

LYCÉE LA MARTINIÈRE MONPLAISIR LYON

SCIENCES INDUSTRIELLES POUR L'INGÉNIEUR

CLASSE PRÉPARATOIRE M.P.S.I. ET M.P.I.I.



ANNÉE 2023 - 2024

## C9 : MODÉLISATION DES PERFORMANCES STATIQUES DES SYSTÈMES

### C9-1 - Modélisation des actions mécaniques

21 Mai 2024



Vidéo 1



Vidéo 2

## Table des matières

<b>I Introduction</b>	<b>2</b>
1 Définition . . . . .	2
2 Classification . . . . .	2
<b>II Modélisation locale et globale d'une action mécanique due à une force</b>	<b>3</b>
1 Modélisation locale d'une action mécanique due à une force . . . . .	3
2 Modélisation globale d'une action mécanique due à une force . . . . .	4
a) Résultante des actions mécaniques . . .	4
b) Moment des actions mécaniques . . . .	5
<b>III Torseurs des actions mécaniques extérieures</b>	<b>6</b>
1 Définition du torseur . . . . .	6
2 Propriétés . . . . .	6
a) Formule de changement de point . . . .	6
b) Comoment de torseurs . . . . .	7
c) Torseur couple . . . . .	7
d) Torseur à résultante ou glisseur . . . . .	8
e) Equiprojectivité . . . . .	8
f) Axe central . . . . .	8
<b>IV Actions mécaniques de contact</b>	<b>9</b>
1 Actions réparties . . . . .	9
2 Frottements et lois de Coulomb . . . . .	12
a) Présentation du problème . . . . .	13
b) Modélisation . . . . .	13
c) Cône de frottement et adhérence . . . .	14
<b>V Actions mécaniques de distance</b>	<b>14</b>
1 Modélisation de l'action mécanique de pesanteur . . . . .	14
2 Méthodologie pour déterminer le centre de masse . . . . .	15
<b>VII Cas des liaisons sans frottement</b>	<b>15</b>
1 Cas des liaisons usuelles en 3D . . . . .	15
2 Cas particulier du 2D . . . . .	17

## Compétences

- **Modéliser**
  - Compléter un modèle multiphysique.
  - Modéliser une action mécanique.
  - Vérifier la cohérence du modèle choisi en confrontant les résultats analytiques et/ou numériques aux résultats expérimentaux.
- **Résoudre**
  - Proposer une démarche permettant la détermination d'une action mécanique inconnue ou d'une loi de mouvement.
  - Déterminer les actions mécaniques en statique.
- **Communiquer**
  - Lire et décoder un document technique : Schéma Cinématique
  - Utiliser un vocabulaire technique, des symboles et des unités adéquats.

# I. Introduction

## 1 Définition



### Définition 1 : Action mécanique

On appelle **action mécanique** toute cause *susceptible* de mettre en mouvement, de maintenir en équilibre ou de déformer un corps. (Le mot *susceptible* n'est pas choisi au hasard car une action mécanique ne créera pas nécessairement de mouvement.)



## 2 Classification

On distingue :

- Les actions mécaniques **de contact**. Le modèle associé dépendra de la nature du contact (ponctuel, linéique ou surfacique).
- Les actions mécaniques exercées **à distance** (pesanteur, champ magnétique, champ électrique, etc.).

On distinguera également :

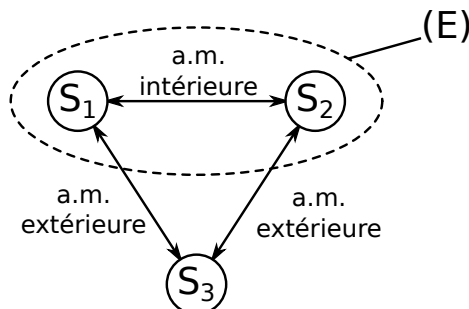
- les actions mécaniques **intérieures** à un ensemble de solides.
- les actions mécaniques **extérieures** à un ensemble de solides.



### Exemple 1 :

Soit l'ensemble de trois solides :  $S_1$ ,  $S_2$  et  $S_3$  exerçant des efforts les uns sur les autres. Soit (E) le sous-ensemble composé de  $S_1 \cup S_2$ .

- L'action mécanique de  $S_3$  sur  $S_2$  est extérieure à (E).
- L'action mécanique de  $S_1$  sur  $S_2$  est intérieure à (E).



## II. Modélisation locale et globale d'une action mécanique due à une force

### 1 Modélisation locale d'une action mécanique due à une force

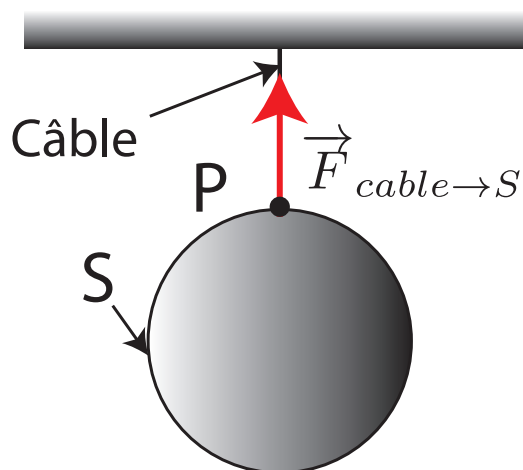


#### Définition 2 : Force et vecteur

- Une force est une action mécanique représentée par un vecteur.
- La notion de vecteur est insuffisante à elle seule pour représenter complètement d'autres actions mécaniques.



#### Exemple 2 : Une masse suspendu à un câble.



L'action du câble sur  $S$  est caractérisé par le vecteur  $\vec{F}$  passant par le point  $P$ .



#### Propriété 1 : Représentation d'une action mécanique

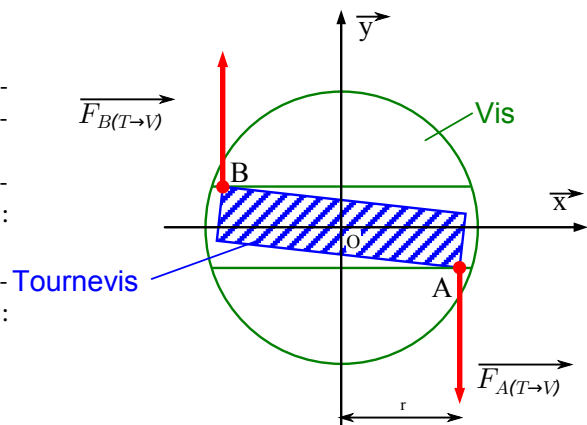
- D'un point de vue local (en un certain point de l'ensemble étudié), nous admettrons qu'une action mécanique est entièrement définie par les 4 caractéristiques suivantes :
  - sa direction,
  - son sens,
  - son intensité.
  - son point d'application
- On admet ainsi que l'on peut toujours modéliser localement une action mécanique par un **vecteur lié** (vecteur + point).
- On parle alors d'une force et de son point d'application :  $(\vec{F}, P)$ .
- La norme d'une force s'exprime en Newton (N).
- Pour une force  $\vec{F}$  de point d'application  $P$ , la droite passant par  $P$  et dirigée par  $\vec{F}$  est appelée la **droite d'action** de la force  $\vec{F}$ .



### Exemple 3 : Tournevis plat

Soit un tournevis plat ( $T$ ), exerçant une action mécanique sur la tête d'une vis ( $V$ ) (modélisation simplifiée).

- Au point  $A$ , l'action exercée par le tournevis sur la vis peut se modéliser par la force :  
 $\vec{F}_{A(T \rightarrow V)} = F_A \vec{y}$  (avec  $F_A < 0$ )
- Au point  $B$ , l'action exercée par le tournevis sur la vis peut se modéliser par la force :  
 $\vec{F}_{B(T \rightarrow V)} = F_B \vec{y}$  (avec  $F_B > 0$ )



## 2 Modélisation globale d'une action mécanique due à une force

### a) Résultante des actions mécaniques



#### Définition 3 : Résultante des actions mécaniques

Soit un corps  $S$  subissant de la part d'un ensemble ( $E$ ) une action mécanique modélisée localement par " $n$ " forces  $\vec{F}_{i(E \rightarrow S)}$  de points d'application  $P_i$  (fig. 1). On définit alors le vecteur suivant :

$$\vec{R}_{(E \rightarrow S)} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{i(E \rightarrow S)}, \quad (1)$$

appelé **résultante des actions mécaniques exercées par ( $E$ ) sur ( $S$ )**.

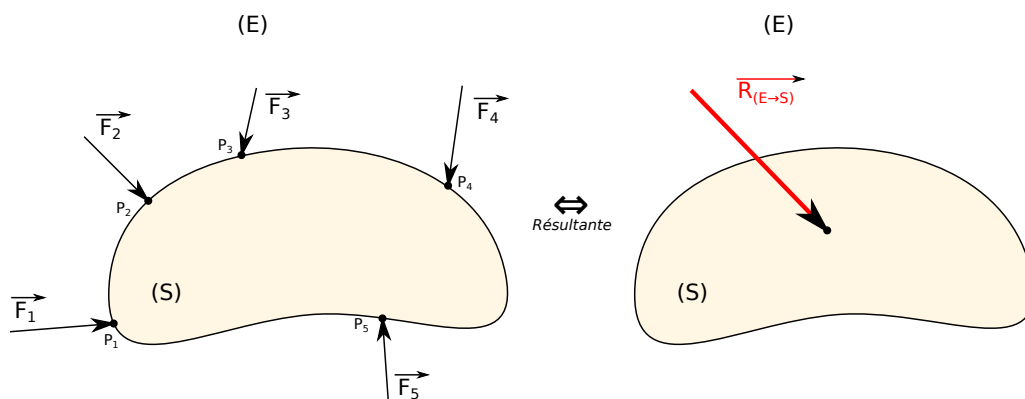


FIGURE 1 – Résultante des actions mécaniques.



### Exemple 4 : Tournevis

En reprenant l'exemple 3, la résultante de l'action du tournevis sur la vis est :

$$\overrightarrow{R_{(T \rightarrow V)}} =$$



### Remarque 1 :

- Le problème précédent étant symétrique, on peut écrire  $\overrightarrow{F_{A(T \rightarrow V)}} = -\overrightarrow{F_{B(T \rightarrow V)}}$ .
- Ce qui donne :  $\overrightarrow{R_{(T \rightarrow V)}} = \vec{0}$ .
- Or la vis subit pourtant bien une action mécanique **globale** de la part du tournevis ! (Le tournevis la fait tourner.)
- La seule donnée de la résultante des actions mécaniques n'est donc **pas suffisante** pour modéliser cette action.

### b) Moment des actions mécaniques



### Définition 4 : Moment d'une force (seule)

On appelle **moment en A de la force  $\vec{F}_i$  de point d'application  $P_i$** , le vecteur

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_A(P_i, \vec{F}_i)} = \overrightarrow{AP_i} \wedge \vec{F}_i \quad (2)$$

(A est un point quelconque de l'espace).



### Astuce 1 :

Le moment d'une force  $\vec{F}$ , exprimé au point A correspond à une “force de rotation” créé par  $\vec{F}$  autour du point A. La direction de ce vecteur correspond à l'axe autour duquel cette “force de rotation” s'applique. Le sens de ce vecteur est tel que cette “force de rotation” tourne dans le sens direct quand le vecteur pointe vers nous.



### Propriété 2 :

Soit  $(\Delta_i)$  la droite d'action de la force  $\vec{F}_i$  appliquée au point  $P_i$  (fig.??).

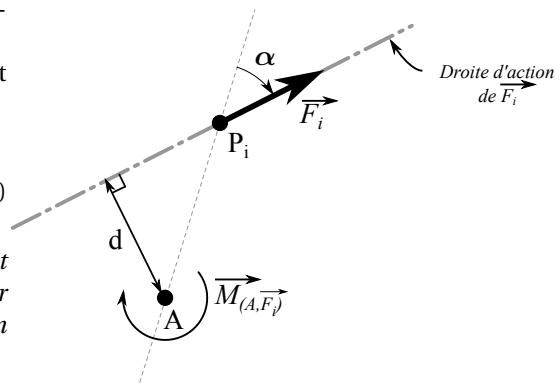
On note  $d$  la distance (orthogonale) entre A et  $\alpha = \angle \overrightarrow{AP_i}, \vec{F}_i$ .

Alors :

$$\|\overrightarrow{\mathcal{M}_A(P_i, \vec{F}_i)}\| = d \|\vec{F}_i\|. \quad (3)$$

“La norme du moment en un point d'une force est donc égale au produit de la norme de la force par la distance qui sépare le point de la droite d'action de la force”.

Cette distance  $d$  est appelée **bras de levier**.




**Définition 5 : Moment résultant des actions mécaniques**

Soit un corps  $S$  subissant de la part d'un ensemble  $(E)$  une action mécanique modélisée localement par " $n$ " forces  $\vec{F}_i$ , de points d'application  $P_i$  (fig. 1). On appelle **moment résultant en  $A$  de la résultante  $\vec{F}_i$** , le vecteur

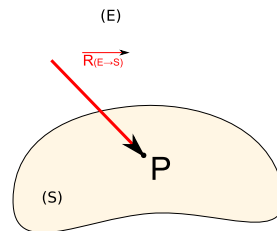
$$\vec{\mathcal{M}}_{A(E \rightarrow S)} = \sum_{i=1}^n \vec{\mathcal{M}}_{A(P_i, \vec{F}_i)} = \sum_{i=1}^n \vec{AP}_i \wedge \vec{F}_i, \quad (4)$$

( $A$  est un point quelconque de l'espace).


**Remarque 2 :**

Pour trouver le point d'application de l'effort résultant, il suffit de trouver le point  $P$  pour lequel  $\vec{\mathcal{M}}_{P(E \rightarrow S)} = \vec{0}$ . Ainsi  $P$  vérifie :

$$\vec{\mathcal{M}}_{P(E \rightarrow S)} = \sum_{i=1}^n \vec{PP}_i \wedge \vec{F}_i = \vec{0}. \quad (5)$$



### III. Torseurs des actions mécaniques extérieures

#### 1 Définition du torseur


**Définition 6 : Torseur des actions mécaniques extérieures**

Toute action mécanique peut être modélisée globalement par un torseur :

$$\{\mathcal{T}_{(E \rightarrow S)}\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{(E \rightarrow S)} \\ \vec{\mathcal{M}}_{A(E \rightarrow S)} \end{array} \right\} \quad (6)$$

C'est le torseur, réduit en  $A$ , des actions mécaniques exercées par  $(E)$  sur  $(S)$ .

#### 2 Propriétés

##### a) Formule de changement de point


**Propriété 3 : Formule de changement de point**

Les propriétés des torseurs donnent la formule de changement de point suivante :

$$\{\mathcal{T}_{(E \rightarrow S)}\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{(E \rightarrow S)} \\ \vec{\mathcal{M}}_{A(E \rightarrow S)} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{(E \rightarrow S)} \\ \vec{\mathcal{M}}_{B(E \rightarrow S)} = \vec{\mathcal{M}}_{A(E \rightarrow S)} + \vec{BA} \wedge \vec{R}_{(E \rightarrow S)} \end{array} \right\}. \quad (7)$$

## b) Comoment de torseurs

**Définition 7 : Comoment de torseurs**

Soit deux torseurs  $\mathcal{T}^1(E \rightarrow S)$  et  $\mathcal{T}^2(E \rightarrow S)$ , tels que :

$$\mathcal{T}^1(E \rightarrow S) = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}^1(E \rightarrow S) \\ \vec{M}_A^1(E \rightarrow S) \end{array} \right\}$$

et

$$\mathcal{T}^2(E \rightarrow S) = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}^2(E \rightarrow S) \\ \vec{M}_A^2(E \rightarrow S) \end{array} \right\}$$

Alors le comoment  $\mathcal{T}^1(E \rightarrow S) \otimes \mathcal{T}^2(E \rightarrow S)$  s'obtient par :

$$\mathcal{T}^1(E \rightarrow S) \otimes \mathcal{T}^2(E \rightarrow S) = \vec{R}^1(E \rightarrow S) \cdot \vec{M}_A^2(E \rightarrow S) + \vec{R}^2(E \rightarrow S) \cdot \vec{M}_A^1(E \rightarrow S). \quad (8)$$

**Propriété 4 : Automoment**

L'**automoment** est le comoment d'un torseur par lui même et est donc le produit scalaire de sa résultante par son moment. Il est **constant**. On l'appelle "**invariant scalaire du torseur**".

$$\vec{R}(E \rightarrow S) \cdot \vec{M}_A(E \rightarrow S) = \vec{R}(E \rightarrow S) \cdot \vec{M}_B(E \rightarrow S) \quad (9)$$

Quelque soit A et B.

## c) Torseur couple

**Définition 8 : Torseur couple**

Le torseur d'action mécanique d'un ensemble matériel (E) sur un corps (S) est un couple s'il est de la forme :

$$\{\mathcal{T}_{(E \rightarrow S)}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \vec{\mathcal{M}}_{A(E \rightarrow S)} \end{array} \right\} \quad (10)$$

avec,

$$\vec{\mathcal{M}}_{A(E \rightarrow S)} \neq \vec{0}.$$

**Remarque 3 :**

I Ce torseur est invariant.

## d) Torseur à résultante ou glisseur

**Définition 9 : Torseur à résultante ou glisseur**

Le torseur d'action mécanique d'un ensemble matériel (E) sur un corps (S) est un torseur à résultante **s'il existe au moins un point A** pour lequel il est de la forme :

$$\{\mathcal{T}_{(E \rightarrow S)}\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_{(E \rightarrow S)}} \\ \vec{0} \end{array} \right\} \quad (11)$$

avec,

$$\overrightarrow{R_{(E \rightarrow S)}} \neq \vec{0}.$$

et A un point de l'axe central du torseur. On appelle également ce torseur un **glisseur**.

**Remarque 4 :**

Si la **résultante** et le **moment** sont **orthogonaux** le torseur est un **glisseur**.

Si l'**automoment** d'un torseur est **nul** alors c'est un **glisseur**.

## e) Equiprojectivité

**Définition 10 : Equiprojectivité**

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_{A(E \rightarrow S)}} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\mathcal{M}_{B(E \rightarrow S)}} \cdot \overrightarrow{AB}. \quad (12)$$

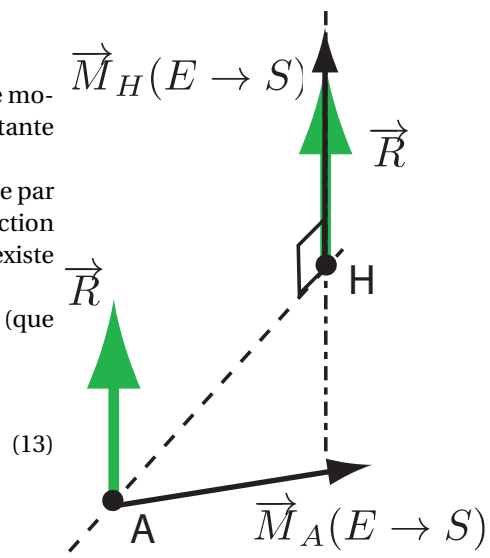
## f) Axe central

**Définition 11 : Axe central**

- Un **point central** d'un torseur est un point où le moment résultant a même direction que la résultante générale.
- L'**axe central** d'un torseur est la droite constituée par l'ensemble des points centraux. Il a même direction que la résultante du torseur. L'axe central n'existe que si la résultante du torseur n'est pas nulle.

La position de la projection du point A sur l'axe central (que l'on notera H) est obtenu par la relation suivante :

$$\overrightarrow{AH} = \frac{\overrightarrow{R} \wedge \overrightarrow{\mathcal{M}_{A(E \rightarrow S)}}}{\overrightarrow{R}^2} \quad (13)$$

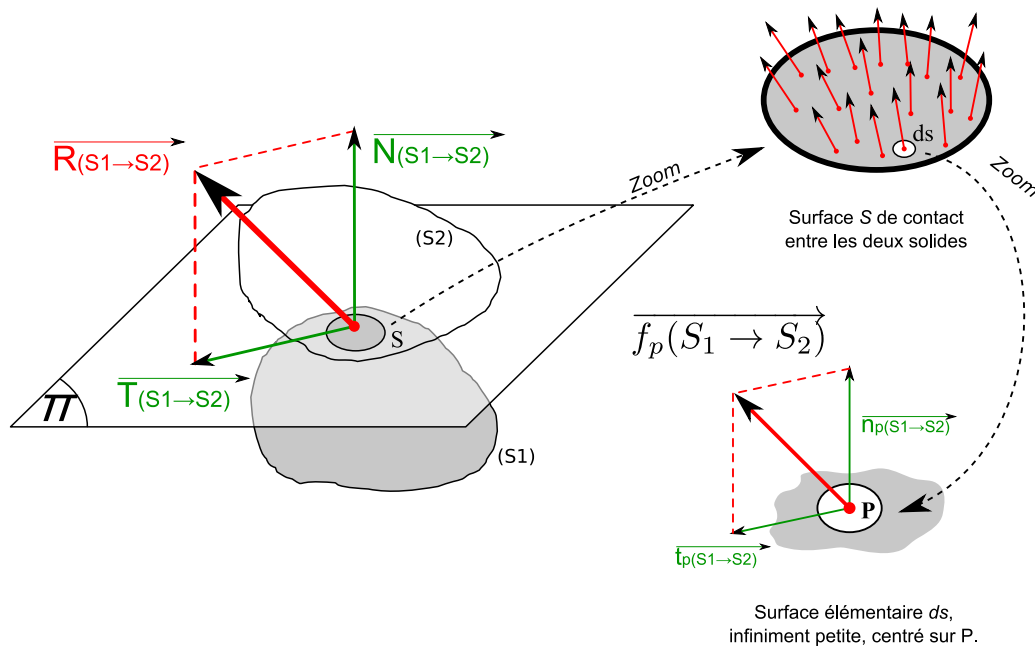




## IV. Actions mécaniques de contact

### 1 Actions réparties

La notion “d’action mécanique ponctuelle” n’existe pas dans le réel. Elles sont en réalité réparties sur une surface, ou sur un volume. Les contacts entre solides sont en réalité surfaciques ou linéiques. Mais on peut représenter localement en chaque point de la surface une action mécanique locale appliquée à un élément de surface infiniment petit.



#### **Définition 12 : Densité surfacique d'effort et torseur d'action mécanique répartie**

- L'action mécanique élémentaire de  $S_1$  sur  $S_2$  se caractérise en chaque point  $P$  de la surface de contact  $S$  par un vecteur :

$$\boxed{\vec{f}_p(S_1 \rightarrow S_2)} \quad (14)$$

appelé “densité surfacique d'effort” au point  $P$  de  $S_1$  sur  $S_2$ .

- $\vec{f}_p(S_1 \rightarrow S_2)$  est homogène à une force par unité de surface (homogène à une pression).
- Pour rappel :
  - une pression s'exprime en Pa ( $= \text{N} \cdot \text{m}^{-2}$ ).
  - On utilisera aussi le MPa ( $= \text{N} \cdot \text{mm}^{-2}$ ).
  - On rappelle aussi que  $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$ .
- On définit alors complètement l'action mécanique de contact de  $S_1$  sur  $S_2$  par le torseur suivant :

$$\boxed{\{\mathcal{T}_{(S_1 \rightarrow S_2)}\} = \left\{ \begin{array}{l} \int_{P \in S} \vec{f}_p(S_1 \rightarrow S_2) ds \\ \int_{P \in S} \vec{AP} \wedge \vec{f}_p(S_1 \rightarrow S_2) ds \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{(S_1 \rightarrow S_2)} \\ \vec{\mathcal{M}}_{A(S_1 \rightarrow S_2)} \end{array} \right\}} \quad (15)$$

appelé torseur d'action mécanique de contact de  $S_1$  sur  $S_2$ .


**Définition 13 : Décomposition de la densité surfaciques d'efforts**

Soit  $(\pi)$  le plan tangent commun à  $S_1$  et à  $S_2$  en  $P$ , de normal  $\vec{n}$ . On décompose alors :

$$\overrightarrow{f_{p(S_1 \rightarrow S_2)}} = \underbrace{\overrightarrow{n_{p(S_1 \rightarrow S_2)}}}_{\perp \pi} + \underbrace{\overrightarrow{t_{p(S_1 \rightarrow S_2)}}}_{// \pi}. \quad (16)$$

$\overrightarrow{n_{p(S_1 \rightarrow S_2)}}$  est appelé **densité surfacique normale** ou **pression** au point  $P$ , des forces de contact de  $S_1$  sur  $S_2$ .

$$\overrightarrow{n_{p(S_1 \rightarrow S_2)}} = \left( \overrightarrow{f_{p(S_1 \rightarrow S_2)}} \cdot \vec{n} \right) \cdot \vec{n}. \quad (17)$$

$\overrightarrow{t_{p(S_1 \rightarrow S_2)}}$  est appelé **est appelé densité surfacique tangentielle** au point  $P$ , des forces de contact de  $S_1$  sur  $S_2$ .

$$\overrightarrow{t_{p(S_1 \rightarrow S_2)}} = \overrightarrow{f_{p(S_1 \rightarrow S_2)}} - \overrightarrow{n_{p(S_1 \rightarrow S_2)}}. \quad (18)$$

Lorsque ce sera possible (i.e. toute la surface  $(S)$  de contact est un plan  $\pi$ ), on pourra aussi décomposer la résultante du torseur d'action mécanique de contact comme suit :

$$\overrightarrow{R_{(S_1 \rightarrow S_2)}} = \underbrace{\overrightarrow{N_{S_1 \rightarrow S_2}}}_{\perp \pi} + \underbrace{\overrightarrow{T_{S_1 \rightarrow S_2}}}_{// \pi}. \quad (19)$$

- $\overrightarrow{N_{S_1 \rightarrow S_2}}$  est l'effort résultant normal,
- $\overrightarrow{T_{S_1 \rightarrow S_2}}$  est l'effort résultant tangential.

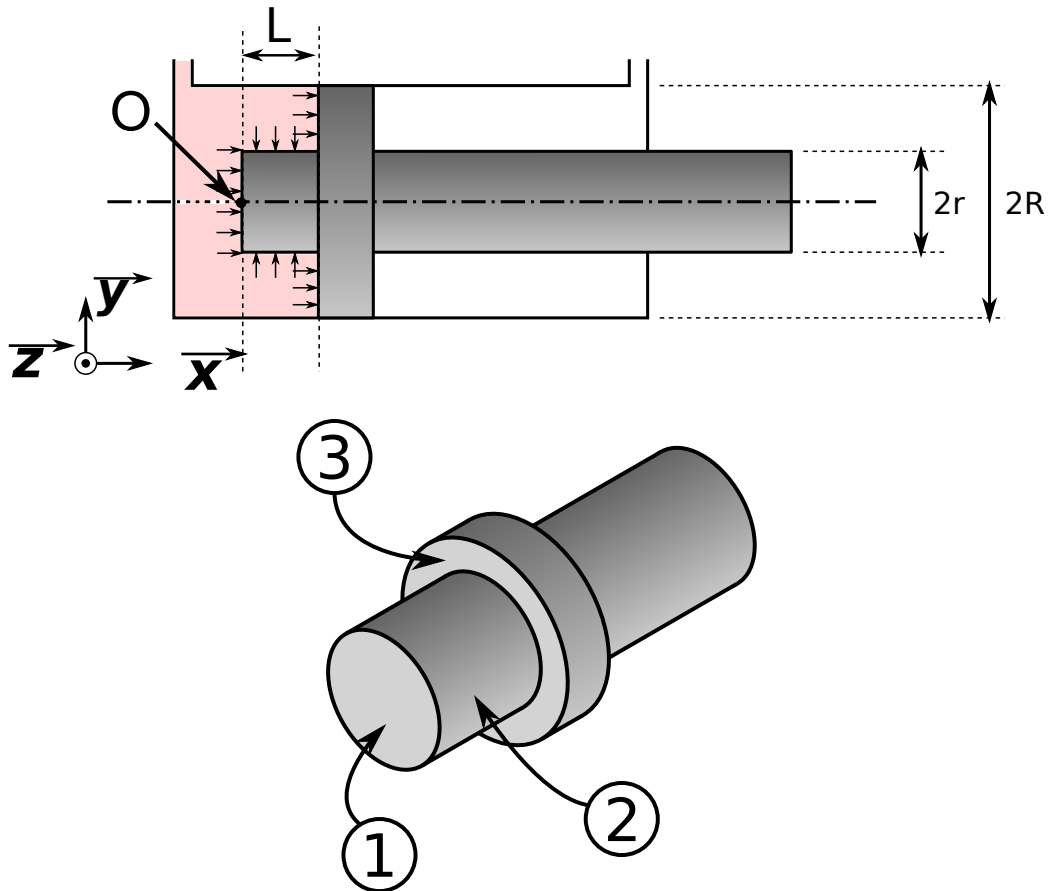

**Propriété 5 : Pression d'un fluide au repos**

Lorsqu'un solide  $S$  est plongé dans un fluide au repos  $F$ , celui-ci exerce une action mécanique répartie, purement normale (pas tangentielle), d'intensité la valeur de la pression de ce fluide :

$$\overrightarrow{f_{p(F \rightarrow S)}} = \overrightarrow{n_{p(F \rightarrow S)}} \quad (20)$$


**Exemple 5 : Pression d'un fluide sur un vérin**

Soit un vérin simple effet dont l'une de ses chambres contient un fluide  $F$  à une pression  $p$ . Les surfaces de la tige  $T$  du vérin, qui sont soumises à cette pression sont notées (1), (2) et (3).



On cherche à déterminer le torseur de l'action du fluide sur la tige du vérin  $T$  :

$$\{\mathcal{T}_{(F \rightarrow T)}\} = \{\mathcal{T}_{(F \rightarrow 1)}\} + \{\mathcal{T}_{(F \rightarrow 2)}\} + \{\mathcal{T}_{(F \rightarrow 3)}\}$$

- $\{\mathcal{T}_{(F \rightarrow 1)}\}$

- $\{\mathcal{T}_{(F \rightarrow 2)}\}$  : (à faire à la maison)
- $\{\mathcal{T}_{(F \rightarrow 3)}\}$  : (à faire à la maison)

### Théorème 1 : Théorème de Pascal

Pour un fluide homogène et statique  $F$ , la pression effective en un point  $M$ , immergé à une profondeur  $h$  vaut :

$$p_{(M)} = \mu g h + p_{atm}. \quad (21)$$

avec  $p_{(M)}$  = pression au point  $M$  (en Pa),  $p_{atm}$  = pression atmosphérique (en Pa),  $\mu$  = masse volumique du fluide (en  $\text{kg m}^{-3}$ ) et  $h$  = profondeur (en m).

### Théorème 2 : Théorème d'Archimède

Dans le cas d'un fluide  $F$  au repos, ou dans le cas d'un fluide parfait (sans viscosité), tout corps  $S$  plongé dans ce fluide reçoit, de la part de celui-ci, une action mécanique représentable par un glisseur :

$$\{\mathcal{T}_{(F \rightarrow S)}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{P} = m_f g \vec{z} \\ 0 \end{array} \right\} \quad (22)$$

où  $G$  est le barycentre de la partie immergée,  $m_f$  = masse du fluide déplacé (en Kg),  $g$  est l'accélération de pesanteur (en  $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ ) et  $\vec{z}$  est le vecteur unitaire vertical ascendant.

### Remarque 5 : Contacts linéiques- Actions linéiques

Le principe de modélisation est le même :

- On parle de densité linéique d'effort  $\overrightarrow{f_{p(S_1 \rightarrow S_2)}}$  appliquée à un élément de ligne  $dL$ , en tout point  $P$  d'une ligne  $L$ .
- On définit de même l'action mécanique de contact de  $S_1$  sur  $S_2$  par le torseur suivant :

$$\{\mathcal{T}_{(S_1 \rightarrow S_2)}\} = \left\{ \begin{array}{c} \int_{P \in L} \overrightarrow{f_{p(S_1 \rightarrow S_2)}} dL \\ \int_{P \in L} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{f_{p(S_1 \rightarrow S_2)}} dL \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_{(S_1 \rightarrow S_2)}} \\ \mathcal{M}_{A(S_1 \rightarrow S_2)} \end{array} \right\} \quad (23)$$

- On décompose de la même façon  $\overrightarrow{f_{p(S_1 \rightarrow S_2)}}$  en une composante normale et une composante tangentielle (de même pour  $\overrightarrow{R_{(S_1 \rightarrow S_2)}}$ ) lorsque c'est possible).

## 2 Frottements et lois de Coulomb

Le frottement entre deux solides est défini comme une **résistance au mouvement** relative de ces deux solides. Cela signifie que **la présence de frottements entre deux solides fait apparaître une action mécanique tangentielle d'un solide sur l'autre ayant tendance à s'opposer au mouvement désiré**.

Ce phénomène est très complexe, et il fait aujourd'hui encore l'objet de recherches approfondies. Mais déjà au  $XVIII^{\text{ème}}$  siècle, **Charles de Coulomb** s'intéressait aux frottements, et mit en place des lois qui modélisent assez bien les conséquences du phénomène sur les actions mécaniques induites. Ce sont des lois, des modèles, elles sont donc issues de l'expérience et n'ont pas de fondement théorique, mais elles permettent en première approche d'évaluer correctement l'ordre de grandeur des actions mécaniques générées par les frottements.

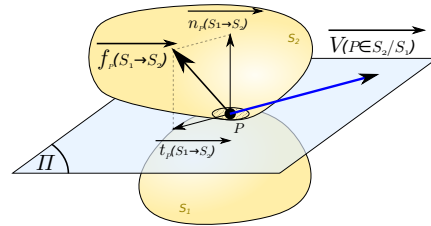
## a) Présentation du problème

## Définition 14 :

Soit deux solides (ou ensembles)  $S_1$  et  $S_2$ , en contact. Soit  $P$  un point appartenant à la zone de contact, tel que l'action répartie au point  $P$  est :

$$\overrightarrow{f_p(S_1 \rightarrow S_2)} = \overrightarrow{n_p(S_1 \rightarrow S_2)} + \overrightarrow{t_p(S_1 \rightarrow S_2)} \quad (24)$$

où  $\overrightarrow{n_p(S_1 \rightarrow S_2)}$  et  $\overrightarrow{t_p(S_1 \rightarrow S_2)}$  sont respectivement les pressions normales et tangentielles.



## b) Modélisation

## Définition 15 : Lois de Coulomb

Les lois de Coulomb permettent de caractériser les vecteurs  $\overrightarrow{t_p(S_1 \rightarrow S_2)}$  et  $\overrightarrow{n_p(S_1 \rightarrow S_2)}$ .

Leur norme est donnée par :

**Adhérence**  $\vec{V}(P \in S_2/S_1) = \vec{0}$  :

**Glissement**  $\vec{V}(P \in S_2/S_1) \neq \vec{0}$  :

$$\|\overrightarrow{t_p(S_1 \rightarrow S_2)}\| \leq f^* \|\overrightarrow{n_p(S_1 \rightarrow S_2)}\| \quad (25) \quad \|\overrightarrow{t_p(S_1 \rightarrow S_2)}\| = f \|\overrightarrow{n_p(S_1 \rightarrow S_2)}\| \quad (26)$$

$f$  et  $f^*$  sont respectivement appelés **coefficient de frottement et d'adhérence** entre  $S_1$  et  $S_2$ .

La **direction** de  $\overrightarrow{n_p(S_1 \rightarrow S_2)}$  est celle de la normale au plan tangent au contact.

La **direction** de  $\overrightarrow{t_p(S_1 \rightarrow S_2)}$  est comprise dans le plan tangent au contact et telle que :

$$\overrightarrow{t_p(S_1 \rightarrow S_2)} \wedge \vec{V}(P \in S_2/S_1) = \vec{0} \quad (27)$$

Pour exploiter les conditions sur les normes il est parfois utile de déterminer le sens de  $\overrightarrow{t_p(S_1 \rightarrow S_2)}$  :

**L'action tangentielle de  $S_1$  sur  $S_2$  s'oppose au mouvement (éventuel) de  $S_2/S_1$  :**

$$\overrightarrow{t_p(S_1 \rightarrow S_2)} \cdot \vec{V}(P \in S_2/S_1) < 0. \quad (28)$$

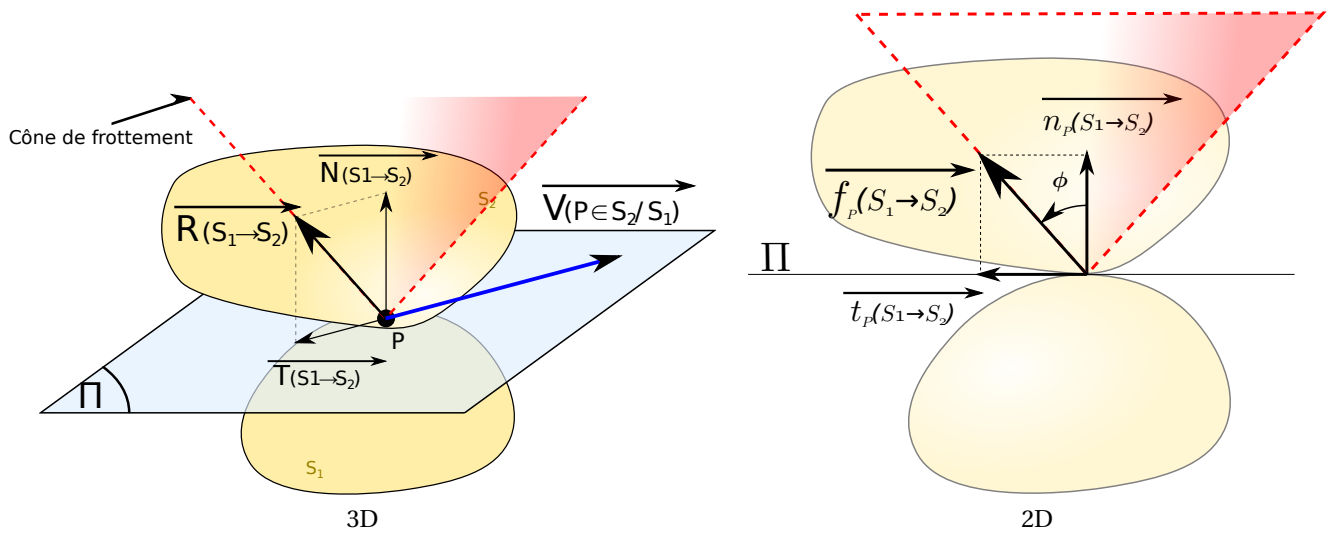
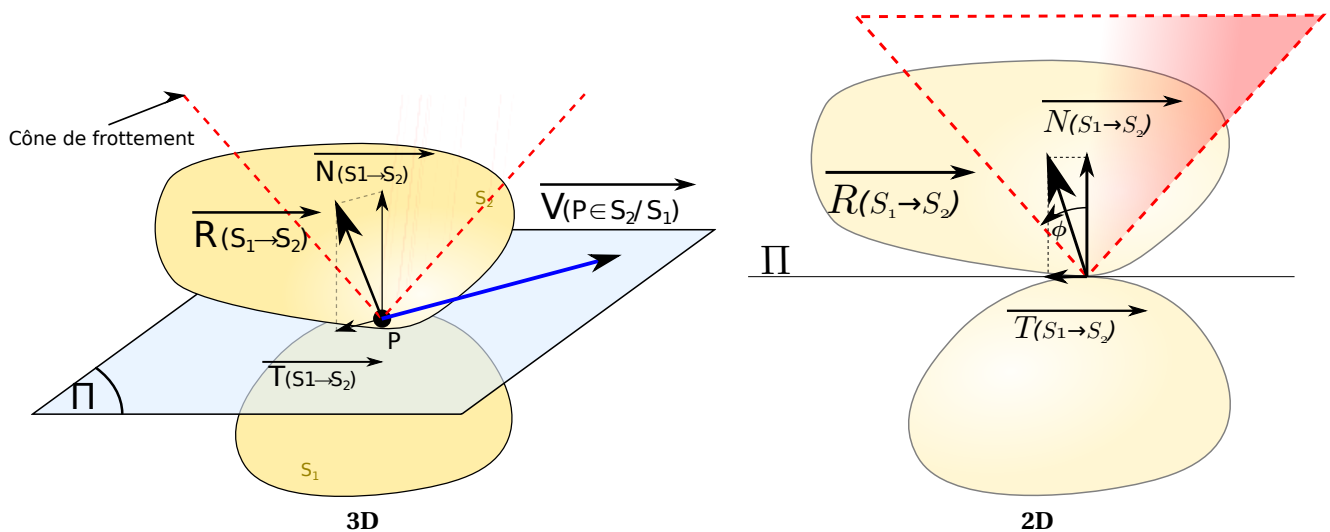
## Remarque 6 :

- En réalité, le coefficient d'adhérence est légèrement supérieur au coefficient de frottement :  $f^* > f$ . Mais dans la pratique de la modélisation, on considèrera généralement  $f^* = f$ .
- Le modèle ci-dessus concerne les frottements dits "*frottements secs*", par opposition aux "*frottements visqueux*" faisant intervenir la vitesse de déplacement (comme par exemple la rame d'un bateau qui bouge dans l'eau).
- $f$  dépend du couple de matériaux en contact, mais aussi de la lubrification, de la température, de l'état de surface... Quelques valeurs (sans lubrification) :

Couples matériels	acier/acier	acier/coussinet	fonte/ garniture de freins	pneus/route sèche	contact sans frottement
$f$	0,1 à 0,2	0,03 à 0,2	0,4	0,6 à 0,7	0

La résistance au mouvement est proportionnelle à  $f$ .

## c) Cône de frottement et adhérence

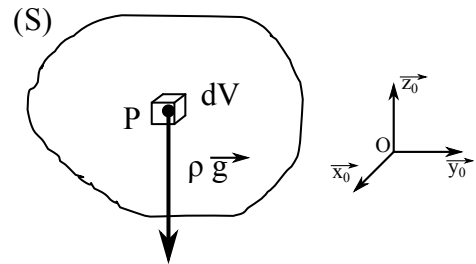
FIGURE 2 – Action mécanique répartie, au point  $P$ , sur le cône de frottement.FIGURE 3 – Actions mécaniques résultante **dans** le cône de frottement (cas de l'adhérence).

## V. Actions mécaniques de distance

### 1 Modélisation de l'action mécanique de pesanteur

Nous nous intéresserons ici uniquement à l'action mécanique de pesanteur s'appliquant sur un ensemble matériel  $S$  de masse  $M$ , de volume  $V$ . Soit un repère  $R_0 = (O, v_x0, v_y0, v_z0)$  lié à la Terre, avec  $v_z0$  vertical ascendant.

- $\vec{g} = -g \vec{v}_z$  : Accélération de la pesanteur : avec  $g = 9.81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .
- $\rho$  : masse volumique du matériau de  $S$  (en  $\text{Kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ).
- $\rho \vec{g}$  : Densité volumique d'effort (en  $\text{N} \cdot \text{m}^{-3}$ ).



Soit  $\{\mathcal{T}_{(Terre \rightarrow S)}\}$  le torseur d'action mécanique à distance exercé par le champ de pesanteur sur  $S$ .

$$\{\mathcal{T}_{(Terre \rightarrow S)}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{(Terre \rightarrow S)} \\ \vec{\mathcal{M}}_{A(Terre \rightarrow S)} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \int_{P \in V} \rho \vec{g} dV \\ \int_{P \in V} \vec{AP} \wedge (\rho \vec{g}) dV \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \int_{P \in V} \vec{g} dm \\ \int_{P \in V} \vec{AP} \wedge \vec{g} dm \end{array} \right\}$$



### Définition 16 : Géométrie de masse

**Masse du solide :**

$$M = \int_{P \in V} dm = \int_{P \in V} \rho \cdot dV \quad (29)$$

**Centre de gravité  $G$  :** c'est le barycentre des points du solide pondéré de la masse volumique :

$$M \vec{AG} = \int_{P \in V} \vec{AP} dm \quad (30)$$

Expression de l'action mécanique au centre de gravité

$$\{\mathcal{T}_{(Terre \rightarrow S)}\} = \left\{ \begin{array}{c} -M g \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_G \quad (31)$$

## 2 Méthodologie pour déterminer le centre de masse

Voir figure 4

## VII. Cas des liaisons sans frottement

### 1 Cas des liaisons usuelles en 3D

On considère les liaisons réalisées par **contact direct** entre deux pièces, **sans frottement** et **sans jeu** (liaisons parfaites). Le torseur d'action de contact est aussi appelé torseur statique, torseur d'inter-efforts ou torseur transmissible. On se donne un repère  $R = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  centré sur chaque liaison. Dans le cas des liaisons entre une pièce  $S_1$  et  $S_2$ , les composantes du torseur seront souvent exprimées avec les notations de torseur-colonne suivantes :

$$\{\mathcal{T}_{(1 \rightarrow 2)}\} = \left\{ \begin{array}{cc} X_{12} & L_{12} \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{array} \right\}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

- $X_{12}, Y_{12}$  et  $Z_{12}$  sont les projections de la résultante dans la base  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ ,
- $L_{12}, M_{12}$  et  $N_{12}$  sont les projections du moment en P dans la base  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ .

On donne alors le tableau 1.

Nom	Paramétrage	Torseur statique
<b>Liaisons pivot</b> d'axe $(\Delta) = (O, \vec{x})$ $\forall M \in (O, \vec{x})$		
<b>Liaisons glissière</b> de direction $\vec{x}$ $\forall M$		
<b>Liaisons hélicoïdale</b> d'axe $(\Delta) = (O, \vec{x})$ et de pas $p$ $\forall M \in (O, \vec{x})$		
<b>Liaison pivot glissant</b> d'axe $(\Delta) = (O, \vec{x})$ $\forall M \in (O, \vec{x})$		
<b>Liaison sphérique</b> de centre O		
<b>Liaison plane</b> de normale $\vec{x}$ $\forall M$		
<b>Liaison sphérique à doigt</b> de centre O, d'axes $\vec{y}$ et $\vec{z}$		
<b>Liaison sphère-cylindre ou linéaire annulaire</b> d'axe $(O, \vec{x})$ O centre de la sphère		
<b>Liaison cylindre-plan ou linéaire rectiligne</b> d'axe $(O, \vec{x})$ et de normale $\vec{y}$ $\forall M \in (O, \vec{x}, \vec{y})$		
<b>Liaison sphère-plan ou ponctuelle</b> de normale $(O, \vec{x})$ $\forall M \in (O, \vec{x})$		
<b>Liaison encastrement</b> $\forall M$		

TABLE 1 – Tableau des torseurs des actions mécaniques transmissibles pour les liaisons mécaniques usuelles



## 2 Cas particulier du 2D

On dit qu'un problème est plan lorsque les résultantes n'ont pas de composante suivant la normale à ce plan et lorsque les moments sont dirigés suivant cette normale. Les torseurs peuvent alors se simplifier. Ainsi, pour un problème plan de normale  $\vec{z}$  et pour une liaison pivot d'axe  $(O, \vec{z})$  :

Son torseur  $\left\{ \begin{array}{cc} X & L \\ Y & M \\ Z & 0 \end{array} \right\}_{(-, -, \vec{z})}$  s'écrit :  $\left\{ \begin{array}{cc} X & * \\ Y & * \\ * & 0 \end{array} \right\}_{(-, -, \vec{z})}$   
 soit un glisseur dont le support, situé dans le plan  $(O, \vec{x}, \vec{y})$ , passe par O.

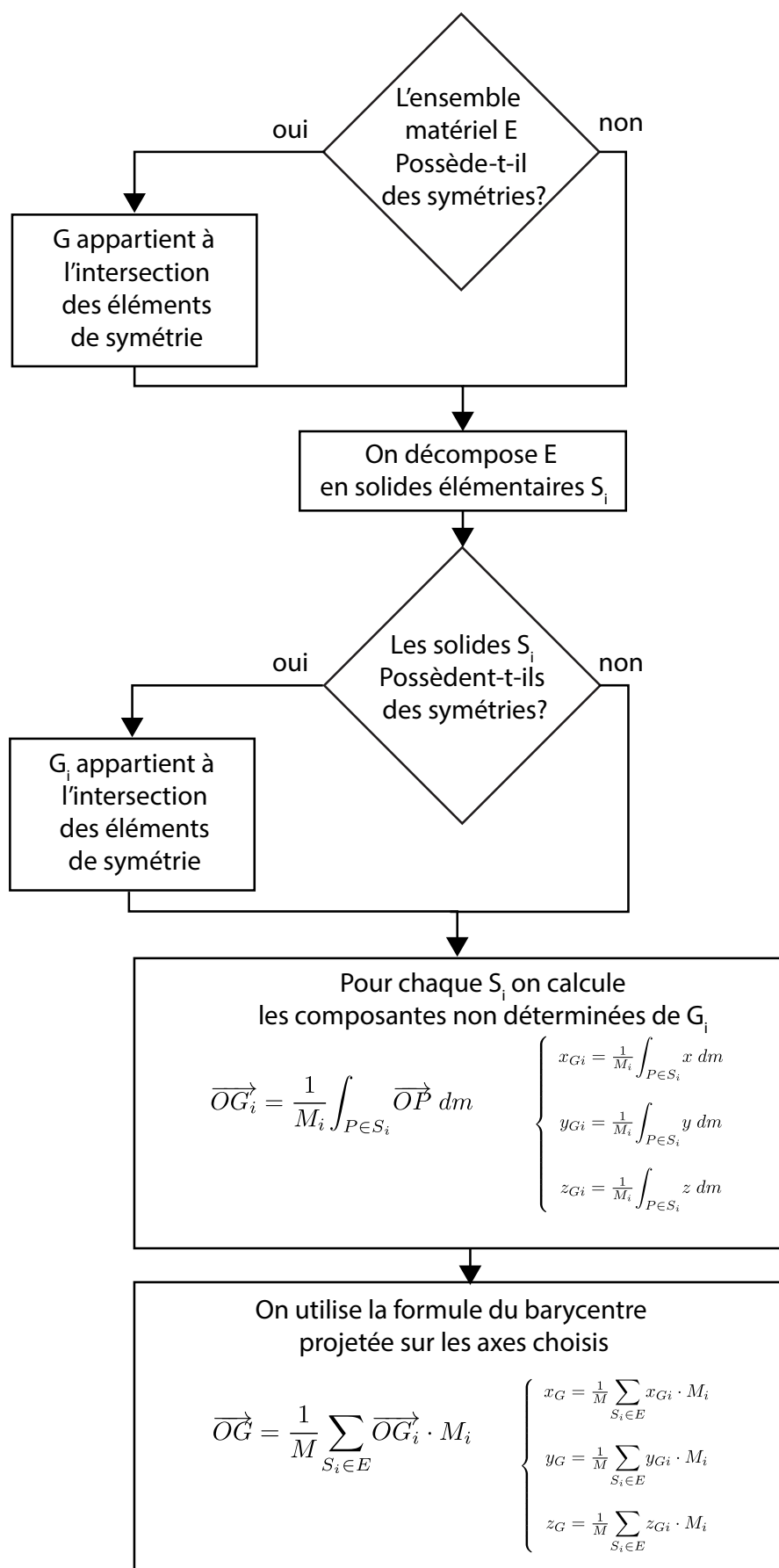


FIGURE 4 – Méthode pour déterminer la position du centre de gravité d'un solide