6.3 有穷集的计数

1. 文氏图法

例1：对24名会外语的科技人员进行调查，统计结果如下：会英、日、德、法的人分别为13,5,10,9人。其中同时会英、日的有2人，会英、德、法中任两种的都是4人。已知会日语的人既不懂德语也不懂法语，分别求只会一种语言的人数和会三种语言的人数。

实例

例2 求1到1000之间（包含1和1000在内）既不能被5和6整除，也不能被8整除的数有多少个？

解 方法一：文氏图

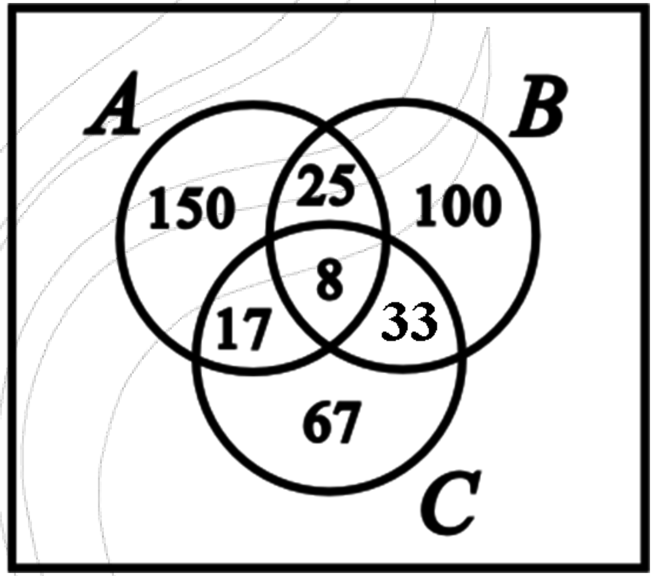
定义以下集合：

$S=\{x \mid x \in Z \wedge 1 \le x \le 1000\}$

$A=\{x \mid x \in S \wedge x\text{可被5整除}\}$

$B=\{x \mid x \in S \wedge x\text{可被6整除}\}$

$C=\{x \mid x \in S \wedge x\text{可被8整除}\}$



包含排斥原理

2. 包含排斥原理

定理6.2 设集合S上定义了n条性质，其中具有第 i 条性质的元素构成子集A_i, 那么集合中不具有任何性质的元素数为

$$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\ldots\cap\overline{A_n}|=|S|-\sum_{1\le i\le n}|A_i|+\sum_{1\le i<j\le n}|A_i\cap A_j|$$

$$-\sum_{1\le i<j<k\le n}|A_i\cap A_j\cap A_k|+\ldots+(-1)^n|A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n|$$

实例

例2的方法二：

$|S| = 1000$

$|A|=\lfloor 1000/5 \rfloor=200$, $|B|=\lfloor 1000/6 \rfloor=166$,

$|C|=\lfloor 1000/8 \rfloor=125$

$|A\cap B| = \lfloor 1000/\mathrm{lcm}(5,6) \rfloor = \lfloor 1000/30 \rfloor = 33$

$|A\cap C| = \lfloor 1000/\mathrm{lcm}(5,8) \rfloor = \lfloor 1000/40 \rfloor = 25$

$|B\cap C| = \lfloor 1000/\mathrm{lcm}(6,8) \rfloor = \lfloor 1000/24 \rfloor = 41$

$|A\cap B\cap C| = \lfloor 1000/\mathrm{lcm}(5,6,8) \rfloor = \lfloor 1000/120 \rfloor = 8$

$|\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}|$

$= 1000-(200+166+125)+(33+25+41)-8 = 600$

推论

推论 S中至少具有一条性质的元素数为

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j|$$

$$+ \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|$$

欧拉函数

例3 欧拉函数Φ是数论中的一个重要函数，设n是正整数，Φ(n)表示{0,1,…,n-1}中与n互素的数的个数。

利用包含排斥原理给出欧拉函数的计算公式。

小结

文氏图. **Venn diagram**

包含排斥原理.

欧拉函数.

课后习题

P107:

20;　　22;　　24;