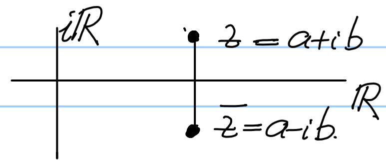
Chapitre 2

Introduction aux nombres complexes

2.3. Définitions additionnelles et propriétés élémentaires

Soit $z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Le (complexe) conjugé de z: $\bar{z} := a - ib \equiv a + i(-b)$.



$\boxed{\begin{array}{l} \text{Propriétés: } \forall z \in \mathbb{C}, \quad \bar{\bar{z}} = z \\ \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \quad \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \\ \qquad\qquad\qquad\quad\ \ \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \end{array}}$

Partie réelle de $z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$: $\mathrm{Re}(z) = a \in \mathbb{R}$

Partie imaginaire de $z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$: $\mathrm{Im}(z) = b \in \mathbb{R}$

Remarque: On a

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$$

$$\mathrm{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

vérifier !

Valeur absolue (ou module) de $z = a+ib$, $a,b \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{|z| := (z \cdot \bar{z})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{a^2+b^2}} \quad \left(= \sqrt{\bar{\bar{z}}\,\bar{z}} = |\bar{z}| \right)$$

En effet, si $z = a+ib$, $a,b \in \mathbb{R}$, alors

$$(a+ib)(a-ib) = a^2 - (i \cdot b)^2 = a^2 + b^2$$

On a $\boxed{\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \quad |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|}$ vérifier !

Application à la géométrie:

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{R}_+^*$. Alors

$$S := \{ z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r \}$$

est l'ensemble des points sur le cercle de rayon r, centré en z_0.