

Devoir à la maison n° 1

À rendre le 12 septembre

Dans tout le problème, (\mathcal{C}) désigne la courbe d'équation $y = \ln x$ représentant la fonction logarithme népérien dans le plan rapporté à un repère orthonormal d'origine O et d'unité graphique 4 cm.

Dans ce problème, on s'autorisera à utiliser librement le résultat suivant :

Soit g une fonction continue sur un segment $[a, b] \subset \mathbb{R}$. S'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in [a, b], |g(t)| \leq k$, alors $\left| \int_a^b g(t) dt \right| \leq k(b - a)$.

On traitera ce problème sans utiliser la calculatrice. Seul l'usage de **Python** sera autorisé, et uniquement aux questions **4)c)** et **10)f)**. On pourra toutefois utiliser sans justification l'encadrement suivant :

$$0,69 < \ln(2) < 0,7.$$

Question préliminaire : Tracer avec soin mais sans étude de la fonction, la courbe (\mathcal{C}) et la droite (\mathcal{D}) d'équation $y = x$.

Partie A

- 1) a) Déterminer une équation de la tangente (Δ) à (\mathcal{C}) au point I , point de l'axe (Ox) d'abscisse 1.
- b) Étudier les variations de la fonction f définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = x - 1 - \ln x.$$

- c) En déduire la position de (\mathcal{C}) par rapport à Δ .
- 2) a) Déduire de la question précédente la valeur minimale prise par $x - \ln x$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
- b) Soit $x \in]0, +\infty[$ et M et N les points de même abscisse x des courbes (\mathcal{C}) et (\mathcal{D}) respectivement.
Déterminer la plus petite valeur (exprimée en cm) prise par la distance MN lorsque x décrit l'intervalle $]0, +\infty[$.

Partie B

- 3) Soit $x \in]0, +\infty[$ et M le point d'abscisse x de la courbe (\mathcal{C}) . Exprimer la distance OM de l'origine à M en fonction de x .
- 4) Étude de la fonction auxiliaire u définie sur $]0, +\infty[$ par $u(x) = x^2 + \ln x$:
- a) Justifier les limites de u en 0 et en $+\infty$ ainsi que le sens de variations de u .
 - b) Montrer qu'il existe un réel α et un seul tel que $u(\alpha) = 0$.
Montrer que α est compris entre 0,5 et 1.
 - c) En utilisant le logiciel **Python** et en explicitant la démarche utilisée, donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .
 - d) Déterminer le signe de $u(x)$ lorsque x parcourt $]0, +\infty[$.
- 5) Étude de la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = x^2 + (\ln x)^2$:
Calculer g' et vérifier que $g'(x) = \frac{2}{x}u(x)$.
En déduire le tableau de variations de g .
- 6) Dédire des questions précédentes la valeur exacte de la plus courte distance de l'origine aux points de la courbe (\mathcal{C}) .
- 7) A étant le point d'abscisse α de (\mathcal{C}) , démontrer que la tangente à (\mathcal{C}) en A est perpendiculaire à la droite (OA) .

Partie C - Étude d'une suite

- 8) Montrer que le réel α défini dans la partie **B** est solution de l'équation $h(x) = x$, où h est la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par

$$h(x) = x - \frac{1}{4}(x^2 + \ln x).$$

- 9) a) Calculer h' et étudier son signe sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.
b) Prouver que $h\left(\left[\frac{1}{2}, 1\right]\right) \subset \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.
c) Calculer h'' et étudier son signe sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.
d) En déduire que, pour tout x appartenant à l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, on a

$$0 \leq h'(x) \leq \frac{3}{10}.$$

- 10) On définit la suite (u_n) par : $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = h(u_n).$$

- a) Montrer que, pour tout entier naturel n , $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$, et que la suite (u_n) est décroissante.
- b) Soit $a, b \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ tels que $a < b$. Grâce à une intégration, montrer que

$$h(b) - h(a) \leq \frac{3}{10}(b - a)$$

- c) Soit $a, b \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Montrer que

$$|h(b) - h(a)| \leq \frac{3}{10}|b - a|$$

- d) Montrer que l'on a pour tout entier naturel n ,

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{3}{10}|u_n - \alpha|.$$

- e) En déduire une majoration de $|u_n - \alpha|$ ne dépendant que de n et montrer que la suite (u_n) converge vers α .
- f) Déterminer un entier n_0 tel que u_{n_0} soit une valeur approchée de α à 10^{-5} près. On pourra ensuite utiliser **Python** pour donner une valeur explicite de cet entier ainsi qu'une valeur de u_{n_0} .

— **FIN** —