Devoir surveillé n°3

Durée : 3 heures, calculatrices et documents interdits

I. Un exercice vu en TD.

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1) Calculer A^2 et vérifier que $A^2 = A + 2I_3$, où I_3 est la matrice identité 3×3.

2) En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.

II. Une équation différentielle non linéaire.

Partie 1

On pose $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x}}$ pour tout $x \in]0,1[$.

1) Étudier les variations de la fonction f.

2) Montrer que f est une bijection de $]0,1[$ vers $]0,+\infty[$.
On note g sa bijection réciproque. Donner, pour tout $x > 0$, une expression simple de $g(x)$.

Partie 2

On considère l'équation différentielle

$$(H) : 2x(1-x)y' + y = 0.$$

3) Résoudre (H) sur l'intervalle $]0,1[$.

4) Résoudre sur $]0,1[$ l'équation différentielle :

$$(E) : 2x(1-x)y' + y = (1-x)\sqrt{\frac{x}{1+x}}.$$

5) Déterminer les solutions y de (E) définies sur $]0,1[$ et vérifiant $y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$.

6) Quelles sont les solutions de (E) définies sur $]0,1[$ et qui sont à valeurs dans $]0,+\infty[$?

Partie 3

On considère l'équation différentielle non linéaire

$$(K) : xy' + 2y(1-y) = 0.$$

Par définition, les solutions de (K) sur un intervalle I sont les fonctions u dérivables sur I telles que

$$\forall x \in I, \quad xu'(x) + 2u(x)(1-u(x)) = 0.$$

7) Quelles sont les fonctions constantes sur $\mathbb{R}$ solutions de (K) ?

8) Dans cette question, on suppose que u est solution de (K) sur $]0,+\infty[$, à valeurs dans $]0,1[$.

- **a)** Montrer que u est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$.
- **b)** Nous démontrerons plus tard dans l'année que dans ce cas, u admet des limites aux bornes de son intervalle de définition.
  Justifier que ces deux limites sont finies ; on posera $\alpha = \lim\limits_{x\to+\infty}(u(x))$ et $\beta = \lim\limits_{x\to0^+}(u(x))$.
  Justifier que u réalise une bijection de $]0,+\infty[$ vers $]\alpha,\beta[$.
- **c)** On note v la bijection réciproque de u. Montrer que v est solution de (H) sur $]\alpha,\beta[$.
- **d)** En déduire qu'il existe un réel $c > 0$ tel que :

$$\forall x > 0, u(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{c}\right)^2}.$$

9) On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de (K) sur $]0,+\infty[$ et qui sont à valeurs dans $]0,1[$.

- **a)** Déterminer $\mathcal{S}$.
- **b)** Soit x_0 un réel strictement positif (fixé). Soit $y_0 \in]0,1[$ (fixé lui aussi). Montrer qu'il existe une, et une seule, solution u_0 de $\mathcal{S}$ qui vérifie $u_0(x_0) = y_0$.

III. Une fonction de $\mathscr{P}(\mathbb{R})$.

Soit A et B deux parties de $\mathbb{R}$. On définit la fonction $f : \mathscr{P}(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}(\mathbb{R})$ de la manière suivante : si $X \subset \mathbb{R}$, alors $f(X) = (X \cap A) \cup B$.

1) Soit X, Y deux parties de $\mathbb{R}$.

- **a)** Montrer que $X \subset Y \Leftrightarrow X \cap Y = X$.
- **b)** Montrer que $X \subset Y \Leftrightarrow X \cup Y = Y$.

2)
- **a)** Dans cette question, on suppose que $A = \varnothing$. Calculer $f(X)$ pour tout $X \subset \mathbb{R}$.
- **b)** Dans cette question, on suppose que $B = \mathbb{R}$. Calculer $f(X)$ pour tout $X \subset \mathbb{R}$.

c) Que remarque-t-on dans les deux cas précédents ?

3) Calculer, dans le cas général, $f(\varnothing)$, $f(A)$, $f(B)$ et $f(\mathbb{R})$.

4) Montrer que la fonction f est croissante, au sens de l'inclusion, *i.e.* que pour toutes parties X, Y de $\mathbb{R}$ si $X \subset Y$ alors $f(X) \subset f(Y)$.

5) Soit Y une partie de $\mathbb{R}$. Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes.

(i) Y admet un antécédent dans $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ par f.

(ii) $B \subset Y \subset A \cup B$.

(iii) $f(Y) = Y$.

6) **a)** Résoudre l'équation $f(X) = A$, d'inconnue $X \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$.

b) Résoudre l'équation $f(X) = B$, d'inconnue $X \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$.

7) **a)** Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que f soit constante.

b) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que f soit surjective.

c) Montrer que cette dernière condition est aussi nécessaire et suffisante pour que f soit injective.

8) **a)** Que peut-on dire de $f \circ f$?

b) Soit E un ensemble quelconque, soit $g : E \to E$ *idempotente*, *i.e.* vérifiant $g \circ g = g$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes.

(i) La fonction g est injective.

(ii) La fonction g est surjective.

(iii) On a $g = \mathrm{Id}_E$.

— **FIN** —