

Feuille d'exercice n° 28 : **Séries numériques**

Exercice 1 Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite réelle décroissante de limite nulle. On suppose que la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ de terme général $v_n = \left(\sum_{k=1}^n u_k \right) - nu_n$ est bornée. On veut montrer que la série $\sum u_n$ converge.


- 1) Montrer que (v_n) est croissante, puis convergente. On note ℓ sa limite.
- 2) Exprimer $u_k - u_{k+1}$ en fonction de v_k et v_{k+1} .
- 3) En sommant l'égalité précédente de n à $+\infty$, montrer que pour tout $n \geq 1$, $u_n \leq \frac{1}{n}(\ell - v_n)$.
- 4) En déduire que $nu_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, et enfin que la série $\sum u_n$ converge.


Exercice 2 Soit (u_n) une suite réelle, décroissante, à termes positifs et telle que $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.

- 1) Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $p > N$, on a $(p - N)u_p \leq \varepsilon$.
- 2) En déduire que $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 3 On considère deux séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$, à termes positifs.

- 1) Démontrer que si les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors la série de terme général $\sqrt{u_n v_n}$ converge aussi.
- 2) On suppose maintenant que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{1}{1 + n^2 u_n}$.
 - a) Exprimer $\sqrt{u_n v_n}$ en fonction de v_n et de n .
 - b) En déduire que $\sum v_n$ et $\sum u_n$ ne peuvent pas converger toutes les deux.

Exercice 4 () Comment choisir deux réels a et b tels que $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge, avec $u_n = \ln n + a \ln(n + 1) + b \ln(n + 2)$? Dans le cas de convergence, donner la valeur de la somme.

Exercice 5 () On étudie la suite (u_n) définie par : $u_0 \in]0, \pi/2[$ et $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

- 1) Montrer que (u_n) est une suite à termes positifs, et qu'elle est convergente.
- 2) Déterminer la limite de (u_n) .
- 3)
 - a) Donner un DL à l'ordre 3 de u_{n+1} en fonction de u_n , quand n tend vers $+\infty$. En déduire un équivalent de u_n^3 en fonction de $(u_n - u_{n+1})$.
 - b) Déterminer la nature de la série de terme général u_n^3 .
- 4) Déterminer la nature de la série de terme général $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.
- 5)
 - a) Donner un équivalent de $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ en fonction de u_n , quand n tend vers $+\infty$.
 - b) En déduire la nature des séries de termes généraux u_n^2 et u_n .


Exercice 6 Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \begin{cases} 1/n & \text{si } n \text{ est un carré} \\ 1/n^2 & \text{sinon} \end{cases}$.


Exercice 7 () Déterminer la nature des séries dont les termes généraux sont les suivants.

- | | | |
|---|--|---|
| 1) $u_n = \frac{\operatorname{ch} n}{\operatorname{ch} 2n}$ | 4) $\alpha_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ | 7) $a_n = \frac{2^n n}{n!}$ |
| 2) $v_n = \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ | 5) $\beta_n = \frac{1}{n \cos^2 n}$ | 8) $b_n = \left(\frac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}}\right)^n$ |
| 3) $w_n = e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ | 6) $\gamma_n = \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$ | 9) $c_n = \frac{3n^3 + 2n - 1}{(n+1)(n^2 + n + 1)}$ |

Exercice 8 Calculer $\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$, après avoir montré son existence.

Exercice 9 Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{n!}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2-2}{n!}$.

Exercice 10 () Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}$, après avoir montré son existence.

Exercice 11 () – **Transformation d'Abel** –


Soit (a_n) une suite positive décroissante de limite nulle et (S_n) une suite bornée.

- Montrer que la série $\sum (a_n - a_{n+1})S_n$ est convergente.
- En déduire que la série $\sum a_{n+1}(S_{n+1} - S_n)$ est convergente.
- Établir que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, la série $\sum \frac{\cos(nx)}{n}$ est convergente.

Exercice 12 Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \frac{1}{(\ln 2)^2 + \dots + (\ln n)^2}$.

Exercice 13 () Soit $\alpha > 1$. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ on pose $S_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^\alpha}$ et $R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$.

Étudier, selon α , la nature de la série $\sum_{N \geq 1} \frac{R_N}{S_N}$.

Exercice 14 () Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, telle que $f(0) = 0$ et $|f'(0)| < 1$. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n, u_{n+1} = f(u_n)$. Démontrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que si $|u_0| < \alpha$, la série de terme général u_n converge absolument.

Exercice 15 () Déterminer les natures des séries suivantes.

- | | | |
|--|--|---|
| 1) $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^{42}}$ | 2) $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n n^2 + 3n}{e^n}$ | 3) $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(n)}{\operatorname{sh}(n)}$ |
|--|--|---|


Exercice 16 () Déterminer les natures des séries suivantes.

1) $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$

3) $\sum_{n \geq 0} \frac{1 - 2! + \dots + (-1)^{n-1} n!}{(n+1)!}$

2) $\sum_{n \geq 1} \frac{1 + (-1)^n \sqrt{n}}{n}$

4) $\sum_{n \geq 1} \frac{(-\ln(n))^n}{n^{\ln(n)}}$.

Exercice 17 () Calculer $\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} \frac{1}{2^i 3^j}$.

Exercice 18 Soit $q \in]-1, 1[$.

1) Montrer que la famille $(q^{k\ell})_{k,\ell \in \mathbb{N}^*}$ est sommable.

2) En déduire que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{q^k}{1 - q^k} = \sum_{n=1}^{+\infty} d(n) q^n$, où $d(n)$ est le nombre de diviseurs positifs de n .

Exercice 19 () En considérant l'exponentielle complexe comme définie par sa série, montrer que pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$, alors $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$.

