Devoir surveillé n°8
Version 1
Durée : 3 heures, calculatrices et documents interdits

I. Étude d'un endomorphisme.

On note $\mathscr{E} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 2x & + & y & - & z \\ x & + & 2y & + & z \\ -x & + & y & + & 2z \end{pmatrix} \end{array}.$$

1) Montrer que $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ et déterminer les vecteurs $f(e_1)$, $f(e_2)$ et $f(e_3)$.

2) Déterminer une base et la dimension du noyau de f. L'application f est-elle injective ?

3) **a)** Résoudre l'équation $f(x, y, z) = (1, -1, 1)$ dans $\mathbb{R}^3$.

b) En déduire que $\operatorname{Im} f \neq \mathbb{R}^3$.

c) Soit $v_1 = f(e_1)$ et $v_2 = f(e_2)$. Montrer que (v_1, v_2) est une base de $\operatorname{Im} f$.

d) Vérifier que $\operatorname{Im} f$ est stable par f.

4) Montrer que $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

5) Soit v_3 un vecteur non nul de $\operatorname{Ker} f$. Montrer que (v_3) est une base de $\operatorname{Ker} f$ et que $\mathscr{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

6) Écrire $f(v_1)$, $f(v_2)$ et $f(v_3)$ en fonction de v_1, v_2 et v_3.

On appelle p la projection sur $F = \operatorname{Im} f$ parallèlement à $G = \operatorname{Ker} f$.

7) Soit u un vecteur de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées (a, b, c) dans la base $\mathscr{B}$.

a) Écrire les coordonnées de $p(u)$ dans la base $\mathscr{B}$.

b) Écrire les coordonnées de $f(u)$ dans la base $\mathscr{B}$.

8) En déduire que f est la composée de p et d'une homothétie h dont on déterminera le rapport. Montrer que $f = p \circ h = h \circ p$.

9) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^n = h^n \circ p = p \circ h^n$.

II. Calcul d'une intégrale.

Partie A : Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \dfrac{x \ln x}{x+1}$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$.

1) Montrer que l'équation $x + 1 + \ln x = 0$ admet sur $\mathbb{R}_+^*$ une solution unique α, comprise entre 0 et 1.

2) **a)** La fonction f est-elle continue en 0 ? Est-elle dérivable en ce point ?

b) Étudier les variations de f et préciser sa limite en $+\infty$.

c) Soit $(\mathscr{C})$ la courbe représentant f dans un repère orthonormé du plan. Déterminer les points d'intersection de $(\mathscr{C})$ et de la droite d'équation $y = -x$. Représenter $(\mathscr{C})$.

L'objet de la suite du problème est le calcul de l'intégrale

$$I = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x \ln x}{x+1}\,\mathrm{d}x.$$

Partie B : Limite d'une suite réelle

On considère la suite (S_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$.

3) Déterminer un réel a tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^\pi a t^2 \cos(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}.$$

Indication : on pourra procéder par intégrations par parties.

4) Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer S_n à l'aide d'une intégrale.

5) Démontrer que, pour tout réel t différent de $2p\pi$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$,

$$\sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2}.$$

6) On considère la fonction g définie sur $[0, 2\pi[$ par $g(t) = \dfrac{t^2}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$ si $t \in]0, 2\pi[$ et $g(0) = 0$.

Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, 2\pi[$.

7) **a)** Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi g(t) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) t\right) \mathrm{d}t.$$

b) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que si h est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \pi]$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left|\int_0^\pi h(t) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) t\right) \mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{|h(0)|}{n + \frac{1}{2}} + \frac{\pi}{n + \frac{1}{2}} \max_{t \in [0,\pi]} |h'(t)|.$$

c) En déduire l'existence et la valeur de la limite de la suite (S_n).

Partie C : Calcul de I.

Pour tout entier $k \geqslant 1$, on considère les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}_+$ par : $f_k(x) = x^k \ln x$ si $x > 0$ et $f_k(0) = 0$.

8) **a)** Étudier la continuité de f_1 sur $[0, 1]$.

b) Pour $k \geqslant 2$, montrer que f_k est dérivable sur $[0, 1]$ et exprimer sa dérivée à l'aide de f_{k-1}.

9) Pour tout entier $k \geqslant 1$, calculer l'intégrale $I_k = \displaystyle\int_0^1 f_k(x)\,\mathrm{d}x$.

10) On pose $m = \displaystyle\max_{t \in [0,1]} |f(t)|$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left| I - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} I_k \right| \leqslant m \int_0^1 x^n \,\mathrm{d}x.$$

11) En déduire la valeur de I.

— **FIN** —