QCM n° 9

Un peu de calcul.

Échauffement n°1 Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P_n = nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$. Montrer que 1 est racine de P_n et déterminer son ordre de multiplicité.

Échauffement n°2 Factoriser en produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $(X^2 - X + 2)^2 + (X-2)^2$.

QCM - cocher une case si la phrase qui suit est correcte.

Question n°1 Soit f une fonction continue sur $[0,1[$.

- ☐ Si $\forall x \in [0,1[,\ f(x) > 0$, alors $\exists a > 0$ tel que $\forall x \in [0,1[,\ f(x) \geqslant a$.
- ☐ Si f admet une limite finie en 1 alors f est prolongeable par continuité en 1.
- ☐ Si $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = +\infty$, alors f est minorée sur $[0,1[$.
- ☐ Alors $\frac{f(x)-f\left(\frac{1}{2}\right)}{x-\frac{1}{2}}$ admet une limite quand x tend vers $\frac{1}{2}$.

Question n°2 Soit f une application continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- ☐ Si $I = [a,b]$ alors f est bornée sur I
- ☐ Si $I = \mathbb{R}$ et f est bornée, alors f admet une limite en $+\infty$.
- ☐ Si $I = \mathbb{R}$ et f admet une limite en $-\infty$ et en $+\infty$, alors f est bornée.

Question n°3 Soit f un fonction définie sur $]0,1]$ telle que $\forall x \in]0,1],\ 0 \leqslant f(x) \leqslant 1$.

- ☐ Alors f admet un point fixe.
- ☐ Alors f est bornée sur $]0,1]$.
- ☐ Alors $\forall x \in]0,1],\ |f'(x)| \leqslant 1$
- ☐ Si f admet une limite 0, alors f est prolongeable par continuité en 0.

Question n°4 Soit f une application continue.

- ☐ Si f ne s'annule pas, elle est de signe constant.
- ☐ f est bornée et atteint ses bornes.
- ☐ f admet un sup dans $\bar{\mathbb{R}}$.
- ☐ Si elle est monotone, elle admet une limite en tout point de son ensemble de définition.

Question n°5 Soit I un intervalle et $f\ : I \to \mathbb{R}$, et $a, b \in I$ tels que $a < b$.

- ☐ Si f est croissante, $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$.
- ☐ Si f est continue, $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$.
- ☐ Si f est décroissante et continue, f admet une limite à gauche en b.
- ☐ Si f est décroissante et continue, $f([a,b[) = [f(a), \lim\limits_{b-} f[$.
- ☐ Si f est décroissante et continue, $f([a,b[) =]\lim\limits_{b-} f, f(a)]$.

Question n°6 Soit f une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ avec $f(0) = 0$. On suppose que la suite $f(1/n)$ converge vers 0 . Laquelle des conditions suivantes permet de déduire que f est continue à droite en 0 ?

- ☐ f est bornée
- ☐ f est croissante
- ☐ f est paire
- ☐ c'est toujours le cas

Question n°7 Soit A et B deux polynômes.

- ☐ Si $\deg A > \deg B$, alors $\deg(A + B) = \deg A$.
- ☐ $\deg(A + B) \geqslant \min(\deg A, \deg B)$.
- ☐ $\deg(A \circ B) = (\deg A) \times (\deg B)$.
- ☐ Si $A|B$, alors $\deg A \leqslant \deg B$.
- ☐ Si $A|B$, toute racine de A est racine de B.
- ☐ Si toute racine de A est racine de B, alors $A|B$.

Question n°8 Soit A un polynôme.

- ☐ Si $r_1, \cdots, r_n$ sont les racines de P, et qu'elles sont de multiplicité $m_1, \cdots, m_n$, alors $\deg P = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i$.
- ☐ Si λ est une racine de P de multiplicité m, alors λ est une racine de P' de multiplicité $m - 1$.
- ☐ Si λ est une racine de P' de multiplicité m, alors λ est une racine de P de multiplicité $m + 1$.