시계열자료분석팀

5팀

김민우
김영호
정승연
조건우
조웅빈

CONTENTS

1

1주차 복습

2 1주차 복습

정상성

1. $E[|X_t|]^2 < \infty, \forall t \in \mathbb{Z}$

➡ 분산과 관련된 2차적률이 존재하고, 시점 t에 관계없이 일정!

2. $E[X_t] = m, \forall t \in \mathbb{Z}$

➡ 평균이 상수로 시점 t에 관계없이 일정!

3. $\gamma_X(h) := Cov(X_t, X_{t+h}) = E[(X_t - \mu)(X_{t+h} - \mu)]$

➡ "자기공분산"은 시차 h에만 의존, 시점 t와는 무관!

정상성

1 $E[|X_t|]^2 < \infty, \forall t \in \mathbb{Z}$

→ 분산과 관련된 2차적 ... 재하고, 시점 t에 관계없이 일정!

2 $E[X_t] ... \mathbb{Z}$

→ 평균이 상수로 시점 t에 관계없이 일정!

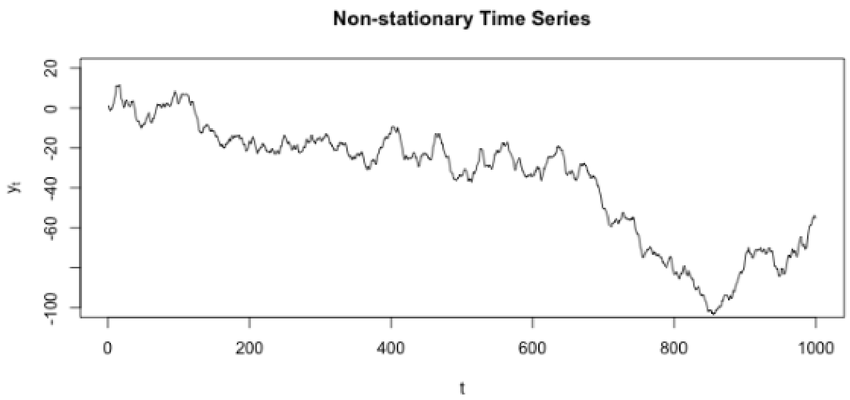
3 $\gamma_X(h) := Cov(X_t, X_{t+h}) = E[(X_t - \mu)(X_{t+h} - \mu)]$

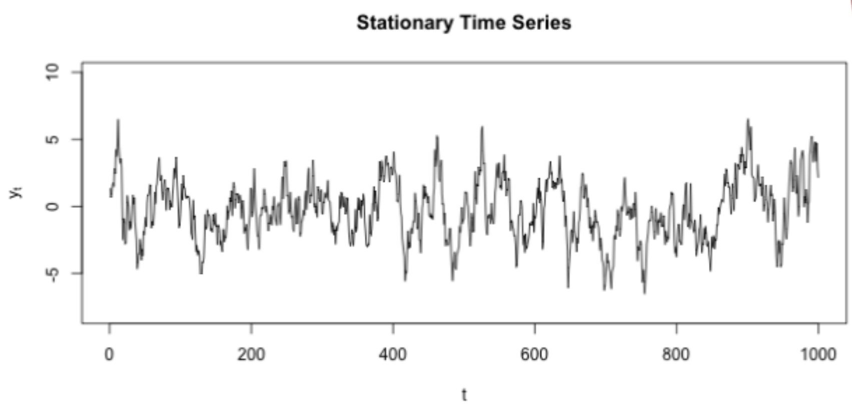
→ "자기공분산"은 시차 h에만 의존, 시점 t와는 무관!

확률적 성질이 시간 t에 의존하지 않는다!

(Time-invariant)

정상화





1 분산이 일정하지 않은 경우

Ex) VST(분산 안정화 변환)

2 평균이 일정하지 않은 경우

Ex) 회귀, 평활, 차분

정상성을 만족하지 않는 시계열을 정상시계열로 변환하는 것

1 1주차 복습

기타 통계량

ACVF(Autocovariance Function) : 자기공분산함수

$$\gamma_X(h) = Cov(X_t, X_{t+h}) = E[(X_t - \mu)(X_{t+h} - \mu)]$$

ACF(Autocorrelation Fnction) : 자기상관함수

$$\rho_X(h) = \frac{\gamma_X(h)}{\gamma_X(0)} = Corr(X_t, X_{t+h}) = \frac{Cov(X_t, X_{t+h})}{\sqrt{Var(X_t)}\sqrt{Var(X_{t+h})}} = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)}$$

1 1주차 복습

기타 통계량

공분산의 정의

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

공분산의 성질

$$Cov(ax+by+c, dx+ey+f)$$

$$= adVar(x) + afCov(x,y) + bdCov(x,y) + bfVar(y)$$

기타 통계량

무한등비급수

$$\lim_{n\to\infty}(a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots) = \frac{a}{1-r}, iff\ |r| < 1$$

조건부확률

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

2

모형의 식별

모형의 필요성

공분산행렬

$$\Gamma = \begin{pmatrix} Cov(Y_1, Y_1) & Cov(Y_1, Y_2) & \cdots & Cov(Y_1, Y_n) \\ Cov(Y_2, Y_1) & Cov(Y_2, Y_2) & \cdots & Cov(Y_2, Y_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov(Y_n, Y_1) & Cov(Y_n, Y_2) & \cdots & Cov(Y_n, Y_n) \end{pmatrix}$$

Γ : 오차항 Y_t의 공분산 행렬

모형의 필요성

약정성상의 정의에 의한 공분산행렬

$$\Gamma = \begin{pmatrix} Cov(Y_1, Y_1) & Cov(Y_1, Y_2) & \cdots & Cov(Y_1, Y_n) \\ Cov(Y_2, Y_1) & Cov(Y_2, Y_2) & \cdots & Cov(Y_2, Y_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov(Y_n, Y_1) & Cov(Y_n, Y_2) & \cdots & Cov(Y_n, Y_n) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma(0) & \gamma(1) & \cdots & \gamma(n-1) \\ \gamma(1) & \gamma(0) & \cdots & \gamma(n-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma(n-1) & \gamma(n-2) & \cdots & \gamma(0) \end{pmatrix}$$

By 약정상성의 정의…!

모형의 필요성

백색잡음의 공분산행렬

$$\Gamma = \begin{pmatrix} Cov(Y_1, Y_1) & Cov(Y_1, Y_2) & \cdots & Cov(Y_1, Y_n) \\ Cov(Y_2, Y_1) & Cov(Y_2, Y_2) & \cdots & Cov(Y_2, Y_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov(Y_n, Y_1) & Cov(Y_n, Y_2) & \cdots & Cov(Y_n, Y_n) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma(0) & \gamma(1) & \cdots & \gamma(n-1) \\ \gamma(1) & \gamma(0) & \cdots & \gamma(n-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma(n-1) & \gamma(n-2) & \cdots & \gamma(0) \end{pmatrix}$$

대각요소인 분산을 제외한 나머지 요소는 모두 0이므로

공분산에 대한 추정 불필요

모형의 필요성

백색잡음이 아닌 시계열의 공분산행렬

$$\Gamma = \begin{pmatrix} Cov(Y_1, Y_1) & Cov(Y_1, Y_2) & \cdots & Cov(Y_1, Y_n) \\ Cov(Y_2, Y_1) & Cov(Y_2, Y_2) & \cdots & Cov(Y_2, Y_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov(Y_n, Y_1) & Cov(Y_n, Y_2) & \cdots & Cov(Y_n, Y_n) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma(0) & \gamma(1) & \cdots & \gamma(n-1) \\ \gamma(1) & \gamma(0) & \cdots & \gamma(n-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma(n-1) & \gamma(n-2) & \cdots & \gamma(0) \end{pmatrix}$$

백색잡음이 아닌 경우,

시계열 모형을 통한 공분산 추정 필요

모형의 필요성

백색잡음이 아닌 시계열의 공분산행렬

정상화

비정상 시계열 → 정상 시계열

$$\Gamma = \begin{pmatrix} Cov(Y_1,Y_1) & Cov(Y_1,Y_2) & \cdots & Cov(Y_1,Y_n) \\ Cov(Y_2,Y_1) & Cov(Y_2,Y_2) & \cdots & Cov(Y_2,Y_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov(Y_n,Y_1) & Cov(Y_n,Y_2) & \cdots & Cov(Y_n,Y_n) \end{pmatrix}$$

백색잡음이 아닌 정상시계열은 공분산이 존재할 수 있음

공분산을 추정하기 위해 모형 활용

$$= \begin{pmatrix} \gamma(0) & \gamma(1) & \cdots & \gamma(n-1) \\ \gamma(1) & \gamma(0) & \cdots & \gamma(n-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma(n-1) & \gamma(n-2) & \cdots & \gamma(0) \end{pmatrix}$$

ACF 및 PACF를 이용하여 모형식별가능

백색잡음이 아닌 경우,

시계열 모형을 통한 공분산 추정 필요

모형의 필요성

백색잡음이 아닌 시계열의 공분산행렬

비정상 시계열 $\xrightarrow{\text{정상화}}$ 정상 시계열

$$\Gamma = \begin{pmatrix} Cov(Y_1, Y_1) & Cov(Y_1, Y_2) & \cdots & Cov(Y_1, Y_n) \\ Cov(Y_2, Y_1) & Cov(Y_2, Y_2) & \cdots & Cov(Y_2, Y_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov(Y_n, Y_1) & Cov(Y_n, Y_2) & \cdots & Cov(Y_n, Y_n) \end{pmatrix}$$

백색잡음이 아닌 정상시계열은 공분산이 존재할 수 있음

$$= \begin{pmatrix} \gamma(0) & \gamma(1) & \cdots & \gamma(n-1) \\ \gamma(1) & \gamma(0) & \cdots & \gamma(n-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma(n-1) & \gamma(n-2) & \cdots & \gamma(0) \end{pmatrix}$$

공분산을 추정하기 위해 모형 활용

ACF 및 PACF를 이용하여 모형식별가능

백색잡음이 아닌 경우,

시계열 모형을 통한 공분산 추정 필요

모형의 필요성

백색잡음이 아닌 시계열의 공분산행렬

정상화

비정상 시계열 $\longrightarrow$ 정상 시계열

$$\Gamma = \begin{pmatrix} Cov(Y_1,Y_1) & Cov(Y_1,Y_2) & \cdots & Cov(Y_1,Y_n) \\ Cov(Y_2,Y_1) & Cov(Y_2,Y_2) & \cdots & Cov(Y_2,Y_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov(Y_n,Y_1) & Cov(Y_n,Y_2) & \cdots & Cov(Y_n,Y_n) \end{pmatrix}$$

백색잡음이 아닌 정상시계열은 공분산이 존재할 수 있음

공분산을 추정하기 위해 모형 활용

$$= \begin{pmatrix} \gamma(0) & \gamma(1) & \cdots & \gamma(n-1) \\ \gamma(1) & \gamma(0) & \cdots & \gamma(n-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma(n-1) & \gamma(n-2) & \cdots & \gamma(0) \end{pmatrix}$$

ACF 및 PACF를 이용하여 모형식별가능

백색잡음이 아닌 경우,

시계열 모형을 통한 공분산 추정 필요

자기상관함수(Autocorrelation Function) (감시중)

자기상관함수의 3가지 성질

1. $\rho(0) = 1 (\because \gamma(0) = Var(X_t))$
2. $\rho(-h) = \rho(h)$
3. $|\gamma(h)| \leq \gamma(0) \ for \ all \ h \in \mathbb{Z} \quad \Longrightarrow \quad |\rho(h)| \leq 1$

자기상관함수(Autocorrelation Function) (감시중)

자기상관함수의 3가지 성질

1 $\rho(0) = 1(\because \gamma(0) = Var(X_t))$

자기자신과의 상관함수는 **항상 1!**

2 $\rho(-h) = \rho(h)$

3 $|\gamma(h)| \leq \gamma(0) \ for \ all \ h \in \mathbb{Z} \implies |\rho(h)| \leq 1$

자기상관함수(Autocorrelation Function) (감시중)

자기상관함수의 3가지 성질

1 $\rho(0) = 1 (\because \gamma(0) = Var(X_t))$

2 $\rho(-h) = \rho(h)$

자기상관함수는 **항상 우함수!**

3 $|\gamma(h)| \leq \gamma(0)\ for\ all\ h \in \mathbb{Z} \quad \Longrightarrow \quad |\rho(h)| \leq 1$

자기상관함수(Autocorrelation Function) (강시중)

자기상관함수의 3가지 성질

1 $\rho(0) = 1 (\because \gamma(0) = Var(X_t))$

2 $\rho(-h) = \rho(h)$

자기상관함수의 **절대값은 항상 1보다 작다!**

3 $|\gamma(h)| \leq \gamma(0) \; for \; all \; h \in \mathbb{Z} \quad \Longrightarrow \quad |\rho(h)| \leq 1$

부분자기상관함수

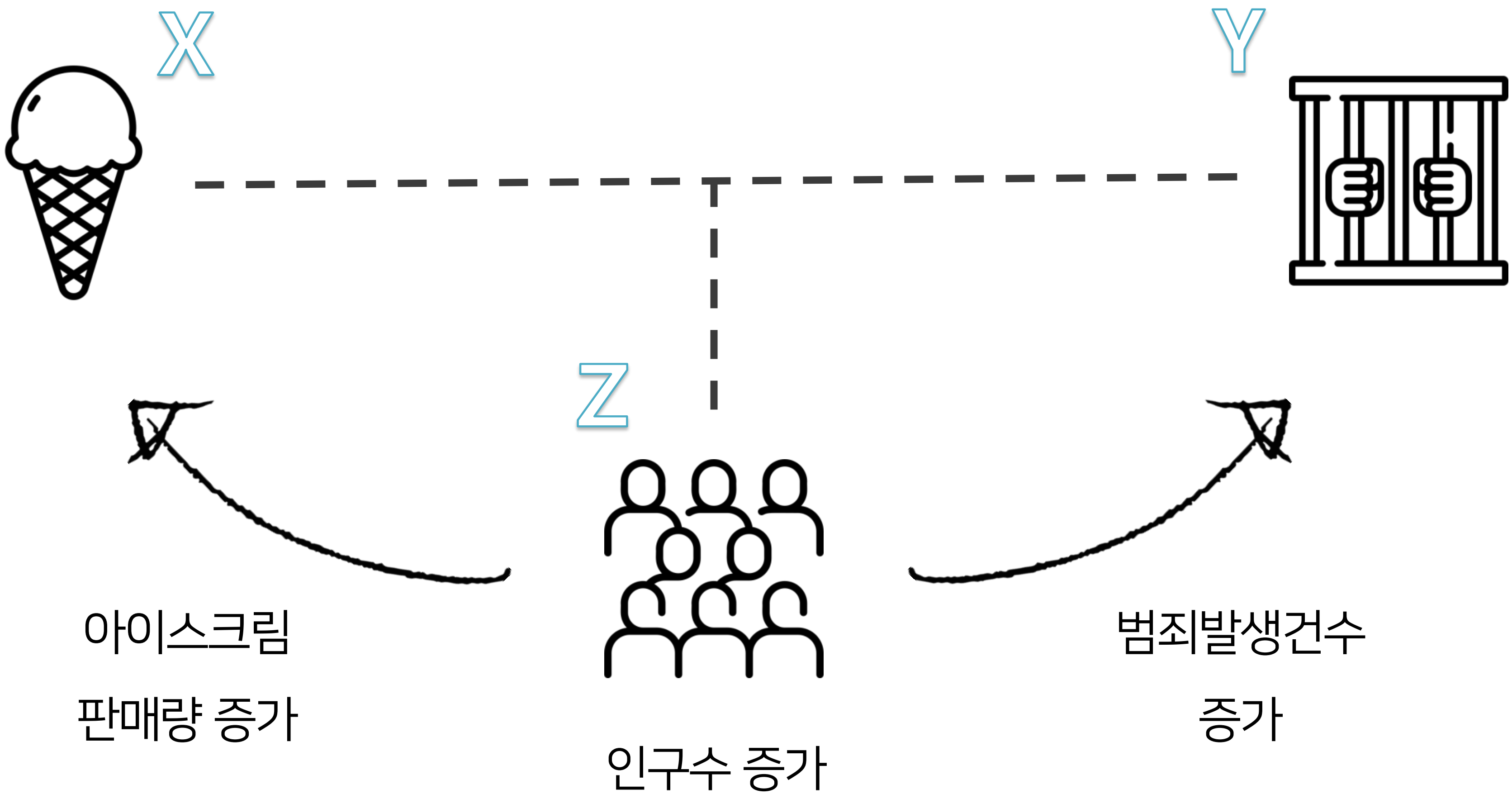
PACF(Partial Autocorrelation Function)

Example

P-SAT 마을의 **인구 수(Z)**가 계속 증가하고 있는 상황이라고 가정해 봅시다. 이때 **아이스크림 판매량(X)**와 **범죄발생건수(Y)**는 높은 상관 관계를 보일 것입니다. 그 이유는 뭘까요?

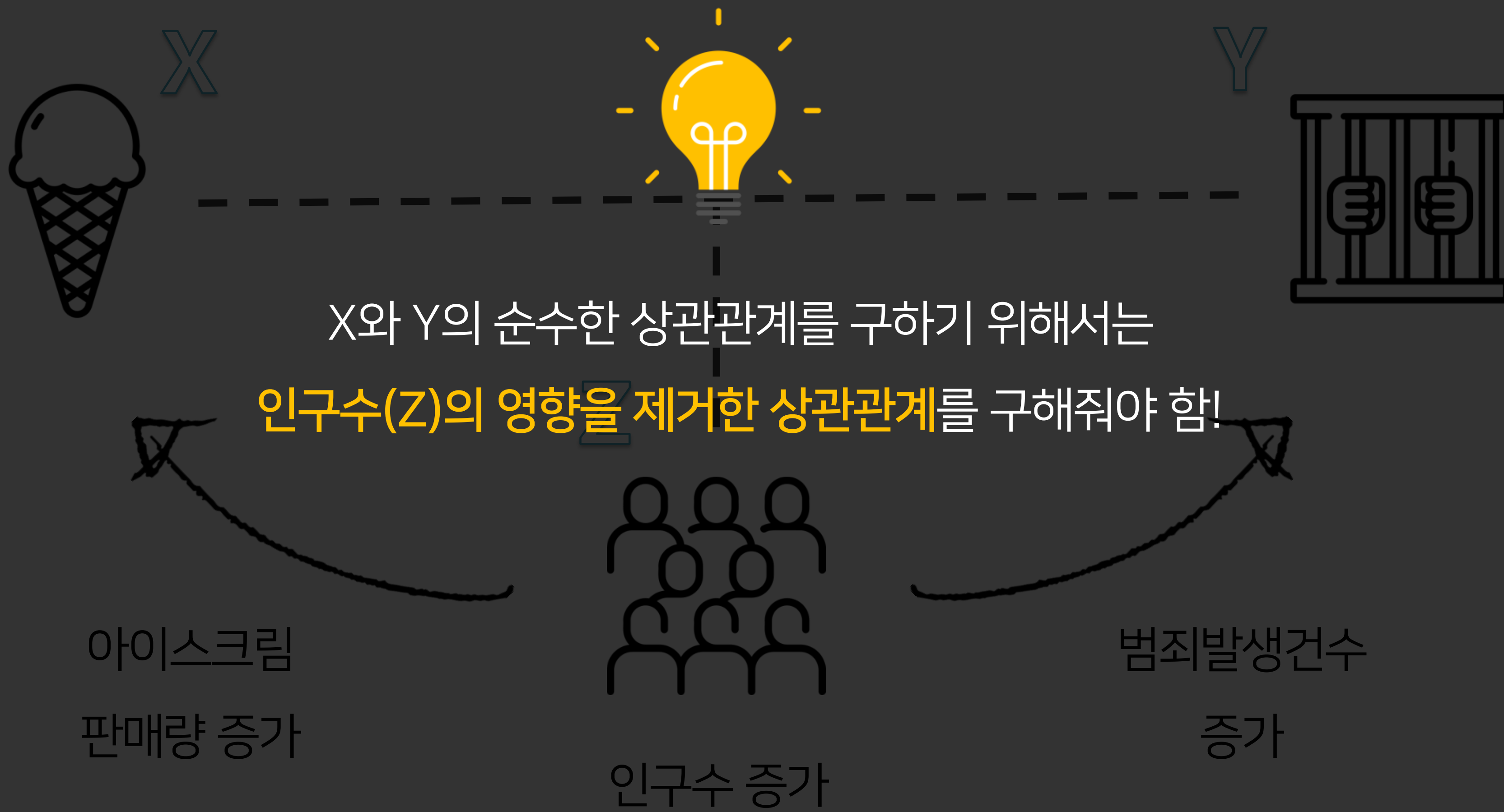
부분자기상관함수

PACF(Partial Autocorrelation Function)



부분자기상관함수

PACF(Partial Autocorrelation Function)



X와 Y의 순수한 상관관계를 구하기 위해서는

인구수(Z)의 영향을 제거한 상관관계를 구해줘야 함!

부분자기상관함수

PACF(Partial Autocorrelation Function)

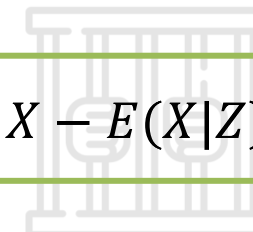
X

조건부 기댓값 $E(X|Z)$

X를 Z에 회귀시킨 최적선형 예측값

⇒ X가 Z에 의해 설명되는 부분

Y

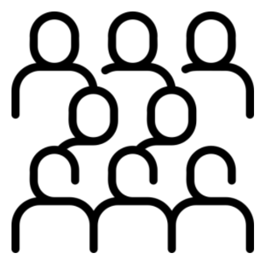


$$X^* = X - E(X|Z)$$

X를 Z에 회귀시킨 후의 잔차

⇒ Z의 영향력을 제거

Z



아이스크림

판매량 증가

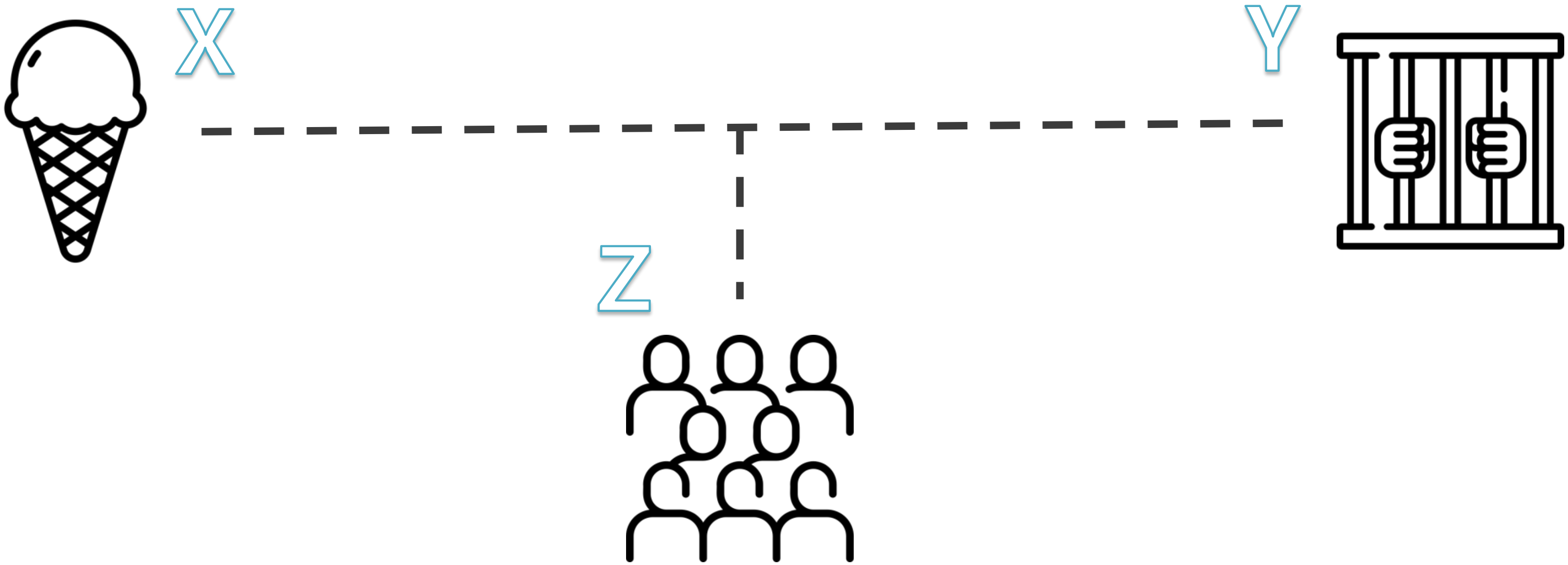
인구수 증가

범죄발생건수

증가

부분자기상관함수

PACF(Partial Autocorrelation Function)

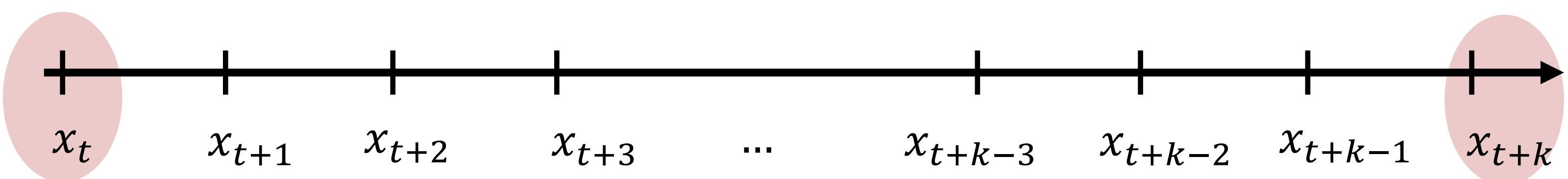


$$\rho_{XY,Z} = \frac{E\{[X - E(X|Z)] \cdot [Y - E(Y|Z)]\}}{\sqrt{E[X - E(X|Z)]^2 \cdot E[Y - E(Y|Z)]^2}}$$

부분자기상관함수

PACF(Partial Autocorrelation Function)

$\alpha(k) \longrightarrow$ X_t와 X_{t+k}의 순수한 상관관계



X_t와 X_{t+k}사이에 존재하는 관측값들의 영향력을 제거하고 구한

순수한 두 시계열의 상관관계

부분자기상관함수

PACF(Partial Autocorrelation Function)

$\alpha(k)$ → X_t와 X_{t+k}의 순수한 상관관계

두 시계열 사이의 영향을 제거하는 방법?

X_1에서 $X_2, X_3, \dots, X_k$의 영향을 선형회귀로 추정해 제거

$$X_{k+1} = \phi_{k1}X_k + \phi_{k2}X_{k-1} + \cdots + \phi_{kk}X_1 + \epsilon_{k+1}$$

회귀식의 계수 ϕ_{kk}

$\{X_2, X_3, \dots, X_k\}$가 고정되어 있을 때 , X_{k+1}과 X_1 간의 선형적인 상관관계

x_t x_{t+1} … x_{t+k-1} x_{t+k}

X_t와 X_{t+k}사이에 존재하는 관측값들의 영향력을 제거하고 구한

순수한 두 시계열의 상관관계

2

모형의 식별

부분자기상관함수

PACF(Partial Autocorrelation Function)

두 시계열 사이의 영향을 제거하는 방법?

$\alpha(k)$ → X_t와 X_{t+k}의 순수한 상관관계

X_1에서 $X_2, X_3, \dots, X_k$의 영향을 선형회귀로 추정해 제거

$$X_{k+1} = \phi_{k1}X_k + \phi_{k2}X_{k-1} + \cdots + \phi_{kk}X_1 + \epsilon_{k+1}$$

회귀식의 계수 ϕ_{kk}

$\{X_2, X_3, \dots, X_k\}$가 고정되어 있을 때 , X_{k+1}과 X_1 간의 선형적인 상관관계

x_t x_{t+1} x_{t+k-1} x_{t+k}

X_t와 X_{t+k}사이에 존재하는 관측값들의 영향력을 제거하고 구한

$$\alpha(k) = \phi_{kk},\ k \geq 1$$

k번째 선형회귀 계수가 시차가 k인 부분상관계수

3

선형과정

선형과정(Linear Process)

선형과정이란?

$Z_t \sim WN(0, \sigma^2)$들의 선형결합

백색잡음

$$X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j Z_{t-j}$$

단, 선형결합의 계수는 $\sum_j |\psi_j| < \infty$ 조건 만족해야 함

선형과정(Linear Process)

선형과정의 성질

1. 공분산 계산 간단
2. 해석과 추정 발달
3. 주어진 정상 확률 과정의 선형결합 → 또다시 정상 확률 과정이 됨

3 선형과정

선형과정(Linear Process)

선형과정의 성질

1. 공분산 계산 간단
2. 해석과 추정 발달
3. 주어진 정상 확률 과정의 선형결합 → 또다시 정상 확률 과정이 됨

AR과 MA도 선형과정 모형에 해당!

4

AR

AR(Auto Regressive) 모형

AR(1)

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + Z_t$$

AR(p)

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + Z_t$$

현 시점의 관측값을 **과거 관측값**과

현 시점의 오차의 함수 형태로 나타내는 모형

AR의 특성방정식

AR(p)

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + Z_t$$

$$= \phi_1 \underbrace{BX_t}_{X_{t-1}} + \phi_2 \underbrace{B^2 X_t}_{X_{t-2}} + \cdots + \phi_p \underbrace{B^p X_t}_{X_{t-p}} + Z_t$$

4 AR(Auto Regressive)

AR의 특성방정식

AR(p)

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + Z_t$$

$$= \phi_1 \underbrace{B X_t}_{X_{t-1}} + \phi_2 \underbrace{B^2 X_t}_{X_{t-2}} + \cdots + \phi_p \underbrace{B^p X_t}_{X_{t-p}} + Z_t$$

↓

$$Z_t = (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p) X_t$$

후향연산자(B)를 이용한 AR(p) 모형의 표현

AR의 특성방정식

후향연산자란?

관측값을 바로 한 시점 전으로 돌려주는 작용을 하는 연산자

$$BX_t = X_{t-1}$$

자세한 내용은

지난 1주차 시계열팀 클린업 참고!

AR(p)

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + Z_t$$

$$= \phi_1 B X_t + \phi_2 B^2 X_t + \cdots + \phi_p B^p X_t + Z_t$$

X_{t-1} X_{t-2} X_{t-p}

$$Z_t = (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p) X_t$$

(의문)

후향연산자(B)를 이용한 AR(q) 모형의 표현

AR의 특성방정식

AR(p)

$$Z_t = (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p)X_t$$

특성방정식 $\phi(B)$

$$\phi(B) = (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p)$$

AR의 특성방정식

AR(p)

$$Z_t = (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p) X_t$$

특성방정식 $\phi(B)$

$$\phi(B) = (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p)$$

$$Z_t = \phi(B) X_t$$

AR모형의 조건

정상성 시계열의 확률적 특성이 시점에 의존하지 않아야 하는 특성

인과성 t시점의 관측값이 **과거시점의 오차항**으로 설명될 수 있다는 특성

AR모형의 조건

정상성 시계열의 확률적 특성이 시점에 의존하지 않아야 하는 특성

인과성 t시점의 관측값이 **과거시점의 오차항**으로 설명될 수 있다는 특성

$$\psi_j = 0 \, , \forall j < 0 \;\leftrightarrow\; X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j Z_{t-j}$$

AR모형의 조건

1) $|\phi_1| < 1$

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + Z_t$$

$$= \phi_1(\phi_1 X_{t-2} + Z_{t-1}) + Z_t = \phi_1^2 X_{t-2} + \phi_1 Z_{t-1} + Z_t$$

$$= \phi_1^2(\phi_1 X_{t-3} + Z_{t-2}) + \phi_1 Z_{t-1} + Z_t = \phi_1^3 X_{t-3} + \phi_1^2 Z_{t-2} + \phi_1 Z_{t-1} + Z_t$$

$$\vdots$$

$$= \phi_1^{M+1} X_{t-M-1} + \Sigma_{j=0}^{M} \phi_1^j Z_{t-j}$$

AR모형의 조건

1) $|\phi_1| < 1$

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + Z_t$$

$$= \phi_1(\phi_1 X_{t-2} + Z_{t-1}) + Z_t = \phi_1^2 X_{t-2} + \phi_1 Z_{t-1} + Z_t$$

$$= \phi_1^2(\phi_1 X_{t-3} + Z_{t-2}) + \phi_1 Z_{t-1} + Z_t = \phi_1^3 X_{t-3} + \phi_1^2 Z_{t-2} + \phi_1 Z_{t-1} + Z_t$$

$$\vdots$$

$$= \phi_1^{M+1} X_{t-M-1} + \Sigma_{j=0}^{M} \phi_1^j Z_{t-j}$$

$M \rightarrow \infty$ 면 0으로 수렴

(ㄴㅇㄱ)

결과적으로 남는 부분

AR모형의 조건

1) $|\phi_1| < 1$

$$\Sigma_{j=0}^{M} \phi_1^j Z_{t-j}$$

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + Z_t$$

$$= \phi_1(\phi_1 X_{t-2} + Z_{t-1}) + Z_t = \phi_1^2 X_{t-2} + \phi_1 Z_{t-1} + Z_t$$

정상시계열들의 선형결합은 또 다시 정상시계열! → **정상성** 만족

$$= \phi_1^2(\phi_1 X_{t-3} + Z_{t-2}) + \phi_1 Z_{t-1} + Z_t = \phi_1^3 X_{t-3} + \phi_1^2 Z_{t-2} + \phi_1 Z_{t-1} + Z_t$$

과거 시점의 오차항에만 의존! → **인과성** 만족

$$\vdots$$

$$= \phi_1^{M+1} X_{t-M-1} + \Sigma_{j=0}^{M} \phi_1^j Z_{t-j}$$

$M \to \infty$ 면 0으로 수렴

결과적으로 남는 부분

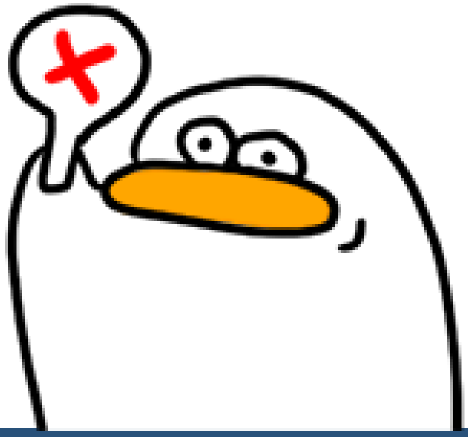
AR모형의 조건

2) $|\phi_1| = 1$

$$X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t \quad or \quad X_t = -X_{t-1} + \varepsilon_t$$

대표적인 비정상 확률 과정 중 하나인

확률보행과정(Random Walk Process)



확률보행과정

(Random Walk Process)

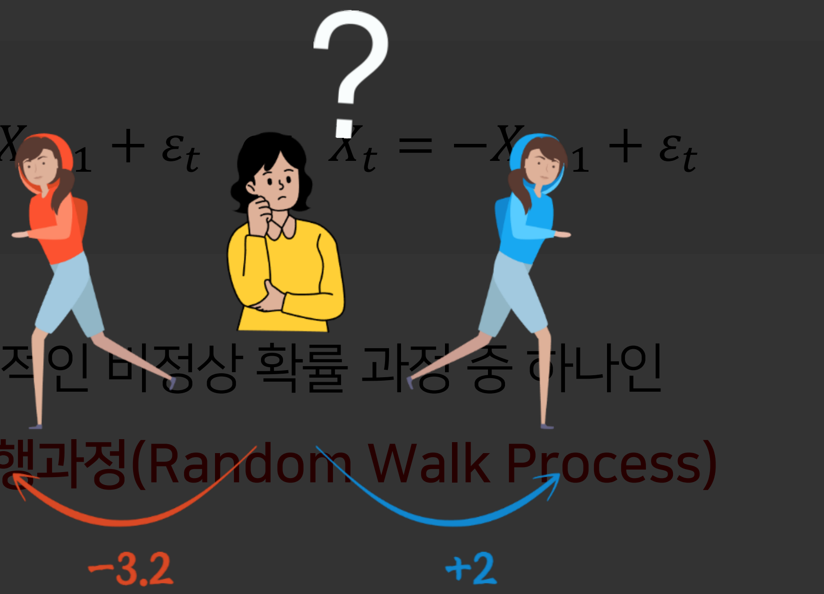
AR모형의 조건

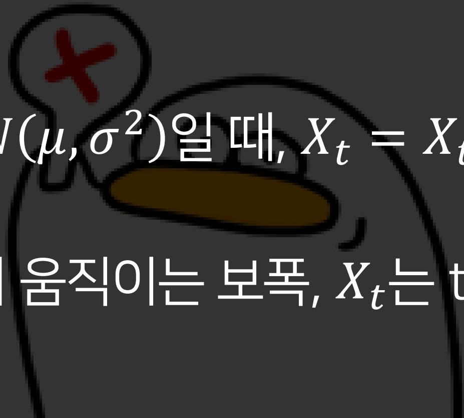
2) $|\phi_1| = 1$

$$X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t \qquad X_t = -X_{t-1} + \varepsilon_t$$

대표적인 비정상 확률 과정 중 하나인

확률보행과정(Random Walk Process)





$\varepsilon_t \sim WN(\mu, \sigma^2)$일 때, $X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t$

ε_t 는 어떤 사람이 움직이는 보폭, X_t는 t시점에서의 위치

AR모형의 조건

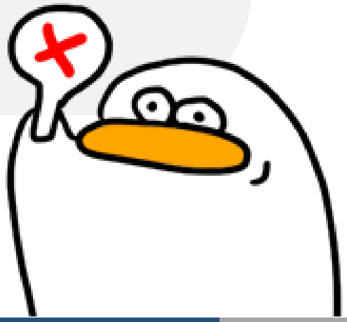
3) $|\phi_1| > 1$

$$X_{t+1} = \phi_1 X_t + Z_{t+1}$$

$$\phi_1 X_t = X_{t+1} - Z_{t+1}$$

$$X_t = \frac{1}{\phi_1} X_{t+1} - \frac{1}{\phi_1} Z_{t+1} = \frac{1}{\phi_1}\left(\frac{1}{\phi_1} X_{t+2} - \frac{1}{\phi_1} Z_{t+2}\right) - \frac{1}{\phi_1} Z_{t+1}$$

$$\cdots = \left(\frac{1}{\phi_1}\right)^k X_{t+j} - \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{1}{\phi_1}\right)^j Z_{t+j}$$



AR모형의 조건

3) $|\phi_1| > 1$

$$X_{t+1} = \phi_1 X_t + Z_{t+1}$$

$$\phi_1 X_t = X_{t+1} - Z_{t+1}$$

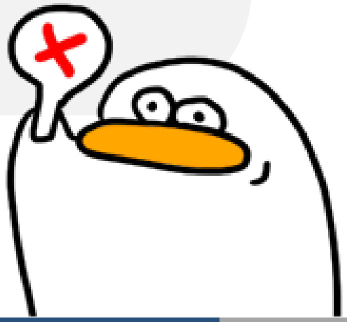
$$X_t = \frac{1}{\phi_1} X_{t+1} - \frac{1}{\phi_1} Z_{t+1} = \frac{1}{\phi_1}\left(\frac{1}{\phi_1} X_{t+2} - \frac{1}{\phi_1} Z_{t+2}\right) - \frac{1}{\phi_1} Z_{t+1}$$

$$\cdots = \left(\frac{1}{\phi_1}\right)^k X_{t+j} - \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{1}{\phi_1}\right)^j Z_{t+j}$$

$k \to \infty$ 면 0으로 수렴

미래의 오차항 결합

인과성 불만족!



(반박불가)

AR모형의 조건

3) $|\phi_1| > 1$

$$X_{t+1} = \phi_1 X_t + Z_{t+1}$$

$$\phi_1 X_t = X_{t+1} - Z_{t+1}$$

$$X_t = \frac{1}{\phi_1} X_{t+1} - \frac{1}{\phi_1} Z_{t+1} = \frac{1}{\phi_1}\left(\frac{1}{\phi_1} X_{t+2} - \frac{1}{\phi_1} Z_{t+2}\right) - \frac{1}{\phi_1} Z_{t+1}$$

$$\cdots = \left(\frac{1}{\phi_1}\right)^k X_{t+j} - \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{1}{\phi_1}\right)^j Z_{t+j}$$

$k \to \infty$ 면 0으로 수렴

미래의 오차항 결합

인과성 불만족!

결과적으로 AR 모형은…

① $|\phi_1| < 1$ → 정상성과 인과성 만족!

② $|\phi_1| = 1$ → 확률보행과정

③ $|\phi_1| > 1$ → 정상성 만족, but 인과성 불만족!

AR(1) 모형의 ACF

가정

$E(X_t) = 0$ 이라고 가정

STEP 1

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + Z_t$$

양변에 X_{t-h} 를 곱해 기댓값을 취함!

STEP 2

$$X_t X_{t-h} = \phi_1 X_{t-1} X_{t-h} + Z_t X_{t-h}$$

$$\gamma(h) = \phi_1 \gamma(h-1) + Cov(Z_t, X_{t-h}) = \phi_1 \gamma(h-1)$$

$$\gamma(h) = \phi_1(\phi_1 \gamma(h-2)) = \cdots = \phi_1^h \gamma(0)$$

$$\frac{\gamma(h)}{\gamma(0)} = \phi_1^h = \rho(h)$$

AR(1) 모형의 ACF

가정

$E(X_t) = 0$ 이라고 가정

STEP 1

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + Z_t$$

양변에 X_{t-h} 를 곱해 기댓값을 취함!

STEP 2

$$X_t X_{t-h} = \phi_1 X_{t-1} X_{t-h} + Z_t X_{t-h}$$

$$\gamma(h) = \phi_1 \gamma(h-1) + Cov(Z_t, X_{t-h}) = \phi_1 \gamma(h-1)$$

$$\gamma(h) = \phi_1(\phi_1 \gamma(h-2)) = \cdots = \phi_1^h \gamma(0)$$

$$\frac{\gamma(h)}{\gamma(0)} = \phi_1^h = \rho(h)$$

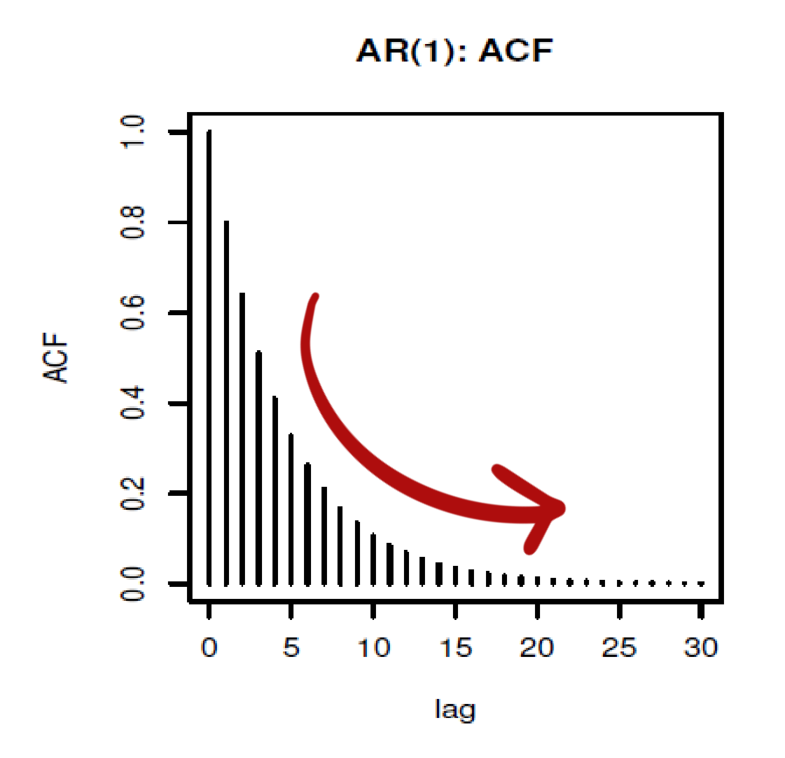
AR(1) 모형의 A

가정

STEP 1

곱해 기댓값을 취함!

STEP 2



$$\gamma(h) = \phi_1\gamma(h-1) + Cov(Z_t, X_{t-h}) = \phi_1\gamma(h-1)$$

$$\frac{\gamma(h)}{\gamma(0)} = \phi_1^h = \rho(h)$$

$$\gamma(h) = \phi_1(\phi_1\gamma(h-2)) = \cdots = \phi_1^h\gamma(0)$$

정상성 만족 시 AR 모형은 $|\phi_1| < 1$ 이므로

h 증가 시, **지수적**으로 감소

AR(p) 모형의 PACF

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \cdots - \phi_p X_{t-p} = Z_t$$

AR(p)는 X_t를 p 시점 이전의 값인 $X_{k+1-p}, \cdots\ X_k$ 으로만 표현

AR(p) 모형의 PACF

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \cdots - \phi_p X_{t-p} = Z_t$$

AR(p)는 X_t를 p 시점 이전의 값인 $X_{k+1-p}, \cdots\ X_k$ 으로만 표현

$$\hat{X}_{k+1} = \phi_1 X_k + \phi_2 X_{k-1} + \cdots + \phi_p X_{k+1-p} + 0X_{k-p} + \cdots + 0X_1$$

$\alpha(p) = \phi_p$

$\alpha(k) = 0 \quad if\ k > p$

AR(p) 모형의 PACF

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \cdots - \phi_p X_{t-p} = Z_t$$

AR(p)는 X_t를 p 시점 이전의 값인 $X_{k+1-p}, \cdots\ X_k$ 으로만 표현

$$\hat{X}_{k+1} = \phi_1 X_k + \phi_2 X_{k-1} + \cdots + \phi_p X_{k+1-p} + 0X_{k-p} + \cdots + 0X_1$$

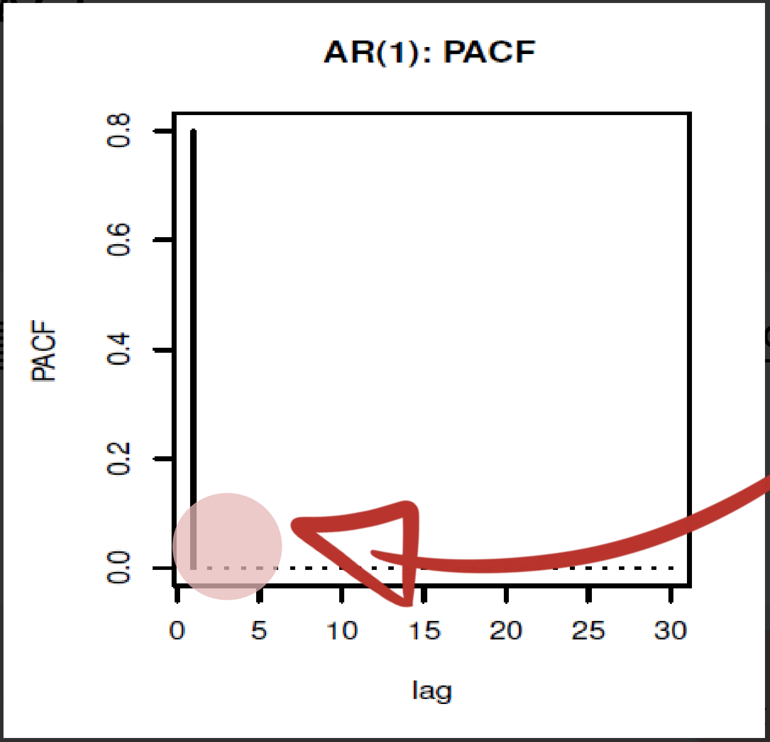
$$\alpha(p) = \phi_p$$

$$\alpha(k) = 0 \quad if\ k > p$$

즉, p 이후의 PACF는 0

AR(p) 모형의 PA

AR(p)는 X_t를 … 으로만 표현



시차 p 이후
절단된 모양!

$$\hat{X}_{k+1} = \phi_1 X_k \cdots {}_{-p} + \cdots + 0X_1$$

$$\alpha(p) = \phi_p$$

"AR(p) 모형의 PACF는 **시차 p 이후에 절단된다**"라고 표현

$$\alpha(k) = 0 \quad if\ k > p$$

즉, p 이후의 PACF는 0

5

MA

5 MA(Moving Average)

MA(Moving Average) 모형

MA(1)

$$X_t = Z_t + \theta_1 Z_{t-1}$$

MA(q)

$$X_t = Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \theta_2 Z_{t-2} + \cdots + \theta_q Z_{t-q}$$

현 시점의 관측값을 **과거시점의 오차**를 이용하여 설명

MA의 특성방정식

MA(q)

$$X_t = Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \theta_2 Z_{t-2} + \cdots + \theta_q Z_{t-q}$$

$$= Z_t + \theta_1 B Z_t + \theta_2 B^2 Z_t - \cdots + \theta_q B^q Z_t$$

$$= \left(1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \cdots + \theta_q B^q\right) Z_t$$

특성방정식 $\theta\,(B)$

$$\theta(B) = (1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \cdots + \theta_q B^q)$$

$$Z_t = \theta(B) X_t$$

5 MA(Moving Average)

MA모형의 조건

- **정상성** 시계열의 확률적 특성이 시점에 의존하지 않아야 하는 특성
- **인과성** t시점의 관측값이 과거시점의 오차항으로 설명될 수 있다는 특성
- **가역성** t시점의 오차항이 과거시점의 관측값으로 설명될 수 있다는 특성

$\sum_{j=0}^{\infty}|\pi_j| < \infty$ 인 $\{\pi_j\}$가 존재하며, 다음의 식을 만족한다면 가역성을 가짐

$$Z_t = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j X_{t-j} \quad for\ all\ t$$

5 MA(Moving Average)

MA모형의 조건

- **정상성** 시계열의 확률적 특성이 시점에 의존하지 않아야 하는 특성
- **인과성** t시점의 관측값이 과거시점의 오차항으로 설명될 수 있다는 특성
- **가역성** t시점의 오차항이 과거시점의 관측값으로 설명될 수 있다는 특성

$\sum_{j=0}^{\infty}|\pi_j| < \infty$ 인 $\{\pi_j\}$가 존재하며, 다음의 식을 만족한다면 가역성을 가짐

$$Z_t = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j X_{t-j} \quad for\ all\ t$$

가역성(Invertibility)

특성방정식 활용

$$X_t = \theta(B)Z_t \rightarrow \theta(B)^{-1}X_t = Z_t$$

MA(1) 예시

$$X_t = Z_t + \theta Z_{t-1} = (1 + \theta B)Z_t$$

$$(1 + \theta B)^{-1}X_t = Z_t$$

$$(1 + \theta B)^{-1} = \frac{1}{1 - (-\theta B)} = 1 - \theta B + (\theta B)^2 - (\theta B)^3 + \cdots$$

무한등비급수의 합

5 MA(Moving Average)

가역성(Invertibility)

특성방정식 활용

$$X_t = \theta(B)Z_t \rightarrow \theta(B)^{-1}X_t = Z_t$$

MA(1) 예시

$$X_t = Z_t + \theta Z_{t-1} = (1 + \theta B)Z_t$$

$$(1 + \theta B)^{-1}X_t = Z_t$$

$$(1 + \theta B)^{-1} = \frac{1}{1 - (-\theta B)} = 1 - \theta B + (\theta B)^2 - (\theta B)^3 + \cdots$$

무한등비급수의 합

이러한 전개는 $|\theta| < 1$일 때만 성립

즉, MA 모형은 $|\theta| < 1$일 때 가역성을 만족

가역성(Invertibility)

특성방정식 활용

가역성 조건이 필요한 이유!

$$X_t = \theta(B)Z_t \rightarrow \theta(B)^{-1}X_t = Z_t$$

MA(1) 예시

ACF와 모형 사이의

일대일 대응관계를 성립해주는 역할

$$(1+\theta B)^{-1}X_t = Z_t$$

EX) $$(1+\theta B)^{-1} = \frac{1}{1-(-\theta B)} = 1 - \theta B + (\theta B)^2 - (\theta B)^3 + \cdots$$

무한등비급수의 합

MA모형의 계수가 달라져도

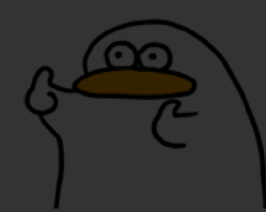
$$\rho(k) = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \begin{cases} -\frac{\theta}{(1+\theta^2)}, & k = 1 \\ 0, & k = 2 \end{cases}$$

$$\theta \leftrightarrow \frac{1}{\theta}$$

결과가 동일!

이러한 전개는 $|\theta| < 1$일 때만 성립

즉, MA 모형은 $|\theta| < 1$일 때 가역성을 만족



MA(1) 모형의 ACF

STEP 1

$$X_t = Z_t - \theta Z_{t-1}$$

양변에 X_{t-h} 를 곱해 기댓값을 취함!

STEP 2

$$X_{t-h}X_t = X_{t-h}(Z_t + \theta_1 Z_{t-1}) = X_{t-h}Z_t + \theta_1 X_{t-h} Z_{t-1}$$

$$\gamma(h) = Cov(X_{t-h}, Z_t + \theta_1 Z_{t-1})$$

$$= Cov(Z_{t-h} + \theta_1 Z_{t-h-1}, Z_t + \theta_1 Z_{t-1})$$

MA(1) 모형의 ACF

STEP 1

$$X_t = Z_t - \theta Z_{t-1}$$

양변에 X_{t-h} 를 곱해 기댓값을 취함!

STEP 2

$$X_{t-h}X_t = X_{t-h}(Z_t + \theta_1 Z_{t-1}) = X_{t-h}Z_t + \theta_1 X_{t-h}Z_{t-1}$$

$$\gamma(h) = Cov(X_{t-h}, Z_t + \theta_1 Z_{t-1})$$

$$= Cov(Z_{t-h} + \theta_1 Z_{t-h-1}, Z_t + \theta_1 Z_{t-1})$$

MA(1) 모형의 ACF

$h = 0$ 일 때

$$\gamma(0) = Cov(Z_t + \theta_1 Z_{t-1}, Z_t + \theta_1 Z_{t-1}) = \sigma^2 + \theta_1^2 \sigma^2 = (1 + \theta_1^2)\sigma^2$$

$h = 1$ 일 때

$$\gamma(1) = Cov(Z_{t-1} + \theta_1 Z_{t-2}, Z_t + \theta_1 Z_{t-1}) = \theta_1 \sigma^2$$

$h \geq 2$ 일 때

$$\gamma(h) = Cov(Z_{t-h} - \theta_1 Z_{t-h-1}, Z_t - \theta_1 Z_{t-1}) = 0$$

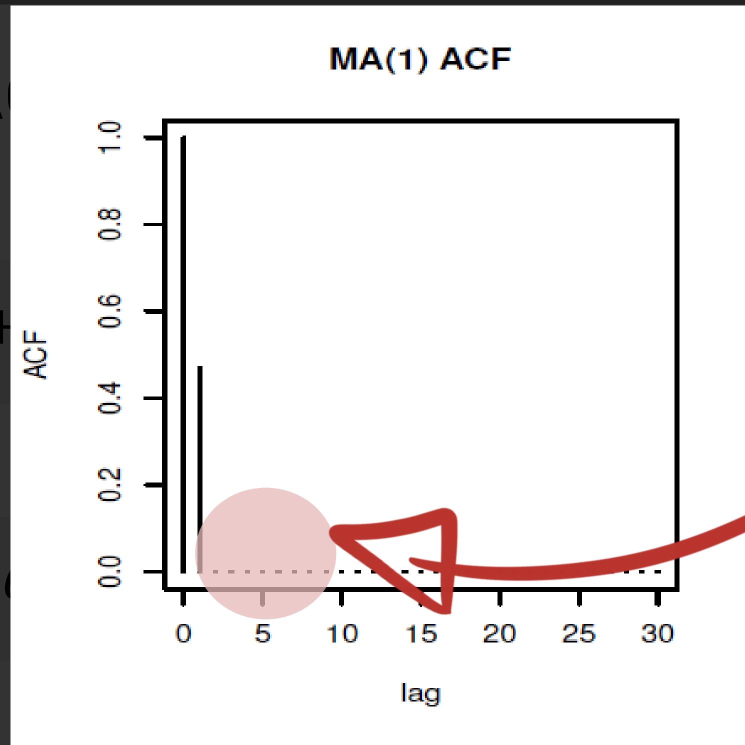
h = 1 이후엔 $\gamma(h)$가 모두 0

즉, 절단된 모양

MA(1) 모형의 A

$h = 0$ 일 때

$\gamma(0) = Cov(Z_t +$ … $\sigma^2 = (1+\theta_1^2)\sigma^2$



시차 q 이후

절단된 모양!

$h = 1$ 일 때

$\gamma(1) =$ … $= \theta_1\sigma^2$

$h \geq 2$ 일 때

$$\gamma(h) = Cov(Z_{t-h} - \theta_1 Z_{t-h-1}, Z_t - \theta_1 Z_{t-1}) = 0$$

$$\rho(k) = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \begin{cases} -\frac{\theta}{(1+\theta^2)}, & k = 1 \\ 0, & k = 2 \end{cases}$$

h = 1 이후엔 $\gamma(h)$가 모두 0

즉, 절단된 모양

MA(1) 모형의 PACF

Crammer 공식에 의한 결과…!

$$\alpha(k) = \phi_{kk} = \frac{-(-\theta)^k}{(1+\theta^2+\cdots+\theta^{2k})}, k \geq 1$$

연립 일차 방정식 Ax=b에서, A가 정사각 행렬이며, 행렬식이 0이 아니라고 하자.

그렇다면 그 유일한 해는 다음과 같이 나타낼 수 있으며, 이를 **Crammer 법칙**이라고 한다.

$$x_j = \frac{\det A_j}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{21} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{21} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}} \quad (j = 1,2,\cdots,n)$$

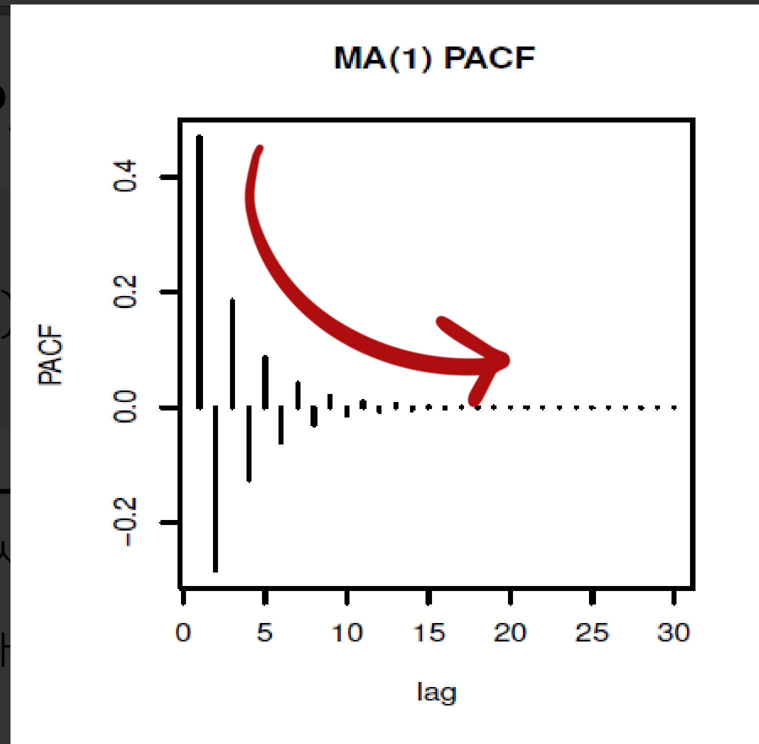
MA(1) 모형의 P

mmer 공식에 의한 결과…!

$\alpha(k)$ … ≥ 1

연립 일차 방정식 Ax=b에서

그렇다면 그 유일한 해는 다 … 라고 한다.



$$x_j = \frac{\det A_j}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{21} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & a_{2j} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}} \quad (j = 1,2,\cdots,n)$$

MA(q) 모형의 PACF는

지수적으로 감소하는 형태!

뭐래…

6

AR&MA 쌍대성

AR&MA 쌍대성

1. 유한차수의 AR → 무한차수의 MA로 표현이 가능

2. 유한차수의 MA → 무한차수의 AR로 표현이 가능

쌍대성(Duality)

AR&MA 쌍대성

1 유한차수의 AR을 무한차수의 MA로 표현

$$X_t = \phi_1 B X_t + Z_t$$

$$(1 - \phi_1 B) X_t = Z_t$$

$$X_t = \frac{1}{(1 - \phi_1 B)} Z_t$$

$$X_t = (1 + \phi_1 B + \phi_1^2 B^2 + \phi_1^3 B^3 + \cdots) Z_t$$

AR&MA 쌍대성

2 유한차수의 MA를 무한차수의 AR로 표현

$$X_t = \theta_1 B Z_t + Z_t$$

$$X_t = (1 + \theta_1 B) Z_t \rightarrow Z_t = \frac{1}{1 - (-\theta_1 B)} X_t$$

$$(1 - \theta_1 B + \theta_1^2 B^2 - \cdots) X_t = Z_t$$

$$X_t - \theta_1 B X_t + \theta_1^2 B^2 X_t - \cdots = Z_t$$

$$X_t = \theta_1 B X_t - \theta_1^2 B^2 X_t + \cdots + Z_t$$

6 AR&MA 쌍대성

ACF / PACF

(울기직전)

정리해보자면…

지수적으로 감소하는 형태

유한차수의 AR과정의 ACF

유한차수의 MA과정의 PACF

절단형태

유한차수의 AR과정의 PACF

유한차수의 MA과정의 ACF

6 AR&MA 쌍대성

모형의 조건

1 유한차수의 AR모형

정상성 조건 필요 $\Rightarrow$ $|\phi| < 1$ 조건을 만족!

$M \to \infty$ 면 0으로 수렴 $\quad \phi_1^{M+1} X_{t-M-1} + \Sigma_{j=0}^{M} \phi_1^{j} Z_{t-j}$ 결과적으로 남는 부분

2 유한차수의 MA모형

가역성 조건 필요 $\Rightarrow$ $|\theta| < 1$ 조건을 만족!

$$\frac{1}{1-(-\theta B)}$$

무한등비급수의 합!

모형의 조건

1 유한차수의 AR모형

정상성 조건 필요 ⇒ $|\phi| < 1$ 조건을 만족!

$M \to \infty$ 면 0으로 수렴 $\phi_1^{M+1} X_{t-M-1} + \Sigma_{j=0}^{M} \phi_1^j Z_{t-j}$ 결과적으로 남는 부분

2 유한차수의 MA모형

가역성 조건 필요 ⇒ $|\theta| < 1$ 조건을 만족!

$$\frac{1}{1-(-\theta B)}$$ 무한등비급수의 합!

단위근 검정 표현방식에 따라

모형의 조건을 다음과 같이 표현 가능!

AR모형 : $|\phi| < 1$ ⇒ $\phi(B) = 0$ 의 근의 절댓값이 1보다 큼

MA모형 : $|\theta| < 1$ ⇒ $\theta(B) = 0$ 의 근의 절댓값이 1보다 큼

단위근 검정에 대해서는 따로 설명하지 않겠습니다!

필요하시다면 우리들의 친구 Google을 이용해주십쇼.

7

ARMA

ARMA 모형

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \phi_2 X_{t-2} - \cdots - \phi_p X_{t-p}$$
$$= Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \theta_2 Z_{t-2} + \cdots + \theta_q Z_{t-q}$$

자기회귀(AR)와 이동평균(MA)의 혼합 모형

ARMA 모형

ARMA 모형의 필요성

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \phi_2 X_{t-2} - \cdots - \phi_p X_{t-p} = Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \theta_2 Z_{t-2} + \cdots + \theta_q Z_{t-q}$$

AR 모형이나 MA 모형으로만 설명할 경우

p나 q의 값이 너무 커질 가능성 존재

→ 추정의 효율성이 떨어짐

자기회귀(AR)와 이동평균(MA)의 혼합 모형

모수의 수를 줄여 추정의 효율성을 높임(**모수의 절약**)

특성방정식

$$\left(1-\phi_1 B-\phi_2 B^2-\cdots-\phi_p B^p\right)X_t=\left(1+\theta_1 B+\theta_2 B^2+\cdots+\theta_q B^q\right)Z_t$$

AR $\phi(B)X_t=\theta(B)Z_t$ MA

특성방정식을 통해 정리 가능!

정상성과 인과성 & 가역성

모형의 조건

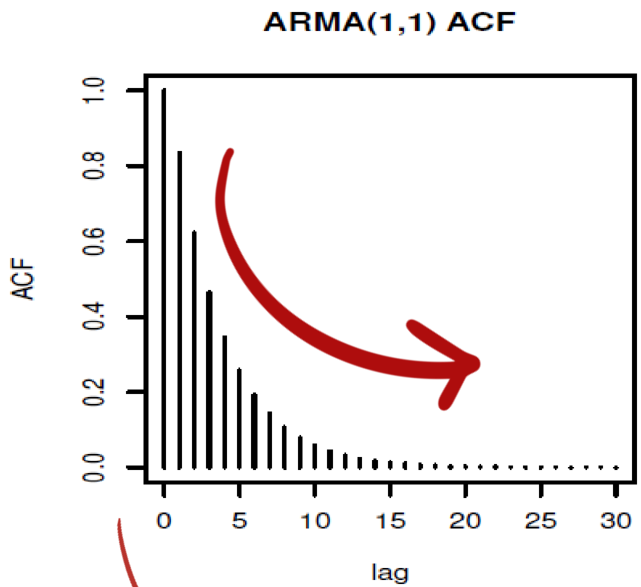
1 AR → 정상성과 인과성 만족

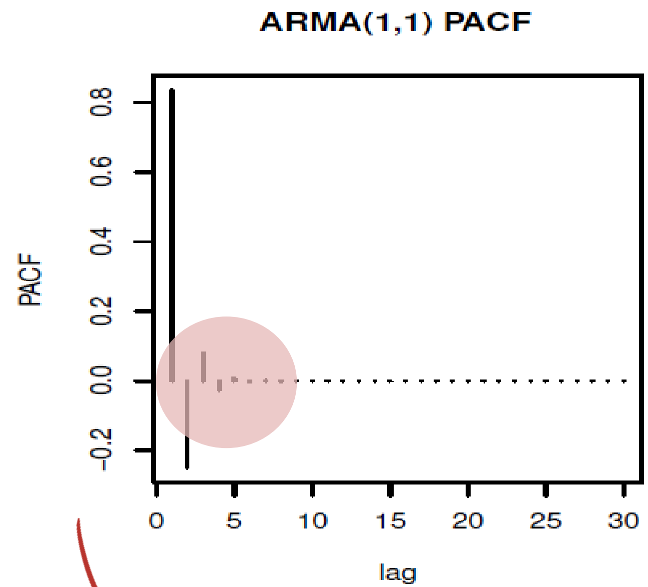
$\phi(B) = 0$ 의 근의 절댓값이 1보다 큼

2 MA → 가역성 만족

$\theta(B) = 0$ 의 근의 절대값이 1보다 큼

ACF & PACF





지수적으로 감소

싸인함수 형태로 감소

ACF와 PACF는 둘 다 **지수적으로 감소**하거나

싸인함수 형태로 소멸하는 모양

8

모형의 적합절차

모형의 적합절차

모형의 식별

AR 차수 p와

MA 차수 q의 선택

→

모형의 추정

$\phi_1, \cdots, \phi_p, \theta_1, \cdots, \theta_q,$

μ, σ^2의 추정

→

모형의 진단

잔차분석,

과대적합분석

↓

예측모델 (forecast model)로 선택!

모형의 식별

차분의 필요성과 모형의 차수(p,q)를 잠정적으로 결정!

1. AIC $= -2\ln L_n(\hat{\theta}) + 2(p+q+1)$

2. AICc $= -2\ln L_n(\hat{\theta}) + \frac{2(p+q+1)n}{n-(p+q+1)+1}$

3. BIC / SBC $= -2\,ln\,L_n(\hat{\theta}) + (p+q+1)\ln n$

→ 가장 작은 값을 가진 모형 선택

모형의 추정

적률추정법

모집단의 적률을 상응하는 표본의 적률로 대체한 후
방정식을 풀어 추정량을 구하는 방법

최소제곱법

오차의 제곱합이 가장 작게 되도록 하는 모수들의 추정량을 구하는 방법

최대가능도추정법

관측된 시계열의 결합확률밀도 함수인 모수의
가능도함수를 최대화하는 모수의 추정량을 구하는 방법

모형의 진단 및 예측

잔차 분석과 과대적합에 의하여 잠정 모형의 적합 정도를 진단

Ex. Portmanteau 검정, Ljung-Box 검정, Mcleod and Li 검정, Turning point 검정, Difference sign 검정, Rank 검정… 등

모형의 진단 및 예측

잔차 분석과 과대적합에 의하여 잠정 모형의 적합 정도를 진단

Ex. Portmanteau 검정, Ljung-Box 검정, Mcleod and Li 검정,
Turning point 검정, Difference sign 검정, Rank 검정… 등

↓

잠정모형의 타당성이 입증되면 모형이
최종적으로 적합된 것으로 판단

8 모형의 적합절차

모형의 진단 및 예측

잔차 분석과 과대적합에 의하여 잠정 모형의 적합 정도를 진단

Ex. Portmanteau 검정, Ljung-Box 검정, Mcleod and Li 검정,
Turning point 검정, Difference sign 검정, Rank 검정… 등

잠정모형의 타당성이 입증되면 모형이
최종적으로 적합된 것으로 판단

적합한 모형은 예측 모형으로 사용

다음주 예고

1. 2주차 복습
2. ARIMA
3. SARIMA
4. 이분산 시계열 모형
5. ARFIMAX
6. ARMAX
7. VAR
8. Time-Series CV

THANK YOU