Devoir à la maison n° 9

À rendre le 21 décembre

Soit $a \in \mathbb{R}$, on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + \frac{a - u_n^2}{2}$$

1) Dans cette question, on suppose $a < 0$

a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet $-\infty$ pour limite.

Dans la suite on supposera $a \geqslant 0$

2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x + \frac{a - x^2}{2}$$

a) Étudier les variations de f.

b) Montrer que si $a \in [0, 1]$, l'intervalle $[0, \sqrt{a}]$ est stable par f et que pour tout $x \in [0, \sqrt{a}]$, $f(x) \geqslant x$.

c) Montrer que si $a > 1$, alors

$$\left[1, \frac{1+a}{2}\right] \text{ est stable par } f \Leftrightarrow a \in]1, 5]$$

3) Dans cette question, on suppose que $a \in [0, 1]$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et converge vers $\sqrt{a}$.

4) On pose $g = f \circ f$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) - x = -\frac{1}{8}(x^2 - a)((x-2)^2 + 4 - a)$$

5) Dans cette question, on suppose que $a \in]1, 5]$.

a) En utilisant les variations de f, montrer que g est croissante sur $\left[1, \frac{1+a}{2}\right]$.

b) Montrer que $\sqrt{a} \in \left[1, \frac{1+a}{2}\right]$.

6) Dans cette question, on suppose que $a \in [2, 4[$.

a) Résoudre l'équation $g(x) = x$ et étudier le signe de $g(x) - x$ sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant u_{2n+1} \leqslant \sqrt{a}$.

c) En déduire que la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et qu'elle converge. Déterminer sa limite ℓ.

d) En déduire que la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

e) Conclure sur la convergence de la suite (u_n).

7) Dans cette question, on suppose que $a \in]4,5]$.

a) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $g(x) = x$.

b) Étudier le signe de $x \mapsto g(x) - x$ sur $\mathbb{R}$

c) Montrer que $2 + \sqrt{a-4} \leqslant \dfrac{1+a}{2}$.

d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{a} \leqslant u_{2n+1} \leqslant 2 + \sqrt{a-4}$.

e) Montrer que la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite qu'on précisera.

f) En déduire que la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

— **FIN** —