Mathematics in DL:	**Jan 30 2018**

Lecture 3: Multivariate functions

Lecturer: Juhee Lee *Scribes: Juhee Lee*

3.1 Preliminary

다변수 함수를 이해하기 위해, 기본적인 함수, 극한, 연속, 미분으로 개념을 소개합니다.

functions

For a function f,

- 두 집합 X, Y 와 각각의 원소 $x \in X, y \in Y$ 에 대해 한 원소 x에 한 원소 y가 대응되면, 이 대응관계를 X 에서 Y 로의 함수라고 합니다.

$$\begin{aligned} f: \quad X &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned}$$

- 이때, X 는 정의역, Y 는 공역이라 표시합니다.
- 이때, x는 독립변수, y는 종속변수, $f(X) = \{f(x)|x \in X\}$는 치역 이라 표시합니다.
- 이때, $y = f(x)$ 에서, $f(x)$ 는 f 의 함수값, x 는 f 에 의한 y 의 원상, $f^{-1}(y) = \{x \in X|\ y = f(x)\}$ 라 표시합니다.
- 이때, $\{(x, f(x))\ |x \in X\}$를 f 의 graph라 합니다.

  ex. Evaluate $f(0), f(1), f(2)$ and sketch the graph.

$$y = \begin{cases} 1 - x & x \leq 1 \\ x^2 & x > 1 \end{cases}$$

  일반적으로,

$$|a| = \begin{cases} a & x \geq 0 \\ -a & x < 0 \end{cases}$$

- A function f is called “incresing” on an inverval X if

$$f(x_1) < f(x_2) \quad \text{whenever} \quad x_1 < x_2 \text{ in } X$$

  A function f is called “decresing” on an inverval X if

$$f(x_1) > f(x_2) \quad \text{whenever} \quad x_1 < x_2 \text{ in } X$$

- A function f is called "injection function" or "one-to-one" if

$$f(x_1) \neq f(x_2) \quad \text{whenever} \quad x_1 \neq x_2 \text{ in } X$$

  A function f is called "onto" if $f(x) = Y$.

  A function f is called "bijection function" if f is 1-1 and onto

  ex. Determine f is 1-1 or onto or both $f:\ [-1,1] \to [0,1],\ (f(x) = x^2)$ (sol. onto)

  ex. Determine f is 1-1 or onto or both $f:\ [-1,1] \to [1,3],\ (f(x) = 2x+1)$ (sol. bijection)

- $A \subset X$ 이고 $f:\ X \to R$ 이 다음과 같이 정의되어다고 하면, f를 A의 특성함수 characteristic function of A라 하고, χ_A로 나타낸다.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

limit

Definition 3.1 $\lim_{x\to a} f(x) = L$
if for every number $\epsilon > 0$, there is a corresponding number $\delta > 0$ such that

$$0 < |x-a| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - L| < \epsilon$$

ex. $\lim_{x\to 1} 2x + 3 = 5$
sol. $\forall\epsilon > 0$, $0 < |x-1| < \delta$ 일때, $(2x+3) - 5 < \epsilon$을 만족하는 양수 δ를 찾으면 되는데, $\delta = \frac{\epsilon}{2}$으로 잡으면 된다.

Theorem 3.2 *Limit laws*

Suppose that c is a constant and the limits

$$\lim_{x\to a} f(x) \quad \textit{and} \quad \lim_{x\to a} g(x)$$

exists, then

1. $\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$
2. $\lim_{x\to a}[f(x) - g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$
3. $\lim_{x\to a}[cf(x)] = \lim_{x\to a} cf(x)$
4. $\lim_{x\to a}[f(x)g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} g(x)$
5. $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ *if* $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$

ex. $\lim_{x\to 3} \frac{x^3+1}{x^2+2x}$
sol. $\lim_{x\to 3} x^3 + 1 = 28$, $\lim_{x\to 3} x^2 + 2x = 15$ 이므로 28/15

Note.

- $\lim_{x\to a} f(x) = b, \lim_{y\to b} g(x) = g(b)$ 이면 $\lim_{x\to a} g(f(x)) = g(b)$

- $\lim_{x\to a} f(x) = A, \lim_{x\to a} g(x) = B$ 일때, 적당한 $0 < |x-a| < \delta$ 인 모든 x 에 대하여 $f(x) \le g(x)$ 이면 $A \le B$
- $\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$

  Quiz. Solve $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 7x}{4x} = 1$. (sol. 7/4)

Theorem 3.3 *squeeze theorem*

If $f(x) \le g(x)$ when x is near a and the limits of f and g both exist as $x \to a$ then

$$\lim_{x\to a} f(x) \ \le \ \lim_{x\to a} g(x)$$

ex. Show $\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$ using squeeze theorem
sol. $\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ does not exist. so, $-1 \le \sin\frac{1}{x} \le 1$. $-|x| \le x\sin\frac{1}{x} \le |x|$ and $\lim_{x\to 0}|x| = 0$.

continuity

Definition 3.4 *A function f is continuous at a number a if*

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

- *A function f is continuous from the right at a number a if* $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$
- *A function f is continuous from the left at a number a if* $\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$

- *Any polynomial is continuous everywhere*
- *Any rational function is continuous wherever it is defined*

Theorem 3.5 *intermediate value theorem*

Suppose that f is continuous on the closed interval $[a,b]$ and let N be any number between $f(a)$ and $f(b)$, wherever $f(a) \ne f(b)$. Then there exists a number c in (a,b) such that $f(c) = N$

Quiz. $4x^3 - 6x^2 + 3x - 2 = 0$ 의 근이 1 과 2 사이에 있음을 보여라.
sol. let $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x - 2$ and check $c \in (1,2)$ such that $f(c) = 0$. $f(1)f(2) < 0$

Derivatives

도함수의 정의를 이용하여 미분한다. 또한 계산의 번거로움을 줄이기 위해, 몇가지 기본 공식을 살펴본다.

- 대수함수 algebraic function (한 변수에 더하기, 빼기, 곱하기, 나누기, 거듭제곱근 구하기를 유한번 적용하여 얻어지는 함수)

- $f(x) = x^2 + 2x + 1, \ g(x) = \sqrt{x-2}, \ h(x) = \frac{x+2}{x^2+1}$

- 초월함수 (대수함수가 아닌 함수)

- $f(x) = \sin x, \ g(x) = logx, \ h(x) = e^x, k(x) = \frac{1}{x}$

Quiz. Solve $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 7x}{4x} = 1$. (sol. 7/4)

Definition 3.6 *A function f is differentiable at a if $f'(a)$ exists.*

Note. If f is differentiable at a, then f is continuous at a

Theorem 3.7 *Basic differentiation formulas*

1. $\frac{d}{dx}(c) = 0$
2. $\frac{d}{dx}(cf) = c\frac{df}{dx}$
3. $\frac{d}{dx}(f \pm g) = \frac{df}{dx} \pm \frac{dg}{dx}$ *: linearity*
4. $\frac{d}{dx}(fg) = f\frac{dg}{dx} + g\frac{df}{dx}$ *: product rule*
5. $\frac{d}{dx}f(g(x)) = \frac{df(g(x))}{dx} \cdot \frac{dg}{dx}$ *: chain rule*
6. $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$ *: power rule (n is any real number)*
7. $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$
8. $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$
9. $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x lna$
10. $\frac{d}{dx}(lnx) = \frac{1}{x}$

Integration

Theorem 3.8 *The fundamental theorem of calculus*

Suppose f is continuous on $[a, b]$

1. *If $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ then $F'(x) = f(x)$*
2. *$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, where F is any antiderivative[1] of f.*

Theorem 3.9 *The mean value theorem for integral*

Suppose f is continuous on $[a, b]$ then there exists a number c in $[a, b]$ such that

$$f(c) = f_{ave} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \quad \text{that is} \quad \int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

[1] $F' = f$, 역도함수

3.2 Multivariate function

For a function f,

- 실수의 순서상 (x, y) 들의 집합 D 의 각 원소 (x, y) 에 하나의 실수 값 z 가 대응되면, 이 대응관계를 두변수 (x, y) 에 대한 f 의 값이라 하고.

$$\begin{aligned} f: \quad & D && \longrightarrow R \\ & x, y && \longmapsto z = f(x, y) \end{aligned}$$

- 이때, D 는 정의역, R 는 공역이라 표시합니다.
- 이때, x, y 는 독립변수, z 는 종속변수, $f(x, y) = \{f(x, y)|x, y \in D\}$ 는 치역 이라 표시합니다.
- 이때, $z = f(x, y)$ 에서, $f(x, y)$ 는 f 의 함수값 이라 표시합니다.
- 이때, $G = \{(x, y, z) \; |x, y \in D, z = f(x, y)\}$ 를 f 의 graph라 합니다. 공간의 한 곡면을 나타냅니다.

  ex. Sketch the graph corresponding to $c.f(x, y) = 16 - x^2 - y^2 = c$

Definition 3.10

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L$$

if for every number $\epsilon > 0$, there is a corresponding number $\delta > 0$ such that

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \;\Rightarrow\; |f(x, y) - L| < \epsilon$$

Theorem 3.11 *Suppose that c is a constant and the limits*

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = A \quad \textit{and} \quad \lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x, y) = B$$

exists, then

1. $\lim_{(x,y)\to(a,b)}[f(x, y) \pm g(x, y)] = \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) + \lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x, y) = A \pm B$
2. $\lim_{(x,y)\to(a,b)}[cf(x, y)] = c \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = cA$
3. $\lim_{(x,y)\to(a,b)}[f(x, y)g(x, y)] = AB$
4. $\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)}{\lim_(x,y)\to(a,b) g(x,y)} = \frac{A}{B}$ *if* $\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x, y) \neq 0$
5. *If* $\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x, y) = M$, $f(t)$ *is continuous at* M

   then

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(g(x, y)) = f(\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x, y)) = f(M)$$

   Quiz. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \cos xy =$? *(sol. $cos 0 = 1$*

Theorem 3.12 *f is continuous at (a, b)*

1. $f(a, b)$ 의 값이 유일하게 정의
2. $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)$ 가 존재
3. $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = f(a, b)$ 이다.

Various Derivatives [4]

- 벡터를 행렬로 미분
- 행렬의 미분공식

References

[1] http://cs229.stanford.edu/section/cs229-linalg.pdf

[2] Essential Calculus, Early Transcendentals, Janmes Stewart

[3] http://nbviewer.jupyter.org/github/metamath1/ml-simple-works/blob/master/fitting/matrix-derivative.ipynb (w/Matrix Calculus (임성빈))

[4] https://en.wikipedia.org