সংখ্যাতত্ত্ব - Number theory

সংখ্যাতত্ত্ব: লিনিয়ার ডায়োফ্যান্টাইন সমীকরণ

linear Diophantine Equation bangla tutorial,linear Diophantine Equation tutorial

Sharif Hasan • September 3, 2021 সর্বশেষ আপডেট September 3, 2021 0 254 পড়তে 2 মিনিট লাগতে পারে

সংখ্যাতত্ত্বের আরেকটি লিখাতে আপনাদের স্বাগতম। আগের লিখায় দেখেছিলাম আমরা কিভাবে ইউক্লিডিয়ান অ্যালগরিদম ব্যবহার করে $a.x_g + b.y_g = gcd(a, b)$ এর সমাধান করতে পারি। এই লিখায় আমরা $a.x + b.y = c$ এর সমাধান করা শিখবো যেখানে $c|gcd(a, b)$ বা c, $gcd(a, b)$ দ্বারা বিভাজ্য এবং a অথবা b এর যেকোনো একটি অশূন্য হবে। এই সমীকরণের নাম লিনিয়ার ডায়োফ্যান্টাইন সমীকরণ ।

লিনিয়ার ডায়োফ্যান্টাইন সমীকরণ: সমস্যার বিবরণী

আমাদের একটি সমীকরণ দেয়া আছে, $a.x + b.y = c$ যেখানে a, b, c প্রদত্ত পূর্ণসংখ্যা, c, $gcd(a, b)$ দ্বারা বিভাজ্য। আমাদেরকে x, y এর এমন দুইটি মান বের করতে হবে যেন এই সমীকরণটি সত্য হয়।

> *এই লিখাটি অনেক বেশি Extended Euclidean Algorithm এর উপর নির্ভরশীল। সুতরাং যাদের বর্ধিত ইউক্লিডিয়ান অ্যালগরিদম বা Extended Euclidean Algorithm নিয়ে জানা নেই তারা লিখাটি পরে আসেন।*
>
> *সংখ্যাতত্ত্ব: এক্সটেন্ডেড ইউক্লিডিয়ান অ্যালগরিদম*

Linear Diophantine Equation এর একটি সমাধান বের করা।

যদি পূর্ব থেকে এক্সটেন্ডেড ইউক্লিডীয়ান অ্যালগরিদম নিয়ে জানা থাকে তবে এই সমস্যার সমাধান করা সহজ হবে আশা করি। $a.x + b.y = c$ এই সমীকরণে c কে $gcd(a, b)$ দ্বারা নিঃশেষে ভাগ করা যায়। এটা সমাধানের আগে আমরা $a.x_g + b.y_g = gcd(a, b)$ এর সমাধান বের করবো বর্ধিত ইউক্লিডিয়ান অ্যালগরিদম ব্যবহার করে।

আমরা সেখান থেকে জেনেছিলাম $a.x_g + b.y_g = gcd(a, b)$ এর জন্য আমরা সবসময় x_g, y_g এর একটি সমাধান পাবো। আগের লিখা থেকে extended_gcd() ফাংশনটি কপি করছি।

```
int extended_euclid(int a,int b,int &x,int &y){
 if(b==0){
 x=1;
 y=0;
 return a;
 }
 int x1,y1;
 int gcd=extended_euclid(b,a%b,x1,y1);
 x=y1;
 y=x1-floor(a/b)*y1;
 return gcd;
}
```

উদাহরণস্বরূপ একটি সমীকরণ বিবেচনা করি, $8x + 44y = 52$, এখানে $a = 8, b = 44, c = 52$। আমরা main() ফাংশনের ভেতর থেকে extended_euclid() কে কল করবো।

```
int main(){
 int a=8,b=44,x_g,y_g;//8x+44y
 int gcd=extended_euclid(a,b,x_g,y_g);
 cout<<gcd<<" "<<x_g<<" "<<y_g<<endl;
 return 0;
}
```

এখানে x, y রেফেরেন্সের মাধ্যমে আপডেট হয়ে গিয়েছে। এবং ফাংশনটি $gcd(8, 44) = 4$ রিটার্ন করেছে। আমরা এই কলের মাধ্যমে $x_g, y_g, gcd(a, b)$ এর মান পেয়েছি। এখানে আমরা পাই $x_g = -5, y_g = 1, gcd(a, b) = 4$

এখন লিনিয়ার ডায়োফ্যান্টাইন সমীকরণের শর্ত মোতাবেক c অবশ্যই $gcd(a, b)$ দ্বারা বিভাজ্য হতে হবে। এখানে $c = 52$ যা 4 দ্বারা বিভাজ্য। $c/gcd(a, b) = 13$।

বর্ধিত ইউক্লিডিয়ান অ্যালগরিদম থেকে পাই,

$a.x_g + b.y_g = gcd(a,b)$
$8.-5+44.1=4$
$13.(8.-5+44.1)=4.13$ [উভয় পক্ষে $c/gcd(a,b)$ বা 13 গুন করি]
$8.(-5.13)+44.(1.13)=52$

$8x+44y=52$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $x=-5.13=-65$ এবং $y=13$

আমরা যদি সাধারনরূপে লিখি তবে পাই,

$a.x+b.y=c$ এর সাথে তুলনা করি, $x=x_g.\dfrac{c}{gcd(a,b)}$ এবং
$y=y_g.\dfrac{c}{gcd(a,b)}$

$a.x_g+b.y_g=gcd(a,b)$

উভয় পক্ষে $\dfrac{c}{gcd(a,b)}$ গুন করে পাই,
বা, $\dfrac{c}{gcd(a,b)}(a.x_g+b.y_g)=gcd(a,b).\dfrac{c}{gcd(a,b)}$
বা, $a.x_g.\dfrac{c}{gcd(a,b)}+b.y_g.\dfrac{c}{gcd(a,b)}=c$

সুতরাং আমরা সমীকরণের একটি সমাধান পেলাম।

সাধারণরূপে সমাধান বের করা

উপরের ধাপে আমরা $a.x+b.y=c$ এর একটি সমাধান সমাধান বের করেছি। কিন্তু লিনিয়ার ডায়োফ্যান্টাইন সমীকরণ এর অসীম সংখ্যক সমাধান পাওয়া যায়। কিভাবে? চলুন নিচের অংশটুকু শেষ করি।

$$a.(x_g.\frac{c}{gcd(a,b)}+\frac{b}{gcd(a,b)})+b.(y_g.\frac{c}{gcd(a,b)}-\frac{a}{gcd(a,b)})=$$

আমরা x এর মান এর সাথে $\dfrac{b}{gcd(a,b)}$ যোগ করেছি এবং y এর মানের থেকে $\dfrac{a}{gcd(a,b)}$ বিয়োগ করেছি। এতে করে এই সমীকরনের সাম্যতা অক্ষুন্ন রয়েছে। প্রমান নিচে দেয়া হলো।

$$a(x+\frac{b}{gcd(a,b)})+b(y-\frac{a}{gcd(a,b)})$$
$$=a.x+\frac{ab}{gcd(a,b)}+b.y-\frac{ab}{gcd(a,b)}$$

$= ax + by$
$= c$

সুতরাং দেখতে পাচ্ছি x এর সাথে $\frac{b}{g}$ যোগ এবং y থেকে $\frac{a}{g}$ বিয়োগ করলে x ও y এর নতুন যা মান পাবো পাবো তা আমাদের সমীকরণকে সিদ্ধ করে।

একই ভাবে খুব সহজেই দেখানো যায় যে,

$$a.(x_g.\frac{c}{gcd(a,b)} + k.\frac{b}{gcd(a,b)}) + b.(y_g.\frac{c}{gcd(a,b)} - k.\frac{a}{gcd(a,b)}$$

এখানে k হলো যেকোনো পূর্ণসংখ্যা। সুতরাং দেখতে পাচ্ছি লিনিয়ার ডায়োফ্যান্টাইন সমীকরণের অসীম সংখ্যক সমাধান রয়েছে, যা k এর মানের উপর নির্ভর করে।

সুতরাং আমরা সাধারণ রুপে লিখতে পারি,

$$x = x_g.\frac{c}{gcd(a,b)} + k.\frac{b}{gcd(a,b)}$$

$$y = y_g.\frac{c}{gcd(a,b)} - k.\frac{a}{gcd(a,b)}$$

এখানে k যেকোনো পূর্ণসংখ্যা।

C++ এর মাধ্যমে লিনিয়ার ডায়োফ্যান্টাইন সমীকরণ এর ইমপ্লিমেন্টেশন

```
#include<bits/stdc++.h>
using namespace std;

int extended_euclid(int a,int b,int &x,int &y){
 if(b==0){
 x=1;
 y=0;
 return a;
 }
 int x1,y1;
 int gcd=extended_euclid(b,a%b,x1,y1);
 x=y1;
 y=x1-floor(a/b)*y1;
 return gcd;
}

int main()
{
   //Our equation 8x+44y=52
   int a=8,b=44,x_g,y_g,c=52;
   int gcd=extended_euclid(a,b,x_g,y_g); //8x+44y=gcd(a,b) এর জন্য সমাধান বের
   if(c%gcd!=0){// যদি c, gcd দ্বারা নিঃশেষে বিভাজ্য না হয় তবে x,y এর কোন পূর্ণ মা
   cout<<"The equation has no solution!\n";
   return 0;
   }

   int k=3; // k এর মান ইচ্ছেমত ধরে নিন।
   int x=x_g*c/gcd+k*b/gcd;
   int y=y_g*c/gcd-k*a/gcd;

   cout<<"Solution for 8x+44y=52 is: x="<<x<<"; y="<<y<<endl;
   return 0;
}
```

এখনে আমরা সবার প্রথমে Extended Euclidean Algorithm অনুসারে $a.x + b.y = gcd(a, b)$ সমাধানের জন্য extended_euclid() ফাংশন তৈরি করে নিয়েছি। এর মাধ্যমে আমরা gcd(a,b) এর পাশাপাশি x_g, y_g এর মান পাবো। তারপরে আমরা পরিক্ষা করে দেখেছি c কে $gcd(a, b)$ দ্বারা ভাগ করা যায় কি না। যদি ভাগ করা না যায় তবে আমরা বলতে পারি এই সমিকরনের সমাধান সম্ভব নয় যেখানে x, y পূর্ণ সংখ্যা হবে।

এর পর আমরা k এর একটি ইচ্ছেমত মান ধরে নিয়েছি। k এর মান অনুসারে আমরা এই সমিকরনের বিভিন্ন সমাধান পেতে পারি। তারপর আমরা সুত্র প্রয়োগ করে x, y এর মান বের করেছি এবং আউটপুট দিয়েছি।

এই লিখাটি অসম্পূর্ণ। লিখাটি আরও আপডেট করা হবে। আপাতত এখানে একটি সমাধান বের করা দেখানো হলেও আমরা x, y এর এমন মান বের করতে পারবো যেন $x + y$ এর মান সর্বনিম্ন হয়। একই সাথে আমরা বের করতে পারবো একটি নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে কতগুলো সমাধান রয়েছে।

সুত্র: https://cp-algorithms.com/algebra/linear-diophantine-equation.html

লেখাটি কেমন লেগেছে আপনার?

রেটিং দিতে হার্টের উপর ক্লিক করুন।

গড় রেটিং 5 / 5. মোট ভোট: 8

#সংখ্যাতত্ত্ব