선형대수 요약정리

20171614 통계학과 박지은

벡터의 합

* 벡터는 공간의 화살표라는 개념을 갖고 이걸 숫자리스트로
생각해보면 벡터의 좌표는 숫자쌍인데 원점에서 얼마나 떨어진지 정도

벡터 = 길이와 방향, 숫자의 리스트 형태의 의미 모두 포괄

$$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+3\\2+(-1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}$$

벡터의 합 = 원점에서 시작하여 이동의 순서로 이동하면서 더하는 것

스케일링 = 벡터의 길이를 늘리거나 줄이거나 방향을 바꾸는 것

- 각 스칼라를 벡터의 원소에 곱해주는 것과 같음 $2\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}$

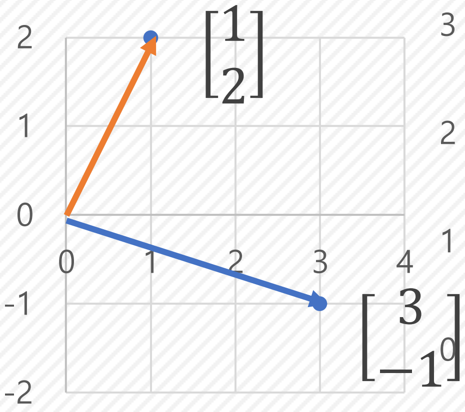
단위벡터 (unit vector) = x축과 y축에 위에 있는 길이가 1인 벡터

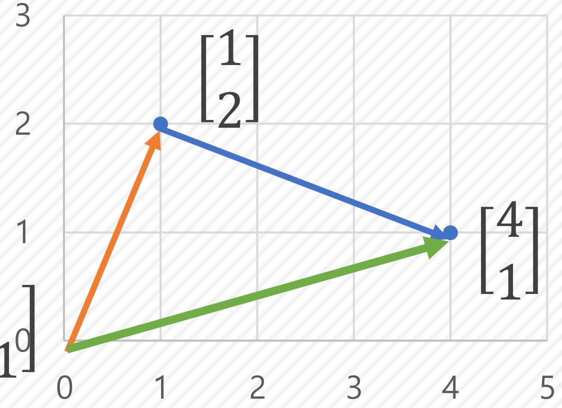
= 각각 i-hat , j-hat = 기저벡터 basis

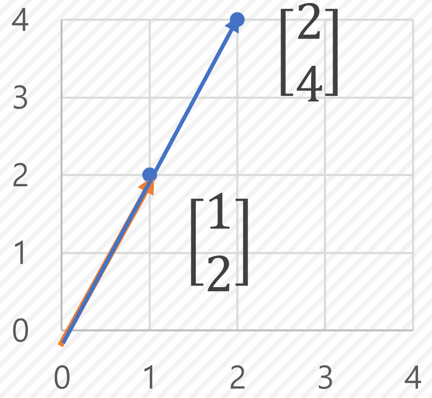
선형결합 = 두 벡터($\vec{v},\vec{w}$)를 스케일링하고 더하는 것

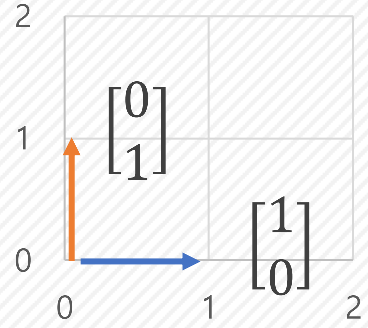
$A\vec{v}+b\vec{w}$ (a와 b는 scalars)

* 벡터의 두 쌍으로 만들 수 있는 모든 벡터들 = 2차원 벡터쌍의 span
*만약 두 벡터가 한 직선의 선상 위에 있다면 span은 일정 선이 되는 것









↔ Linear independent

Linear dependent = 두 벡터를 제외한 다른 벡터가 두 벡터의 span위에 있는 것 = 다른 두 벡터로 설명 가능하다

선형변환 Linear transformation

= 일종의 function
= input을 받고 output을 반환해줌
= 특정 벡터(input)로 다른 벡터(output)을 반환해 주는 것

모든 선형 변환은 변환 이후에도 휘지 않고 직선이어야 하며, 원점은 변환 이후에도 원점 그대로여야 함

$$\vec{v} = -1\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} = -1(Transformed\ i) + 2(Transformed\ j)$$

변환된 벡터 v는 기저벡터들에 선형결합을 해준 결과

= 단순히 기저벡터들의 변형된 후의 위치만 알면, 벡터v를 추론할 수 있다!

즉, 선형변환 = 원점은 고정인 상태로 공간을 이동시키는 방법!

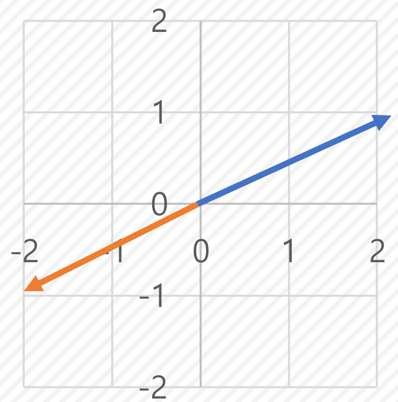
기저벡터들의 변환된 후의 결과 행렬은 일종의 function역할을 함 = 공간이 이동시켜주는 함수

~For example~

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

*만약 여기서 기저벡터의 변환결과를 보여주는 행렬이

Linearly dependent라면 Span은 1차원의 선이 나옴



⇒ 각 열들은 각각 i-hat과 j-hat의 변환된 결과위치

선형변환 Linear transformation

변환을 두 번 이어서 하고 싶다면 선형변환의 합성!

Composition of a rotation an a shear

$$\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}}_{\text{Shear}}\left(\underbrace{\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}}_{\text{Rotation}}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right) = \underbrace{\begin{bmatrix}1 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}}_{\text{Composition}}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$$

➡ 여기서 색으로 표시한 행렬들은 모두 기저벡터에서의 변환 후의 위치 값들을 의미하는 일종의 함수 역할을 하는 행렬!

$\longleftarrow$

* 행렬의 계산은 항상 왼쪽 → 오른쪽 이기 때문에 변환의 순서에 유의! ➡ 바로 여기서 (AB)C = A(BC)인 것의 근거도!

$$\begin{array}{cc} \text{M2} & \text{M1} \\ \begin{bmatrix}0 & 2\\1 & 0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1 & -2\\1 & 0\end{bmatrix} \end{array} = \begin{bmatrix}? & ?\\? & ?\end{bmatrix}$$

M1의 변환 이후 M1의 1열이 기저변수의 역할을 하며

M2의 변환으로 이어짐

$$\begin{bmatrix}0 & 2\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$$

* 이런 연속적인 선형변환은 3차원에서도 같은 원리로 적용됨!

Q. 선형변환을 통해 공간이 이동되고 변화가 생긴다면! 공간이 커지기도 작아지기도 하지 않을까?

이건 어떻게 알 수 있지?

$\Rightarrow$ **행렬식!**

선형방정식계 System of linear equation

방정식계 = 미지수인 변수와 변수와 관련된 리스트

각 변수들은 어떤 상수를 스케일링!

그리고 그 스케일된 변수들을 더한 것 (지수함수나 변수들의 곱은 X)

선형방정식계란 '='을 사이에 두고 변수들은 왼쪽, 상수는 오른쪽에 정리한 것

$$2x + 2y = -4$$
$$1x + 3y = -1$$

$$\begin{array}{ccccc} A & \vec{x} & & \vec{v} \\ \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

이걸 잘 보면 x라는 벡터를 A의 변환을 통해 v라는 벡터로 만든 식이야!

여기서 해를 찾는 방법은

1. 행렬A 변환이 모든 공간을 더 낮은 차원으로 축소시키는지 (선이나 점으로)
2. 공간 전부가 남는지!

이것들은 행렬A의 det=0인지 알면 되겠지!

행렬식이 0이라면 값들이 여러 개가 나오기 때문에 찾을 수 없어!

(input 1개는 output 1개!) 그러니 det≠0인 것을 가정!

역행렬 = 변환된 행렬을 다시 거꾸로 되돌리는 행렬

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{v}$$

그러니 역행렬*행렬 = 아무것도 하지 않은 상태

* Rank = 변환 결과의 차수!

→ 랭크가 높을수록 열의 개수와 같고 '풀랭크'라고 해!

* 행렬의 가능한 모든 집합 = 열공간(column space) (<u>해의 존재여부</u>)

* 영벡터 = 0에 해당하는 벡터 →어느 열공간에도 다 들어가 있음!

변환해서 원점으로 이동되는 벡터들의 집합 = null space or kernel

여기에 해당하는 벡터들은 모두 영벡터로 이동한다는 뜻!

풀랭크인 변환에서 원점으로 변하는 건 영벡터가 유일!

그러니 풀랭크가 아니라면 영벡터인 것들이 많음

내적/외적 Dot Product / Cross Product

차원 축소의 의미를 갖는 행렬들! 일종의 투사/투영

3 basis vectors

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$ 2 coordinates for Each landing spots

3차원으로 시작했고 2행의 의미는 세 기저변수의 변환 후

2차원이 됐다는 의미! 일종의 투사/ 투영!

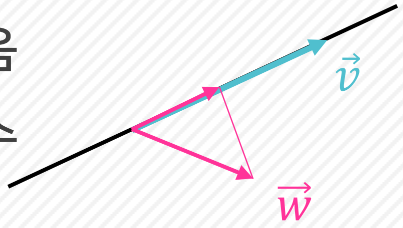
변환행렬= $\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$

내적 = 두 벡터 중 하나를 변환인자 transform으로 보는 것

→ 두 벡터의 방향이 같은지 알 수 있어!

내적 > 0 : 두 벡터의 방향이 같음

내적 < 0 : 두 벡터의 방향이 음수



$\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ = (Length of projected $\vec{w}$) (Length of $\vec{v}$)

이중성 Duality 때문에 결과 공간이 수선인 선형변환이 되면, 어떤 유일한 벡터가 그 변환에 대응하고 있고, 변환의 적용은 벡터의 내적을 구하는 것과 같음!

Dot product

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Transform}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

외적 = 3차원인 두 벡터를 결합해서 새로운 3차원 벡터를 만들어 내는 것!

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \mathrm{X} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \det\left(\begin{bmatrix} \hat{i} & v_1 & w_1 \\ \hat{j} & v_2 & w_2 \\ \hat{k} & v_3 & w_3 \end{bmatrix}\right) = \hat{i}(v_2w_3 - v_3w_2) + \hat{j}(v_3w_1 - v_1w_3) + \hat{k}(v_1w_1 - v_2w_1)$$

= 기저벡터들의 선형조합식! 이것으로 얻게 되는 벡터는 v와 w에 수직인 유일한 벡터!

고유값/고유벡터 Eigen value / Eigen vector

대부분의 벡터들은 변환 과정에서 기존의 위치와 방향에서 벗어남!

하지만 몇몇 벡터들은 변환 후에도 같은 span위에 있어! 길이가 늘고 줄고 뒤집어 지는 등만 가능

같은 span위의 벡터들은 모두 같은 성질을 갖는다고 볼 수 있다는 것!

이러한 벡터들 = 고유벡터

정도 = 고유값

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

여기서 A는 임의의 변환!
V는 고유벡터!
그리고 람다만큼 스케일링 한 것!

$$(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$$

⇒ 차원을 낮추는 람다를 찾는 것!
0벡터가 돼야 하기 때문!

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

대각행렬 = 각 기저벡터를 특정한 고유값으로 스케일링

$$\begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

모든 기저벡터들은 고유벡터이고
대각값들은 고유값이 되는 것!

이러한 고유벡터를 기저벡터가 되도록
좌표계를 바꾸는 것도 가능!
고유 벡터이기도 하면서 기저벡터인 것을
고유기저(eigenbasis)라고 함

벡터공간 Vector spaces

$L(\vec{v}+\vec{w}) = L(\vec{v}) + L(\vec{w})$

$L(c\,\vec{v}) = cL(\vec{v})$

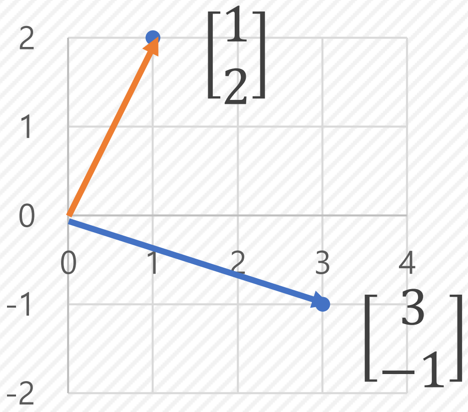
⇒ 이런 것들을 선형변환이 합과 실수배를 보존한다고 함!

즉, 함수에서도 선형대수의 개념이 base!

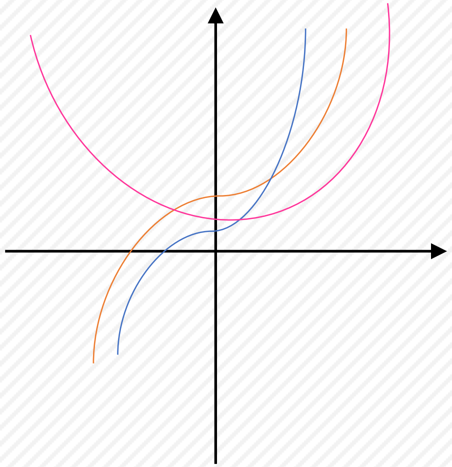
2차식 3차식.. 등등 함수나 미적분 등 모두 선형이라는 조건 하에 계산이 가능함

즉, 위의 개념들 모두 적용이 가능하다는 것!

벡터공간 = 화살표, 숫자배열, 함수 등 벡터와 비슷한 것들의 집합



$$\begin{bmatrix}4\\7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-5\\-5\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}8\\-7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8\\-6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}-1\\8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6\\-6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$$



선형대수의 8개의 공리 Axioms

1. $\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})=(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}$
2. $\vec{v}+\vec{w}=\vec{w}+\vec{v}$
3. There is a vector 0 such that $0+\vec{v}=\vec{v}$ for all $\vec{v}$
4. For every vector $\vec{v}$ there is a vector $-\vec{v}$ so that $\vec{v}+(-\vec{v})=0$
5. $a(b\vec{v})=(ab)\vec{v}$
6. $1\vec{v}=\vec{v}$
7. $a(\vec{v}+\vec{w})=a\vec{v}+a\vec{w}$
8. $(a+b)\vec{v}=a\vec{v}+b\vec{v}$

이 공리들은 선형대수의 개념들로 자연스럽게 나오는 규칙들임
벡터라는 개념이 화살표, 숫재벼열 리스트, 함수 등 많은 의미를 갖고 있고 분야마다 다르게 쓰이기 때문에
만들어지는 정의들을 검증하기 위한 일종의 체크리스트! (선형대수를 대입할 수 있나 없나가 결정됨)

감사
합니다