Semaine n° 21 : du 4 mars au 8 mars

Lundi 4 mars

- **Cours à préparer : Chapitre XX - Analyse asymptotique**
  — *Partie 2 :* Comparaison asymptotique de fonctions ; propriétés des o, des O des $\sim$.

Mardi 5 mars

- **Cours à préparer : Chapitre XX - Analyse asymptotique**
  — *Partie 3.1 :* Fonction admettant un développement limité au voisinage d'un point ; unicité du développement limité ; caractérisation de la continuité en un point, de la dérivabilité en un point.
  — *Partie 3.2 :* Opérations sur les développements limités : somme, produit, composition ; application au quotient.
- **Exercices à corriger en classe**
  — **Feuille d'exercices n° 19 :** exercices 3, 8.

Jeudi 7 mars

- **Cours à préparer : Chapitre XX - Analyse asymptotique**
  — *Partie 3.3 :* Développement limité d'une primitive.
  — *Partie 3.4 :* Formule de Taylor-Young.
- **Exercices à corriger en classe**
  — **Feuille d'exercices n° 19 :** exercices 7, 9.

Vendredi 8 mars

- **Cours à préparer : Chapitre XX - Analyse asymptotique**
  — *Partie 3.5 :* Application des développements limités à l'étude locale d'une fonction : allure d'une courbe au voisinage d'un point, prolongement par continuité d'une fonction en un point ; développements asymptotiques et étude des branches ininies.
  — *Partie 4 :* Comparaison de séries à termes réels positifs.

Échauffements

Mardi 5 mars

- Dans $\mathbb{R}[X]$, $6X^3-15X^2-10X+2$ est-il combinaison linéaire de $3X^3-5X^2-4$ et X^2+2X-2 ?
- *Cocher toutes les assertions vraies :* Soit E un $\mathbb{K}$-ev et F et G deux sev de E.
  ☐ F et G sont en somme directe ssi $\forall\ x\in E,\ \exists!\ (f,g)\in F\times G,\ x=f+g$;
  ☐ F et G sont en somme directe ssi $\forall\ (f,g)\in F\times G,\ f+g=0\ \Rightarrow\ f=g=0$;
  ☐ F et G sont en somme directe ssi $\forall\ f,f'\in F\ ,\ g,g'\in G,\ f+g=f'+g'\ \Rightarrow\ f=f'$ et $g=g'$;
  ☐ F et G sont en somme directe ssi $F\cap G=\varnothing$.
- *Cocher toutes les assertions vraies :* Soit $E=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,;\ f \text{ est croissante sur } \mathbb{R}\}$.
  ☐ La fonction nulle appartient à E.
  ☐ E est stable par addition.
  ☐ E est stable par multiplication par un scalaire.
  ☐ E est un espace vectoriel.

Jeudi 7 mars

- Soit $E=\mathbb{R}^4$. On pose $u_1=(1,1,0,0)$, $u_2=(1,1,1,0)$, $u_3=(1,1,1,1)$ et $G=\mathrm{Vect}(u_1,u_2,u_3)$.
  Déterminer une équation cartésienne de G.
- *Cocher toutes les assertions vraies :* Soit n un entier ≥ 1 et $E=\{P\in\mathbb{R}[X]\,;\ \deg P=n\}$, muni des opérations usuelles.
  ☐ $0\in E$.
  ☐ E est stable par addition.
  ☐ E est stable par multiplication par un scalaire.
  ☐ E n'est pas un espace vectoriel.
- *Cocher toutes les assertions vraies :* Soient f et g deux fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}_+$.
  ☐ Si $f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}g(x)$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-g(x)=0$.
  ☐ Si $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-g(x)=0$, alors $f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}g(x)$
  ☐ Si $f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}g(x)$ et f admet une limite en $+\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$.
  ☐ Si $f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}g(x)$, alors $\big(f(x)\big)^2\underset{x\to+\infty}{\sim}\big(g(x)\big)^2$.

Vendredi 8 mars

- *Cocher toutes les assertions vraies :* On pose $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid 2x+y-z=0\}$, $u=(1,-1,1)$ et $v=(3,1,7)$.
  Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ puis que $\mathrm{Vect}(u,v)\subset E$. A-t-on égalité ?
- *Cocher toutes les assertions vraies :* Soit $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,;\ x-y\geq 0\}$, muni des opérations usuelles. Quelles sont les assertions vraies ?
  ☐ E est non vide.
  ☐ E est stable par addition.
  ☐ E est stable par multiplication par un scalaire.
  ☐ E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
- *Cocher toutes les assertions vraies :*

  ☐ $\dfrac{t\ln(t)}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}\underset{t\to0}{\sim}\dfrac{-2t}{3}$

  ☐ $\dfrac{t\ln(t)}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}\underset{t\to+\infty}{\sim}\dfrac{\ln(t)}{t^2}$

  ☐ $\mathrm{e}^{-2t}\sqrt{1+x^2\mathrm{e}^{2t}}\underset{t\to+\infty}{\sim}\mathrm{e}^{-2t}$

  ☐ $\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\underset{x\to0}{\sim}\dfrac{x}{2}$

Bonus

- *Cocher toutes les assertions vraies :* Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$, soit $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$.
  - ☐ Si $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ et si $g(f(x)) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ alors $g(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.
  - ☐ Si f est bijective de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$ et $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ alors $f^{-1}(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$
  - ☐ Si f et g sont bijectives de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$ et si $f(a) \leqslant g(a)$ alors $f^{-1}(a) \geqslant g^{-1}(a)$.
  - ☐ Si f est dérivable et si f' est croissante alors f est convexe.
  - ☐ Si $a^b = c$ alors $a = \sqrt[b]{c}$.
  - ☐ Si f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ alors pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0)$.
  - ☐ Si f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ alors pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(x)$.