# 計算数学特論 第1回レポート

学籍番号：62216580
氏名：平田智也
提出日：2025/06/08

選択した問題: 2, 5. 根拠には自作の C 言語のプログラムを用いていて, 二つとも同じプログラムの中で, main 関数を分ける形で分割して記述した.

問題 2

(a) この問題は二部グラフが完全マッチングを持つか判定する問題として定式化できることを示せ.

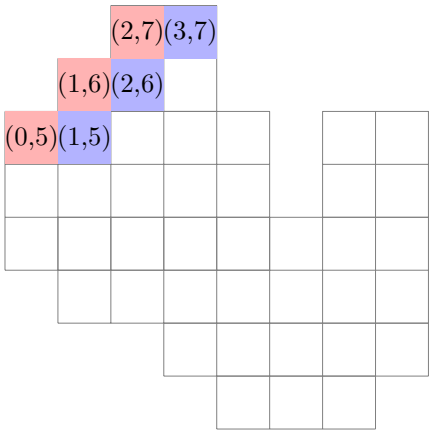
頂点集合を各マス目として, 隣接している⇔辺を結ぶ, としてできるグラフを考える. このグラフは連結であることを仮定してよい. ( なぜならば, 非連結であった場合には, それぞれの連結成分がタイリングできるかを帰納的に調べることになるだけで, 連結成分が複数存在する場合は無視してよいからである.)

また, すべてのタイルは正方形であって, すべてが整然とならんでいることから, すべてのタイルを 2 次元平面における格子点に倣って名づけることができる.

今回は, 適宜そのタイルを大きく拡張して一つの大きな長方形にしたときに, 一番左下になるマスに (0, 0) と名づけ, 以下右に 1 つ進むたびに第 1 成分に 1 を足し, 上に 1 つ進むたびに第 2 成分に 1 を足してそのマス目の名前とする.

| | | |
|---|---|---|
| … | | |
| (1,0) | | |
| (0,0) | (0,1) | … |

以下は問題の図であるが, これに名前を付けた上で, 以下に示すように, 第 1 成分と第 2 成分の和が奇数の場合は赤く, 偶数の場合は青く塗っていく.(書いていない, 塗られていないところは適宜例に従って補完されるものとする.)



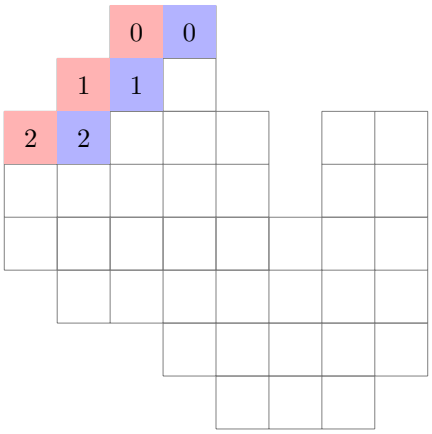

こうして色を塗っていくと, ドミノはちょうど赤いマスと青いマスを一つずつ覆うようにしか配置できないことが分かる. 言い換えれば, どの隣接する赤いマスと青いマスが一つのタイルによって覆われるか, ということと同じことである.

従って, これは赤く塗られたマスを頂点集合 A, 青く塗られたマスを頂点集合 B としたときに, A, B 間に完全マッチングが存在するかどうか, という問題に帰着できることが分かる.

(b) 上の図のチェックボードはドミノでタイリングできるだろうか.

不可能である. 授業で紹介された Kuhn's Algorithm を今回のグラフに適用し, 最大マッチング数が 20(≠21=|A|=|B|) であることより示す. 以下は, 提出ファイルを適宜参照されたい. 必要がある場合, 参照元を示しながら記述する.

a2.txt には, A, B 間の隣接行列が格納されている. 頂点番号は, あらためて, 左上から, 以下のように, 0, 1, 2, ..., 20 とついている.




README.md に記載した通りにコンパイルし, 実行ファイル./report2 を実行すると,「20」が出力される. 必要があれば, B の中の頂点が対応している A の頂点を示す配列 match_to を表示する (print_array_int(match_to, b); で表示可能) ことで, -1 の未接続の頂点が処理されることなく処理が終わっていることが確認できる.

よって, この二部グラフの最大マッチング数は 20 であり, 完全マッチングは存在しない. したがって, タイリングはできない.

問題 5

最小コスト完全マッチングを求めるアルゴリズムを実装し, 実験せよ.

上記と同じく, 実行ファイル./report5 を実行すると, b1.txt から b5.txt に対して Hungarian's Algorithm を適用し, それぞれの頂点数 $|A|$, $|B|$, 辺の数 m と, 実行時間, 最小コストが出力される. また, 参考までに理論計算量である $n^2 * m$ の具体的な値も出力した.

表 1　Hungarian アルゴリズムの実行結果まとめ

| ファイル名 | $\|A\|$ | $\|B\|$ | $n^2 \times m$ | 実行時間 [秒] | 最小コスト |
|---|---|---|---|---|---|
| b1.txt | 50 | 109 | 68,890,725 | 0.004 | 0.571276 |
| b2.txt | 255 | 189 | 455,418,896 | 0.059 | 1.740562 |
| b3.txt | 25 | 30 | 1,134,375 | 0.001 | 1.065767 |
| b4.txt | 430 | 381 | 2,337,608,163 | 0.193 | 1.602832 |
| b5.txt | 23 | 400 | 823,073,400 | 0.006 | 0.085391 |

```
double hungarian(double **cost, int a, int b, int *match_to) {
    Hungarian_ctx ctx;
    int n, i, i0, j, j0, j1;
    double result, delta, cur;
    n = (a > b) ? a : b;
    if (!init_hungarian_ctx(&ctx, n))
        return (-1);
    result = 0.0;                          // ①
    for (i = 1; i <= a; i++) {
        ctx.p[0] = i;
        init_row(&ctx);
        j0 = 0;
        ctx.way[j0] = 0;                   // ②
        do {
            ctx.used[j0] = 1;
            i0 = ctx.p[j0];
            j1 = 0;
            for (j = 1; j <= b; j++) {
                if (!ctx.used[j]) {        // ③
                    cur = cost[i0 - 1][j - 1] - ctx.u[i0] - ctx.v[j];
                    if (cur < ctx.minv[j]) {
                        ctx.minv[j] = cur;
                        ctx.way[j] = j0;
                    }
                }
            }
            find_min(&ctx, &delta, &j1); // ④
            update_labels(&ctx, delta); // ⑤
            j0 = j1;
        } while (ctx.p[j0] != 0);          // ⑥
        augment_path(&ctx, j0);            // ⑦
    }
    for (j = 1; j <= b; j++) {             // ⑧
        if (ctx.p[j] > 0 && ctx.p[j] <= a)
            match_to[j - 1] = ctx.p[j] - 1;
        else
            match_to[j - 1] = -1;
    }
    for (j = 1; j <= b; j++) {
        if (match_to[j - 1] != -1)
            result += cost[match_to[j - 1]][j - 1];
    }
    free_hungarian_ctx(&ctx);
    return result;
}
```

すべてのソースコードは長いため, 最も重要な関数のみを掲載する. 詳細は別途提出したソースコードを参照されたい.

Hungarian_ctx は以下のようになっている.

```
typedef struct  Hungarian_ctx
{
        int     n;      // a, bのうち大きい方
        double  *u;     // 双対変数を格納する配列
        double  *v;     // 双対変数を格納する配列
        int     *p;     // 現在のマッチングの対応を記録する配列
        int     *way;   // 増加パスを辿るための補助配列
        double  *minv;  // 割り当て可能な最小コストを一時的に保持する配列
        int     *used;  // 探索済みかどうかを保持する配列
}                               Hungarian_ctx;
```

・処理の流れの簡単な説明

①ここまでが初期化

② A の頂点一つずつにつき, コスト最小の頂点を探す.

③相補性条件をチェックする.

④ minv から最小の頂点を探し, 次に辿る頂点 j1 を記録する.

⑤双対変数を更新する.

⑥ p[j0] が 0 ⇔ 割り当てられなかったということなので, ループを抜ける.

⑦ j0 から way 配列を辿り, 配列 p を更新する.

⑧最終結果を記録する.

・頂点数, 辺数が増えることによる処理時間への影響

表 1 を見ると, 概ね理論計算量にともなって実行時間が増加する傾向にあるが, 一方で b5.txt に見られるように, 頂点数に偏りがある二部グラフの場合は理論上の計算量よりも小さい計算量で終了していることが分かる.

・n が大きくなった際の最適値の変化

表 1 を見ると, b2.txt における最適値は約 1.74 であるのに対し, 頂点数, 辺の数ともに増加している b4.txt において, 約 1.60 と, むしろ最適値は減少していることは注目すべきである. もちろん, これは乱数生成を使っているので, 偶然に小さい値が何個も登場した, ということは考えられるが, この結果から, 少なくとも「$\infty$ に発散する」という結論は出しにくい. むしろ, 1.7 前後に収束する可能性も示唆される.

このアルゴリズムにおける最適値は, 対応するマッチングのコストの合計である. すなわち,

$$m = \min\{|A|, |B|\}$$

の個数分のコストの合計であるが, この一つ一つが平均して $\alpha/m$ であると言えれば, 最適値は収束すると考えられる.

独立な一様分布であることを仮定すると, 個数が増えるにつれて最小値の期待値も減少していくと考えられるため, それが収束するかどうかは一考の余地がある. ただし, この挙動はコストの確率分布に大きく依存すると考えられる.