Devoir surveillé n° 7
Version 1
Durée : 3 heures, calculatrices et documents interdits

I. Un exercice vu en TD.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{X^n - 1}$ est

$$\frac{1}{X^n-1} = \frac{1}{n} \sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \frac{\omega}{X-\omega}.$$

II. La méthode de Newton.

Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Posons $I = [a, b]$.

Partie I. théorème du point fixe

On se donne $g : I \to \mathbb{R}$ une fonction k-lipschitzienne avec $k \in [0, 1[$ et telle que $g(I) \subset I$.

1) **a)** (Question de cours) Montrer que g est continue sur I.

b) Montrer que l'équation $g(x) = x$ possède une solution et une seule dans le segment I. On notera α cette solution.

2) Soit $u \in I$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par :

$$x_0 = u \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}\ : x_{n+1} = g(x_n)$$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $|x_n - \alpha| \leqslant k^n |u - \alpha|$. En déduire que (x_n) converge vers un réel que l'on déterminera.

b) Établir que pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ on a :

$$|x_{n+p} - x_n| \leqslant \frac{1-k^p}{1-k} |x_{n+1} - x_n|$$

c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$|x_n - \alpha| \leqslant \frac{k^n}{1-k} |x_1 - x_0|.$$

3) On suppose que g est dérivable en α.

a) Établir que $|g'(\alpha)| \leqslant k$.

b) On reprend les notations de la question **2)**.
Montrer que, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \neq \alpha$ alors

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{x_{n+1} - \alpha}{x_n - \alpha} = g'(\alpha)$$

Partie II. Méthode de Newton

Soit f une fonction de I dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$. On suppose que $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ et que $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$.
On s'intéresse ici à la résolution de l'équation $f(x) = 0$ d'inconnue $x \in I$.

1) **a)** Montrer que cette équation possède une unique solution dans $]a, b[$. Cette solution sera notée α.

b) Soit $x_0 \in I$. Déterminer l'abscisse du point d'intersection de l'axe des abscisses et de la tangente à f en x_0.

2) On définit la fonction g par :

$$g \ : \ \begin{cases} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x - \frac{f(x)}{f'(x)} \end{cases}$$

a) Justifier que g est de classe $\mathscr{C}^1$.

b) Calculer $g(\alpha)$ et $g'(\alpha)$.

3) On suppose, dans cette question seulement, que f' est décroissante. On considère la suite (x_n) définie par

$$x_0 = a \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \ : x_{n+1} = g(x_n)$$

a) Dessiner le graphe d'une fonction f vérifiant toutes ces conditions.

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

- x_{n+1} est bien définie.
- $x_{n+1} \geqslant x_n$
- $\dfrac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{x_{n+1} - x_n} \leqslant f'(x_n)$ puis que $x_{n+1} \leqslant \alpha$

c) Montrer que (x_n) converge vers α.

4) On revient au cas général.

a) Justifier qu'il existe $h > 0$ tel que : en notant $J = [\alpha - h, \alpha + h]$, on ait $|g'(x)| < 1$ pour tout $x \in J$.

b) Établir que : $\forall x \in J : g(x) \in J$.

c) Justifier qu'il existe $k \in [0, 1[$ tel que g soit k-lipschitzienne sur J.

d) En déduire que, pour tout $u \in J$, la suite (x_n) définie par

$$x_0 = u \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}\ x_{n+1} = g(x_n)$$

converge vers α.

5) Dans cette question, on suppose f de classe $\mathscr{C}^3$ et on admettra la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 : pour toute application φ de classe $\mathscr{C}^2$ sur I, pour tout x_0 appartenant à I, on a pour x au voisinage de x_0, $\varphi(x) = \varphi(x_0) + (x - x_0)\varphi'(x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^2\varphi''(x_0) + o_{x \to x_0}((x - x_0)^2)$.

a) Justifier qu'il existe une constante $C > 0$ et un réel $\eta > 0$ tel que $[\alpha - \eta, \alpha + \eta] \subset [a, b]$ et pour tout $x \in [\alpha - \eta, \alpha + \eta]$, on a $|g(x) - \alpha| \leqslant C(x - \alpha)^2$.

b) On pose $\nu = \min(\frac{1}{2C}, \eta)$ et $K = [\alpha - \nu, \alpha + \nu]$. Montrer que pour tout $u \in K$, la suite (x_n) définie par $x_0 = u$ et $\forall n \in \mathbb{N}\ x_{n+1} = g(x_n)$ est bien définie.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$C|x_n - \alpha| \leqslant (C|x_0 - \alpha|)^{2^n}$$

et en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|x_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{C2^{(2^n)}}$$

III. Une équation différentielle linéaire homogène.

On cherche dans ce problème à résoudre l'équation différentielle linéaire réelle

$$y''' + y'' + y' + y = 0. \tag{$\mathscr{E}$}$$

On note $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions de $(\mathscr{E})$:

$$\mathscr{S} = \{\, y \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid\ y''' + y'' + y' + y = 0 \,\}.$$

1) *Question préliminaire :* Factoriser dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$ le polynôme $X^3 + X^2 + X + 1$.

2) Montrer que $(\mathscr{S}, +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel stable par dérivation.

3) On considère $g : x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$.

a) Montrer que $g \in \mathscr{S}$.

b) En déduire que $\mathrm{Vect}(g) \subset \mathscr{S}$.

c) Déterminer une équation différentielle dont $\mathrm{Vect}(g)$ est exactement l'ensemble des solutions.

4) On pose $\mathscr{T} = \{\, y \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid\ y'' + y = 0 \,\}$.

a) Montrer que $\mathscr{T}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{S}$.

b) Déterminer deux fonctions c et s telles que $\mathscr{T} = \mathrm{Vect}(c, s)$.

5) Montrer que pour toute fonction $f \in \mathscr{S}$, on a $f'' + f \in \mathrm{Vect}(g)$.

6) Montrer de même que pour toute $f \in \mathscr{S}$, on a $f' + f \in \mathscr{T}$.

7) Montrer que $\mathscr{S} = \mathrm{Vect}(g) \oplus \mathscr{T}$.

8) En déduire une expression explicite de $\mathscr{S}$, par exemple en fonction de g, c et s.

— **FIN** —