Semaine n° 24 : du 25 mars au 29 mars

Lundi 25 mars

- **Cours à préparer : Chapitre XXII - Intégration**
  — *Partie 7 :* Sommes de Riemann ; méthode des trapèzes.
  — *Partie 8 :* Comparaison série-intégrale.

Mardi 26 mars

- **Cours à préparer : Chapitre XXIII - Dénombrement**
  — *Partie 1 :* Cardinal d'un ensemble fini.
  — *Partie 2 :* Cardinal d'une réunion, d'un complémentaire, d'un produit cartésien, de l'ensemble des applications d'un ensemble fini dans un ensemble fini. p-arrangements d'un ensemble fini, cardinal de l'ensemble des p-arrangements d'un ensemble fini ; cardinal du groupe des permutations d'un ensemble fini ; p-combinaisons d'un ensemble fini, cardinal de l'ensemble des p-combinaison d'un ensemble fini.
- **Exercices à corriger en classe**
  — **Feuille d'exercices n° 22 :** exercices 5, 7.

Jeudi 28 mars

- **Cours à préparer : Chapitre XXIV - Espaces vectoriels de dimension finie**
  — *Parties 1.1 à 1.3 :* Notion d'espace vectoriel de dimension finie. Existence de bases d'un espace vectoriel de dimension finie ; théorème de la base incomplète, de la base extraite.
- **Exercices à corriger en classe**
  — **Feuille d'exercices n° 22 :** exercices 10, 11, 20, 21, 29.

Vendredi 29 mars

- **Cours à préparer : Chapitre XXIV - Espaces vectoriels de dimension finie**
  — *Partie 1.4 :* Dimension d'un espace vectoriel de dimension finie ; caractérisation des bases.
  — *Partie 1.5 :* Espaces vectoriels isomorphes en dimension finie.
  — *Partie 1.6 :* Dimension d'un produit cartésien d'espaces de dimension finie ; dimension de l'ensemble des applications linéaires d'un espace de dimension finie dans un autre.

Échauffements

Mardi 26 mars

- On considère dans $\mathbb{R}^n$ une famille de 4 vecteurs linéairement indépendants : (e_1, e_2, e_3, e_4). Les familles suivantes sont-elles libres ?

$$1)\ (e_1, 2e_2, e_3) \quad 2)\ (e_1, e_3) \quad 3)\ (e_1, 2e_1 + e_4, e_4) \quad 4)\ (3e_1 + e_3, e_3, e_2 + e_3).$$

- *Cocher toutes les assertions vraies :* Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$.
  - ☐ Alors f et g sont bornées sur $[a, b]$.
  - ☐ Si $f(a) = g(a)$ et $f(b) = g(b)$, alors $f = g$.
  - ☐ Si $\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = 0$ alors $\forall t \in [a, b],\ f(t)g(t) = 0$.
  - ☐ $f \circ g$ est une fonction continue sur $[a, b]$

Jeudi 28 mars

- Calculer une primitive de $x \mapsto (1 + 2x)\mathrm{e}^{-x} \sin x$.
- *Cocher toutes les assertions vraies :* Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
  - ☐ $f(2) = f(1) + f'(1) + \dfrac{1}{2}f''(1) + \displaystyle\int_1^2 \frac{(2-t)^3}{3!} f^{(3)}(t)\,\mathrm{d}t$.
  - ☐ Alors pour tout réel x et pour tout entier n, $f(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + o(x^n)$.
  - ☐ Il existe un réel c dans $[0, 1]$ tel que $f(0) - f(1) + f'(1) - \dfrac{1}{2}f''(1) + \dfrac{1}{6}f^{(3)}(1) = \frac{1}{24} f^{(4)}(c)$
  - ☐ Alors pour tout réel x et pour tout entier n, $\left| f(x-1) - f(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x) \right| \leqslant \frac{1}{(n+1)!} \sup_{t \in [x-1, x]} \left| f^{(n+1)}(t) \right|$.

Vendredi 29 mars

- Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^5 t \sin^4 t\,\mathrm{d}t$.
- *Cocher toutes les assertions vraies :*
  - ☐ Pour tout entier n non nul, $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n+1}$.
  - ☐ Comme $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, donc par encadrement $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}\mathrm{d}x = 0$.
  - ☐ Les fonctions $x \longmapsto \dfrac{x^n}{n}$ et $x \longmapsto \dfrac{x}{(1+x)}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, 1]$.
    Donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}}{n(x+1)}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^n}{n(1+x)^2}\mathrm{d}x$.
  - ☐ Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant (-1)^{n+1} \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}\mathrm{d}x \leqslant \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$.
  - ☐ Alors $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2}\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$.