Familles de vecteurs, applications linéaires et intégration

1. Familles de vecteurs, applications linéaires

Exercice 1 On s'intéresse pour chaque $\lambda \in \mathbb{R}^*$ à l'ensemble noté $F(\lambda)$ des endomorphismes linéaires de $\mathbb{R}^3$ vérifiant l'équation $f \circ f = \lambda f$:

$$F(\lambda) = \left\{ f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3) \;\middle|\; f^2 = \lambda f \right\}.$$

1) Étude générale.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $f \in F(\lambda)$.

- **a)** Montrer que $\operatorname{Im} f = \{ u \in \mathbb{R}^3 \mid f(u) = \lambda u \}$.
- **b)** On veut montrer que $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^3$. Soit $x \in \mathbb{R}^3$.
  - **i)** Analyse. On suppose que $x = u + v$, avec $u \in \operatorname{Im} f$ et $v \in \operatorname{Ker} f$. En calculant $f(x)$, trouver la valeur de u, et donc celle de v.
  - **ii)** Procéder à une phase de synthèse.
  - **iii)** Conclure.

2) Un exemple.
On considère l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} -x + y + z \\ -6x + 4y + 2z \\ 3x - y + z \end{pmatrix} \end{array}.$$

- **a)** Montrer que f appartient a $F(\lambda)$, pour un certain λ, que l'on précisera.
- **b)** Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$, ainsi que de $\operatorname{Im} f$.
- **c)** Le vecteur $w = (7, 6, 5)$ appartient-il a $\operatorname{Im} f$?

Exercice 2 Quelle est la nature de l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x \\ 2x + 2z \\ z \end{pmatrix} \end{array}$? Déterminer ses éléments caractéristiques.

2. Intégration

Exercice 3 On pose, pour $n \in \mathbb{N}$: $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x$.

1) Montrer que $I_n \to 0$.

2) Montrer que $I_n = \dfrac{1}{(n+1)!} + I_{n+1}$.

3) En déduire que $\mathrm{e} = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

Exercice 4 Soit f la fonction définie par $f : t \to \dfrac{1}{1+\sin^2(t)}$. Déterminer une primitive F de f (on pourra être amené à faire le changement de variable $u = \tan t$).
En déduire la valeur de $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t) \, \mathrm{d}t$. Comparer I et 0.