布尔格、布尔代数

定义13.12 如果格$\langle L,\wedge,\vee,0,1\rangle$是有补分配格,则称L为**布尔格**,也叫做**布尔代数**.

由于布尔代数L中的每个元都有唯一的补元,求补运算也可以看成是L中的一元运算.

因此,布尔代数L可记为$\langle L,\wedge,\vee,',0,1\rangle$,其中'表示求补运算.

布尔代数的等价定义

定义13. 13（公理化定义）：有两个二元运算的代数$\langle B, *, \oplus\rangle$称为布尔代数，如果对任意元素$a, b, c \in B$，成立

①（交换律）$a*b=b*a,\ a\oplus b=b\oplus a$；

②（分配律）$a*(b\oplus c)=(a*b)\oplus(a*c)$，

$a\oplus(b*c)=(a\oplus b)*(a\oplus c)$；

③（同一律）存在$0, 1\in B$，使得$a*1=a,\ a\oplus 0=a,\ a\in B$；

④（有补律）B的每一元a都有（唯一）$a'\in S$，使得

$$a*a'=0,\quad a\oplus a'=1.$$

注：布尔代数的两个定义是等价的（证明略）.

例

- **集合代数**$<P(S),\cap,\cup,\sim,\varnothing,S>$是布尔代数.
- **开关代数**$<\{0,1\},\wedge,\vee,\neg,0,1>$是布尔代数,其中$\wedge$为与运算,$\vee$为或运算,$\neg$为非运算.
- 推广:**n元开关代数**也是布尔代数;

布尔代数有以下性质.

定理13.10　设$\langle B,\wedge,\vee,',0,1\rangle$是布尔代数，则有:

- $\forall a\in B,(a')'=a$(双重否定律),
- $\forall a,b\in B$, $(a\vee b)'=a'\wedge b'$

  $(a\wedge b)'=a'\vee b'$

(德摩根律)

证明: $(a\vee b)\vee(a'\wedge b')$

$=(a\vee b\vee a')\wedge(a\vee b\vee b')$(交换)

$=((a\vee a')\vee b)\wedge(a\vee(b\vee b'))$(结合)

$=(1\vee b)\wedge(a\vee 1)$

$=1.$

$(a \vee b) \wedge (a' \wedge b')$

$$
\begin{aligned}
&= (a \wedge a' \wedge b') \vee (b \wedge a' \wedge b') \\
&= ((a \wedge a') \wedge b') \vee ((b \wedge b') \wedge a') \\
&= (0 \wedge b') \vee (0 \wedge a') \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

所以$a' \wedge b'$是$a \vee b$的补元,

即 $(a \vee b)' = a' \wedge b'$.

同理可证 $(a \wedge b)' = a' \vee b'$

布尔代数的子代数

- 布尔代数$\langle B, \wedge, \vee, ', 0, 1\rangle$的子集S称为B的**子布尔代数**, 如果S对运算$\wedge, \oplus, '$封闭和$0, 1 \in S$.

- 子布尔代数**本身**是布尔代数.
- 每个布尔代数$\langle B, \wedge, \vee, ', 0, 1\rangle$都有两个**平凡**的子布尔代数：自身和$\{0, 1\}$.

（**封闭性**：$0\wedge 0=0\wedge 1=0$；$1\wedge 1=1$；

$0\vee 1=1\vee 1=1$；$0\vee 0=0$；

$0'=1$；$1'=0$.）

子布尔代数举例

定义: 设$\langle B, \wedge, \vee, ', 0, 1\rangle$为布尔代数, **封闭区间**$[a, b]$定义为由$a, b$界定的线性序子集:

$$[a, b]=\{x \mid x\in B \text{ 且 } a\le x\le b\}, \text{其中 } a, b\in B.$$

命题: 封闭区间$[a, b]$是布尔代数

证: $[a, b]$显然是B的子集;

$x, y\in [a, b]$

$\Rightarrow a\le x\le b$ 且 $a\le y\le b$ 即$a(b)$为$\{x,y\}$的下(上)界

$\Rightarrow a\le x\wedge y\le x\vee y\le b$

即$x\wedge y, \ x\vee y\in [a, b]$

$\therefore [a, b]$对$\wedge, \vee$封闭,

$\therefore$从而是B的一个子格.

因为$\wedge$, $\vee$ 在B中满足交换律和分配律,

所以在$[a, b]$中也满足交换律和分配律.

a, b分别为$[a, b]$ 中的0元和1元.

易验证满足同一律.

最后, 对任意的$x \in [a,b]$, 取$y=(a \vee x) \wedge b$

可以直接从定义验证:

$x \wedge y=a$;

$x \vee y=b$.

所以,补元律成立

由定义13.13,可知:$[a,b]$=为一个布尔代数.

布尔同态与布尔同构

二布尔代数之间的映射

$f:\langle B, \wedge, \vee, ', 0, 1\rangle \to \langle B', \wedge', \vee', \neg, 0', 1'\rangle$

称为**布尔同态**, 如果对任意a, b∈B, 有

$f(a\wedge b)=f(a)\wedge' f(b)$;

$f(a\vee b)=f(a)\vee' f(b)$;

$f(a')=\neg f(a)$;

$f(0)=0'$,

$f(1)=1'$.

若f还为双射, 则称f为**布尔同构**.

举 例

若用B_n的元素表示n元集S的幂集$\rho(S)$的元素，
则可用$X \wedge Y$表示$X \cap Y$;
$X \vee Y$表示$X \cup Y$;
$\neg X$表示补集X'; 以及
用0, 1分别表示$\varnothing$, S.
不难看出:

n元集的幂集代数与n元开关代数是布尔同构的.

有限布尔代数的表示定理

定理13.11　若B是有限布尔代数,则

B含有2^n个元($n\in N$),

并且B与$<P(S),\cap,\cup,\sim,\varnothing,S>$同构,

其中S是一个n元集合.

举例

格$\langle S_{12}$, gcd. lcm$\rangle$是布尔代数吗?

解: $S_{12}=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$的元素个数6,

不是2的整数幂,

故不是布尔代数.

不难看出2没有补元, 因为

$2\vee x=\mathrm{lcm}(2, x)=12$当且仅当

$x=12$,

而12的补元是1而不是2.

布尔表达式与布尔函数

• 设$\langle B, \wedge, \vee, ', 0, 1\rangle$为布尔代数.

取值于B中元素的变元称为布尔变元;

B中元素(包括0, 1)称为布尔常元.

由布尔变元, 布尔常元经有限次$\wedge, \vee, '$运算形成的式子称为B上布尔表达式.

• 例:对布尔代数$B=\langle \{a, b, 0, 1\}, \wedge, \vee, ', 0, 1\rangle$, 布尔表达式

$$f=a\wedge(0\vee b)\wedge(a\vee b');$$

$$g=(a\wedge x_1)\vee(a\wedge b'\wedge x_2)\vee(x_1'\wedge x_2\wedge 0);$$

$$h=x_1\wedge(x_2\vee x_3)'.$$

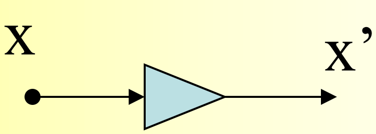
• 含n个布尔变元的布尔表达式称为B上一个n元布尔函数.

应用：逻辑门代数

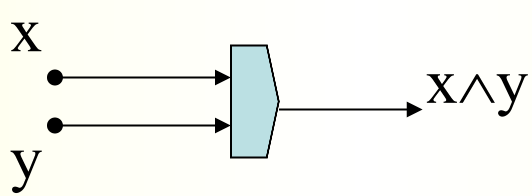
•计算机部件及其网络或其它电子装置都是由许多电路构成，这类电路设计常要用到开关代数的布尔表达式与布尔函数的概念.

•此类布尔表达式可用带3个基本元件的电路来实现. 3个基本元件是：

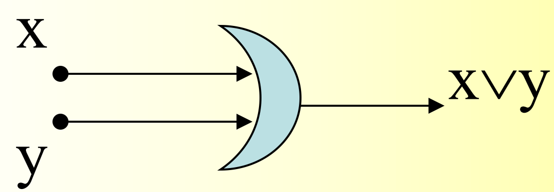
①反相器



②与门

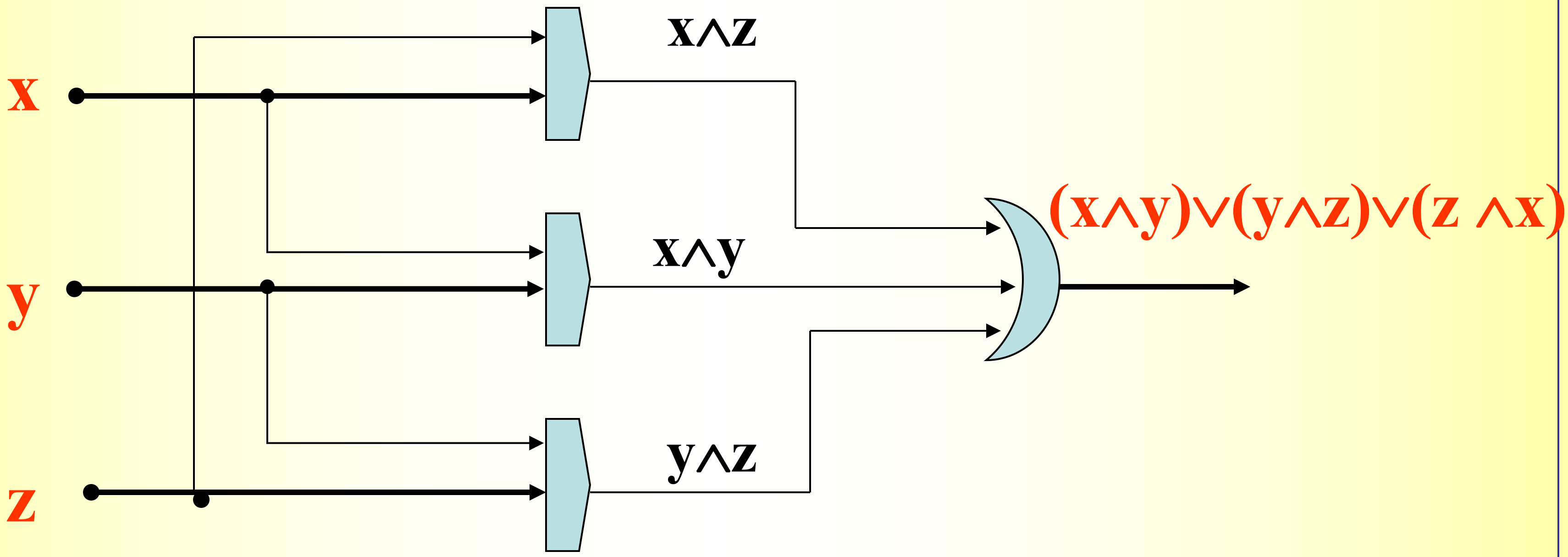


③或门



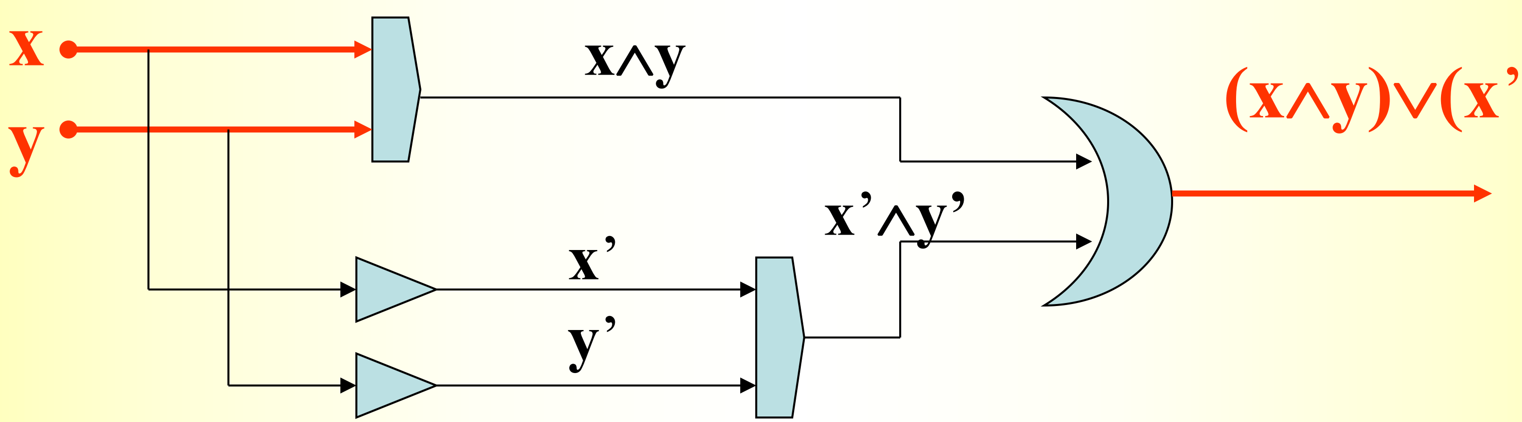
实例之一

•实例1：三人委员会表决某个提案，如有两张赞成票即获通过，实现上述过程的表决机器的控制电路如下图所示：



实例之二

•实例2：设计两个房间照明灯具的开关控制电路使当灯具处于关闭状态时，按下任一开关都可打开此灯具；当灯具已打开时，按下任一开关都可关闭此灯具．实现上述过程的组合电路如下图所示：



•注：也可用布尔函数$(x'\vee y)\wedge(x\vee y')$来设计线路．