Feuille d'exercice n° 20 : **Analyse asymptotique**

Exercice 1 (✎) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. Parmi les affirmations suivantes, dites lesquelles sont vraies (on les démontrera alors) et lesquelles sont fausses (on donnera un contre-exemple).

1) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et $v_n = O(u_n)$, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

2) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $v_n = O(u_n)$, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

3) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et $v_n = O(u_n)$, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

4) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et $v_n = o(u_n)$, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

5) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $v_n \sim u_n$, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

6) Si $v_n \sim u_n$, alors $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

7) Si $v_n \sim u_n$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

8) Si $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors $v_n \sim u_n$.

Exercice 2 Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles de limite $+\infty$ telles que $u_n = o(v_n)$. Montrer qu'il existe une suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite $+\infty$ telle que $u_n = o(w_n)$ et $w_n = o(v_n)$.

Exercice 3 Donner un exemple de suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $u_n = O(v_n)$ mais qu'on n'ait ni $u_n = o(v_n)$, ni $v_n = O(u_n)$.

Exercice 4 (🚲) **– Encadrement et équivalents –**

Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites ne s'annulant pas. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ et que $u_n \sim w_n$. Que peut-on dire de (v_n) ?

Exercice 5 (✎) Trouver un équivalent simple des suites de termes généraux suivants.

1) $\ln\cos\dfrac{\pi}{n} + \tan\operatorname{sh}\dfrac{1}{n}$

2) $\ln\cos\dfrac{\pi}{n} + \mathrm{e}^{\tan(\pi/n^2)} - 1$

3) $3 + \mathrm{e}^{1/n} - \dfrac{6}{n}$

4) $\sqrt{1+\mathrm{e}^{-n}} - \cos\mathrm{e}^{-n}$

5) $\sqrt{n}\sin\dfrac{\pi}{n}$

6) $\ln(n+1) - \ln(n+2)$

7) $\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+5} - \dfrac{4}{n^2}$

8) $(n+\ln n)\mathrm{e}^{-n+1}$

9) $\mathrm{e}^{\sin\frac{\pi}{n}} - \sin\left(\sin\dfrac{\pi}{2n}\right)$

10) $\ln\dfrac{1+\operatorname{ch}\frac{1}{n}}{2}$

11) $\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-n}}} - \mathrm{e}$

Exercice 6 Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k! \underset{n\to+\infty}{\sim} n\,!$

Exercice 7 (⛰) Déterminer un équivalent de la suite de terme général $u_n = (n+1)^{\frac{1}{n+1}} - n^{\frac{1}{n}}$.

Exercice 8 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ la suite définie par $u_1 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $u_{n+1} = \ln(n+u_n)$.

1) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ possède une limite et la déterminer.

2) **a)** Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^\star$, $\ln x \leqslant x$.

b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$, $u_n \leqslant \ln(2n)$.

c) Montrer que : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$.

d) Montrer que : $u_n - \ln n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln n}{n}$.

Exercice 9 (🚲)

1) Montrer que l'équation $\ln x + x = k$ admet une unique solution x_k, quel que soit $k \in \mathbb{N}$. On définit ainsi une suite réelle $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

2) Montrer que l'on peut écrire : $x_k = ak + b\ln k + c\dfrac{\ln k}{k} + o\left(\dfrac{\ln k}{k}\right)$, où a, b et c sont des constantes que l'on déterminera.

Exercice 10 (✎) Soit f et g deux fonctions définies au voisinage d'un point $a \in \overline{\mathbb{R}}$. À quelle condition sur f et g a-t-on $\mathrm{e}^f \underset{a}{\sim} \mathrm{e}^g$?

Exercice 11 (✎ 🚲) Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$. On suppose que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} g(x)$, et que ces fonctions admettent une limite commune notée $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

1) On suppose dans cette question que f et g sont à valeurs strictement positives.

a) Montrer que si, $\ell \neq 1$, alors $\ln(f(x)) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(g(x))$.

b) Que pouvez-vous dire lorsque $\ell = 1$?

2) Parmi les équivalents suivants, lesquels sont systématiquement vrais ? (on pourra discuter selon les valeurs de ℓ).

a) $\mathrm{Arctan}(f(x)) \underset{x\to+\infty}{\sim} \mathrm{Arctan}(g(x))$

b) $\sin(f(x)) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sin(g(x))$

Exercice 12 (✎) Soit f, g, f_1 et g_1 des fonctions définies au voisinage d'un point $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Montrer que si $f \underset{a}{\sim} f_1$ et $g \underset{a}{\sim} g_1$ avec $f_1 \underset{a}{=} o(g_1)$, alors $f + g \underset{a}{\sim} g_1$

Exercice 13 Étudier en $+\infty$ et $-\infty$ la fonction $f : x \mapsto \sqrt[3]{x^3+1} + \sqrt{x^2+x+1}$.

Exercice 14 (✎) Soit $a, b \in \mathbb{R}$, avec $a \neq b$. Déterminer les limites des expressions suivantes.

1) $\dfrac{\sin(x\ln(1+x^2))}{x\tan x}$, lorsque $x \to 0$

2) $\dfrac{\ln(1+\sin x)}{\tan(6x)}$, lorsque $x \to 0$

3) $(\ln(\mathrm{e}+x))^{\frac{1}{x}}$, lorsque $x \to 0$

4) $(\ln(1+\mathrm{e}^{-x}))^{\frac{1}{x}}$, lorsque $x \to +\infty$

5) $\sqrt[3]{x^3+x^2} - \sqrt[3]{x^3-x^2}$, lorsque $x \to +\infty$

6) $\dfrac{\tan(ax)-\sin(ax)}{\tan(bx)-\sin(bx)}$, lorsque $x \to 0$

7) $\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)\tan(x+\frac{\pi}{4})$, lorsque $x \to \dfrac{\pi}{4}$

8) $\dfrac{\cos(x)-\sin(x)}{(4\,x-\pi)\tan(x)}$, lorsque $x \to \dfrac{\pi}{4}$

9) $x^{\frac{1}{1+2\ln(x)}}$, lorsque $x \to 0$

10) $(2\,x^2 - 3\,x + 1)\tan(\pi\,x)$, lorsque $x \to \dfrac{1}{2}$

11) $\dfrac{(\sin(x))^{\sin(x)}-1}{(\tan(x))^{\tan(x)}-1}$, lorsque $x \to 0^+$

Déterminer les équivalents des expressions suivantes.

12) $\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}} - x\sqrt{2}$, en $+\infty$

13) $\dfrac{\tan(x-x\cos(x))}{\sin(x)+\cos(x)-1}$, en 0

14) $(\tan(2\,x)+\tan(x+\frac{\pi}{4}))\,(\cos(x+\frac{\pi}{4}))^2$, en $\dfrac{\pi}{4}$

15) $\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{\sin(\frac{1}{x})}\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$, en $+\infty$

Exercice 15 ( ) Déterminer l'existence et la valeur des limites des expressions suivantes.

1) $\dfrac{x^x-1}{\ln x}$, lorsque $x \to 1$

2) $\left(\dfrac{x^2}{\ln(\cos x)} + \dfrac{2}{x^2}\sin^2 x\right)$, lorsque $x \to 0$

3) $\dfrac{\ln(\sin^2 x)}{\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)^2}$, lorsque $x \to \dfrac{\pi}{4}$

4) $\dfrac{\ln(\sin^2 x)}{\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)^2}$, lorsque $x \to \dfrac{\pi}{2}$

5) $\sin\dfrac{1}{x}\tan\left(\dfrac{2\pi x}{4x+3}\right)$, lorsque $x \to +\infty$

6) $\ln x \tan(\ln(1+x))$, lorsque $x \to 0^+$

7) $(\ln x)^{\tan\frac{\pi x}{2\mathrm{e}}}$, lorsque $x \to \mathrm{e}$

Exercice 16

1) À quels ordres $x \mapsto \sqrt{x}$ admet-elle un développement limité en 0 ?

2) À quels ordres $x \mapsto x^2 + x^{\frac{13}{3}}$ admet-elle un développement limité en 0 ?

3) Soit $n \in \mathbb{N}$. $x \mapsto |x|^n$ admet-elle un développement limité d'ordre n en 0 ?

Exercice 17 ( ) Donner le développement limité en 0 des fonctions suivantes.

1) $x \mapsto \tan(x)$ (à l'ordre 5).

2) $x \mapsto \ln(\cos(x))$ (à l'ordre 6).

3) $x \mapsto \sin(\tan(x))$ (à l'ordre 5).

4) $x \mapsto (\ln(1+x))^2$ (à l'ordre 4).

5) $x \mapsto \exp(\sin(x))$ (à l'ordre 3).

6) $x \mapsto \sin^6(x)$ (à l'ordre 9.)

Exercice 18 ( ) Former le développement asymptotique en $+\infty$ de l'expression considérée, à la précision demandée.

1) $\sqrt{x+1}$ à la précision $\dfrac{1}{x^{3/2}}$

2) $x\ln(x+1) - (x+1)\ln x$ à la précision $\dfrac{1}{x^2}$

3) $\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^x$ à la précision $\dfrac{1}{x^2}$

4) $\operatorname{Arctan} x$ à la précision $\dfrac{1}{x^3}$

Exercice 19 ( ) Faire un développement limité ou asymptotique en a à l'ordre n des expressions suivantes.

1) $\dfrac{\arctan x - x}{\sin x - x}$, pour $n=2$ et $a=0$

2) $\ln(\sin x)$, pour $n=3$ et $a=\frac{\pi}{4}$

3) $(1+x)^{\frac{1}{x}}$, pour $n=3$ et $a=0$

4) $x(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}} - x\sqrt{2})$, pour $n=2$ et $a=+\infty$

Exercice 20

1) Démontrer que tan et tan′ admettent un développement limité en 0 à tout ordre. Expliquer comment obtenir le développement limité de tan à partir de celui de tan′.

2) En exploitant la relation $\tan' = 1 + \tan^2$, donner le développement limité de tan en 0 à l'ordre 7.

Exercice 21 ( )

1) Donner le développement limité de $x \mapsto \displaystyle\int_x^{x^2} \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ en 0 à l'ordre 4.

2) Sur le même modèle, donner un développement limité de $x \mapsto \displaystyle\int_x^{\frac{1}{x}} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ en 1 à l'ordre 3.

Exercice 22 (✎) Calculer les développements asymptotiques suivants.

1) $\sqrt[3]{x^3+x^2}-\sqrt[3]{x^3-x^2}$, en $+\infty$ à 2 termes **2)** $\ln\left(\sqrt{1+x}\right)$, en $+\infty$ à 2 termes

Exercice 23 (✎) Déterminer les DL des expressions suivantes, à l'ordre 4 et en 0.

1) $\dfrac{\cos x}{\sqrt{1+x}}$ **3)** $\dfrac{\ln(1+x)}{\cos x}$ **5)** $\dfrac{\sin(x/2)}{\mathrm{e}^{2x}}$

2) $\dfrac{\sqrt{1+x}}{\cos x}$ **4)** $\dfrac{1+\cos x}{2+\sin x}$ **6)** $\dfrac{\ln(1+x)}{2-\cos x}$

Effectuer les DL des expressions suivantes, à l'ordre 4.

7) $\dfrac{\sin(2x-\pi/4)}{\cos x}$, en π **8)** $\dfrac{\mathrm{e}^{x-1}}{\ln x}$, en 1

Effectuer le DL de l'expression suivante.

9) $\dfrac{\cos(x-1)}{\ln(1+x)}$, à l'ordre 2 et en 1.

Exercice 24 Calculer les limites des expressions suivantes, lorsqu'elles existent.

1) $(\tan x)^{\tan 2x}$ en $\dfrac{\pi}{4}$

2) $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\ln(1+x)}$ en 0

3) $\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e}}{x}$ en 0

4) $\dfrac{1}{2(1-\sqrt{x})}-\dfrac{1}{3(1-\sqrt[3]{x})}$ en 1

5) $\dfrac{1}{\sin^4 x}\left(\sin\dfrac{x}{1-x}-\dfrac{\sin x}{1-\sin x}\right)$ en 0

6) $\dfrac{(1+x)^{\frac{\ln x}{x}}-x}{x(x^x-1)}$ en 0

Exercice 25 (✎) Soit $f : x \mapsto (\cos x)^{\frac{1}{x}}$, définie sur $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[\setminus\{0\}$.
Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 et étudier la dérivabilité du prolongement de f.

Exercice 26 (✎) Soient u, v, f définies par :

$$u : x \mapsto (x^3-2x^2+1)^{\frac{1}{3}}, \quad v : x \mapsto \sqrt{x^2+x+1}, \quad f : x \mapsto u(x)-v(x).$$

1) Donner l'équation d'une droite asymptote au graphe de f en $-\infty$ et positionner f par rapport à cette asymptote.

2) Même étude en $+\infty$.

Exercice 27 (✎) Soit $g : x \mapsto \dfrac{\operatorname{Arctan} x}{(\sin x)^3}-\dfrac{1}{x^2}$.

1) Donner le domaine de définition de g.

2) Montrer qu'elle se prolonge par continuité en 0 en une fonction dérivable.

3) Déterminer la tangente en 0 au graphe de cette fonction et la position de ce graphe par rapport à celle-ci.

Exercice 28 (✎) Étudier la position du graphe de l'application $f : x \mapsto \ln(1+x+x^2)$ par rapport à sa tangente en 0 et 1.

Exercice 29 Étudier les branches infinies des fonctions suivantes.

1) $f : x \mapsto x^2 \operatorname{Arctan}(1 + x^2)$

2) $g : x \mapsto x\sqrt{\dfrac{x-1}{3x+1}}$

Exercice 30 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$, soit $a \in \mathbb{R}$. Étudier la limite en 0 de

$$h \mapsto \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}.$$

Exercice 31 Soient a et b deux réels distincts et $F(X) = \dfrac{1}{(X-a)^n(X-b)^n}$. En utilisant la formule de Taylor en a pour $f : x \mapsto (x-a)^n F(x)$, décomposer F sur $\mathbb{R}$.

Exercice 32 Donner les natures des séries de terme général (u_n) suivantes (*i.e.* de $\left(\sum_{n=1}^{N} u_n\right)_{N\in\mathbb{N}}$).

1) $u_n = \operatorname{th}\dfrac{1}{n} + \ln\dfrac{n^2-n}{n^2+1}$

2) $u_n = \dfrac{n^n}{n!\mathrm{e}^n}$

3) $u_n = \sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}$