

## Lecture 1: Linear Algebra

Lecturer: Juhee Lee

Scribes: Juhee Lee

## 1.1 Numbers and Arrays

먼저 앞으로 사용하게될 용어를 정리합니다

## Notations

- scalar(스칼라)는 “하나의 숫자”를 의미합니다. ex)  $3, -5, \dots$   
자연수( $\mathbb{N}$ ), 정수( $\mathbb{Z}$ ), 유리수( $\mathbb{Q}$ ), 실수( $\mathbb{R}$ ), 복소수( $\mathbb{C}$ ) 등으로 분류합니다.  
만일, '3은 실수이다.'란 문장은 '3은 실수에 속한다.'고 표현하고 수학적 표현은  $3 \in \mathbb{R}$ 입니다.
- array(배열)란  $n$ 개의 원소의 나열 즉,  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$  이고, 이를 “ $n$ 차원 tuple” 이라 합니다.
- vector는  $n$ 개의 성분의 나열로 1-D 배열입니다. 즉,  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$  이고, 각 성분  $a_i$ 의 속성 혹은 데이터 타입이 같아야 합니다.

Note. 벡터는 기하학적 의미로 사용 (by directed line segment), 벡터의 데이터 성분으로는 벡터, 행렬, 함수 모두 가능합니다.

- matrix는 2-D 배열이다. 즉,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & a_{ij} & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{m \times n}$$

- tensor는 3-D 이상을 표현할 수 있는 배열이다. 즉, 각성분이 행렬로 구성된 배열이다.

앞에서 살펴본 용어에 대해 자세히 살펴보도록 하겠습니다.

## vectors

**Definition 1.1** A vector  $\mathbf{a}$  is an array of numbers

- vector의 성분은 행렬, 함수 등 같은 형식의 성분이 들어오면 됩니다.
- row vector  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$
- column vector  $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

지금부터 벡터  $\mathbf{a}$ 를 column vector라고 놓습니다

- “transpose”  $(\text{column vector})^T = \text{row vector}$

수들이 존재하면 그들간의 연산 즉 operation을 정의합니다.

### Operations of vectors

- “+ / -” 연산의 정의에서 제일 중요한것은 연산이 가능한지?? 를 찾아보는 것인데, 먼저 dimension check 후 연산 가능합니다.

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$$

- “곱하기?” 연산의 정의에 따라 여러가지가 가능합니다.

1. “scalar multiplication”

$$c \in \mathbb{R}, c\mathbf{a} = c(a_1, \dots, a_n) = (ca_1, \dots, ca_n)$$

2. “Hadamard product (elementwise multiplication)”

$$\mathbf{a} \odot \mathbf{b} = (a_1 b_1, \dots, a_n b_n)$$

3. “dot product (Euclidean inner product)” (not just inner product)

파이썬에선 명령어 inner product

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_1 b_1 + \dots + a_n b_n) = \sum_{i=1}^n a_i b_i \text{ 기호 정리}$$

4. “cross product”

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1) = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \sin \theta$$

## Matrices

**Definition 1.2** A matrix  $\mathbf{A}$  is an 2D array of numbers

$\mathbf{A}$  는  $m \times n$  matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & a_{ij} & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{m \times n}$$

### Operations of matrices

- “+” 연산은 같은 사이즈의 행렬의 연산만 가능합니다.

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (a_{ij}) + (b_{ij})_{m \times n}$$

- “transpose”  $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n} \Rightarrow \mathbf{A}^T = (a_{ji})_{n \times m}$

“벡터에서의 transpose도 행렬표현으로 가능”

- “곱하기?” vector에서의 곱하기연산 다 가능합니다.

1. “scalar multiplication”

$$c \in \mathbb{R}, c\mathbf{A} = (ca_{ij})_{m \times n}$$

2. “Hadamard product (elementwise multiplication)”

$$\mathbf{A} \odot \mathbf{B} = (a_{ij}b_{ij})_{m \times n}$$

3. “product” (matrix multiplication)

$$\mathbf{AB} = (a_{ij})_{m \times p}(b_{ij})_{p \times n} = (c_{ij})_{m \times n} \text{ where } c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \mathbf{a}_i^T \cdot \mathbf{b}_j$$

즉  $c_{ij}$  는 (i-th row of A)·(j-th column of B)

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \mathbf{a}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{b}_n \end{pmatrix}$$

4. “tensor product” (Kronecker product)

$$\mathbf{A}_{m \times n} \otimes \mathbf{B}_{p \times q} = \begin{pmatrix} a_{11}\mathbf{B} & a_{12}\mathbf{B} & a_{13}\mathbf{B} & \cdots & a_{1n}\mathbf{B} \\ a_{21}\mathbf{B} & a_{22}\mathbf{B} & a_{23}\mathbf{B} & \cdots & a_{2n}\mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & a_{ij}\mathbf{B} & \ddots & \vdots \\ a_{m1}\mathbf{B} & a_{m2}\mathbf{B} & a_{m3}\mathbf{B} & \cdots & a_{mn}\mathbf{B} \end{pmatrix}$$

Quiz.  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$

solution.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} & 2 \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \\ 2 \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} & -1 \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Quiz.  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 \end{pmatrix} \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 \end{pmatrix}$ . 이때,  $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

1.  $3\mathbf{A} + 4 =$  을 계산하여라.
2.  $3\mathbf{A}^T + \mathbf{b}_1$  을 계산하여라.
3. 다음 중 matrix multiplication 계산이 가능한 것은?

1)  $\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \mathbf{a}_2^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 \end{pmatrix}$  2)  $\begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 \end{pmatrix}$  3)  $\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1^T \\ \mathbf{b}_2^T \end{pmatrix}$

알아두면 좋은 Tip!

**Note.**

- $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$
- $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$  : 세개의 수의 동시 연산은 수학에선 없다. 한번에 두개의 개산을 묶는 것이 기본 룰

Quiz.  $\mathbf{AB} \stackrel{?}{=} \mathbf{BA}$

- $\mathbf{a}^T \mathbf{b} = \mathbf{b}^T \mathbf{a}$
  - $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$
  - $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$
  - $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$
- Quiz.  $(c\mathbf{A})^T = ?$

## 1.2 Identity matrix and Inverse matrix

**Definition 1.3**  $\mathbf{I}_n$  is the identity matrix of  $n$

$$\mathbf{I}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Definition 1.4** The matrix inverse of  $\mathbf{A}$  is denoted as  $\mathbf{A}^{-1}$  and is defined as the matrix such as

$$\mathbf{AB} = \mathbf{I}_n = \mathbf{BA}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$$

\*역행렬은 존재하면 유일!

**Inverse matrix 활용**

- linear system  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 의 해를 구하는 방법!
  - $\mathbf{A}^{-1}$ 가 존재하면, 해는  $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ .
  - $\mathbf{A}^{-1}$ 를 구할 수 없는 rectangular matrix에서,  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 는 pseudo inverse의 개념을 이용해서 방정식을 근을 구합니다.

**Determinant of a square( $n \times n$ ) matrix**

**Definition 1.5** The determinant of  $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n \times n}$  is defined as

$$\det(\mathbf{A}) = |\mathbf{A}| = \sum_{j=1}^n a_{1j} \mathbf{C}_{1j} = a_{11} \mathbf{C}_{11} + a_{22} \mathbf{C}_{22} + \cdots + a_{nn} \mathbf{C}_{nn}$$

where the minor  $\mathbf{M}_{ij}$  of the element  $a_{ij}$  is the determinant of the matrix obtained by deleting the  $i$ th row and  $j$ th column of  $\mathbf{A}$ . The cofactor  $\mathbf{C}_{ij}$  is given by  $\mathbf{C}_{ij} = (-1)^{i+j} \mathbf{M}_{ij}$

\* determinant 의미는 parallel pipe의 부피

- $\mathbf{A}^{-1}$ 가 존재하려면,  $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ .
- Quiz.  $\det(\mathbf{A})^{-1} = ?$   $1/\det(\mathbf{A})$
- Quiz.  $\det(\mathbf{A})^T = ?$   $\det(\mathbf{A})$

ex. Determinant를 구하여라.

$$1. \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 7$$

$$2. \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow |B| = 0$$

$$3. \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow |C| = 1/3$$

$$\mathbf{C}_{11} = -1, \mathbf{C}_{12} = 5, \mathbf{C}_{13} = 4, \text{ M도 체크.}$$

ex. Determinant 이용하여서  $\mathbf{C}^{-1}$ 를 구하여라.

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{step1. matrix of cofactors } \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12} & \mathbf{C}_{13} \\ \mathbf{C}_{21} & \mathbf{C}_{22} & \mathbf{C}_{23} \\ \mathbf{C}_{31} & \mathbf{C}_{32} & \mathbf{C}_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 6 & -2 & 3 \\ 7 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{step2. transpose } \Rightarrow \text{adjoint matrix of C i.e. } \text{adj}(\mathbf{C}) = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{step3. } \mathbf{C}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{C})} \text{adj}(\mathbf{C}) = 1/3 \begin{pmatrix} 4 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

- 증명은,  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 로 확인해보세요.

## 1.3 Norm

### Norm

- vector

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \sum_{i=1}^n |a_i|$$

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |a_i|$$

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \left( \sum_{i=1}^n |a_i|^2 \right)^{1/2}$$

- matrix  $\mathbf{A}_{m \times n}$

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|$$

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \left( \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} = (\text{trace}(\mathbf{A}^* \mathbf{A}))^{1/2} \text{ where } \mathbf{A}^* = \text{conjugate transpose}$$

$$\text{ex. } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max(4 + 1 + 2; 6 + 0 + 3; 7 + 1 + 2) = \max(7, 9, 10) = 10$$

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max(4 + 6 + 7; 1 + 0 + 1; 2 + 3 + 2) = \max(17, 2, 7) = 17$$

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{4^2 + 6^2 + 7^2 + 1^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 2^2}$$

## 1.4 Matrix decomposition

### decomposition

- $\mathbf{A}_{n \times n} = \mathbf{L}\mathbf{U}$  L: lower triangular matrix, U: upper triangular matrix
- $\mathbf{A}_{n \times n} = \mathbf{Q}\mathbf{R}$  Q: orthogonal matrix, R: upper triangular matrix
- $\mathbf{A}_{n \times n} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1}$  P: column matrix formed from eigenvector of A D: diagonal matrix with eigenvalue
- $\mathbf{A}_{m \times n} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T$  U, V: orthogonal matrix formed from eigenvector of  $\mathbf{A}\mathbf{A}^T, \mathbf{A}^T\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{\Sigma}$ : diagonal matrix with eigenvalue<sup>1/2</sup>
- 실제, 프로그래밍에서는 이름만 입력하면 분해가능합니다.

## References

- [1] <http://cs229.stanford.edu/section/cs229-linalg.pdf>
- [2] Advanced Engineering Mathematics ch7-8, Erwin Kreyszig, Wiley
- [3] Elementary Linear Algebra, 7th ed., Ron Larson
- [4] Deep Learning ch2, Ian Goodfellow and Yoshua Bengio and Aaron Courville, The MIT Press
- [5] <https://en.wikipedia.org>