C9 : Modélisation des performances statiques des systèmes
C9-2 : Résolution d'un problème de statique des solides

Émilien DURIF

Lycée La Martinière Monplaisir Lyon
Classe de MPSI
28 Mai 2024

Plan

1. Isolement d'un système dans un référentiel
   - Isolement
   - Actions mécaniques extérieures et intérieures
   - Référentiel
2. Énoncé du Principe Fondamental de la Statique
   - Equilibre
   - Principe Fondamental de la Statique
   - Théorèmes généraux
3. Méthodologie de résolution
   - Cas particuliers de résolutions simples
   - Méthodologie générale d'un problème de statique
   - Résolutions analytique
4. Exemple de résolutions
   - Présentation du problème
   - Résolution analytique

Plan

Plan

Isolement d'un système

Isolement

La première étape de l'étude statique d'un système consiste à **isoler** un ensemble ou système. On aura la possibilité d'isoler un ou plusieurs solides à la fois. Un fois l'isolement effectué, on pourra alors discerner l'extérieur et l'intérieur d'un système (E). On notera $(\overline{E})$ l'ensemble extérieur à (E).

Actions extérieurs et intérieurs

- Les **actions mécaniques extérieures** correspondent à celles exercées par un quelconque composant externe $(\overline{E})$ sur (E).
- Les **actions mécaniques intérieurs** correspondent à celles exercées par un quelconque composant de (E) sur un autre composant de (E).

Plan

Référentiel

Avant d'appliquer le Principe Fondamental de la Statique, nous avons besoin de repérer l'ensemble (E) par rapport au temps et à l'espace. Pour cela, nous utilisons des référentiels. Un référentiel est l'association d'un repère spatial et d'une base de temps.

Référentiel galiléen

Un **référentiel galiléen** est un couple repère $\left(R\left(0, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}\right)\right)$ et base de temps (t), par rapport auquel le **Principe Fondamental de la Statique s'applique**.

Remarque

Pour la plupart des mécanismes étudiés en laboratoire à notre échelle de temps et de distance, on pourra considérer que le référentiel lié à la terre est une bonne approximation de référentiel galiléen.

Plan

Plan

Principe Fondamental de la statique

Équilibre

Considérons un ensemble matériel (E). On dit que (E) est en équilibre si au cours du temps, chaque point de (E) conserve une position fixe par rapport à un repère R .

Principe Fondamental de la statique

Dans un référentiel R **galiléen**, si un ensemble matériel (E) est en équilibre par rapport à R , alors le torseur des actions mécaniques extérieures s'appliquant sur (E) est nul :

$$(E) \text{ à l'équilibre} \quad \Rightarrow \quad \sum\{\mathcal{T}_{\overline{E}\rightarrow E}\} = \{\mathcal{T}_{ext\rightarrow E}\} = \{0\} \tag{1}$$

(où $(\bar{E})$ désigne l'extérieur de (E).)

Plan

Théorèmes généraux

Théorème de la résultante statique

Pour tout ensemble matériel (E) en équilibre par rapport à un référentiel galiléen :

$$\sum \overrightarrow{R_{(\bar{E}\rightarrow E)}} = \overrightarrow{R_{(ext\rightarrow E)}} = \overrightarrow{0} \quad (2)$$

Théorème du moment statique

Pour tout ensemble matériel (E) en équilibre par rapport à un référentiel galiléen :

$$\sum \overrightarrow{\mathcal{M}_{A(\bar{E}\rightarrow E)}} = \sum \overrightarrow{\mathcal{M}_{A(ext\rightarrow E)}} = \overrightarrow{0} \; \forall A \quad (3)$$

Théorème des actions réciproques

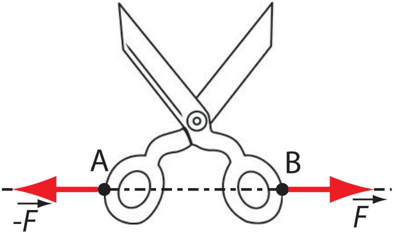
Soient (E_1) et (E_2) deux sous-ensembles matériels de (E), en équilibre par rapport à un repère galiléen, et exerçant une action mécanique l'un sur l'autre. Alors :

$$\left\{\mathcal{T}_{(E_1\rightarrow E_2)}\right\} = -\left\{\mathcal{T}_{(E_2\rightarrow E_1)}\right\} \quad (4)$$

Réciproque du PFS

Attention

La réciproque du principe fondamental de la statique et des théorèmes généraux ne s'appliquent pas, comme le montre l'exemple suivant.

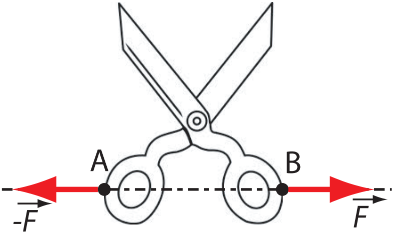


- $\overrightarrow{R_{(ext\to E)}} = \overrightarrow{F} - \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$,
- $\overrightarrow{\mathcal{M}_{A(ext\to E)}} = \overrightarrow{AA} \wedge (-\overrightarrow{F}) + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$.

Réciproque du PFS

Attention

La réciproque du principe fondamental de la statique et des théorèmes généraux ne s'appliquent pas, comme le montre l'exemple suivant.

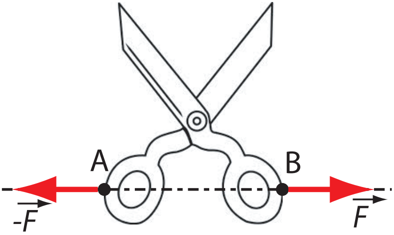


- $\overrightarrow{R_{(ext \to E)}} = \vec{F} - \vec{F} = \vec{0}$,
- $\overrightarrow{\mathcal{M}_{A(ext \to E)}} = \overrightarrow{AA} \wedge (-\vec{F}) + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{F} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$.

Réciproque du PFS

Attention

La réciproque du principe fondamental de la statique et des théorèmes généraux ne s'appliquent pas, comme le montre l'exemple suivant.



- $\overrightarrow{R_{(ext \rightarrow E)}} = \overrightarrow{F} - \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$,
- $\overrightarrow{\mathcal{M}_{A(ext \rightarrow E)}} = \overrightarrow{AA} \wedge (-\overrightarrow{F}) + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$.

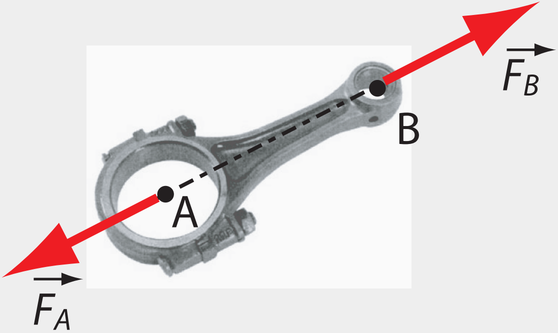
Plan

Cas particuliers de résolutions simples

Solide soumis à deux glisseurs

Soit un solide (E) soumis à deux glisseurs, alors la résultante des deux efforts associés à ces deux actions mécaniques sont directement opposées. C'est à dire **opposées** et **dirigées** par la droites (AB) : droite joignant les deux points d'applications d'effort.

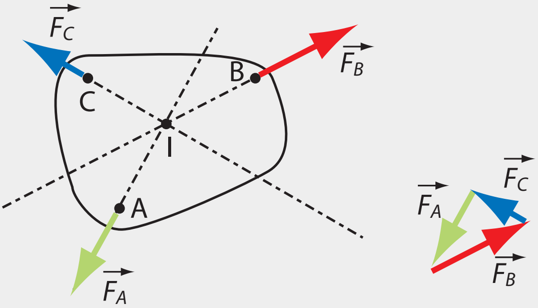
$\overrightarrow{F_A} = -\overrightarrow{F_B}$



Cas particuliers de résolutions simples

Solide soumis à trois glisseurs

- trois directions concourantes ;
- vecteurs associés formant le triangle des efforts.



Plan

Méthodologie générale d'un problème de statique

Méthodologie générale d'un problème de statique

On considérera dans cette partie des ensembles (E) correspondant à des systèmes mécaniques composés de plusieurs solides (N_S solides) liés entre eux par des liaisons mécaniques. L'objectif d'une résolution statique est pour la plupart du temps de calculer les actions mécaniques au niveau des liaisons dans le but de les dimensionner et/ou de vérifier leur tenue vis-à-vis d'une sollicitation extérieure.

1. Isolement d'un système (E) dans un référentiel galiléen.
2. Construction du graphe de structure du système considéré (Graphe de liaison + Actions mécaniques extérieures à E).
3. Ordonnancement des isolements : on commencera par isoler les solides soumis à 2 actions mécaniques de type glisseur, puis les solides soumis à 3, etc...
4. Bilan des Actions mécaniques Extérieures pour chaque isolement.

Méthodologie générale d'un problème de statique

Méthodologie générale d'un problème de statique

On considérera dans cette partie des ensembles (E) correspondant à des systèmes mécaniques composés de plusieurs solides (N_S solides) liés entre eux par des liaisons mécaniques. L'objectif d'une résolution statique est pour la plupart du temps de calculer les actions mécaniques au niveau des liaisons dans le but de les dimensionner et/ou de vérifier leur tenue vis-à-vis d'une sollicitation extérieure.

1. Isolement d'un système (E) dans un référentiel galiléen.
2. Construction du graphe de structure du système considéré (Graphe de liaison + Actions mécaniques extérieures à E).
3. Ordonnancement des isolements : on commencera par isoler les solides soumis à 2 actions mécaniques de type glisseur, puis les solides soumis à 3, etc...
4. Bilan des Actions mécaniques Extérieures pour chaque isolement.

Méthodologie générale d'un problème de statique

Méthodologie générale d'un problème de statique

On considérera dans cette partie des ensembles (E) correspondant à des systèmes mécaniques composés de plusieurs solides (N_S solides) liés entre eux par des liaisons mécaniques. L'objectif d'une résolution statique est pour la plupart du temps de calculer les actions mécaniques au niveau des liaisons dans le but de les dimensionner et/ou de vérifier leur tenue vis-à-vis d'une sollicitation extérieure.

1. Isolement d'un système (E) dans un référentiel galiléen.
2. Construction du graphe de structure du système considéré (Graphe de liaison + Actions mécaniques extérieures à E).
3. Ordonnancement des isolements : on commencera par isoler les solides soumis à 2 actions mécaniques de type glisseur, puis les solides soumis à 3, etc...
4. Bilan des Actions mécaniques Extérieures pour chaque isolement.

Méthodologie générale d'un problème de statique

Méthodologie générale d'un problème de statique

On considérera dans cette partie des ensembles (E) correspondant à des systèmes mécaniques composés de plusieurs solides (N_S solides) liés entre eux par des liaisons mécaniques. L'objectif d'une résolution statique est pour la plupart du temps de calculer les actions mécaniques au niveau des liaisons dans le but de les dimensionner et/ou de vérifier leur tenue vis-à-vis d'une sollicitation extérieure.

1. Isolement d'un système (E) dans un référentiel galiléen.
2. Construction du graphe de structure du système considéré (Graphe de liaison + Actions mécaniques extérieures à E).
3. Ordonnancement des isolements : on commencera par isoler les solides soumis à 2 actions mécaniques de type glisseur, puis les solides soumis à 3, etc...
4. Bilan des Actions mécaniques Extérieures pour chaque isolement.

Plan

Résolutions analytique

Résolution analytique

- La résolution analytique consiste à déterminer les expressions littérales des torseurs au niveau des liaisons mécaniques d'un système.
- Pour chaque isolement, on exprime les torseurs des actions mécaniques extérieures en un même point judicieusement choisi.
- L'écriture du P.F.S donne 6 équations pour un problème 3D et 3 équations pour un problème plan.
- Le regroupement de toutes les équations aboutit à un système linéaire d'équations de dimension :
  - $3 \cdot N_S$ pour un problème plan ;
  - $6 \cdot N_S$ pour un problème tridimensionnel.
- On s'attachera bien à vérifier l'homogénéité des expressions littérales ainsi que leur cohérence lorsque cela sera possible.

Résolutions analytique

Résolution analytique

- La résolution analytique consiste à déterminer les expressions littérales des torseurs au niveau des liaisons mécaniques d'un système.
- Pour chaque isolement, on exprime les torseurs des actions mécaniques extérieures en un même point judicieusement choisi.
- L'écriture du P.F.S donne 6 équations pour un problème 3D et 3 équations pour un problème plan.
- Le regroupement de toutes les équations aboutit à un système linéaire d'équations de dimension :
  - $3 \cdot N_S$ pour un problème plan ;
  - $6 \cdot N_S$ pour un problème tridimensionnel.
- On s'attachera bien à vérifier l'homogénéité des expressions littérales ainsi que leur cohérence lorsque cela sera possible.

Résolutions analytique

Résolution analytique

- La résolution analytique consiste à déterminer les expressions littérales des torseurs au niveau des liaisons mécaniques d'un système.
- Pour chaque isolement, on exprime les torseurs des actions mécaniques extérieures en un même point judicieusement choisi.
- L'écriture du P.F.S donne 6 équations pour un problème 3D et 3 équations pour un problème plan.
- Le regroupement de toutes les équations aboutit à un système linéaire d'équations de dimension :
  - $3 \cdot N_S$ pour un problème plan ;
  - $6 \cdot N_S$ pour un problème tridimensionnel.
- On s'attachera bien à vérifier l'homogénéité des expressions littérales ainsi que leur cohérence lorsque cela sera possible.

Résolutions analytique

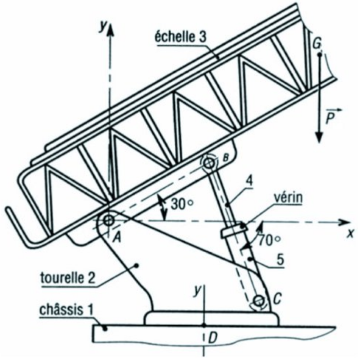
Résolution analytique

- La résolution analytique consiste à déterminer les expressions littérales des torseurs au niveau des liaisons mécaniques d'un système.
- Pour chaque isolement, on exprime les torseurs des actions mécaniques extérieures en un même point judicieusement choisi.
- L'écriture du P.F.S donne 6 équations pour un problème 3D et 3 équations pour un problème plan.
- Le regroupement de toutes les équations aboutit à un système linéaire d'équations de dimension :
  - $3 \cdot N_S$ pour un problème plan ;
  - $6 \cdot N_S$ pour un problème tridimensionnel.
- On s'attachera bien à vérifier l'homogénéité des expressions littérales ainsi que leur cohérence lorsque cela sera possible.

Plan

Présentation du problème

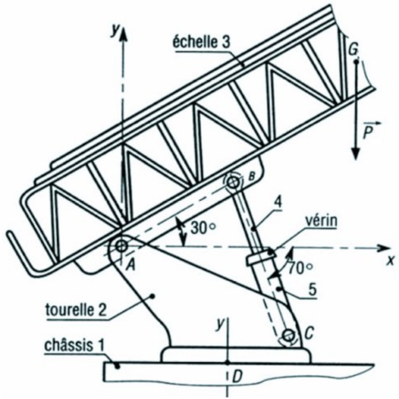
- Objectifs : Déterminer la loi d'entrée-sortie d'une échelle de pompier.



Présentation du problème

- Objectifs : Déterminer la loi d'entrée-sortie d'une échelle de pompier.

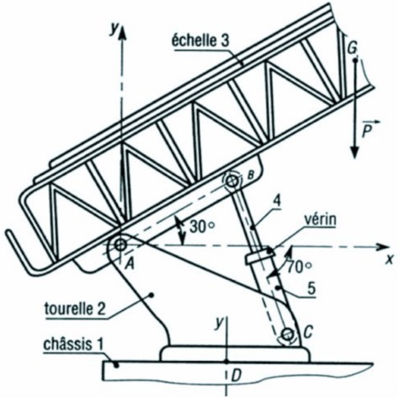
- Entrée :
- Sortie :



Présentation du problème

- Objectifs : Déterminer la loi d'entrée-sortie d'une échelle de pompier.

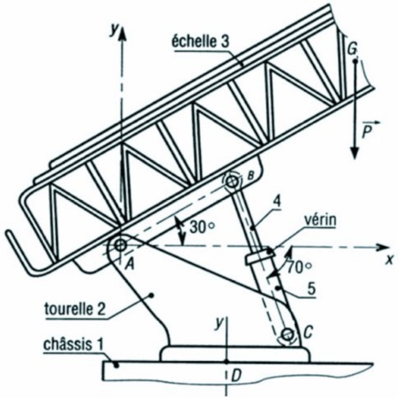
- Entrée : Pression p dans le vérin ;
- Sortie : Charge $\overrightarrow{P}$ à orienter ;



Plan

Résolution analytique

On repère la position d'un point I par ses coordonnées (x_I, y_I) respectives dans le plan $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$ par rapport au point A. (*ie* pour B, x_B et y_B).

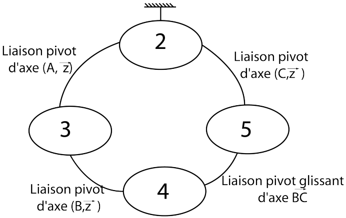


Résolution analytique

1. On traduit l'équilibre du système $(\{3+4+5\})$ dans un référentiel galiléen $R\left(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y},\overrightarrow{z}\right)$.
2. Graphe de structure :

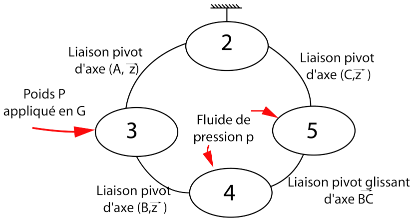
Résolution analytique

1. On traduit l'équilibre du système $(\{3+4+5\})$ dans un référentiel galiléen $R\left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}\right)$.
2. Graphe de structure :



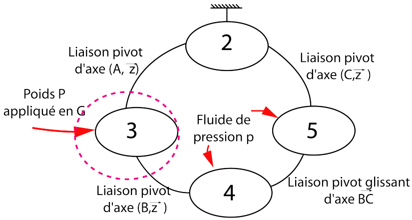
Résolution analytique

1. On traduit l'équilibre du système ($\{3+4+5\}$) dans un référentiel galiléen $R\left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}\right)$.
2. Graphe de structure :



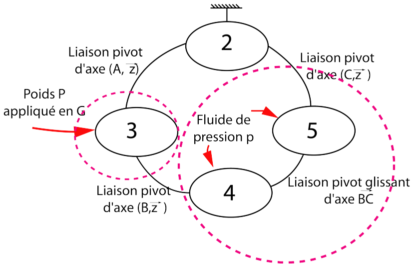
Résolution analytique

1. On traduit l'équilibre du système ($\{3+4+5\}$) dans un référentiel galiléen $R\left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}\right)$.
2. Graphe de structure :



Résolution analytique

1. On traduit l'équilibre du système ($\{3+4+5\}$) dans un référentiel galiléen $R\left(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y},\overrightarrow{z}\right)$.
2. Graphe de structure :



Résolution analytique

3. Ordonnancement des isolements : solide $\Sigma = \{4 + 5\}$ puis 3.
4. Bilan des Actions mécaniques pour chaque isolement :
   - **On isole Σ : Bilan des Actions Mécaniques Extérieures :**

$$\{\mathcal{T}_{(3\to\Sigma)}\} = {}_B\left\{\begin{array}{c} X_{34}\overrightarrow{x} + Y_{34}\overrightarrow{y} \\ \overrightarrow{0} \end{array}\right\}$$

$$\{\mathcal{T}_{(2\to\Sigma)}\} = {}_C\left\{\begin{array}{c} X_{25}\overrightarrow{x} + Y_{25}\overrightarrow{y} \\ \overrightarrow{0} \end{array}\right\} = {}_B\left\{\begin{array}{c} X_{25}\overrightarrow{x} + Y_{25}\overrightarrow{y} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_{B(2\to5)}} = \overrightarrow{BC} \wedge (X_{25}\overrightarrow{x} + Y_{25}\overrightarrow{y}) \end{array}\right\}$$

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_{B(2\to5)}} = [(x_C - x_B)\ \overrightarrow{x} + (y_C - y_B)\ \overrightarrow{y}] \wedge (X_{25}\ \overrightarrow{x} + Y_{25}\ \overrightarrow{y})$$
$$= [(x_C - x_B)\ Y_{25} - (y_C - y_B)\ X_{25}]\ \overrightarrow{z}.$$

Résolution analytique

3. Ordonnancement des isolements : solide $\Sigma = \{4+5\}$ puis 3.
4. Bilan des Actions mécaniques pour chaque isolement :
   - **On isole Σ : Bilan des Actions Mécaniques Extérieures :**

$$\{\mathcal{T}_{(3\to\Sigma)}\} = {}_B\left\{ \begin{array}{c} X_{34}\overrightarrow{x} + Y_{34}\overrightarrow{y} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}$$

$$\{\mathcal{T}_{(2\to\Sigma)}\} = {}_C\left\{ \begin{array}{c} X_{25}\overrightarrow{x} + Y_{25}\overrightarrow{y} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\} = {}_B\left\{ \begin{array}{c} X_{25}\overrightarrow{x} + Y_{25}\overrightarrow{y} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_{B(2\to5)}} = \overrightarrow{BC} \wedge (X_{25}\overrightarrow{x} + Y_{25}\overrightarrow{y}) \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathcal{M}_{B(2\to5)}} &= [(x_C - x_B)\ \overrightarrow{x} + (y_C - y_B)\ \overrightarrow{y}] \wedge (X_{25}\ \overrightarrow{x} + Y_{25}\ \overrightarrow{y}) \\ &= [(x_C - x_B)\ Y_{25} - (y_C - y_B)\ X_{25}]\ \overrightarrow{z}.\end{aligned}$$

Résolution analytique

- **On isole 3 : Bilan des Actions Mécaniques Extérieures :**

$$\left\{\mathcal{T}_{(\Sigma\to 3)}\right\} = -\left\{\mathcal{T}_{(3\to\Sigma)}\right\} = {}_B\left\{\begin{array}{c} -X_{34}\overrightarrow{x} - Y_{34}\overrightarrow{y} \\ \overrightarrow{0} \end{array}\right\}$$

$$= {}_A\left\{\begin{array}{c} -X_{34}\overrightarrow{x} - Y_{34}\overrightarrow{y} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_{A(\Sigma\to 3)}} = \overrightarrow{AB} \wedge \left(-X_{34}\overrightarrow{x} - Y_{34}\overrightarrow{y}\right) \end{array}\right\}$$

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_{A(\Sigma\to 3)}} = \left[x_B\ \overrightarrow{x} + y_B\ \overrightarrow{y}\right] \wedge \left[-X_{34}\overrightarrow{x} - Y_{34}\overrightarrow{y}\right] = \left[y_B\ X_{34} - x_B\ Y_{34}\right]\ \overrightarrow{z}$$

$$\left\{\mathcal{T}_{(2\to 3)}\right\} = {}_A\left\{\begin{array}{c} X_{23}\overrightarrow{x} + Y_{23}\overrightarrow{y} \\ \overrightarrow{0} \end{array}\right\}$$

$$\left\{\mathcal{T}_{(P\to 3)}\right\} = {}_G\left\{\begin{array}{c} -P\overrightarrow{y} \\ \overrightarrow{0} \end{array}\right\} = {}_A\left\{\begin{array}{c} -P\overrightarrow{y} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_{A(P\to 3)}} = \overrightarrow{AG} \wedge \left(-P\overrightarrow{y}\right) \end{array}\right\}$$

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_{A(P\to 3)}} = \left[x_G\ \overrightarrow{x} + y_G\ \overrightarrow{y}\right] \wedge \left(-P\ \overrightarrow{y}\right) = -x_G\ P\ \overrightarrow{z}.$$

Résolution analytique

Équations

On écrit alors le PFS pour les deux isolements :

$$\begin{cases} \sum \left\{ \mathcal{T}_{(\overline{\Sigma} \rightarrow \Sigma)} \right\} = \{0\} \\ \sum \left\{ \mathcal{T}_{(\overline{3} \rightarrow 3)} \right\} = \{0\} \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} (1)\text{Résultante en } \overrightarrow{x} \text{ pour } \Sigma \\ (2)\text{Résultante en } \overrightarrow{y} \text{ pour } \Sigma \\ (3)\text{Moment en} B\,\overrightarrow{z} \text{ pour } \Sigma \\ (4)\text{Résultante en } \overrightarrow{x} \text{ pour } 3 \\ (5)\text{Résultante en } \overrightarrow{y} \text{ pour } 3 \\ (6)\text{Moment en} A\,\overrightarrow{z} \text{ pour } 3 \end{array} = \begin{cases} X_{25} + X_{34} = 0 \\ Y_{25} + Y_{34} = 0 \\ (x_C - x_B)\ Y_{25} - (y_C - y_B)\, X_{25} = 0 \\ X_{23} - X_{34} = 0 \\ Y_{23} - Y_{34} - P = 0 \\ y_B\ X_{34} - x_B\ Y_{34} - x_G\ P = 0 \end{cases}$$

Résolution analytique

- En combinant (1), (2) et (3)

$$\boxed{Y_{34} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = -\tan 70^\circ \ X_{34}.}$$

- En injectant dans l'équation (6),

$$X_{34} \ (y_B + x_B \ \tan 70^\circ) = x_G \ P.$$

- D'où,

$$X_{34} = \frac{x_G \ P}{y_B + x_B \ \tan 70^\circ}.$$

- On en déduit alors :

$$\boxed{\|\overrightarrow{F}_{3\rightarrow4}\| = \sqrt{X_{34}^2 + Y_{34}^2} = \frac{x_G \ P}{y_B + x_B \ \tan 70^\circ}\sqrt{1 + \tan^2 70^\circ}}$$

Résolution analytique

- En combinant (1), (2) et (3)

$$\boxed{Y_{34} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = -\tan 70^\circ \; X_{34}.}$$

- En injectant dans l'équation (6),

$$X_{34} \; (y_B + x_B \; \tan 70^\circ) = x_G \; P.$$

- D'où,

$$X_{34} = \frac{x_G \; P}{y_B + x_B \; \tan 70^\circ}.$$

- On en déduit alors :

$$\boxed{\|\overrightarrow{F}_{3\rightarrow 4}\| = \sqrt{X_{34}^2 + Y_{34}^2} = \frac{x_G \; P}{y_B + x_B \; \tan 70^\circ}\sqrt{1 + \tan^2 70^\circ}}$$

Résolution analytique

- En combinant (1), (2) et (3)

$$\boxed{Y_{34} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = -\tan 70^\circ \; X_{34}.}$$

- En injectant dans l'équation (6),

$$X_{34} \; (y_B + x_B \; \tan 70^\circ) = x_G \; P.$$

- D'où,

$$X_{34} = \frac{x_G \; P}{y_B + x_B \; \tan 70^\circ}.$$

- On en déduit alors :

$$\boxed{\|\overrightarrow{F}_{3\rightarrow 4}\| = \sqrt{X_{34}^2 + Y_{34}^2} = \frac{x_G \; P}{y_B + x_B \; \tan 70^\circ}\sqrt{1 + \tan^2 70^\circ}}$$

Résolution analytique

- En combinant (1), (2) et (3)

$$\boxed{Y_{34} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = -\tan 70^\circ \ X_{34}.}$$

- En injectant dans l'équation (6),

$$X_{34} \ \left(y_B + x_B \ \tan 70^\circ\right) = x_G \ P.$$

- D'où,

$$X_{34} = \frac{x_G \ P}{y_B + x_B \ \tan 70^\circ}.$$

- On en déduit alors :

$$\boxed{\|\overrightarrow{F}_{3\to 4}\| = \sqrt{X_{34}^2 + Y_{34}^2} = \frac{x_G \ P}{y_B + x_B \ \tan 70^\circ}\sqrt{1 + \tan^2 70^\circ}}$$