3>,<3,1>\}\cup I_A$$

$$R_4=\{<1,2>,<2,1>\}\cup I_A$$

课后习题

P142:41