Devoir à la maison n° 7

À rendre le 30 novembre

I. Puissances d'une matrice et suites récurrentes

On note $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels. Soit I la matrice de l'identité de $\mathbb{R}^3$ et soit M la matrice $\begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

1) Soit $A = \frac{1}{4}(M - I)$. Calculer A^2, A^3 puis A^n pour $n \geqslant 1$.

2) Exprimer M en fonction de A et de I puis en déduire qu'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels tels que $\forall n \in \mathbb{N},\ M^n = I + u_n A$.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_n - 1$. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n, puis calculer u_n en fonction de n. En déduire l'expression de M^n.

4) Soient $(x_n), (y_n)$ et (z_n) trois suites réelles telles que $x_0 = 1, y_0 = 1, z_0 = 1$ et

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_{n+1} & = & -7x_n - 8z_n \\ y_{n+1} & = & 4x_n + y_n + 4z_n \\ z_{n+1} & = & 4x_n + 5z_n \end{array}\right.$$

On pose $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $X_n = M^n X_0$.

b) Pour tout, $n \in \mathbb{N}$, en déduire, x_n, y_n et z_n en fonction de n.

II. Fonctions sup-continues

On considère l'ensemble $E = [0, 1] \subset \mathbb{R}$, que l'on munit de l'ordre usuel sur $\mathbb{R}$. On s'intéresse aux applications allant de E dans E. Soit $f : E \to E$ une telle application.
On rappelle que f est *croissante* si et seulement si :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ x \leqslant y \Longrightarrow f(x) \leqslant f(y)$$

On dit que f est *sup-continue* si et seulement si :

$$\forall A \in \mathcal{P}(E),\ A \neq \varnothing \Longrightarrow f(\sup A) = \sup f(A)$$

1) Justifier que la définition de f sup-continue est correcte (c'est-à-dire que ce qui est écrit a toujours un sens).

2) Soit f et g deux applications de E dans E.

a) Montrer que pour tout $A \subset E$, $(g \circ f)(A) = g(f(A))$.

b) En déduire que si f et g sont sup-continues, alors $g \circ f$ est sup-continue.

3) Montrer que si une application $f : E \to E$ est croissante, alors pour toute partie $A \subset E$ non vide, on a $\sup(f(A)) \leqslant f(\sup A)$.

4) Exhiber un exemple d'application $f : E \to E$ qui est croissante, mais qui n'est pas sup-continue.

5) Montrer que si $f : E \to E$ est sup-continue, alors f est croissante.

On considère désormais une application $f : E \to E$ qui est sup-continue. On note l'ensemble des points fixes de f :

$$\mathrm{Fix}(f) = \{\, x \in E \mid f(x) = x \,\}.$$

On note aussi :

$$X = \{\, x \in E \mid f(x) \leqslant x \,\}.$$

On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}$$

avec la convention $f^0 = \mathrm{Id}_E$, et l'on pose finalement :

$$Y = \{\, f^n(0) \mid n \in \mathbb{N} \,\} = \{\, y \in E \mid \exists n \in \mathbb{N},\ y = f^n(0) \,\}.$$

6) Montrer que X possède une borne inférieure, que l'on notera désormais α.

7) Justifier que $\alpha \in E$.

8) Montrer que α est le plus petit élément de $\mathrm{Fix}(f)$.

9) Justifier que Y possède une borne supérieure, que l'on notera β, et que $\beta \in E$.

10) Montrer que

$$f(Y) = \{\, f^n(0) \mid n \in \mathbb{N}^* \,\}$$

et que

$$\sup Y = \sup f(Y).$$

11) Montrer que $\alpha = \beta$.

— **FIN** —