

Devoir à la maison n° 6

À rendre le 16 novembre

On se propose ici de démontrer le théorème de Cantor-Bernstein, qui s'énonce comme suit.

Soit E et F deux ensembles. S'il existe une injection de f de E dans F et une injection g de F dans E , alors il existe nécessairement une bijection de E sur F .

Partie A : un cas particulier

On se place d'abord dans le cas particulier où F est un sous-ensemble de E .

Dans cette partie, on notera \bar{A} le complémentaire dans E de toute partie A de E .

- 1) Dans ce cas, il existe évidemment une injection de F dans E , laquelle ?
- 2) On suppose alors qu'il existe une injection f de E dans F et on construit par récurrence des parties de E , $H_0, H_1, \dots, H_n, \dots$ définies par :

$$\begin{aligned} H_0 &= E \setminus F \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad H_{n+1} &= f(H_n) \end{aligned}$$

Et on pose $H = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} H_n$.

- a) Montrer que $\bar{H} \subset F$ et en déduire que $\bar{H} = \bar{H} \cap F$.
- b) Montrer que $f(H) = H \setminus H_0$ et en déduire que $f(H) = H \cap F$.
- 3) On note alors φ l'application de E dans E qui à tout élément x de E associe $f(x)$ si $x \in H$ et x sinon. Montrer que φ est injective.
- 4) Que vaut $\text{Im } \varphi$? En déduire le résultat attendu dans le cas où $F \subset E$.

Partie B : le cas général

On se place maintenant dans le cas général. On se donne donc deux ensembles E et F , une injection f de E dans F et une injection g de F dans E .

- 5) Montrer qu'il existe une injection de E dans $\text{Im } g$. En déduire qu'il existe une bijection de E sur $\text{Im } g$.
- 6) Remarquer qu'il existe une bijection de F sur $\text{Im } g$ et en déduire le résultat.

Partie C : quelques exemples

On exploitera systématiquement le théorème de Cantor-Bernstein pour répondre aux questions suivantes.

- 7) Montrer qu'il existe une bijection entre \mathbb{N} et \mathbb{Z} .
- 8) Montrer qu'il existe une bijection entre \mathbb{N} et \mathbb{N}^2 .
- 9) Montrer qu'il existe une bijection entre \mathbb{N} et \mathbb{Q} . On pourra notamment montrer qu'il existe une bijection entre $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ et \mathbb{Q} .

— FIN —