Devoir surveillé n° 5
Version 1
Durée : 3 heures, calculatrices et documents interdits

I. Un exercice vu en TD.

– Critère spécial des séries alternées ou critère de Leibniz –
Soit (u_n) une suite de réels décroissante et de limite nulle. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$. Montrer que les suites extraites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes et en déduire que (S_n) converge.

II. Une suite récurrente.

On considère la fonction

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x} \end{array}.$$

On considère aussi la suite u définie par récurrence de la manière suivante :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n).$$

1) **a)** Dresser le tableau de variations de f, limites comprises.

b) Vérifier que la suite u est bien définie et à valeurs strictement positives.

2) À la fin de l'exécution de chacun de ces scripts, `n` a pour valeur 5 à gauche et 6 à droite.

```
from math import exp
u = 1
n = 0
while u > 10**-5 :
    u = exp(-u) / u
    n = n+1
```

```
from math import exp
u = 1
n = 0
while u < 10**5 :
    u = exp(-u) / u
    n = n+1
```

Que peut-on en déduire quant aux valeurs de u_5 et u_6 ? Que peut-on conjecturer ?

3) **a)** Étudier les variations de la fonction

$$g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^{-x} - x^2 \end{array}.$$

- **b)** En déduire que, sur $\mathbb{R}_+^*$, l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution, que l'on notera dorénavant α.
- **c)** Montrer que $\dfrac{1}{\mathrm{e}} < \alpha < 1$.

4) **a)** Montrer que $u_2 > u_0$ et que $u_1 > u_3$.

- **b)** En déduire les sens de variations des suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

5) On considère la fonction

$$h : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{rll} (f\circ f)(x) & \text{si} & x>0 \\ 0 & \text{si} & x=0 \end{array} \right. \end{array}.$$

- **a)** Expliciter $h(x)$ pour tout $x > 0$ et vérifier que h est continue en 0
- **b)** Résoudre sur $\mathbb{R}_+$ l'équation $h(x) = x$.
- **c)** En déduire la limite de la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$
- **d)** Est-ce que la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge ? Déterminer sa limite.
- **e)** Est-ce que la suite u converge ? Admet-elle une limite ?

III. Les quaternions de Hamilton.

On pose $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$ et on définit les deux lois $+$ et $\times$ sur $\mathcal{H}$ par :

$$\forall\left((z_1,z_2),(z_1',z_2')\right)\in\mathcal{H}^2, \left\{ \begin{array}{l} (z_1,z_2)+(z_1',z_2') = (z_1+z_1', z_2+z_2') \\ (z_1,z_2)\times(z_1',z_2') = \left(z_1z_1' - z_2\overline{z_2'}, z_1z_2' + z_2\overline{z_1'}\right) \end{array} \right.$$

On pose enfin $I = (1,0)$, $J = (i,0)$, $K = (0,1)$ et $L = (0,i)$.

1) Montrer que $(\mathcal{H},+,\times)$ est un anneau (on admettra que $\times$ est associative et distributive par rapport à $+$). Préciser l'élément nul $0_{\mathcal{H}}$ et l'élément unité $1_{\mathcal{H}}$.

2) On pose $G = \{I, J, K, L, -I, -J, -K, -L\}$. Dresser la table de $(G,\times)$ et montrer que $(G,\times)$ est un groupe non commutatif.

3) Déterminer le centre du groupe $(G,\times)$, c'est à dire, l'ensemble des éléments de G qui commutent avec tous les autres éléments de G.

4) On définit l'application $\sigma : \begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \longrightarrow & \mathcal{H} \\ (z_1,z_2) & \longmapsto & (\overline{z_1}, -z_2) \end{array}$.

- **a)** Montrer que σ est un automorphisme de $(\mathcal{H},+)$.
- **b)** Déterminer l'ensemble des points fixes de σ : $\mathcal{F} = \{A \in \mathcal{H}, \sigma(A) = A\}$.
- **c)** Montrer que : $\forall (A,B)\in\mathcal{H}^2, \sigma(A\times B) = \sigma(B)\times\sigma(A)$.

5) **a)** Démontrer que si $A \in \mathcal{H}$, alors $A\times\sigma(A) = \sigma(A)\times A = (n(A),0)$ où $n(A)$ est un réel dont on précisera l'expression en fonction de A.

- **b)** Démontrer que si $(A,B)\in\mathcal{H}^2$, alors, $n(A\times B) = n(A)n(B)$.

6) Démontrer que tout élément non nul de $\mathcal{H}$ est inversible (pour $\times$ bien sûr). On dit que $(\mathcal{H},+,\times)$ est un corps non commutatif.

— **FIN** —