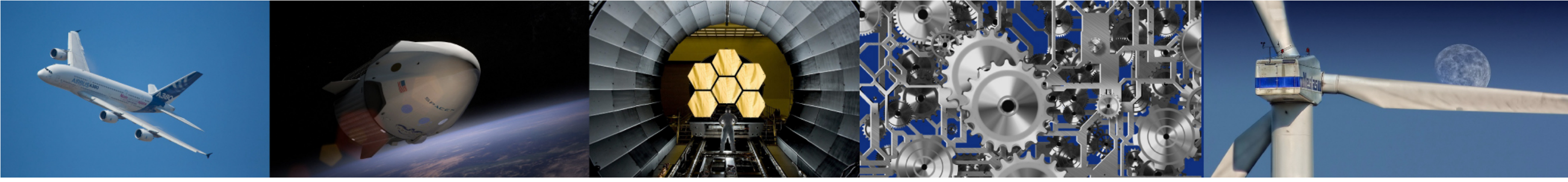
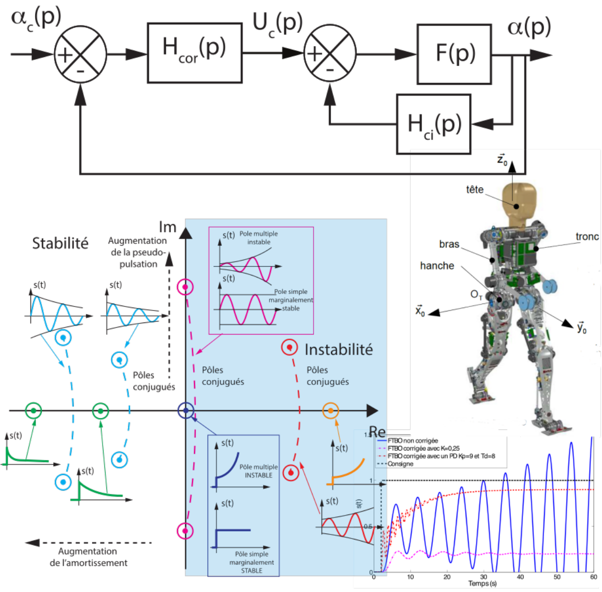




Lycée La Martinière Monplaisir Lyon

Sciences Industrielles pour l'Ingénieur

Classe préparatoire M.P.S.I. et M.P.I.I.

Année 2023 - 2024

C8 : Analyse des performances des systèmes asservis

C8-2 - Précision et rapidité des systèmes asservis

7 Mai 2024

Table des matières

Compétences

- **Modéliser**
  - Établir un modèle de comportement à partir d'une réponse temporelle ou fréquentielle.
- **Résoudre**
  - Proposer une démarche permettant d'évaluer les performances des systèmes asservis.
  - Déterminer la réponse fréquentielle.
  - Déterminer les performances d'un système asservi.

I. Quantification de la précision

1 Définition de la précision

Définition 1 : *Erreur ou écart*

En régime permanent, on appelle l'erreur ou l'écart, la différence entre la sortie théorique (s_{th}) souhaitée et celle obtenue ($s(t)$) lorsque t tend vers $+\infty$. HELLO

$$\boxed{\varepsilon = \lim_{t\to+\infty} \varepsilon(t) = \lim_{t\to+\infty} (s(t) - s_{th}) = s_\infty - s_{th}} \quad (1)$$

En pratique, on calcule directement l'erreur à la sortie du comparateur d'un système asservi.

$$\varepsilon(p) = \mathscr{L}(\varepsilon(t)) = E(p) - G(p)\, S(p) = E(p) - G(p)\, H(p)\, \varepsilon(p).$$

D'où,

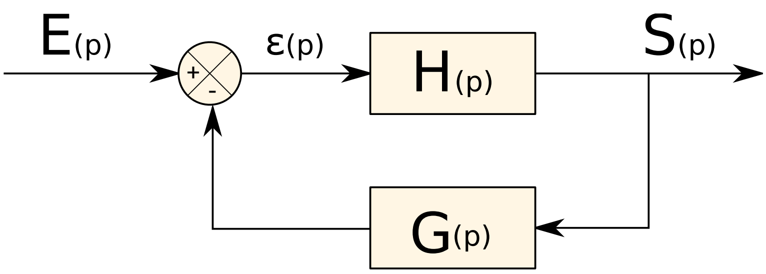
$$\boxed{\varepsilon(p) = \frac{E(p)}{1 + G(p)\, H(p)} = \frac{E(p)}{1 + FTBO(p)}}. \quad (2)$$

- **l'erreur statique** ε_S (ou de position) se mesure sur la réponse à un échelon.

$$e(t) = Au(t).$$

- **l'erreur de traînage** (ou de vitesse) ε_V se mesure sur la réponse à une rampe.

$$e(t) = A\, t\, u(t).$$



Remarque 1 :

- Avec le théorème de la valeur finale

$$\boxed{\varepsilon = \lim_{t\to+\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p\to0} p\, \varepsilon(p).} \quad (3)$$

- Dans le cas d'un retour unitaire :

$$\boxed{\varepsilon = \lim_{t\to+\infty} (e(t) - s(t)) = \lim_{p\to0} p\big(E(p) - S(p)\big)} \quad (4)$$

2 Erreur indicielle

Ici l'entrée $e(t)$est un échelon d'amplitude E_0, donc sa transformée de Laplace est $E(p) = \frac{E_0}{p}$.

Soit la fonction de transfert en boucle ouverte définie par :

$$FTBO(p) = \frac{K}{p^\alpha} \frac{1 + c_1\,p + ... + c_m\,p^m}{1 + d_1\,p + ... + d_n\,p^n}.$$

On peut alors calculer ε_S :

$$\varepsilon_S = \lim_{p\to 0} p\,\varepsilon(p) = \lim_{p\to 0} p\,\frac{E(p)}{1 + FTBO(p)} =$$

$$\lim_{p\to 0} \frac{p\,E_0}{p\left(1 + \frac{K}{p^\alpha}\frac{1+c_1\,p+...+c_m\,p^m}{1+d_1\,p+...+d_n\,p^n}\right)} = \lim_{p\to 0} \frac{E_0}{1 + \frac{K}{p^\alpha}\frac{1+c_1\,p+...+c_m\,p^m}{1+d_1\,p+...+d_n\,p^n}}$$

Deux cas se présentent alors :

- Cas où $\alpha = 0$:

- Cas où $\alpha \geq 1$:

3 Erreur de trainage

Ici l'entrée $e(t)$ est une rampe d'amplitude a. Sa fonction de transfert est $E(p) = \frac{a}{p^2}$.
On reprend la même forme de la fonction de transfert en boucle ouverte.
On peut alors calculer ε_V :

$$\varepsilon_V = \lim_{p\to 0} p\,\varepsilon(p) = \lim_{p\to 0} p\,\frac{E(p)}{1 + FTBO(p)} =$$

$$\lim_{p\to 0} \frac{p\,a}{p^2\left(1 + \frac{K}{p^\alpha}\frac{1+c_1\,p+...+c_m\,p^m}{1+d_1\,p+...+d_n\,p^n}\right)} = \lim_{p\to 0} \frac{a}{p\,\left(1 + \frac{K}{p^\alpha}\frac{1+c_1\,p+...+c_m\,p^m}{1+d_1\,p+...+d_n\,p^n}\right)}$$

On alors trois cas :

- Cas où $\alpha = 0$:

- Cas où $\alpha = 1$:

- Cas où $\alpha \geq 2$:

4 Erreur d'accélération

Ici l'entrée $e(t)$ est une accélération d'amplitude b. Sa fonction de transfert est $E(p) = \frac{b}{p^3}$.
On reprend la même forme de la fonction de transfert en boucle ouverte définie précédemment.
On peut alors calculer ε_a (erreur en accélération) :

On alors trois cas :

- Cas où $\alpha \leq 1$:

- Cas où $\alpha = 2$:

- Cas où $\alpha \geq 3$:

5 Récapitulatif

Entrée $E(p)$	Classe 0	Classe 1	Classe 2	Classe 3
Échelon : $E(p) = \frac{E_0}{p}$	$\frac{E_0}{1+K}$	0	0	0
Rampe : $E(p) = \frac{a}{p^2}$	∞	$\frac{a}{K}$	0	0
Accélération : $E(p) = \frac{b}{p^3}$	∞	∞	$\frac{b}{K}$	0

TABLE 1 – Quantification de l'erreur en boucle fermée en fonction de l'entrée et de la classe de la FTBO d'un système.

Propriété 1 : *Quantification de la précision en boucle fermée*

- La **précision en boucle fermée** d'un système vis-à-vis d'une entrée dépend donc de la **classe** et du **gain** de la FTBO.
- Pour **améliorer la précision**, il faut donc **augmenter la classe**, c'est-à-dire le nombre d'**intégrations** dans la FTBO, ou augmenter le **gain** de la FTBO.
- Avec au moins **1 intégration** en boucle ouverte on annule l'**erreur statique**.
- Avec au moins **2 intégrations** en boucle ouverte on annule l'**erreur de trainage**.
- On verra plus tard qu'**augmenter la classe ou le gain** de la FTBO peut rendre le système **instable**.

6 Application aux systèmes du premier et du deuxième ordre

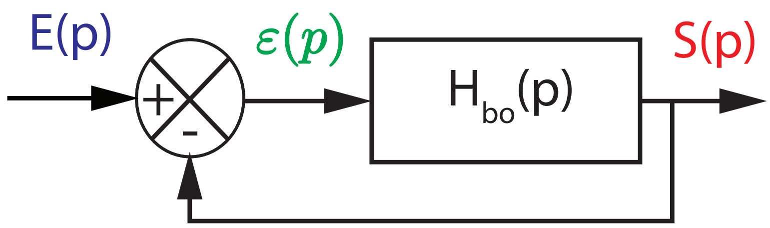
Considérons un système avec un retour unitaire dont la $FTBO(p)$ est du premier ou du deuxième ordre :

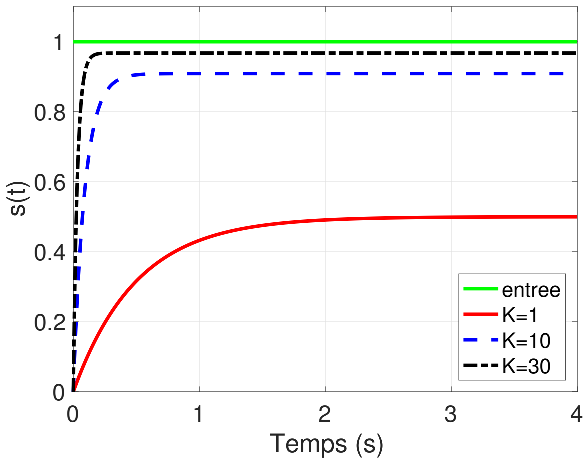
$$\begin{cases} H_{BO1}(p) = \frac{K}{1+\tau\, p}. \\ H_{BO2}(p) = \frac{K}{1+\frac{2\xi}{\omega_0}\cdot p+\frac{p^2}{\omega_0^2}}. \end{cases}$$

Propriété 2 : *Précision d'un premier ordre et du second ordre*

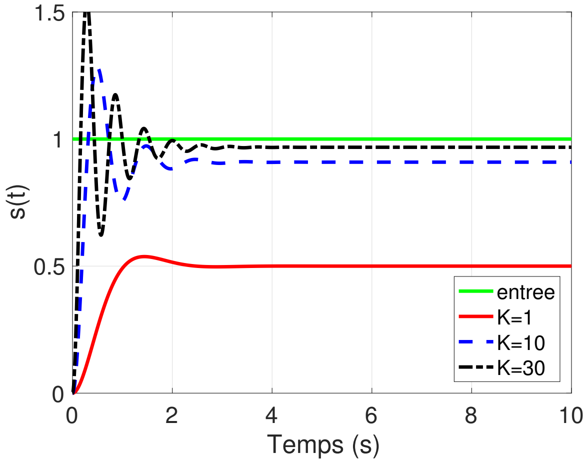
La FTBO pour les systèmes des premier et deuxième ordre est de classe 0. On en déduit que :

- l'erreur indicielle vaut $\frac{E_0}{1+K}$;
- l'erreur de trainage vaut ∞.
- ici l'ordre de la fonction de transfert n'a pas d'influence sur la précision.

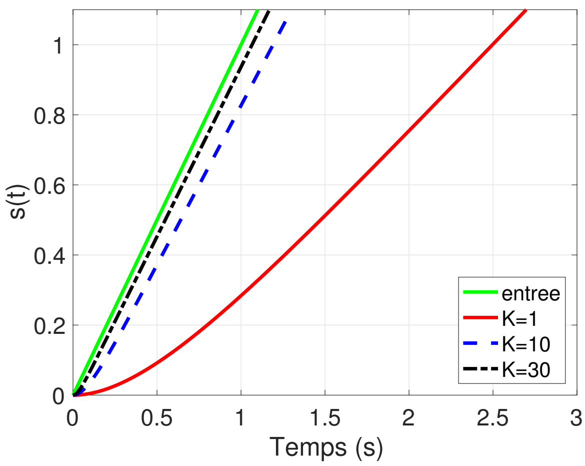




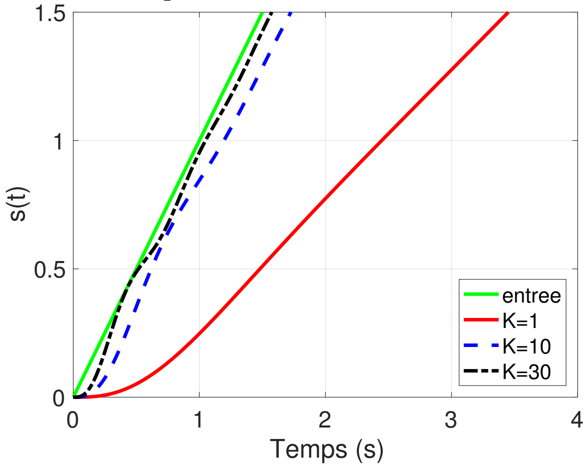
Réponse indicielle 1$^{\text{er}}$ ordre



Réponse indicielle 2$^{\text{ème}}$ ordre



Réponse à une rampe 1$^{\text{er}}$ ordre



Réponse à une rampe 2$^{\text{ème}}$ ordre

7 Cas d'une perturbation

On considère désormais un système avec une consigne (entrée maitrisée) $E(p)$, une entrée non-maitrisée due à une perturbation ($P(p)$) et une réponse ou sortie ($S(p)$) (figure 1). On cherche à quantifier la précision du système en fonction de l'état de la perturbation $P(p)$.

Par le théorème de superposition (car système linéaire), on peut donner une relation entre $S(p)$, $E(p)$ et $P(p)$ en introduisant les deux fonctions de transfert $H_E(p)$ et $H_P(p)$:

$$S(p) = H_E(p) \cdot E(p) + H_P(p) \cdot P(p).$$

- **Calcul de $H_E(p)$et $H_P(p)$:**
  - Pour calculer $H_P(p)$, on prend $E(p) = 0$:
  - Pour calculer $H_E(p)$, on prend $P(p) = 0$:
- **Calculons** $\varepsilon(p) = E(p) - G(p)\, S(p)$

- On note alors

$$\varepsilon(p) = \varepsilon_E(p) - \varepsilon_P(p).$$

Avec $\varepsilon_E(p)$ l'écart du à l'entrée et $\varepsilon_P(p)$ l'écart du à la perturbation.
  - Avec $\varepsilon_E(p) =$
  - Avec $\varepsilon_P(p) =$

- On pose également :
  - $$H_1(p) = \frac{K_1\, N_1(p)}{p^{\alpha_1}\, D_1(p)};$$
  - $$G(p)\, H_2(p) = \frac{K_2\, N_2(p)}{p^{\alpha_2}\, D_2(p)};$$
  - avec $N_1(0) = D_1(0) = N_2(0) = D_2(0) = 1$ car les fonctions de transfert $H_1(p)$ et $G(p)\, H_2(p)$ sont exprimées sous formes canoniques.

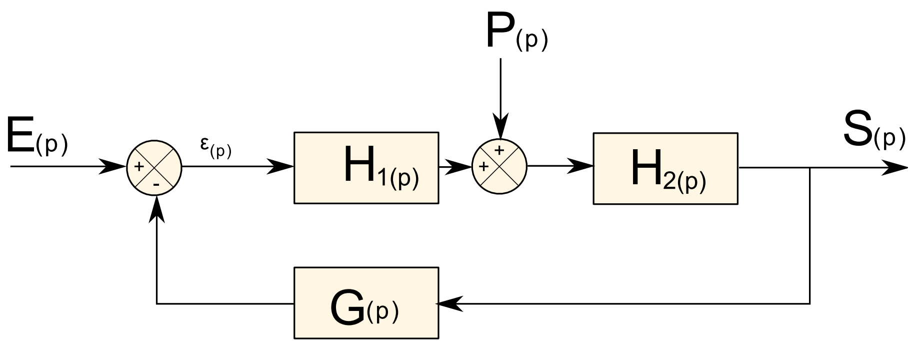


FIGURE 1 – Schéma bloc avec perturbation

a) Perturbation de type indicielle

On calcule $\lim\limits_{t\to\infty} \varepsilon_P(t) = \lim\limits_{p\to 0} p\, \varepsilon_P(p)$ avec $P(p) = \frac{P_0}{p}$.

b) Perturbation de type rampe

On calcule $\lim\limits_{t\to\infty} \varepsilon_P(t) = \lim\limits_{p\to 0} p\, \varepsilon_P(p)$ avec $P(p) = \frac{P_0}{p^2}$.

c) Récapitulatif

Le tableau ci-dessous donne l'écart en perturbation en fonction des valeurs de α_1 et α_2 suivant le type de perturbation.

Perturbation $P(p)$	$\alpha_1 = 0$		$\alpha_1 = 1$	$\alpha_1 \geq 2$
	$\alpha_2 = 0$	$\alpha_2 \geq 1$	$\alpha_2 \in [0; +\infty]$	
Échelon : $P(p) = \frac{P_0}{p}$	$\frac{P_0\, K_2}{1+K_1\, K_2}$	$\frac{P_0}{K_1}$	0	
	$\alpha_2 \in [0; +\infty]$			
Rampe : $P(p) = \frac{P_0}{p^2}$	$+\infty$		$\frac{P_0}{K_1}$	0

TABLE 2 – Précision ε_P en boucle fermée vis-à-vis du type de perturbation

Conclusion : *Précision en fonction de la perturbation*

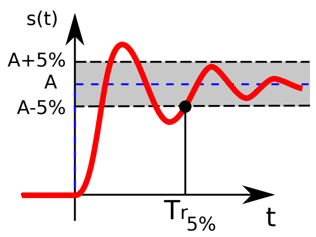
- En réponse à une **perturbation de type échelon**, un système comportant **au moins une intégration en amont du point d'entrée de la perturbation** présentera **une erreur nulle**.
- En réponse à une **perturbation de type rampe**, un système comportant **au moins deux intégrations en amont du point d'entrée de la perturbation** présentera **une erreur nulle**.
- Ainsi pour rendre un système **plus précis**, on cherchera à **augmenter le gain statique** de la fonction de transfert en boucle ouverte et d'en **augmenter le nombre d'intégrateurs purs**.

II. Rapidité des SLCI

1 Définition

Définition 2 : *Rapidité des SLCI*

- On peut définir la **rapidité** d'un système comme la durée qu'il faut pour un système à se stabiliser lorsqu'il est soumis à une variation brusque de la grandeur d'entrée (échelon par exemple).
- On peut la définir à partir du temps de réponse à $n\%$ (généralement 5%).
- Cela nécessite que le système soit **stable.**



2 Influence de l'ordre

a) Système du premier ordre

Propriété 3 : ***Rapidité des systèmes du premier ordre***

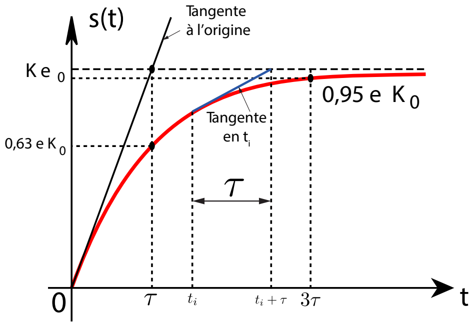
Pour un système du **premier ordre** de fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{K}{1+\tau \cdot p}$$

soumis à un échelon le temps de réponse à 5% ($t_{r5\%}$) est donné par :

$$\boxed{t_{r5\%} = 3 \cdot \tau} \quad (5)$$

Plus la constante de temps est petite plus le système est rapide.



b) Système du deuxième ordre

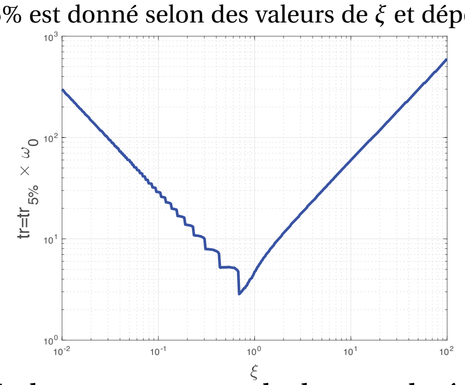
Propriété 4 : ***Rapidité des systèmes du deuxième ordre***

Pour un système du **deuxième ordre** de fonction de transfert
$H(p) = \frac{K}{1+\frac{2\xi}{\omega_0}p+\frac{p^2}{\omega_0^2}}$
soumis à un échelon, le temps de réponse à 5% est donné selon des valeurs de ξ et dépend de ω_0.

On peut retenir :

- $\xi = 0,7$ (Optimum de rapidité) : $t_{r5\%} = \frac{3}{\omega_0}$;
- $\xi = 1$ (Optimum de rapidité) : $t_{r5\%} = \frac{5}{\omega_0}$

Pour le reste, on peut utiliser l'abaque ci-contre.

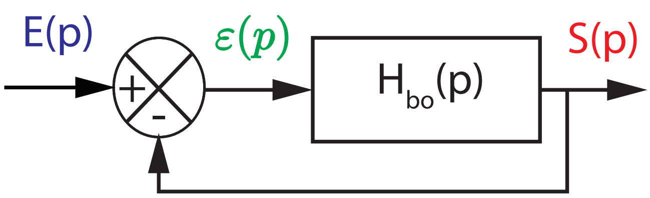


Pour un même coefficient d'amortissement ξ, plus ω_0 augmente et plus le temps de réponse à 5% **diminue et donc le système sera plus rapide.**

3 Influence du bouclage

Si considère un système en boucle ouverte que l'on souhaite boucler (on prendra ici un retour unitaire).

$$\boxed{H_{BF} = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{H_{BO}(p)}{1+H_{BO}(p)}} \quad (6)$$



a) Système du premier ordre

Propriété 5 : *Système bouclé du 1er ordre*

Dans le cas d'une FTBO du 1er ordre :

$$H_{BO}(p) = \frac{K}{1+\tau \cdot p}$$

On peut alors calculer $H_{BF}(p) = \frac{K_{BF}}{1+\tau_{BF} \cdot p}$:

- K_{BF} :

- τ_{BF} :

Ainsi le bouclage ayant une FTBO du 1er ordre permet :

- de conserver une fonction de transfert du 1er ordre ;
- de diminuer la valeur de la constante de temps.

b) Système du deuxième ordre

Propriété 6 : *Système bouclé du 2ème ordre*

Dans le cas d'une FTBO du 2ème ordre :

$$H_{BO}(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

On peut alors calculer $H_{BF}(p) = \frac{K_{BF}}{1+\frac{2\xi_{BF}}{\omega_{0BF}} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_{0BF}{}^2}}$:

- K_{BF} :

- ω_{0BF} :

- ξ_{BF} :

Ainsi le bouclage ayant une FTBO du 2ème ordre permet :

- de conserver une fonction de transfert du 2ème ordre ;
- de diminuer la valeur du coefficient d'amortissement ξ_{BF} lorsque l'on augmente le gain K de la FTBO. Par conséquent si ξ_{BF} diminue et :
  - si ξ_{BF} reste supérieur à $0,7$, le système sera plus rapide,
  - si ξ_{BF} reste inférieur à $0,7$, le système sera plus lent.

4 Influence de la bande passante

Définition 3 : *Bande passante de la FTBF*

- La bande passante à $-n \cdot dB$ correspond à la bande de pulsation où le gain est supérieur au gain asymptotique des basses fréquences moins n décibels.
- Pour un 1er ordre la bande passante à $-3dB$ correspond à la puslation de cassure $\frac{1}{\tau}$.
- On peut montrer que plus la bande passante de la FTBF du système est importante plus le système sera rapide.