



Feuille d'exercice n° 03 : **Sommes et calculs**

**Exercice 1** () Soient  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{C}$ . Quelles sont les expressions toujours égales entre elles ?


$$\begin{aligned} 1) & \sum_{k=1}^n a_k b_k, \quad \sum_{k=1}^n a_{n+1-k} b_{n+1-k}, \quad \frac{1}{4} \left( \sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2 - \sum_{k=1}^n (a_k - b_k)^2 \right) \\ 2) & \left( \sum_{k=1}^n a_k \right) \left( \sum_{k=1}^n b_k \right), \quad \left( \sum_{k=1}^n a_k \right) \left( \sum_{p=1}^n b_p \right), \quad \sum_{k=1}^n \sum_{p=1}^n (a_k b_p), \quad \sum_{k=1}^n \left( a_k \sum_{p=1}^n b_p \right), \quad \sum_{k=1}^n a_k b_k \end{aligned}$$

**Exercice 2** () Montrer que pour toute famille  $(z_k)_{1 \leq k \leq n} \in \mathbb{C}^n$ , on a :

$$\left( \sum_{k=1}^n z_k \right)^2 = \sum_{k=1}^n z_k^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} z_i z_j.$$

Quel résultat bien connu cette formule généralise-t-elle ?

**Exercice 3** Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\sum_{k=1}^n k \cdot k! = (n+1)! - 1$ .

**Exercice 4** ()

- 1) Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Écrire  $(1+k)^4 - k^4$  sous la forme d'un polynôme de degré 3 en  $k$ .
- 2) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . En s'inspirant de la démonstration du cours donnant la valeur de  $\sum_{k=0}^n k^2$ , calculer la valeur de  $\sum_{k=0}^n k^3$  (on donnera cette valeur sous la forme la plus factorisée possible).

**Exercice 5** () Donner une expression simplifiée des quantités suivantes.

$$\begin{aligned} 1) & \sum_{1 \leq i, j \leq n} i \cdot j & 2) & \sum_{1 \leq i, j \leq n} i + j & 3) & \sum_{1 \leq i, j \leq n} i - j & 4) & \sum_{1 \leq i, j \leq n} \min(i, j) \end{aligned}$$

Même question en remplaçant  $\sum_{1 \leq i, j \leq n}$  par  $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n}$  puis par  $\sum_{1 \leq i < j \leq n}$ .

**Exercice 6** En considérant  $(1+1)^n$  et  $(1-1)^n$ , calculer les sommes  $\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k}$  et  $\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1}$ , où  $\lfloor \cdot \rfloor$  est la fonction « partie entière ».

*Remarque* : ces sommes sont souvent notées  $\sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k}$  et  $\sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1}$ .


**Exercice 7** () Écrire avec des factorielles les quantités suivantes.

1)  $\prod_{k=n}^m k$  pour  $n, m \in \mathbb{N}^*$  t.q.  $n < m$ .

3)  $\prod_{k=1}^p \frac{n-p+k}{k}$  pour  $n \geq 2$  et  $1 \leq p \leq n-1$ .

2)  $\prod_{k=1}^p n-p+k$  pour  $(n, p) \in \mathbb{N}^2$  t.q.  $p \leq n$ .

4)  $\prod_{k=1}^n \frac{2k+1}{2k}$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**Exercice 8** ()

1) Démontrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $T_n = \sum_{k=1}^n ki^{k-1} = \frac{i - ni^n - (n+1)i^{(n+1)}}{2}$

2) Soit  $p \in \mathbb{N}$ . En déduire les valeurs des deux sommes :

$$S_1(p) = 1 - 3 + 5 - 7 + \cdots + (-1)^p(2p+1),$$

$$S_2(p) = 2 - 4 + 6 - 8 + \cdots + (-1)^{(p+1)}2p.$$

**Exercice 9** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . En utilisant la fonction  $f : x \mapsto (1+x)^n$ , calculer les quantités suivantes.

1)  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$

2)  $\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}$

3)  $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}$

**Exercice 10** Soit  $a$  un nombre réel. On étudie le système linéaire suivant.

$$\mathcal{S}_a : \begin{cases} x - 2y + 3z = 2 \\ x + 3y - 2z = 5 \\ 2x - y + az = 1 \end{cases}$$

1) En fonction des valeurs du paramètre  $a$ , déterminer si le système  $\mathcal{S}_a$  peut :

- a) n'admettre aucune solution ;
- b) admettre exactement une solution ;
- c) admettre une infinité de solutions.

2) Résoudre le système  $\mathcal{S}_a$  lorsque celui-ci admet une (des) solution(s).

**Exercice 11** Discuter et résoudre suivant les valeurs des réels  $\lambda, a, b, c, d$  le système suivant.

$$(S) \begin{cases} (1+\lambda)x + y + z + t = a \\ x + (1+\lambda)y + z + t = b \\ x + y + (1+\lambda)z + t = c \\ x + y + z + (1+\lambda)t = d \end{cases}$$

