Devoir surveillé n° 5
Version 3
Durée : 3 heures, calculatrices et documents interdits

I. Un exercice vu en TD.

Montrer que les sous-groupes de $\mathbb{Z}$ sont exactement tous les $n\mathbb{Z}$, avec $n \in \mathbb{N}$.

II. Les quaternions de Hamilton.

On pose $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$ et on définit les deux lois $+$ et $\times$ sur $\mathcal{H}$ par :

$$\forall\left((z_1, z_2), (z_1', z_2')\right) \in \mathcal{H}^2, \begin{cases} (z_1, z_2) + (z_1', z_2') = (z_1 + z_1', z_2 + z_2') \\ (z_1, z_2) \times (z_1', z_2') = \left(z_1 z_1' - z_2 \overline{z_2'}, z_1 z_2' + z_2 \overline{z_1'}\right) \end{cases}$$

On pose enfin $I = (1, 0), J = (i, 0), K = (0, 1)$ et $L = (0, i)$.

1) Montrer que $(\mathcal{H}, +, \times)$ est un anneau (on admettra que $\times$ est associative et distributive par rapport à $+$). Préciser l'élément nul $0_{\mathcal{H}}$ et l'élément unité $1_{\mathcal{H}}$.

2) On pose $G = \{I, J, K, L, -I, -J, -K, -L\}$. Dresser la table de $(G, \times)$ et montrer que $(G, \times)$ est un groupe non commutatif.

3) Déterminer le centre du groupe $(G, \times)$, c'est à dire, l'ensemble des éléments de G qui commutent avec tous les autres éléments de G.

4) On définit l'application $\sigma : \begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \longrightarrow & \mathcal{H} \\ (z_1, z_2) & \longmapsto & (\overline{z_1}, -z_2) \end{array}$.

- **a)** Montrer que σ est un automorphisme de $(\mathcal{H}, +)$.
- **b)** Déterminer l'ensemble des points fixes de σ : $\mathcal{F} = \{A \in \mathcal{H}, \sigma(A) = A\}$.
- **c)** Montrer que : $\forall (A, B) \in \mathcal{H}^2, \sigma(A \times B) = \sigma(B) \times \sigma(A)$.

5)
- **a)** Démontrer que si $A \in \mathcal{H}$, alors $A \times \sigma(A) = \sigma(A) \times A = (n(A), 0)$ où $n(A)$ est un réel dont on précisera l'expression en fonction de A.
- **b)** Démontrer que si $(A, B) \in \mathcal{H}^2$, alors, $n(A \times B) = n(A)n(B)$.

6) Démontrer que tout élément non nul de $\mathcal{H}$ est inversible (pour $\times$ bien sûr). On dit que $(\mathcal{H}, +, \times)$ est un corps non commutatif.

III. Suites de Cauchy.

Lorsqu'une partie X de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$, on notera cette dernière $\sup X$.

Partie 1 : Suites de Cauchy

Étant donné $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes réels, on dit que u est une suite *de Cauchy* lorsque

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ \forall m \geqslant n_0,\ |u_n - u_m| \leqslant \varepsilon.$$

1) Lesquelles des suites ci-dessous sont de Cauchy ? Justifier.

a) $\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ **b)** $\left(\frac{(-1)^n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ **c)** $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$

2) Soit u une suite de Cauchy. Montrer que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ |u_n| \leqslant |u_{n_0}| + \varepsilon.$$

En déduire que toute suite de Cauchy est bornée.
La réciproque est-elle vraie ?

3) Montrer que toute suite convergente est de Cauchy.

Partie 2 : Convergence des suites de Cauchy

On cherche maintenant à démontrer la réciproque de $\boxed{\textbf{3)}}$ de la partie précédente.
Dans cette partie $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une suite bornée à termes réels. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$a_n = \inf \{ u_m \mid m \geqslant n \}$$

et

$$b_n = \sup \{ u_m \mid m \geqslant n \}.$$

4) **a)** Justifier que les définitions respectives de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ont bien un sens.

b) Expliciter les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $u = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

5) **a)** Montrer l'encadrement

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leqslant u_n \leqslant b_n.$$

b) Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

c) On suppose qu'on a un réel $h > 0$ et un entier naturel n tels que

$$\forall m \geqslant n,\ |u_m - u_n| \leqslant h.$$

Montrer l'encadrement $b_n - h \leqslant u_n \leqslant a_n + h$.

6) On suppose maintenant que u est une suite de Cauchy.
Montrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

7) En déduire que toute suite de Cauchy est convergente.

Partie 3 : Une application

On se donne une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\{-1,1\}$, et on définit, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\varepsilon_k}{2^k}.$$

8) Montrer que pour tout $(m,n)\in\mathbb{N}^2$,

$$|S_m - S_n| \leqslant \frac{1}{2^{\min(m,n)}}$$

9) En déduire que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.

10) Montrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un élément de $[-2,2]$.

— **FIN** —