第三部分 代数结构

- 主要内容
  - 代数系统----二元运算及其性质、代数系统和子代数
  - 半群与群----半群、独异点、群
  - 环与域-----环、整环、域
  - 格与布尔代数----格、布尔代数

第三部分 代数结构

- 引言
- 什么是代数?

  - 算术(Arithmetic)

    从1+1开始，从整数->有理数->实数->复数

    研究整数、有理数、实数和复数的加、减、乘、除等具体运算法则和性质，称之为一个算术系统；

  - 代数(Algebra)

到中学，开始接触到解方程，就是一种代数

算术的一般化，允许用字母等符号来代替数进行运算，就是代数

注：从字面理解，代数中的代字指代替的意思是，但运算还是与算术中的运算时一样的，还是运用相同的算术规律；

第三部分 代数结构

- 引言
- 什么是代数结构?
  - 代数结构(Algebraic Structure)

在一个对象集合上定义若干运算，并设定若干公理描述运算的性质，就可以构成一个代数结构

注：代数结构比代数更一般化，代数代替的数；代数结构可以在任意一个对象集合上定义运算；则在代数结构中参与运算的不必是数，可以是任意对象。

举例：

(1) 以命题为对象，命题联结词作为运算符，就发展出了一个命题演算系统，这是一个代数结构；

(2)以集合作为对象，定义了集合上的一系列运算，比如交、并、差也形成了一个集合的代数结构；

(3)以关系为对象，关系的交、并、差、合成等运算，形成了一个关系的代数结构；

(4)研究等价关系时，等价关系与划分一一对应，我们还可以以划分为对象，定义划分的积划分、和划分，就形成了一个划分的代数结构

第九章 代数系统

主要内容

- 二元运算及其性质
  - 一元和二元运算定义及其实例
  - 二元运算的性质
- 代数系统
  - 代数系统定义及其实例
  - 子代数
  - 积代数
- 代数系统的同态与同构

9.1 二元运算及其性质

定义9.1 设S为集合，函数 f：$S\times S\rightarrow S$ 称为S上的**二元运算**，简称为二元运算．S中任何两个元素都可以进行运算，且运算的结果惟一．S中任何两个元素的运算结果都属于S，即S对该运算封闭．

注：运算（operator）的基本性质：**普遍性**、**单值性**和**封闭性**

例1 (1) 自然数集合N上的加法和乘法是N上的二元运算，但减法和除法不是.

(2) 整数集合Z上的加法、减法和乘法都是Z上的二元运算，而除法不是.

(3) 非零实数集R*上的乘法和除法都是R*上的二元运算，而加法和减法不是.

实例

(4) 设M_n(R)表示所有n 阶(n≥2)实矩阵的集合，即

$$M_n(R)=\left\{\left.\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\right| a_{ij}\in R,\ i,j=1,2,\ldots,n\right\}$$

则矩阵加法和乘法都是M_n(R)上的二元运算.

(5) S为任意集合，则∪、∩、－、⊕ 为$P(S)$上二元运算.

一元运算的定义与实例

定义9.2 设S为集合，函数 f:$S \to S$ 称为S上的一元运算，简称一元运算.

例2 (1) 求相反数是整数集合Z,有理数集合Q和实数集合R上的一元运算

(2) 求倒数是非零有理数集合Q*,非零实数集合R*上一元运算

(3) 求共轭复数是复数集合C上的一元运算

一元运算的定义与实例

(4) 在幂集$P(S)$上规定全集为S，则求绝对补运算~是$P(S)$上的一元运算.

(5) 设S为集合，令A为S上所有双射函数的集合，$A \subseteq S^S$，求一个双射函数的反函数为A上的一元运算.

(6) 在$n(n \geq 2)$阶实矩阵的集合$M_n(\mathrm{R})$上，求转置矩阵是$M_n(R)$上的一元运算.

二元与一元运算的表示

1. 算符

可以用 $\circ$, $*$, $\cdot$, $\oplus$, $\otimes$, Δ 等符号表示二元或一元运算，称为算符.

对二元运算 $\circ$ ，如果 x 与 y 运算得到 z，记做 $x \circ y = z$

对一元运算Δ, x的运算结果记作Δx.

2. 表示二元或一元运算的方法: 解析公式和运算表公式表示

例 设R为实数集合，如下定义R上的二元运算$*$ ：

$$\forall x, y \in \mathrm{R},\ x * y = x.$$

那么 $3 * 4 = 3$， $0.5 * (-3) = 0.5$

运算表

运算表：表示有穷集上的一元和二元运算

$\circ$	a_1	a_2	$\cdots$	a_n
a_1	$a_1 \circ a_1$	$a_1 \circ a_2$	$\cdots$	$a_1 \circ a_n$
a_2	$a_2 \circ a_1$	$a_2 \circ a_2$	$\cdots$	$a_2 \circ a_n$
.		$\cdots$		
.		$\cdots$		
.		$\cdots$		
a_n	$a_n \circ a_1$	$a_n \circ a_2$	$\cdots$	$a_n \circ a_n$

二元运算的运算表

	$\circ a_i$
a_1	$\circ a_1$
a_2	$\circ a_2$
.	.
.	.
.	.
a_n	$\circ a_n$

一元运算的运算表

运算表的实例

例3 设 $S=P(\{a,b\})$，S上的$\oplus$和 ~ 运算的运算表如下

$\oplus$	$\varnothing$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$
$\varnothing$	$\varnothing$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$
$\{a\}$	$\{a\}$	$\varnothing$	$\{a.b\}$	$\{b\}$
$\{b\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$	$\varnothing$	$\{a\}$
$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	$\{b\}$	$\{a\}$	$\varnothing$

x	$\sim x$
$\varnothing$	$\{a,b\}$
$\{a\}$	$\{a\}$
$\{b\}$	$\{b\}$
$\{a,b\}$	$\varnothing$

二元运算的性质

定义9.3 设 $\circ$ 为S上的二元运算,

(1) 若对任意$x,y\in S$ 有 $x\circ y=y\circ x$, 则称运算在S上满足交换律.

(2) 若对任意$x,y,z\in S$有 $(x\circ y)\circ z=x\circ(y\circ z)$, 则称运算在$S$上满足结合律.

(3) 若对任意$x\in S$ 有 $x\circ x=x$, 则称运算在S上满足幂等律.

定义9.4 设 $\circ$ 和$*$ 为S上两个不同的二元运算,

(1) 若对任意$x,y,z\in S$有 $(x* y)\circ z=(x\circ z)*(y\circ z)$,

$z\circ(x* y)=(z\circ x)*(z\circ y)$, 则称 $\circ$ 运算对$*$ 运算满足分配律.

(2) 若$\circ$和$*$ 都可交换,且对任意$x,y\in S$有 $x\circ(x* y)=x$， $x*(x\circ y)=x$, 则称 $\circ$ 和$*$ 运算满足吸收律.

注：并不是任意代数结构上的二元运算都满足这些性质

实例

Z, Q, R分别为整数、有理数、实数集；$M_n(R)$为n阶实矩阵集合, $n\geq2$；$P(B)$为幂集；A^A为从A到A的函数集，$|A|\geq2$

集合	运算	交换律	结合律	幂等律
Z,Q,R	普通加法+ 普通乘法×	有 有	有 有	无 无
$M_n(R)$	矩阵加法+ 矩阵乘法×	有 无	有 有	无 无
$P(B)$	并∪ 交∩ 相对补− 对称差⊕	有 有 无 有	有 有 无 有	有 有 无 无

实例

Z, Q, R分别为整数、有理数、实数集；$M_n(R)$为n阶实矩阵集合, $n\geq 2$；$P(B)$为幂集；A^A为从A到A的函数集，$|A|\geq 2$

集合	运算	分配律	吸收律
Z,Q,R	普通加法+与乘法×	×对+可分配 +对×不分配	无
$M_n(R)$	矩阵加法+与乘法×	×对+可分配 +对×不分配	无
$P(B)$	并∪与交∩	∪对∩可分配 ∩对∪可分配	有
	交∩与对称差⊕	∩对⊕可分配	无

特异元素：单位元、零元

定义9.5 设 $\circ$ 为S上的二元运算，

(1) 如果存在e_l(或e_r)$\in S$，使得对任意 $x\in S$ 都有

$$e_l \circ x = x \quad (\text{或 } x \circ e_r = x),$$

则称e_l(或e_r)是S中关于 $\circ$ 运算的左(或右)单位元(又称幺元).

若$e\in S$关于 $\circ$ 运算既是左单位元又是右单位元，则称e为S上关于 $\circ$ 运算的单位元. 单位元也叫做幺元(Identity element).

注：幺元即是左幺元又是右幺元

2.幺元的例子：

（1）<N,+> 中的0是幺元；

（2）<N,*> 中的1是幺元；

（3）<P(A),∪> 中的Φ是幺元；

（4）<P(A),∩>中的A是幺元；

特异元素：单位元、零元

3.幺元的性质：

（1）一般情况下，左右幺元可能存在，也可能是不同的元素，也可能有多个；

（2）如果存在幺元，那么幺元是唯一的，而且同时是左右幺元（后面证明）.

特异元素：单位元、零元

(2) 零元（zero element）定义：如果存在θ_l(或θ_r)$\in S$，使得对任意$x\in S$ 都有

$$\theta_l \circ x = \theta_l \text{ (或 } x \circ \theta_r = \theta r\text{)},$$

则称θ_l(或θ_r)是S 中关于$\circ$运算的左(或右)零元.

若$\theta\in S$ 关于$\circ$运算既是左零元又是右零元，则称θ为S上关于运算$\circ$的零元.

2.零元的例子：

（1）<N,+> 中没有零元；
（2）<N,*> 中的0是零元；
（3）<P(A),∪> 中的A是零元；
（4）<P(A),∩>中的Φ是零元；

特异元素：单位元、零元

3.零元的性质：

（1）左右零元可能存在，也可能不存在，左右零元可能是不同的元素，也可能有多个；

（2）如果存在零元，那么零元是唯一的，而且同时是左右零元（后面证明）.

注：对于一个二元运算而言，可能同时有零元和幺元；也可能只有零元或幺元；也可能既没有零元，也没有幺元.

可逆元素和逆元

(3) 设 $\circ$ 为S上的二元运算, 令e为S中关于运算$\circ$的单位元（幺元）.

对于$x\in S$，如果存在y_l(或y_r)$\in S$使得

$$y_l \circ x=e \text{（或} x \circ y_r=e\text{）}$$

则称y_l(或 y_r)是x的左逆元（或右逆元）.

关于 $\circ$ 运算，若$y\in S$ 既是 x 的左逆元又是 x 的右逆元，则称 y为x的逆元(Inverse element). 如果 x 的逆元存在，就称 x 是可逆的.

注：逆元在代数结构中，与零元和幺元的意义不同，零元、幺元通常指某一个或左右零元、左右幺元，它是某几个特殊的元素；而逆元，体现了运算对象之间的一种关系.

可逆元素和逆元

2.逆元的例子：

（1）<I,+> 中的0是幺元，每个整数X都有加法逆元(-X)；

（2）<I,*> 中的1是幺元，只有1，-1有乘法逆元；

（3）<Q,+> 每个有理数X都有加法逆元(-X)；

（4）<Q,*>除0以外，每个有理数都有乘法逆元(1/x)；

3.逆元的性质：

（1）多于1个元素的集合上，零元没有逆元；

（2）逆元唯一.

实例

集合	运算	单位元	零元	逆元
Z,Q,R	普通加法+ 普通乘法×	0 1	无 0	x逆元$-x$ x逆元x^{-1} ($x^{-1}\in$给定集合)
$M_n(R)$	矩阵加法+ 矩阵乘法×	n阶全0矩阵 n阶单位矩阵	无 n阶全0 矩阵	X逆元$-X$ X的逆元X^{-1} （X可逆）
$P(B)$	并∪ 交∩ 对称差⊕	$\varnothing$ B $\varnothing$	B $\varnothing$ 无	$\varnothing$的逆元为$\varnothing$ B的逆元为B X的逆元为X

惟一性定理

定理9.1 设 $\circ$ 为S上的二元运算，e_l和e_r分别为S中关于运算的左和右单位元，则$e_l = e_r = e$为S上关于 $\circ$ 运算的惟一的单位元.

证：　$e_l = e_l \circ e_r$　(e_r为右单位元)

　　　$e_l \circ e_r = e_r$　(e_l为左单位元)

所以$e_l = e_r$，将这个单位元记作e.

假设e'也是 S 中的单位元，则有 $e'=e \circ e'= e$. 惟一性得证.

类似地可以证明关于零元的惟一性定理.

注意： 当 $|S| \geq 2$，单位元与零元是不同的；

当 $|S| = 1$时，这个元素既是单位元也是零元.

惟一性定理

定理9.2 设 $\circ$ 为S上可结合的二元运算, e为该运算的单位元, 对于 $x \in S$ 如果存在左逆元 y_l 和右逆元 y_r, 则有 $y_l = y_r = y$, 且 y是 x 的惟一的逆元.

证：由 $y_l \circ x = e$ 和 $x \circ y_r = e$ 得

$$y_l = y_l \circ e = y_l \circ (x \circ y_r) = (y_l \circ x) \circ y_r = e \circ y_r = y_r$$

令$y_l = y_r = y$, 则 y 是 x 的逆元.

假若 $y' \in S$ 也是 x 的逆元, 则

$$y' = y' \circ e = y' \circ (x \circ y) = (y' \circ x) \circ y = e \circ y = y$$

所以 y 是 x 惟一的逆元.

说明：对于可结合的二元运算，可逆元素 x 只有惟一的逆元，记作 x^{-1}

课后习题

P191:

4(1～5);　　5(1～5);

6(1～5)