

LYCÉE LA MARTINIÈRE MONPLAISIR LYON

SCIENCES INDUSTRIELLES POUR L'INGÉNIEUR

CLASSE PRÉPARATOIRE M.P.S.I. ET M.P.I.I.

ANNÉE 2024 - 2025



C3 : MODÉLISATION CINÉMATIQUE DES SYSTÈMES  
COMPOSÉS DE CHAINES DE SOLIDES

## C3-4 - Cinématique du solide

26 Novembre  
2024

### Table des matières

#### I Champ cinématique des solides

- |    |  |   |
|----|--|---|
| 1  | Torseur cinématique                                  | 1 |
| 2  | Propriétés   | 3 |
| a) | Equiprojectivité                                     | 3 |
| b) | Composition des champs cinématiques                  | 4 |
| 3  | Champ de vecteur accélération des points d'un solide | 4 |

#### II Mouvements particuliers des solides

- |    |   |   |
|----|---|---|
| 1  | Mouvement de translation                      | 4 |
| a) | Définition                                    | 4 |
| b) | Mouvement de translation rectiligne           | 5 |
| c) | Mouvement de translation circulaire           | 5 |
| 2  | Mouvement de rotation                         | 6 |
| 3  | Mouvement de translation/rotation hélicoïdale | 6 |
| 4  | Mouvements plan                               | 6 |
| a) | Définition                                    | 6 |
| b) | Exemples                                      | 7 |

### Compétences

#### • Modéliser

- Déterminer les caractéristiques d'un solide ou d'un ensemble de solides indéformables.
- Modéliser la cinématique d'un ensemble de solides.
- Vérifier la cohérence du modèle choisi en confrontant les résultats analytiques et/ou numériques aux résultats expérimentaux.

#### • Communiquer

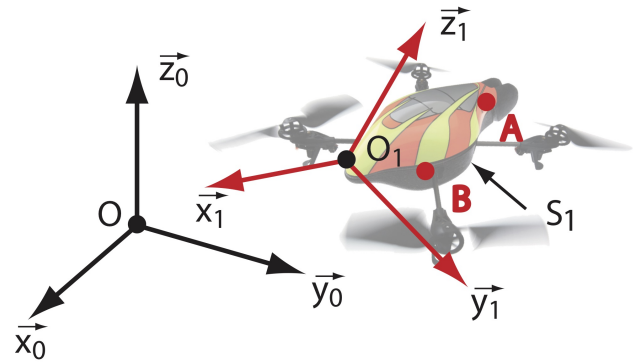
- Utiliser un vocabulaire technique, des symboles et des unités adéquats.

## I. Champ cinématique des solides

### 1 Torseur cinématique

Dans cette partie nous considérons que les solides sont indéformables. Le repère  $R_1$  est attaché au solide  $S_1$  (corps du drone ici), ainsi on note :

$$\vec{\Omega}(R_1/R_0) = \vec{\Omega}(S_1/R_0).$$



Considérons deux points **A et B appartenant au solide**  $S_1$  attachés au repère  $R_1 (O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ . D'après la définition des solides indéformables vue dans le premier chapitre :

$$\left[ \frac{d\vec{AB}}{dt} \right]_{R_1} = \vec{0}.$$

En écrivant la dérivée temporelle du vecteur  $\vec{AB}$  par rapport au repère  $R_0$  avec la formule de dérivation vectorielle, on obtient :

$$\left[ \frac{d\vec{AB}}{dt} \right]_{R_0} = \left[ \frac{d\vec{AB}}{dt} \right]_{R_1} + \vec{\Omega}(S_1/R_0) \wedge \vec{AB}.$$

On peut également écrire :

$$\left[ \frac{d\vec{AB}}{dt} \right]_{R_0} = \left[ \frac{d\vec{OB}}{dt} \right]_{R_0} - \left[ \frac{d\vec{OA}}{dt} \right]_{R_0} = \vec{V}(B/R_0) - \vec{V}(A/R_0)$$



### Définition 1 : Changement de point

- On obtient alors **la relation fondamentale de changement de point pour le champ cinématique** pour deux points  $A$  et  $B$  appartenant à un solide quelconque  $S$  :

$$\vec{V}(B/R_0) = \vec{V}(A/R_0) + \vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \vec{AB} = \vec{V}(A/R_0) + \vec{BA} \wedge \vec{\Omega}(S/R_0).$$

- On peut étendre cette formule à **deux points quelconques A et B** (n'appartenant pas forcément à  $S$ ) avec l'utilisation des vitesses d'entraînement :

$$\vec{V}(B \in S/R_0) = \vec{V}(A \in S/R_0) + \vec{BA} \wedge \vec{\Omega}(S/R_0). \quad (1)$$

- On peut parfois appeler cette relation, **la formule de Varignon**.



### Propriété 1 :

On remarque alors que les vecteurs vitesses des points d'un solide indéformable vérifient la relation de changement de point du moment d'un torseur. Nous pouvons alors définir le **torseur cinématiques**.



### Définition 2 : Torseur cinématique

On définit le torseur cinématique du mouvement d'un solide indéformable  $S$  par rapport à un repère  $R_0$ , le torseur qui a pour résultante, le vecteur de rotation instantané  $\overrightarrow{\Omega}(S/R_0)$  et pour moment la vitesse en un point donné  $A$ , dans le mouvement de  $S$  par rapport à  $R_0$ ,  $\overrightarrow{V}(A \in S/R_0)$ . On le note alors :

$$\left\{ \mathcal{V}_{(S/R_0)} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega}(S/R_0) \\ \overrightarrow{V}(A \in S/R_0) = \overrightarrow{V}_A(S/R_0) \end{array} \right\} \quad (2)$$



### Définition 3 : Torseur

Un torseur est un outil mathématique qui présente deux composantes vectorielles :

- Une résultante qui est **indépendante** du point où on l'exprime et que l'on note  $\vec{R} = \overrightarrow{\Omega}(S/R_0)$ .
- Un moment qui **dépend du point** où on l'exprime par la **formule fondamentale de changement de point** et que l'on note  $\vec{M}_A(\vec{R}) = \overrightarrow{V}(A \in S/R_0) = \overrightarrow{V}_A(S/R_0)$ .



### Remarque 1 :

Le point  $A$  est lié au solide  $S$ . Deux cas peuvent se présenter.

- Lorsque le point appartient physiquement au solide ( $S$ ), il est lié à tout instant à ce solide. On peut alors calculer sa vitesse avec le vecteur vitesse ou par dérivation vectorielle. On parlera alors de **point matériel**.
- Lorsque le point considéré est lié uniquement au solide à l'instant  $t$  où on calcule son vecteur vitesse, on ne peut calculer sa vitesse qu'en utilisant la loi de composition des vitesses. On parlera alors de **point géométrique**.

## 2 Propriétés

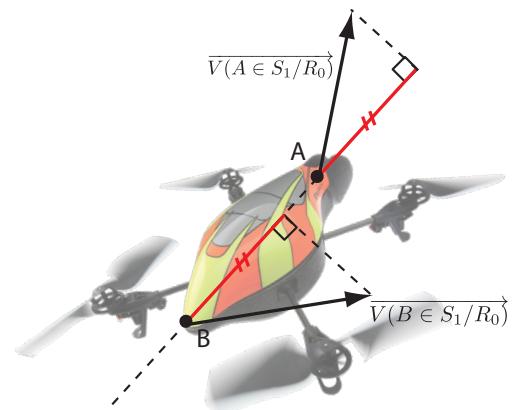
### a) Equiprojectivité



### Définition 4 : Equiprojectivité

Un champ de vitesse est **équiprojectif**, c'est à dire qu'il vérifie pour tout couple de point  $(A, B)$  dans le mouvement d'un solide  $S_1$  par rapport à  $R_0$  la relation suivante :

$$\overrightarrow{V}(A \in S_1/R_0) \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{V}(B \in S_1/R_0) \cdot \overrightarrow{AB} \quad (3)$$



## b) Composition des champs cinématiques

**Propriété 2 : Composition des champs cinématiques**

On peut décomposer un champ cinématique à l'aide des torseurs en effectuant une relation de Chasles par des solides successifs. Soit  $S_1, S_2, \dots, S_n$  un ensemble de solides indéformables :

$$\left\{ \mathcal{V}_{(S_n/S_0)} \right\} = \left\{ \mathcal{V}_{(S_n/S_{n-1})} \right\} + \left\{ \mathcal{V}_{(S_{n-1}/S_{n-2})} \right\} + \dots + \left\{ \mathcal{V}_{(S_1/S_0)} \right\} \quad (4)$$

Il en découle une décomposition en :

- Vecteur rotation instantané :

$$\overrightarrow{\Omega}(S_n/S_0) = \overrightarrow{\Omega}(S_n/S_{n-1}) + \overrightarrow{\Omega}(S_{n-1}/S_{n-2}) + \dots + \overrightarrow{\Omega}(S_1/S_0) \quad (5)$$

- Vecteur vitesse en un même point quelconque  $A$  :

$$\overrightarrow{V}(A \in S_n/S_0) = \overrightarrow{V}(A \in S_n/S_{n-1}) + \overrightarrow{V}(A \in S_{n-1}/S_{n-2}) + \dots + \overrightarrow{V}(A \in S_1/S_0) \quad (6)$$

## 3 Champ de vecteur accélération des points d'un solide

**Définition 5 : Champ d'accélération**

Le relation de changement de point entre A et B pour un champ d'accélération d'un solide  $S_1$  par rapport à un repère  $R_0$  est donnée par :

$$\overrightarrow{a}(B/R_0) = \overrightarrow{a}(A/R_0) + \left[ \frac{d}{dt} \overrightarrow{\Omega}(S_1/R_0) \right]_{R_0} \wedge \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Omega}(S_1/R_0) \wedge (\overrightarrow{\Omega}(S_1/R_0) \wedge \overrightarrow{AB}).$$

**Attention :**

Un champ d'accélération n'est pas un champ de moment, c'est à dire qu'il ne vérifie pas les propriétés d'équiprojectivité et il ne peut pas être décrit par un torseur.

## II. Mouvements particuliers des solides

## 1 Mouvement de translation

## a) Définition

**Définition 6 : Mouvement de translation**

Un solide  $S_1$  est en mouvement de **translation** par rapport à  $R_0$  si l'ensemble des points de  $S_1$  ont la même vitesse à l'instant  $t$  par rapport à  $R_0$ .

Le vecteur de rotation instantané associé à ce torseur est nul :  $\overrightarrow{\Omega}(S_1/R_0) = \vec{0}$ . Il s'agit donc d'un **torseur couple** qui est indépendant du point où on l'exprime :

$$\left\{ \mathcal{V}_{(S_1/R_0)} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \overrightarrow{V}(A \in S_1/R_0) \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \overrightarrow{V}(B \in S_1/R_0) \end{array} \right\}_B \quad (7)$$

Parmi les mouvements de translation, on peut en retenir deux particuliers :

b) **Mouvement de translation rectiligne**



**Définition 7 : translation rectiligne**

Un mouvement de translation de  $S_1$  par rapport à  $R_0$  est dit de **translation rectiligne** si la trajectoire de tous les points de  $S_1$  par rapport à  $R_0$  est une **droite**. Dans ce cas  $\vec{V}(A \in S_1/R_0)$  a pour direction la trajectoire du point A.

c) **Mouvement de translation circulaire**



**Définition 8 : Mouvement de translation circulaire**

Un mouvement de  $S_1$  par rapport à  $R_0$  est dit de **translation circulaire** si la trajectoire de tous les points de  $S_1$  sont des **cercles**.

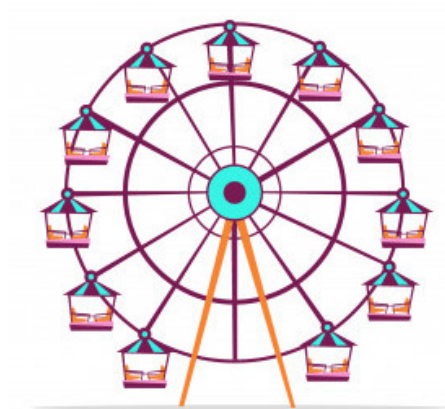


FIGURE 1 – Exemple de translation rectiligne et circulaire.

## 2 Mouvement de rotation



### Définition 9 : Mouvement de rotation

Un solide  $S_1$  est en **mouvement de rotation** par rapport à  $R_0$  autour d'un axe  $(A, \vec{u})$  si tous les points appartenant à l'axe  $(A, \vec{u})$  ont une vitesse nulle par rapport à  $R_0$ . Le vecteur de rotation instantané  $(\vec{\Omega}(S_1/S_0))$  est alors colinéaire à la direction  $\vec{u}$  :

$$\vec{\Omega}(S_1/S_0) \wedge \vec{u} = \vec{0}$$

$$\left\{ \mathcal{V}_{(S_1/R_0)} \right\}_P = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}(S_1/S_0) \\ \vec{0} \end{array} \right\} \quad (8)$$

$$\forall P \in (A, \vec{u}).$$



### Remarque 2 :

Ce torseur est alors "**un glisseur**" car il existe des points pour lesquels le moment du torseur cinématique est nul. Ces points appartiennent à l'axe de rotation.

## 3 Mouvement de translation/rotation hélicoïdale



### Définition 10 : Mouvement de translation/rotation hélicoïdale

- Un mouvement de **translation/rotation** hélicoïdale est la superposition entre un mouvement de rotation autour d'un axe  $(A, \vec{u})$  et de translation suivant la direction  $\vec{u}$ .
- Ces deux mouvements sont liés par le paramètre  $p$  qui représente le **pas hélicoïdal** et s'exprime en  $m.rad^{-1}$ .
- Le torseur cinématique associé à ce mouvement pour un solide  $S_1$  par rapport à  $R_0$  est donné par :

$$\left\{ \mathcal{V}_{(S_1/R_0)} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}(S_1/S_0) = \Omega \cdot \vec{u} \\ \vec{V}(A \in S_1/R_0) = p\Omega \cdot \vec{u} \end{array} \right\} \quad (9)$$

## 4 Mouvements plan

### a) Définition

Soit un solide  $S_1$ , de repère lié  $R_1$ , en mouvement dans un repère  $R_0$ .


**Définition 11 : Mouvement plan**

On dit que  $S_1$  a un **mouvement plan** dans  $R_0$  si chaque point  $M \in S_1$  se déplace parallèlement à un plan  $P_0$  lié à  $R_0$ . Autrement dit, si  $\vec{n}$  est la normale à  $P_0$ , alors :

$$\vec{V}(M \in S_1 / R_0) \cdot \vec{n} = 0 \quad \forall M \in S_1$$


**Remarque 3 :**

Dans le cas d'un mouvement plan (par exemple dans le plan  $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$ ), le torseur cinématique de  $S_1$  par rapport à  $R_0$  se ramène à :

$$\left\{ \mathcal{V}_{(S_1 / R_0)} \right\} = \underset{\forall M}{\left\{ \begin{array}{cc} 0 & V_x \\ 0 & V_y \\ \omega_z & 0 \end{array} \right\}}_{R_0}$$

On remarquera ainsi que  $\overrightarrow{\Omega_{(S_1 / R_0)}} \perp \vec{V}(M \in S_1 / R_0)$ , et donc que ce torseur est un glisseur.

**b) Exemples**

**Exemple 1 : Forme des torseurs pour des mouvements plans**

- cas d'un mouvement dans le plan  $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$ , le torseur cinématique de  $S_1$  par rapport à  $R_0$  est donné par :
- cas d'un mouvement dans le plan  $(O, \vec{z}_0, \vec{x}_0)$ , le torseur cinématique de  $S_1$  par rapport à  $R_0$  est donné par :
- cas d'un mouvement dans le plan  $(O, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ , le torseur cinématique de  $S_1$  par rapport à  $R_0$  est donné par :