Feuille d'exercice n° 11 : **Arithmétique**

Exercice 1 ( ) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

1) $17 \mid (7^{8n+1} + 10(-1)^n)$; **2)** $11 \mid (9^{5n+2} - 4)$; **3)** $6 \mid (10^{3n+2} - 4^{n+1})$.

Exercice 2 ( ) Quel est le reste de la division euclidienne de $1234^{4321} + 4321^{1234}$ par 7 ?

Exercice 3 Trouver le reste de la division par 13 du nombre 100^{1000}.

Exercice 4 Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

1) $n(n+1)(n+2)(n+3)$ est divisible par 24 ;

2) $n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$ est divisible par 120.

Exercice 5 ( ) Déterminer le pgcd et un couple de Bézout des couples d'entiers (a, b) suivants :

1) $a = 33$ et $b = 24$ **2)** $a = 37$ et $b = 27$ **3)** $a = 270$ et $b = 105$

Exercice 6 ( ) Soient a, b et $c \in \mathbb{Z}$, avec $(a, b) \neq (0, 0)$. On souhaite résoudre l'équation $ax + by = c$, notée $\star$, d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.

1) Montrer que $\star$ n'a pas de solution si c n'est pas un multiple de $a \wedge b$.

2) On suppose dans cette question que $a \wedge b$ divise c.

  a) En considérant un couple de coefficients de Bézout de (a, b), montrer que $\star$ possède une solution (x_0, y_0).

  b) En s'appuyant sur (x_0, y_0), résoudre complètement $\star$.

3) Résoudre les équations d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$: $2x + 5y = 13$, $14x - 24y = 6$ et $6x - 14y = 9$.

Exercice 7 Le pgcd de deux nombres est 12 ; les quotients successifs obtenus dans le calcul de ce pgcd par l'algorithme d'Euclide sont 8, 2 et 7. Trouver ces deux nombres.

Exercice 8 ( ) Résoudre les systèmes suivants, d'inconnues $(x, y) \in \mathbb{N}^2$.

1) $\begin{cases} x \wedge y &= 3 \\ x + y &= 21 \end{cases}$ **2)** $\begin{cases} x \wedge y &= 6 \\ x \vee y &= 72 \end{cases}$

Exercice 9 ( ) Montrer que deux entiers consécutifs sont toujours premiers entre eux.

Exercice 10 Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a :

1) $(n^2 + n) \wedge (2n + 1) = 1$; **2)** $(3n^2 + 2n) \wedge (n + 1) = 1$.

Exercice 11 ( ) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système $S : \begin{cases} x \equiv 4 \mod 6 \\ x \equiv 7 \mod 9 \end{cases}$.

Indication : on recherchera d'abord une solution particulière.

Exercice 12 Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les équations suivantes, d'inconnues $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.

1) $91x - 65y = 156$. **2)** $135x - 54y = 63$. **3)** $72x + 35y = 13$.

Exercice 13 Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $x^2 - 5y^2 = 3$.

Exercice 14 Déterminer les entiers n vérifiant $n^2 - 3n + 6 \equiv 0 \pmod 5$.

Exercice 15 Un coq coûte 5 pièces d'argent, une poule 3 pièces, et un lot de quatre poussins 1 pièce. Quelqu'un a acheté 100 volailles pour 100 pièces ; combien en a-t-il acheté de chaque sorte ?

Exercice 16

1) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad \lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Z} \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$.

2) En déduire que, si $p, q \in \mathbb{N}^*$ sont premiers entre eux, on a

$$\sum_{k=1}^{q-1} \left\lfloor k \times \frac{p}{q} \right\rfloor = \frac{(p-1)(q-1)}{2}.$$

Exercice 17 Soient a et n deux entiers supérieurs ou égaux à 2. Montrer que si $a^n - 1$ est premier, alors $a = 2$ et n est premier. La réciproque est-elle vraie ? Pour tout entier naturel p supérieur ou égal à 2, l'entier $2^p - 1$ est appelé le p-ème nombre de Mersenne, souvent noté M_p.

Exercice 18 Soit F l'application définie sur $\mathbb{N}$ par $n \to 2^{2^n} + 1$. Si $n \in \mathbb{N}$, $F(n)$ est appelé n^{e} nombre de Fermat.

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $F(n) = \prod_{k=0}^{n-1} F(k) + 2$.

2) Montrer que, pour tout couple $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $m \neq n$, $F(m)$ et $F(n)$ sont premiers entre eux.

3) Montrer que tout entier naturel n qui n'est pas de la forme 2^m possède un diviseur impair autre que 1. En déduire que, si le nombre $2^n + 1$ est premier, alors soit c'est un nombre de Fermat, soit $n = 0$.

4) Montrer que $F(5)$ est divisible par 641.

Exercice 19 Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, $\frac{1}{4}(n^3 + (n+2)^3)$ est un entier non premier.