Devoir à la maison n° 11

À rendre le 25 janvier

On cherche à déterminer toutes les fonctions réelles f définies et continues sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x) + f(y) = 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) \quad (\star)$$

Préliminaires

1) Donner l'expression générale des suites réelles (u_n) et (v_n) vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n, \quad 2v_{n+1} = v_n$$

en fonction de n et des premiers termes u_0, u_1, v_0.

Partie I. Première méthode

On note E l'ensemble des fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}$ vérifiant $(\star)$.

1) Soit $f \in E$. Montrer que la fonction $g : x \mapsto f(x) - f(0)$ est un élément de E.

2) On considère maintenant une fonction f élément de E et vérifiant $f(0) = 0$. On pose $a = f(1)$.

- **a)** Montrer que la fonction f est impaire.
- **b)** Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+2) = 2f(x+1) - f(x)$.
- **c)** En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = an$, puis que pour tout $m \in \mathbb{Z}$, $f(m) = am$.
- **d)** Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $f\left(\frac{1}{2^p}\right) = \frac{a}{2^p}$.
- **e)** On note $B = \left\{\frac{n}{2^p} \mid n \in \mathbb{Z} \text{ et } p \in \mathbb{N}\right\}$.
  Montrer que pour tout $x \in B$, $f(x) = ax$.
- **f)** Soit x_0 un réel fixé. On considère la suite (w_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \frac{\lfloor 2^n x_0 \rfloor}{2^n}$
  - **i)** Démontrer que (w_n) converge et donner sa limite.
  - **ii)** Déterminer $f(w_n)$ en fonction de w_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire l'expression de $f(x_0)$.

3) Déduire de ce qui précède toutes les fonctions f éléments de E.

Partie II. Seconde méthode

On étudie ici une autre méthode : ***les résultats de la partie I ne devront donc pas être utilisés****.*

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et vérifiant $(\star)$.

1) Montrer que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x+y) = f(x) + f(y) - f(0)$.

2) Montrer que $\forall x \in [0,1]$, $2x \in [0,1]$ ou $2x - 1 \in [0,1]$.

3) Dans cette question, on suppose que $f(0) = f(1)$.

- **a)** Montrer que f est 1-périodique.
- **b)** Justifier l'existence de $(c,d) \in [0,1]^2$ tel que : $\forall x \in [0,1], f(d) \leqslant f(x) \leqslant f(c)$
- **c)**
  - **i)** On suppose que $c \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$. Montrer que $f(c) = f(0)$.
  - **ii)** On suppose que $c \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Montrer que $f(c) = f(0)$.
- **d)** Montrer que $f(0) = f(c) = f(d)$.
  Que peut-on en déduire pour f ?

4) On considère la fonction $h : x \mapsto f(x) - (f(1) - f(0))x$.
Montrer que h vérifie la relation $(\star)$, puis que h est constante.

5) En déduire toutes les fonctions f solutions du problème.

— **FIN** —