I Trigonométrie et nombres imaginaires

I.1 Trigonométrie

Proposition 1.1. (Formules d'addition et de duplication)
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$:

$$\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

$$\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$

De plus, on déduit les formules de duplication suivantes:
- $\cos(2a) = \cos(a)^2 - \sin(b)^2 = 2\cos(a)^2 - 1 = 1 - 2\sin(a)^2$
- $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$

Ces deux dernières formules peuvent être manipulées afin d'obtenir les suivantes:
- $\cos(a)^2 = \frac{1+\cos(2a)}{2}$
- $\sin(a)^2 = \frac{1-\cos(2a)}{2}$

Proposition 1.2. (Formules de linéarisation et de délinéarisation)
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$:
1. $\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$
2. $\sin(a) + \sin(b) = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$
3. $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a - b) + \cos(a + b))$
4. $\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a - b) - \cos(a + b))$
5. $\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a + b)(\sin(a - b)))$

Remarque. Les deux premières formules sont déduites des formules d'addition et des faits que $a = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}$ et $b = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}$. Les trois dernières par manipulation des formules d'addition.

Remarque. On déduit les formules de soustraction par parité de cos et imparité sin.

Proposition 1.3. (Tangente et formules reliées) On définis $\tan(a) = \frac{\sin(a)}{\cos(a)}$.
Alors $\forall(a, b) \in \mathbb{R}^2$:
1. $\tan(a + b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$
2. $\frac{1}{\cos(a)^2} = 1 + \tan(a)^2$
3. $\cos(2a) = \frac{1-\tan(a)^2}{1+\tan(a)^2}$
4. $\sin(2a) = \frac{2\tan(a)^2}{1+\tan(a)^2}$

Proposition 1.4. (Forme amplitude-phase)

$$\forall(a, b) \in \mathbb{R}^2, \exists(A, \varphi) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}, a\cos(t) + b\sin(t) = A\cos(t - \varphi)$$

De plus, on a $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ et φ tel que $\cos(\varphi) = \frac{a}{A}$ et $\sin(\varphi) = \frac{b}{A}$.

I.2 Nombres imaginaires

Remarque. On ne reviendra pas ici sur toutes les définitions.

Proposition 1.5. (Formules d'Euler)
Soit $\theta \in \mathbb{R}$:

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

En découlent:
- $e^{-i\theta} = \cos(\theta) - i\sin(\theta)$
- $\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$
- $\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2}$

Proposition 1.6. (Technique de l'angle moitié)
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:
- $e^{ix} + e^{iy} = e^{i\frac{x+y}{2}}\left(e^{i\frac{x-y}{2}} + e^{-i\frac{x+y}{2}}\right) = 2e^{i\frac{x+y}{2}}\cos(\frac{x-y}{2})$
- $e^{ix} - e^{iy} = e^{i\frac{x+y}{2}}\left(e^{i\frac{x-y}{2}} - e^{-i\frac{x+y}{2}}\right) = 2e^{i\frac{x+y}{2}}\sin(\frac{x-y}{2})$

II Fonctions usuelles

II.1 Composition

Théorème 2.1. Une composée de fonctions continue est continue.

Proposition 2.2. Soit $A, B \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$, $g : B \to \mathbb{R}$, telles que $g \circ f$ soit définie.
- f paire $\Rightarrow g \circ f$ paire.
- f impaire et g paire $\Rightarrow g \circ f$ paire.
- f et g impaires $\Rightarrow g \circ f$ impaire.

Proposition 2.3. Soit $A, B \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$, $g : B \to \mathbb{R}$, telles que $g \circ f$ soit définie.
- f et g de même monotonie $\Rightarrow g \circ f$ croissante.
- f et g de monotonie opposées $\Rightarrow g \circ f$ décroissante.

II.2 Fonction réciproque

Théorème 2.4. Soit I un interval de $\mathbb{R}$, et $f : I \to \mathbb{R}$ continue est strictement monotone.
1. f^{-1} est de même monotonie stricte.
2. f impaire $\Rightarrow f^{-1}$ impaire.
3. f^{-1} est continue.
4. Si f est dérivable et f^{-1} ne s'annule pas, alors $\frac{d}{dx} f^{-1} = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$

Remarque. On retouve le dernier point en dérivant $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_I$, ce qui donne

$$(f^{-1})' \times f' \circ f^{-1} = 1$$

Proposition 2.5.

$$\log_{a(x)} = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

II.3 Fonctions trigonométriques réciproques

Proposition 2.6. (Domaines de définition)
- $\arcsin : [-1; 1] \to [-\frac{\pi}{2} : \frac{\pi}{2}]$
- $\arccos : [-1; 1] \to [0; \frac{\pi}{2}]$
- $\arctan : \mathbb{R} \to] - \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$

Proposition 2.7. (Dérivées)
- $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Proposition 2.8. (Formules remarquables)
Soit tq. $|x| \leq 1$
- $\sin(\arccos(x)) = \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - x^2}$
- $\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$

II.4 Fonctions hyperboliques

Proposition 2.9. (Définition)
- $\mathrm{ch} : x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
- $\mathrm{sh} : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
- $\mathrm{th} : x \mapsto \frac{\mathrm{ch}}{\mathrm{sh}} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

(Fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$)

Proposition 2.10. (Propriétés)
- ch est paire.
- sh et th sont impaires.
- Soit $x \in \mathbb{R}, |\mathrm{th}(x)| < 1$
- $\mathrm{ch}' = \mathrm{sh}$ et $\mathrm{sh}' = \mathrm{ch}$
- $\mathrm{th}' = 1 - \mathrm{th}^2 = \frac{1}{\mathrm{ch}^2}$
- $\mathrm{ch} + \mathrm{sh} = \exp$
- $\mathrm{ch}^2 - \mathrm{sh}^2 = 1$

II.5 Divers

Théorème 2.11. Toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ peut s'écrire comme la somme de deux fonctions, une paire et une impaire.

III Un peu de calcul

III.1 Sommes et produits

Proposition 3.1.
- Une somme vide vaut 0
- Un produit nul vaut 1

Proposition 3.2. (Somme remarquables)

$$\sum_{k=0}^{n} 1 = n + 1$$

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

III.2 Coeficients binomiaux

Théorème 3.3. (Formule du triangle de pascal)
Soit $(n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}$:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Proposition 3.4. (Relations utiles)
Soit $(n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}$:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$$

Théorème 3.5. (Formule du binôme de Newton) Soit $n \in \mathbb{N}$, et $(a, b) \in \mathbb{C}$:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Théorème 3.6. Soit $n \in \mathbb{N}$, et $(a, b) \in \mathbb{C}$:

$$a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$$

Théorème 3.7. (Sommation géométrique) Corrolaire de Théorème 3.6
Soit $n \in \mathbb{N}$, et $z \in \mathbb{C}$:

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1}$$

Note: Si $z = 1$, alors la somme vaut $n + 1$.

III.3 Systèmes linéaires

Proposition 3.8. (Opérations licites)
- Sommation d'une ligne à une autre.
- Multiplication d'une ligne par un scalaire non nul.
- Echange de lignes et/ou de colonnes.

Proposition 3.9. (Paramètrisation) On peut décider d'éxprimer les valeurs de ceratines variables en fonction d'autres, et de définir ces dernières comme membres d'un ensemble.
Exemple: $(x, y, z) \in \{(3z + 2, 9z^2, z) \mid z \in \mathbb{C}\}$

IV Un peu de logique

Soit p et q des propositions logiques, et P un prédicat.

Théorème 4.1. (Loi de De Morgan)
- $\neg(p \land q) \equiv \neg p \lor \neg q$
- $\neg(p \lor q) \equiv \neg p \land \neg q$

Proposition 4.2. (Implication)

$$(p \Rightarrow q) \equiv \neg p \lor q$$

Proposition 4.3. (Négations intéressantes)
- $\neg(\forall x, P(x)) \Leftrightarrow \exists x, \neg P(x)$
- $\neg(\exists x, P(x)) \Leftrightarrow \forall x, \neg P(x)$

V Nombres complexes

Proposition 5.1. (Astuce pour les racines carrés)
Soit $(t, z) \in \mathbb{C}^2$:

$$t^2 = z \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 = z \\ |t|^2 = |z| \end{cases}$$

Théorème 5.2. (Racine n-ième)
- La racine n-ième de 0 est 0.
- L'ensemble des racines n-ièmes de $z \in \mathbb{C}$ est $\left\{ \sqrt[n]{|z|} \times e^{\frac{i \arg(z)}{n} + \frac{2ik\pi}{n}} \mid k \in [\![0; n-1]\!] \right\}$.
- La somme des racines n-ièmes de 1 est nulle.

Proposition 5.3. (Sommation et linéarisation de fonctions trigonométriques)
Soit f une fonction.
- $\sum \cos \circ f = \sum \mathrm{Re}\left(e^{f(x)}\right) = \mathrm{Re}\left(\sum e^{f(x)}\right)$, et de même pour sin, avec Im. On peut alors espérer une somme géométrique.
- Pour simplifier un mix produit-puissances de sinus et de conisus, on peut utiliser la méthode *Euler-Newton-Euler*:
  1. Expression en utilisant les formules d'Euler (Proposition 5.5).
  2. Développement en utilisant la formule du binôme de Newton (Théorème 5.5)
  3. Réassemblage à l'aide des les formules d'Euler.

Théorème 5.4. (Exponentielle complexe)
Soit $z \in \mathbb{C}, t \in \mathbb{C}^*$: $e^z = t \Leftrightarrow z = \exists k \in \mathbb{Z}, \ln|t| + i \arg(t) + 2ik\pi$

Proposition 5.5. (Alignement et perpendicularité)
Soit A, B, C trois points **deux à deux distincts** d'affixes respectives $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$.
- Ils sont alignés ssi $\frac{c-a}{c-b} \in R$.
- Ils $(AC) \perp (BC)$ ssi $\frac{c-a}{c-b} \in iR^*$.

Proposition 5.6. (Transformations)
- Généralement, on ramène à l'origine, puis effectue la transformation, et on renvois au centre.
- La transformation $z \to az + b$ avec $(a, z) \in \mathbb{C}^2$, est composée de centre $\frac{b}{1-a}$, de:
  - Une homotétie de rapport $|a|$,
  - Une rotation d'angle $\arg(a)$.

VI Equations déférentielles linéaires

$\mathbb{K}$ vaut $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, en fonction du contexte.

VI.1 Divers

Proposition 6.1. (Dérivée d'une fonction complexe)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, telle que $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont dérivables.

$$f'(a) = (\mathrm{Re}(f))'(a) + i(\mathrm{Im}(f))'(a)$$

Autrement, les opérations classiques s'appliquent.

Proposition 6.2. (Catégories de fonctions)
- $f \in \mathcal{C} \Leftrightarrow f$ est continue.
- $f \in \mathcal{D}^n \Leftrightarrow f$ est n fois dérivable.
- $f \in \mathcal{C}^n \Leftrightarrow f \in \mathcal{D}^n \land f^{(n)} \in \mathcal{C}^n$.
- $f \in \mathcal{C}^\infty \Leftrightarrow f$ est infiniment dérivable.

Proposition 6.3. (Primitive de fonction de forme inverse d'une fonction quadratique.)
Soit $f : x \mapsto \frac{1}{ax^2+bx+c}$, avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On pose $\Delta = b^2 - 4ac$.
- Si $\Delta \geq 0$: On factorise, linéarise si $\Delta \neq 0$, et primitive.
- Sinon: On passe sous la forme inverse de forme canonique, puis la forme $\frac{1}{1+g(x)^2}$, avec g une fonction, et on primitive en $\arctan \circ g$.

Proposition 6.4. (Changement de variable en intégration)
Soient I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $a, b \in I, \varphi \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}), \omega = \varphi^{-1}, f \in \mathcal{C}^0(J \in \mathbb{R})$.
On suppose $\varphi(I) \subset J$.
On peut alors effectuer le changement de variable $x = \varphi(t)$, soit $\omega(x) = t$:

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \varphi'(t) \times (f \circ \varphi)(t)\,\mathrm{d}t$$

Soit aussi

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\omega(a)}^{\omega(b)} (f \circ \omega)(t) \frac{\mathrm{d}t}{\omega'(x)}$$

où l'on devra exprimer $\omega'(x)$ en fonction de t.

VI.2 Cas général

Théorème 6.5. (Strcuture des solutions)
Soient:
- $n \in \mathbb{N}$
- (E) une équa-diff linéaire d'ordre n et S_E son ensemble de solutions.
- (H) l'équation homogène de (E) (membre de droite nul), et S_H son ensemble de solutions.

Alors:
- $S_e \subset \mathcal{C}^n$
- $0_\mathbb{K} \in S_H$
- Pour tout $y_0 \in S_E$ fixée, $S_E = \{y_0 + y_H \mid y_H \in S_H\}$.
- S_E est soit $\emptyset$, soit un singleton, soit un ensemble de taille infinie.

Théorème 6.6. (Principe de superposition)
Soient:
- $n \in \mathbb{N}$
- $\{a_i \mid i \in [\![0, n-1]\!]\} \cup \{b_1, b_2\}$ un ensemble d'appliaction continues.
- $a_n : x \to 1$
- λ_1, λ_2 des membres de $\mathbb{K}$
- $(E_1) : \sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)} = b_1$
- $(E_2) : \sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)} = b_2$
- $(E) : \sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)} = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2$

Alors $y_1 \in S_{E_1} \land y_2 \in S_{E_2} \Rightarrow \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \in S_E$.

Théorème 6.7. (Solutions d'un problème de Cauchy)
Un problème de Cauchy d'ordre n_0 (strictement inférieur au degré de l'équation) impose des conditions initiales à chaque dérivée n-ième de la solution, pour $0 \leq n \leq n_0$.
Pour tout choix de conditions initiales, un problème de Cauchy d'ordre n, pour une équation de même ordre, n'admet **qu'une solution**.

VI.3 Ordre 1

Théorème 6.8. (Solution d'une equation homogène d'ordre 1)
Soit $a \in \mathcal{C}^0$ et A sa primitive.
L'ensemble des solution de $y' + ay = 0$ est:

$$\left\{t \mapsto Ke^{-A(t)} \mid K \in \mathbb{K}\right)\}$$

Ainsi, la seule solution s'annulant est $0_\mathbb{K}$ (où $K = 0$).

Proposition 6.9. (Méthode de la variation de la constante (ordre 1))
Soient $a, b \in \mathcal{C}^0$ et A, B leurs primitives respectives.
Soient $(E) : y' + ay = b$ et (H) son équation homogène.
Soit $y_h \neq 0_{\mathbb{K}} \in S_h$.

- On prends $y \in S_E$
- On pose C tq. $y = C \times y_h$.(Existe, $\frac{y}{y_H}$)
- On développe $y' + ay = b \Leftrightarrow C' y_h + C y_{h'} + aCy_h = C' y_h + C(y_{h'} + ay_h) = b$.
- $\Leftrightarrow C' y_h = b$ car $y_h \in S_h$
- $\Leftrightarrow C' : x \mapsto \frac{b}{y_h}$
- $\Leftrightarrow C : x \mapsto \lambda + \int^x \frac{b}{y_h}, \lambda \in \mathbb{K}$.
- $\Leftrightarrow y : x \mapsto y_H \lambda + y_H \int^x \frac{b}{y_h}, \lambda \in \mathbb{K}$.

VI.4 Ordre 2

Soient $a, b, c, d \in \mathcal{C}^0$ et leurs primitives respectives A, B, C, D.
Soient $(E) = ay'' + by' + cy = d$ et (H) son équation homogène.
Soient (EC) : $ar^2 + br + c = 0$. et $P_H : aX^2 + bX + c$

Proposition 6.10.

$$y_r : t \mapsto e^{rt} \in S_H \Leftrightarrow r \in S_{\text{EC}}$$

Théorème 6.11. (Solutions complexes de (H))

- Si (EC) a deux solution complexes, r_1, r_2:

  $$S_H = \{t \mapsto \alpha e^{r_1 t} + \beta e^{r_2 t} \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2\}$$

  .
- Si (EC) n'a qu'une solution complexe, r_0:

  $$S_H = \{t \mapsto (\alpha t + \beta) e^{r_0 t} \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2\}$$

  .

Proposition 6.12. (Solutions réelles de (H))

- Dans les cas où les solutions de (EC) sont toute deux réelles, on procède comme dans le cas où elles seraint complexes.
- Sinon, les deux solutions étant conjugées, de la forme $\gamma \pm i\omega$, avec $(\gamma, \omega) \in \mathbb{R}^2$.

Alors

$$S_H = \{t \mapsto \alpha \cos(\omega t) e^{\gamma t} + \beta \sin(\omega t) e^{\gamma t} \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$$

$$S_H = \{A \cos(\omega t + \varphi) e^{\gamma t} \mid A \in \mathbb{R}_+, \varphi \in]-\pi; \pi[\}$$

Ces deux ensembles sont égaux.

Proposition 6.13. (Recherche de solution particulière à (E))
On écrit (E) sous la forme $y'' + \alpha y' + \beta y = \varphi$.

- Si φ est un polynôme, alors il existe un polynome à coefficient dans $\mathbb{K}$ solution de (E).
- Si il existe $(A, k) \in \mathbb{K}^2$ tels que $c(x) = Ae^{kx}$, alors il existe polynome Q à coefficient dans $\mathbb{K}$ tel que $x \mapsto Q(x)e^{kx} \in S_E$.
- Si il existe $(A, \omega) \in \mathbb{K}^2$ tels que $c(x) = A\cos(\omega x)$, il existe un polynôme Q à coefficient dans $\mathbb{K}$ tel que $x \mapsto Q(x)e^{i\omega x}$ est solution de $y' + \alpha y = Ae^{i\omega x}$ ou $y'' + \alpha y' + \beta y = Ae^{i\omega x}$. Alors $x \mapsto \mathrm{Re}(Q(x)e^{i\omega x}) \in S_E$.
- De même, si il existe $(A, \omega) \in \mathbb{K}^2$ tels que $c(x) = A\sin(\omega x)$, on prendra $x \mapsto \mathrm{Im}(Q(x)e^{i\omega x})$.

VII Théorie des ensembles

Soient E un ensemble de $n \in \mathbb{N}$ éléments, et $A = (A_i)_{i \in \mathbb{I}}$ une famille d'ensembles.

Proposition 7.1.

$$\mathcal{P}(E) = \{F \mid F \subset E\}$$

.

- $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$
- $\mathcal{P}(E)$ a 2^n éléments

Proposition 7.2. (Distributivité)

$$\left(\bigcup_{i \in \mathbb{I}} A_i\right) \cap E = \bigcup_{i \in \mathbb{I}} (A_i \cap E)$$

$$\left(\bigcap_{i \in \mathbb{I}} A_i\right) \cup E = \bigcap_{i \in \mathbb{I}} (A_i \cup E)$$

Proposition 7.3. (Relations de De Morgan)
On suppose $\left\{(A_i)_{i \in \mathbb{I}}\right\} \subset \mathcal{P}(E)$.

$$\left(\bigcap_{i \in \mathbb{I}} A_i\right)^C = \bigcup_{i \in \mathbb{I}} A_i^C$$

$$\left(\bigcup_{i \in \mathbb{I}} A_i\right)^C = \bigcap_{i \in \mathbb{I}} A_i^C$$

Où $A_i^C = E \setminus A_i$. (On le note aussi $C_E A_i$ ou $\overline{A_i}$ si il n'y a aucune confusion.)

Proposition 7.4. (Recouvrement disjoint et partition)
On suppose $\left\{(A_i)_{i \in \mathbb{I}}\right\} \subset \mathcal{P}(E)$.
Alors, A est un *recouvrement disjoint* de E si:

- $\forall (i, j) \in \mathbb{I}^2, i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$ (Les éléments de A sont deux à deux disjoints);
- $E = \bigcup_{i \in \mathbb{I}} A_i$ (A est un recouvrement de E).

De plus, si $\forall i \in \mathbb{I}, A_i \neq \emptyset$, A est une partition de E.

VIII Notion d'application

Proposition 8.1. On note $\mathcal{F}(E, F) = F^E$ l'ensemble des applications de E dans F.

Proposition 8.2. (Fonction indicatrice de A) Soit A une partie de E.
On a la fonction indicatrice 1_A telle que :

$$1_A : x \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \in \bar{A} \end{cases}$$

Proposition 8.3. (Restriction est prolongement)
Soient E, F, E', F' des ensembles, $f \in \mathcal{F}(E, F)$ et $f' \in \mathcal{F}(E', F')$.

- Pour tout $G \in \mathcal{P}(E)$, la restriction de f à G est :

$$f_{|G} : \begin{cases} G \to F \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$$

- f' est un prolongement de f si:
  - $E \subset E'$ et $F \subset F'$;
  - $\forall x \in E, f'(x) = f(x)$.

Proposition 8.4. (Injectivité, Surjectivité et Bijectivité)
Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$.

- f est injective ssi $\forall (x, y) \in E^2, f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$; (Un seul antécédant).
- f est surjective ssi $\forall a \in F, \exists \alpha \in E, x = f(\alpha)$; (Toujours au moins un antécédant).
- f est bijective si elle est injective et surjective. ($\forall a \in F, \exists! \alpha \in E, x = f(\alpha)$)

Remarque. f est surjective ssi $f(E) = F$

Théorème 8.5. (Fonction réciproque)

1. $f \in \mathcal{F}(E, F)$ bijective $\Leftrightarrow$ il existe $g \in \mathcal{F}(F, E)$ tq. $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$.
2. Alors $g = f^{-1}$ et $\forall (x, y) \in E \times F f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$.
3. De plus, $f(-1)$ est bijective et $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$

Théorème 8.6. (Compositions)
Soient $f \in \mathcal{F}(E, F), g \in \mathcal{F}(F, G)$.

- f et g injectives $\Rightarrow g \circ f$ injective.
- f et g surjectives $\Rightarrow g \circ f$ surjective.
- f et g biejctives $\Rightarrow g \circ f$ bijective. De plus, $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Proposition 8.7. (Tirée en arrière) Soient $f \in \mathcal{F}(E, F), B \in \mathcal{P}(F)$.

$$f^{\leftarrow}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$$

De plus, $\{f^{\leftarrow}(\{y\}) \mid y \in F\}$ est un recouvrement disjoint de E, et $\{f^{\leftarrow}(\{y\}) \mid y \in \mathrm{Im}(F)\}$ est une partition de E.
De même, si $(F_i)_{i \in \mathbb{I}}$ est une partition de $\mathrm{Im}(F)$, alors $\{f^{\leftarrow}(F_i) \mid i \in \mathbb{I}\}$ est une partition de E.