Devoir à la maison n° 16

À rendre le 4 avril

Pour chaque entier naturel n, on définit la fonction

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x^n}{\sqrt{1+x}}$$

ainsi que

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x = \int_0^1 f_n.$$

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Établir le tableau de variations de f_n sur $[0,1]$.

2) Représenter sur un même graphique les graphes des fonctions f_0, f_1 et f_2.

3) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite monotone (on précisera le sens de monotonie), qui converge vers 0.

4) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(n+1)u_n = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(\sqrt{1+x})^3}\mathrm{d}x.$$

5) En déduire un équivalent pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

6) Déterminer des nombres α_1, α_2 et α_3 tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(n+2)(n+1)u_n = \alpha_1(n+2) + \alpha_2 + \alpha_3 \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(\sqrt{1+x})^5}\mathrm{d}x.$$

7) En déduire l'existence et la valeur de nombres α et β tels que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admette le développement asymptotique :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

8) Soit g une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'intervalle $[0,1]$. On introduit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \int_0^1 x^n g(x)\mathrm{d}x.$$

Démontrer que, pour tout entier naturel non nul k, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet un développement asymptotique de la forme :

$$v_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{\beta_1}{n} + \frac{\beta_2}{n^2} + \cdots + \frac{\beta_k}{n^k} + o\left(\frac{1}{n^k}\right).$$

9) Exprimer les nombres β_1 et β_2 en fonction de g.

10) Soit h une fonction continue sur l'intervalle $[0,1]$, soit la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = n\int_0^1 x^n h(x)\mathrm{d}x.$$

Démontrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie et exprimer cette limite en fonction de h.

— FIN —