



## C8 : Analyse des performances des systèmes asservis

### C8-2 : Précision et rapidité des systèmes asservis

Émilien DURIF

Lycée La Martinière Monplaisir Lyon  
Classe de MPSI  
7 Mai 2024

# Plan

## 1 Quantification de la précision

- Définition de la précision
- Erreur indicielle
- Erreur de trainage
- Erreur d'accélération
- Récapitulatif
- Application aux systèmes du premier et du deuxième ordre
- Cas d'une perturbation

## 2 Rapidité des SLCI

- Définition
- Influence de l'ordre
  - Système du premier ordre
  - Système du deuxième ordre
- Influence du bouclage
  - Système du premier ordre
  - Système du deuxième ordre
- Influence de la bande passante

# Plan

## 1 Quantification de la précision

- Définition de la précision
- Erreur indicielle
- Erreur de trainage
- Erreur d'accélération
- Récapitulatif
- Application aux systèmes du premier et du deuxième ordre
- Cas d'une perturbation

## 2 Rapidité des SLCI

- Définition
- Influence de l'ordre
  - Système du premier ordre
  - Système du deuxième ordre
- Influence du bouclage
  - Système du premier ordre
  - Système du deuxième ordre
- Influence de la bande passante

## Précision : définition

### Erreur ou écart

- En régime permanent, on appelle l'erreur ou l'écart, la différence entre la sortie théorique ( $s_{th}$ ) souhaitée et celle obtenue ( $s(t)$ ) lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ .

$$\varepsilon = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (s(t) - s_{th}) = s_{\infty} - s_{th} \quad (1)$$

- En pratique

$$\varepsilon(p) = \mathcal{L}(\varepsilon(t)) = E(p) - G(p) S(p) = E(p) - G(p) H(p) \varepsilon(p).$$

- 

$$\varepsilon(p) = \frac{E(p)}{1 + G(p) H(p)} = \frac{E(p)}{1 + FTBO(p)}. \quad (2)$$

## Précision : définition

### Erreur ou écart

- En régime permanent, on appelle l'erreur ou l'écart, la différence entre la sortie théorique ( $s_{th}$ ) souhaitée et celle obtenue ( $s(t)$ ) lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ .

$$\varepsilon = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (s(t) - s_{th}) = s_{\infty} - s_{th} \quad (1)$$

- En pratique

$$\varepsilon(p) = \mathcal{L}(\varepsilon(t)) = E(p) - G(p) S(p) = E(p) - G(p) H(p) \varepsilon(p).$$

•

$$\varepsilon(p) = \frac{E(p)}{1 + G(p) H(p)} = \frac{E(p)}{1 + FTBO(p)}. \quad (2)$$

## Précision : définition

### Erreur ou écart

- En régime permanent, on appelle l'erreur ou l'écart, la différence entre la sortie théorique ( $s_{th}$ ) souhaitée et celle obtenue ( $s(t)$ ) lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ .

$$\varepsilon = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (s(t) - s_{th}) = s_{\infty} - s_{th} \quad (1)$$

- En pratique

$$\varepsilon(p) = \mathcal{L}(\varepsilon(t)) = E(p) - G(p) S(p) = E(p) - G(p) H(p) \varepsilon(p).$$

- 

$$\varepsilon(p) = \frac{E(p)}{1 + G(p) H(p)} = \frac{E(p)}{1 + FTBO(p)}. \quad (2)$$

## Précision : définition

### Erreur ou écart

- l'**erreur statique**  $\varepsilon_S$  (ou de position) se mesure sur la réponse à un échelon.

$$e(t) = Au(t).$$

- l'**erreur de traînage** (ou de vitesse)  $\varepsilon_V$  se mesure sur la réponse à une rampe.

$$e(t) = A t u(t).$$

## Précision : définition

### Erreur ou écart

- l'**erreur statique**  $\varepsilon_S$  (ou de position) se mesure sur la réponse à un échelon.

$$e(t) = Au(t).$$

- l'**erreur de traînage** (ou de vitesse)  $\varepsilon_V$  se mesure sur la réponse à une rampe.

$$e(t) = A t u(t).$$



# Précision : définition

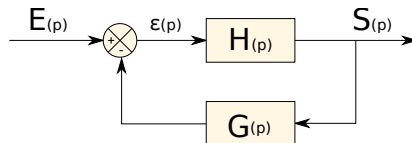
## Remarque

- Avec le théorème de la valeur finale

$$\varepsilon = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p). \quad (3)$$

- Dans le cas d'un retour unitaire :

$$\varepsilon = \lim_{t \rightarrow +\infty} (e(t) - s(t)) = \lim_{p \rightarrow 0} p (E(p) - S(p)) \quad (4)$$



## Précision : définition

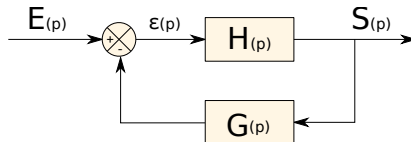
### Remarque

- Avec le théorème de la valeur finale

$$\varepsilon = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p). \quad (3)$$

- Dans le cas d'un retour unitaire :

$$\varepsilon = \lim_{t \rightarrow +\infty} (e(t) - s(t)) = \lim_{p \rightarrow 0} p (E(p) - S(p)) \quad (4)$$



# Plan

## 1 Quantification de la précision

- Définition de la précision
- Erreur indicielle
- Erreur de trainage
- Erreur d'accélération
- Récapitulatif
- Application aux systèmes du premier et du deuxième ordre
- Cas d'une perturbation

## 2 Rapidité des SLCI

- Définition
- Influence de l'ordre
  - Système du premier ordre
  - Système du deuxième ordre
- Influence du bouclage
  - Système du premier ordre
  - Système du deuxième ordre
- Influence de la bande passante

## Précision : erreur indicielle

- Ici l'entrée  $e(t)$  est un échelon d'amplitude  $E_0$ , donc sa transformée de Laplace est

$$E(p) = \frac{E_0}{p}.$$

- Soit la fonction de transfert en boucle ouverte définie par :

$$FTBO(p) = \frac{K}{p^\alpha} \frac{1 + c_1 p + \dots + c_m p^m}{1 + d_1 p + \dots + d_n p^n}.$$

- On peut alors calculer  $\varepsilon_S$  :

$$\begin{aligned} \varepsilon_S &= \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{E(p)}{1 + FTBO(p)} = \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p E_0}{p \left( 1 + \frac{K}{p^\alpha} \frac{1 + c_1 p + \dots + c_m p^m}{1 + d_1 p + \dots + d_n p^n} \right)} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{E_0}{1 + \frac{K}{p^\alpha} \frac{1 + c_1 p + \dots + c_m p^m}{1 + d_1 p + \dots + d_n p^n}} \end{aligned}$$

- Deux cas se présentent alors :

- Cas où  $\alpha = 0$  :

$$\varepsilon_S = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \frac{E_0}{1 + K}.$$

- Cas où  $\alpha \geq 1$  :

$$\varepsilon_S = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = 0.$$

## Précision : erreur indicielle

- Ici l'entrée  $e(t)$  est un échelon d'amplitude  $E_0$ , donc sa transformée de Laplace est  $E(p) = \frac{E_0}{p}$ .
- Soit la fonction de transfert en boucle ouverte définie par :

$$FTBO(p) = \frac{K}{p^\alpha} \frac{1 + c_1 p + \dots + c_m p^m}{1 + d_1 p + \dots + d_n p^n}.$$

- On peut alors calculer  $\varepsilon_S$  :

$$\begin{aligned} \varepsilon_S &= \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{E(p)}{1 + FTBO(p)} = \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p E_0}{p \left( 1 + \frac{K}{p^\alpha} \frac{1 + c_1 p + \dots + c_m p^m}{1 + d_1 p + \dots + d_n p^n} \right)} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{E_0}{1 + \frac{K}{p^\alpha} \frac{1 + c_1 p + \dots + c_m p^m}{1 + d_1 p + \dots + d_n p^n}} \end{aligned}$$

- Deux cas se présentent alors :

- Cas où  $\alpha = 0$  :

$$\varepsilon_S = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \frac{E_0}{1 + K}$$

- Cas où  $\alpha \geq 1$  :

$$\varepsilon_S = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = 0$$

## Précision : erreur indicielle

- Ici l'entrée  $e(t)$  est un échelon d'amplitude  $E_0$ , donc sa transformée de Laplace est  $E(p) = \frac{E_0}{p}$ .
- Soit la fonction de transfert en boucle ouverte définie par :

$$FTBO(p) = \frac{K}{p^\alpha} \frac{1 + c_1 p + \dots + c_m p^m}{1 + d_1 p + \dots + d_n p^n}.$$

- On peut alors calculer  $\varepsilon_S$  :

$$\begin{aligned} \varepsilon_S &= \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{E(p)}{1 + FTBO(p)} = \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p E_0}{p \left( 1 + \frac{K}{p^\alpha} \frac{1 + c_1 p + \dots + c_m p^m}{1 + d_1 p + \dots + d_n p^n} \right)} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{E_0}{1 + \frac{K}{p^\alpha} \frac{1 + c_1 p + \dots + c_m p^m}{1 + d_1 p + \dots + d_n p^n}} \end{aligned}$$

- Deux cas se présentent alors :

- Cas où  $\alpha = 0$  :

$$\varepsilon_S = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \frac{E_0}{1 + K}$$

- Cas où  $\alpha \geq 1$  :

$$\varepsilon_S = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = 0$$

## Précision : erreur indicielle

- Ici l'entrée  $e(t)$  est un échelon d'amplitude  $E_0$ , donc sa transformée de Laplace est  $E(p) = \frac{E_0}{p}$ .
- Soit la fonction de transfert en boucle ouverte définie par :

$$FTBO(p) = \frac{K}{p^\alpha} \frac{1 + c_1 p + \dots + c_m p^m}{1 + d_1 p + \dots + d_n p^n}.$$

- On peut alors calculer  $\varepsilon_S$  :

$$\begin{aligned} \varepsilon_S &= \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{E(p)}{1 + FTBO(p)} = \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p E_0}{p \left( 1 + \frac{K}{p^\alpha} \frac{1 + c_1 p + \dots + c_m p^m}{1 + d_1 p + \dots + d_n p^n} \right)} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{E_0}{1 + \frac{K}{p^\alpha} \frac{1 + c_1 p + \dots + c_m p^m}{1 + d_1 p + \dots + d_n p^n}} \end{aligned}$$

- Deux cas se présentent alors :

- Cas où  $\alpha = 0$  :

$$\varepsilon_S = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \frac{E_0}{1 + K}.$$

- Cas où  $\alpha \geq 1$  :

$$\varepsilon_S = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = 0.$$

## Précision : erreur indicielle

- Ici l'entrée  $e(t)$  est un échelon d'amplitude  $E_0$ , donc sa transformée de Laplace est  $E(p) = \frac{E_0}{p}$ .
- Soit la fonction de transfert en boucle ouverte définie par :

$$FTBO(p) = \frac{K}{p^\alpha} \frac{1 + c_1 p + \dots + c_m p^m}{1 + d_1 p + \dots + d_n p^n}.$$

- On peut alors calculer  $\varepsilon_S$  :

$$\begin{aligned} \varepsilon_S &= \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{E(p)}{1 + FTBO(p)} = \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p E_0}{p \left( 1 + \frac{K}{p^\alpha} \frac{1 + c_1 p + \dots + c_m p^m}{1 + d_1 p + \dots + d_n p^n} \right)} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{E_0}{1 + \frac{K}{p^\alpha} \frac{1 + c_1 p + \dots + c_m p^m}{1 + d_1 p + \dots + d_n p^n}} \end{aligned}$$

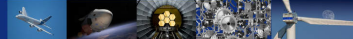
- Deux cas se présentent alors :
  - Cas où  $\alpha = 0$  :

$$\varepsilon_S = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \frac{E_0}{1 + K}.$$

- Cas où  $\alpha \geq 1$  :

$$\varepsilon_S = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = 0.$$





## Précision : erreur indicielle

- Ici l'entrée  $e(t)$  est un échelon d'amplitude  $E_0$ , donc sa transformée de Laplace est  $E(p) = \frac{E_0}{p}$ .
- Soit la fonction de transfert en boucle ouverte définie par :

$$FTBO(p) = \frac{K}{p^\alpha} \frac{1 + c_1 p + \dots + c_m p^m}{1 + d_1 p + \dots + d_n p^n}.$$

- On peut alors calculer  $\varepsilon_S$  :

$$\begin{aligned} \varepsilon_S &= \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{E(p)}{1 + FTBO(p)} = \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p E_0}{p \left( 1 + \frac{K}{p^\alpha} \frac{1 + c_1 p + \dots + c_m p^m}{1 + d_1 p + \dots + d_n p^n} \right)} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{E_0}{1 + \frac{K}{p^\alpha} \frac{1 + c_1 p + \dots + c_m p^m}{1 + d_1 p + \dots + d_n p^n}} \end{aligned}$$

- Deux cas se présentent alors :
  - Cas où  $\alpha = 0$  :

$$\varepsilon_S = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \frac{E_0}{1 + K}.$$

- Cas où  $\alpha \geq 1$  :

$$\varepsilon_S = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = 0.$$

# Plan

## 1 Quantification de la précision

- Définition de la précision
- Erreur indicielle
- Erreur de trainage
- Erreur d'accélération
- Récapitulatif
- Application aux systèmes du premier et du deuxième ordre
- Cas d'une perturbation

## 2 Rapidité des SLCI

- Définition
- Influence de l'ordre
  - Système du premier ordre
  - Système du deuxième ordre
- Influence du bouclage
  - Système du premier ordre
  - Système du deuxième ordre
- Influence de la bande passante

## Précision : erreur de trainage

- Ici  $E(p) = \frac{a}{p^2}$ .
- On peut alors calculer  $\varepsilon_V$  :

$$\varepsilon_V = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{E(p)}{1 + FTBO(p)} =$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} \frac{p a}{p^2 \left( 1 + \frac{K}{p^\alpha} \frac{1+c_1}{1+d_1} p + \dots + \frac{c_m}{d_n} \frac{p^m}{p^n} \right)} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{a}{p \left( 1 + \frac{K}{p^\alpha} \frac{1+c_1}{1+d_1} p + \dots + \frac{c_m}{d_n} \frac{p^m}{p^n} \right)}$$

- On alors trois cas :

- Cas où  $\alpha = 0$  :

$$\varepsilon_V = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \infty.$$

- Cas où  $\alpha = 1$  :

$$\varepsilon_V = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \frac{a}{K}.$$

- Cas où  $\alpha \geq 2$  :

$$\varepsilon_V = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = 0.$$

## Précision : erreur de trainage

- Ici  $E(p) = \frac{a}{p^2}$ .
- On peut alors calculer  $\varepsilon_V$  :

$$\varepsilon_V = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{E(p)}{1 + FTBO(p)} =$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} \frac{p a}{p^2 \left( 1 + \frac{K}{p^\alpha} \frac{1+c_1 p+\dots+c_m p^m}{1+d_1 p+\dots+d_n p^n} \right)} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{a}{p \left( 1 + \frac{K}{p^\alpha} \frac{1+c_1 p+\dots+c_m p^m}{1+d_1 p+\dots+d_n p^n} \right)}$$

- On alors trois cas :

- Cas où  $\alpha = 0$  :

$$\varepsilon_V = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \infty.$$

- Cas où  $\alpha = 1$  :

$$\varepsilon_V = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \frac{a}{K}.$$

- Cas où  $\alpha \geq 2$  :

$$\varepsilon_V = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = 0.$$

## Précision : erreur de trainage

- Ici  $E(p) = \frac{a}{p^2}$ .
- On peut alors calculer  $\varepsilon_V$  :

$$\begin{aligned} \varepsilon_V &= \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{E(p)}{1 + FTBO(p)} = \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p a}{p^2 \left( 1 + \frac{K}{p^\alpha} \frac{1+c_1}{1+d_1} p + \dots + \frac{c_m}{d_n} \frac{p^m}{p^n} \right)} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{a}{p \left( 1 + \frac{K}{p^\alpha} \frac{1+c_1}{1+d_1} p + \dots + \frac{c_m}{d_n} \frac{p^m}{p^n} \right)} \end{aligned}$$

- On alors trois cas :
- Cas où  $\alpha = 0$  :

$$\varepsilon_V = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \infty.$$

- Cas où  $\alpha = 1$  :

$$\varepsilon_V = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \frac{a}{K}.$$

- Cas où  $\alpha \geq 2$  :

$$\varepsilon_V = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = 0.$$

## Précision : erreur de trainage

- Ici  $E(p) = \frac{a}{p^2}$ .
- On peut alors calculer  $\varepsilon_V$  :

$$\begin{aligned} \varepsilon_V &= \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{E(p)}{1 + FTBO(p)} = \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p a}{p^2 \left( 1 + \frac{K}{p^\alpha} \frac{1+c_1}{1+d_1} p + \dots + \frac{c_m}{d_n} \frac{p^m}{p^n} \right)} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{a}{p \left( 1 + \frac{K}{p^\alpha} \frac{1+c_1}{1+d_1} p + \dots + \frac{c_m}{d_n} \frac{p^m}{p^n} \right)} \end{aligned}$$

- On alors trois cas :
  - Cas où  $\alpha = 0$  :

$$\varepsilon_V = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \infty.$$

- Cas où  $\alpha = 1$  :

$$\varepsilon_V = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \frac{a}{K}.$$

- Cas où  $\alpha \geq 2$  :

$$\varepsilon_V = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = 0.$$



## Précision : erreur de trainage

- Ici  $E(p) = \frac{a}{p^2}$ .
- On peut alors calculer  $\varepsilon_V$  :

$$\varepsilon_V = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{E(p)}{1 + FTBO(p)} =$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} \frac{p a}{p^2 \left( 1 + \frac{K}{p^\alpha} \frac{1+c_1}{1+d_1} p + \dots + \frac{c_m}{d_n} \frac{p^m}{p^n} \right)} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{a}{p \left( 1 + \frac{K}{p^\alpha} \frac{1+c_1}{1+d_1} p + \dots + \frac{c_m}{d_n} \frac{p^m}{p^n} \right)}$$

- On alors trois cas :
  - Cas où  $\alpha = 0$  :

$$\varepsilon_V = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \infty.$$

- Cas où  $\alpha = 1$  :

$$\varepsilon_V = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \frac{a}{K}.$$

- Cas où  $\alpha \geq 2$  :

$$\varepsilon_V = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = 0.$$

## Précision : erreur de trainage

- Ici  $E(p) = \frac{a}{p^2}$ .
- On peut alors calculer  $\varepsilon_V$  :

$$\begin{aligned} \varepsilon_V &= \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{E(p)}{1 + FTBO(p)} = \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p a}{p^2 \left( 1 + \frac{K}{p^\alpha} \frac{1+c_1}{1+d_1} p + \dots + \frac{c_m}{d_n} \frac{p^m}{p^n} \right)} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{a}{p \left( 1 + \frac{K}{p^\alpha} \frac{1+c_1}{1+d_1} p + \dots + \frac{c_m}{d_n} \frac{p^m}{p^n} \right)} \end{aligned}$$

- On alors trois cas :
  - Cas où  $\alpha = 0$  :

$$\varepsilon_V = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \infty.$$

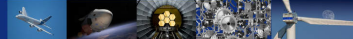
- Cas où  $\alpha = 1$  :

$$\varepsilon_V = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \frac{a}{K}.$$

- Cas où  $\alpha \geq 2$  :

$$\varepsilon_V = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = 0.$$





# Plan

## 1 Quantification de la précision

- Définition de la précision
- Erreur indicielle
- Erreur de trainage
- Erreur d'accélération
- Récapitulatif
- Application aux systèmes du premier et du deuxième ordre
- Cas d'une perturbation

## 2 Rapidité des SLCI

- Définition
- Influence de l'ordre
  - Système du premier ordre
  - Système du deuxième ordre
- Influence du bouclage
  - Système du premier ordre
  - Système du deuxième ordre
- Influence de la bande passante

## Précision : erreur d'accélération

- Ici,  $E(p) = \frac{b}{p^3}$ .
- On peut alors calculer  $\varepsilon_a$  (erreur en accélération) :

$$\varepsilon_a = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{E(p)}{1 + FTBO(p)} =$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} \frac{b p}{p^3 \left( 1 + \frac{K}{p^\alpha} \frac{1+c_1}{1+d_1} p + \dots + \frac{c_m}{d_n} \frac{p^m}{p^n} \right)} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{b}{p^2 \left( 1 + \frac{K}{p^\alpha} \frac{1+c_1}{1+d_1} p + \dots + \frac{c_m}{d_n} \frac{p^m}{p^n} \right)}$$

- On a alors trois cas :
- Cas où  $\alpha \leq 1$  :

$$\varepsilon_a = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \infty.$$

- Cas où  $\alpha = 2$  :

$$\varepsilon_a = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \frac{b}{K}.$$

- Cas où  $\alpha \geq 3$  :

$$\varepsilon_a = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = 0.$$

## Précision : erreur d'accélération

- Ici,  $E(p) = \frac{b}{p^3}$ .
- On peut alors calculer  $\varepsilon_a$  (erreur en accélération) :

$$\varepsilon_a = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{E(p)}{1 + FTBO(p)} =$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} \frac{b p}{p^3 \left( 1 + \frac{K}{p^\alpha} \frac{1+c_1}{1+d_1} \frac{p+\dots+c_m}{p+\dots+d_n} \frac{p^m}{p^n} \right)} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{b}{p^2 \left( 1 + \frac{K}{p^\alpha} \frac{1+c_1}{1+d_1} \frac{p+\dots+c_m}{p+\dots+d_n} \frac{p^m}{p^n} \right)}$$

- On a alors trois cas :

- Cas où  $\alpha \leq 1$  :

$$\varepsilon_a = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \infty.$$

- Cas où  $\alpha = 2$  :

$$\varepsilon_a = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \frac{b}{K}.$$

- Cas où  $\alpha \geq 3$  :

$$\varepsilon_a = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = 0.$$

## Précision : erreur d'accélération

- Ici,  $E(p) = \frac{b}{p^3}$ .
- On peut alors calculer  $\varepsilon_a$  (erreur en accélération) :

$$\varepsilon_a = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{E(p)}{1 + FTBO(p)} =$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} \frac{b p}{p^3 \left( 1 + \frac{K}{p^\alpha} \frac{1+c_1}{1+d_1} p + \dots + \frac{c_m}{d_n} \frac{p^m}{p^n} \right)} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{b}{p^2 \left( 1 + \frac{K}{p^\alpha} \frac{1+c_1}{1+d_1} p + \dots + \frac{c_m}{d_n} \frac{p^m}{p^n} \right)}$$

- On alors trois cas :
- Cas où  $\alpha \leq 1$  :

$$\varepsilon_a = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \infty.$$

- Cas où  $\alpha = 2$  :

$$\varepsilon_a = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \frac{b}{K}.$$

- Cas où  $\alpha \geq 3$  :

$$\varepsilon_a = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = 0.$$

## Précision : erreur d'accélération

- Ici,  $E(p) = \frac{b}{p^3}$ .
- On peut alors calculer  $\varepsilon_a$  (erreur en accélération) :

$$\varepsilon_a = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{E(p)}{1 + FTBO(p)} =$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} \frac{b p}{p^3 \left( 1 + \frac{K}{p^\alpha} \frac{1+c_1}{1+d_1} \frac{p+\dots+c_m}{p+\dots+d_n} \frac{p^m}{p^n} \right)} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{b}{p^2 \left( 1 + \frac{K}{p^\alpha} \frac{1+c_1}{1+d_1} \frac{p+\dots+c_m}{p+\dots+d_n} \frac{p^m}{p^n} \right)}$$

- On alors trois cas :
  - Cas où  $\alpha \leq 1$  :

$$\varepsilon_a = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \infty.$$

- Cas où  $\alpha = 2$  :

$$\varepsilon_a = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \frac{b}{K}.$$

- Cas où  $\alpha \geq 3$  :

$$\varepsilon_a = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = 0.$$

## Précision : erreur d'accélération

- Ici,  $E(p) = \frac{b}{p^3}$ .
- On peut alors calculer  $\varepsilon_a$  (erreur en accélération) :

$$\varepsilon_a = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{E(p)}{1 + FTBO(p)} =$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} \frac{b p}{p^3 \left( 1 + \frac{K}{p^\alpha} \frac{1+c_1}{1+d_1} \frac{p+\dots+c_m}{p+\dots+d_n} \frac{p^m}{p^n} \right)} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{b}{p^2 \left( 1 + \frac{K}{p^\alpha} \frac{1+c_1}{1+d_1} \frac{p+\dots+c_m}{p+\dots+d_n} \frac{p^m}{p^n} \right)}$$

- On alors trois cas :
  - Cas où  $\alpha \leq 1$  :

$$\varepsilon_a = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \infty.$$

- Cas où  $\alpha = 2$  :

$$\varepsilon_a = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \frac{b}{K}.$$

- Cas où  $\alpha \geq 3$  :

$$\varepsilon_a = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = 0.$$

## Précision : erreur d'accélération

- Ici,  $E(p) = \frac{b}{p^3}$ .
- On peut alors calculer  $\varepsilon_a$  (erreur en accélération) :

$$\varepsilon_a = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{E(p)}{1 + FTBO(p)} =$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} \frac{b p}{p^3 \left( 1 + \frac{K}{p^\alpha} \frac{1+c_1}{1+d_1} \frac{p+\dots+c_m}{p+\dots+d_n} \frac{p^m}{p^n} \right)} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{b}{p^2 \left( 1 + \frac{K}{p^\alpha} \frac{1+c_1}{1+d_1} \frac{p+\dots+c_m}{p+\dots+d_n} \frac{p^m}{p^n} \right)}$$

- On alors trois cas :
  - Cas où  $\alpha \leq 1$  :

$$\varepsilon_a = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \infty.$$

- Cas où  $\alpha = 2$  :

$$\varepsilon_a = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \frac{b}{K}.$$

- Cas où  $\alpha \geq 3$  :

$$\varepsilon_a = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = 0.$$

# Plan

## 1 Quantification de la précision

- Définition de la précision
- Erreur indicielle
- Erreur de trainage
- Erreur d'accélération
- Récapitulatif
- Application aux systèmes du premier et du deuxième ordre
- Cas d'une perturbation

## 2 Rapidité des SLCI

- Définition
- Influence de l'ordre
  - Système du premier ordre
  - Système du deuxième ordre
- Influence du bouclage
  - Système du premier ordre
  - Système du deuxième ordre
- Influence de la bande passante



## Précision : tableau récapitulatif

Entrée $E(p)$	Classe 0	Classe 1	Classe 2	Classe 3
Échelon : $E(p) = \frac{E_0}{p}$	$\frac{E_0}{1+K}$	0	0	0
Rampe : $E(p) = \frac{a}{p^2}$	$\infty$	$\frac{a}{K}$	0	0
Accélération : $E(p) = \frac{b}{p^3}$	$\infty$	$\infty$	$\frac{b}{K}$	0

### Quantification de la précision

- La **précision en boucle fermée** d'un système vis-à-vis d'une entrée dépend donc de la **classe** et du **gain** de la FTBO.
- Pour **améliorer la précision**, il faut donc **augmenter la classe**, c'est-à-dire le nombre d'**intégrations** dans la FTBO, ou **augmenter le gain** de la FTBO.
- Avec au moins **1 intégration** en boucle ouverte on annule l'**erreur statique**.
- Avec au moins **2 intégrations** en boucle ouverte on annule l'**erreur de trainage**.
- On verra plus tard qu'**augmenter la classe** ou le **gain** de la FTBO peut rendre le système **instable**.

## Précision : tableau récapitulatif

Entrée $E(p)$	Classe 0	Classe 1	Classe 2	Classe 3
Échelon : $E(p) = \frac{E_0}{p}$	$\frac{E_0}{1+K}$	0	0	0
Rampe : $E(p) = \frac{a}{p^2}$	$\infty$	$\frac{a}{K}$	0	0
Accélération : $E(p) = \frac{b}{p^3}$	$\infty$	$\infty$	$\frac{b}{K}$	0

### Quantification de la précision

- La **précision en boucle fermée** d'un système vis-à-vis d'une entrée dépend donc de la **classe** et du **gain** de la FTBO.
- Pour **améliorer la précision**, il faut donc **augmenter la classe**, c'est-à-dire le nombre d'**intégrations** dans la FTBO, ou augmenter le **gain** de la FTBO.
- Avec au moins 1 intégration en boucle ouverte on annule l'erreur statique.
- Avec au moins 2 intégrations en boucle ouverte on annule l'erreur de trainage.
- On verra plus tard qu'augmenter la classe ou le gain de la FTBO peut rendre le système instable.

## Précision : tableau récapitulatif

Entrée $E(p)$	Classe 0	Classe 1	Classe 2	Classe 3
Échelon : $E(p) = \frac{E_0}{p}$	$\frac{E_0}{1+K}$	0	0	0
Rampe : $E(p) = \frac{a}{p^2}$	$\infty$	$\frac{a}{K}$	0	0
Accélération : $E(p) = \frac{b}{p^3}$	$\infty$	$\infty$	$\frac{b}{K}$	0

### Quantification de la précision

- La **précision en boucle fermée** d'un système vis-à-vis d'une entrée dépend donc de la **classe** et du **gain** de la FTBO.
- Pour **améliorer la précision**, il faut donc **augmenter la classe**, c'est-à-dire le nombre d'**intégrations** dans la FTBO, ou augmenter le **gain** de la FTBO.
- Avec au moins **1 intégration** en boucle ouverte on annule l'**erreur statique**.
- Avec au moins **2 intégrations** en boucle ouverte on annule l'**erreur de traînage**.
- On verra plus tard qu'**augmenter la classe ou le gain** de la FTBO peut rendre le système **instable**.

## Précision : tableau récapitulatif

Entrée $E(p)$	Classe 0	Classe 1	Classe 2	Classe 3
Échelon : $E(p) = \frac{E_0}{p}$	$\frac{E_0}{1+K}$	0	0	0
Rampe : $E(p) = \frac{a}{p^2}$	$\infty$	$\frac{a}{K}$	0	0
Accélération : $E(p) = \frac{b}{p^3}$	$\infty$	$\infty$	$\frac{b}{K}$	0

### Quantification de la précision

- La **précision en boucle fermée** d'un système vis-à-vis d'une entrée dépend donc de la **classe** et du **gain** de la FTBO.
- Pour **améliorer la précision**, il faut donc **augmenter la classe**, c'est-à-dire le nombre d'**intégrations** dans la FTBO, ou augmenter le **gain** de la FTBO.
- Avec au moins **1 intégration** en boucle ouverte on annule l'**erreur statique**.
- Avec au moins **2 intégrations** en boucle ouverte on annule l'**erreur de traînage**.
- On verra plus tard qu'**augmenter la classe ou le gain** de la FTBO peut rendre le système **instable**.

## Précision : tableau récapitulatif

Entrée $E(p)$	Classe 0	Classe 1	Classe 2	Classe 3
Échelon : $E(p) = \frac{E_0}{p}$	$\frac{E_0}{1+K}$	0	0	0
Rampe : $E(p) = \frac{a}{p^2}$	$\infty$	$\frac{a}{K}$	0	0
Accélération : $E(p) = \frac{b}{p^3}$	$\infty$	$\infty$	$\frac{b}{K}$	0

### Quantification de la précision

- La **précision en boucle fermée** d'un système vis-à-vis d'une entrée dépend donc de la **classe** et du **gain** de la FTBO.
- Pour **améliorer la précision**, il faut donc **augmenter la classe**, c'est-à-dire le nombre d'**intégrations** dans la FTBO, ou augmenter le **gain** de la FTBO.
- Avec au moins **1 intégration** en boucle ouverte on annule l'**erreur statique**.
- Avec au moins **2 intégrations** en boucle ouverte on annule l'**erreur de trainage**.
- On verra plus tard qu'**augmenter la classe** ou le **gain** de la FTBO peut rendre le système **instable**.

# Plan

## 1 Quantification de la précision

- Définition de la précision
- Erreur indicielle
- Erreur de trainage
- Erreur d'accélération
- Récapitulatif
- Application aux systèmes du premier et du deuxième ordre
- Cas d'une perturbation

## 2 Rapidité des SLCI

- Définition
- Influence de l'ordre
  - Système du premier ordre
  - Système du deuxième ordre
- Influence du bouclage
  - Système du premier ordre
  - Système du deuxième ordre
- Influence de la bande passante

## Précision : systèmes du premier et du deuxième ordre

Considérons un système avec un retour unitaire dont la  $FTBO(p)$  est du premier ou du deuxième ordre :

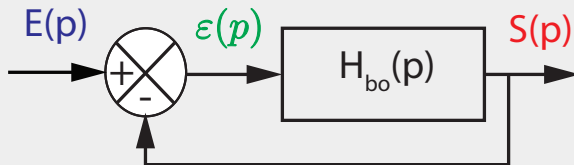
$$\left\{ \begin{array}{l} H_{BO1}(p) = \frac{K}{1+\tau p} \cdot \\ H_{BO2}(p) = \frac{K}{1+\frac{2\xi}{\omega_0} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_0^2}} \cdot \end{array} \right.$$

## Précision : systèmes du premier et du deuxième ordre

### Propriété : Précision d'un premier ordre et du second ordre

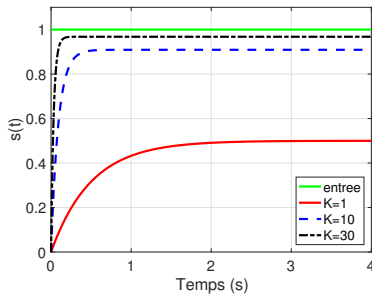
La FTBO pour les systèmes des premier et deuxième ordre est de classe 0. On en déduit que :

- l'erreur indicielle vaut  $\frac{E_0}{1+K}$  ;
- l'erreur de trainage vaut  $\infty$ .
- ici l'ordre de la fonction de transfert n'a pas d'influence sur la précision.

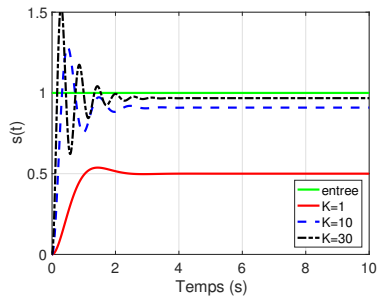




## Précision : systèmes du premier et du deuxième ordre

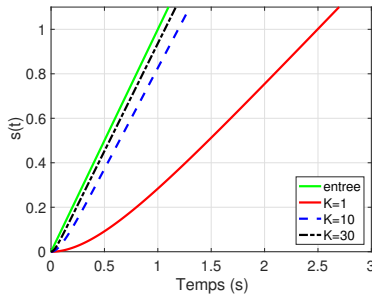


Réponse indicielle 1<sup>er</sup> ordre

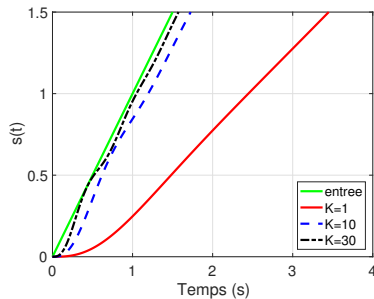


Réponse indicielle 2<sup>ème</sup> ordre

## Précision : systèmes du premier et du deuxième ordre



Réponse à une rampe 1<sup>er</sup> ordre



Réponse à une rampe 2<sup>ème</sup> ordre

# Plan

## 1 Quantification de la précision

- Définition de la précision
- Erreur indicielle
- Erreur de trainage
- Erreur d'accélération
- Récapitulatif
- Application aux systèmes du premier et du deuxième ordre
- Cas d'une perturbation

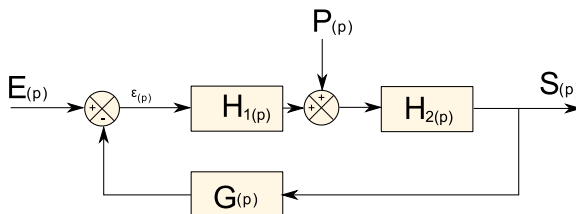
## 2 Rapidité des SLCI

- Définition
- Influence de l'ordre
  - Système du premier ordre
  - Système du deuxième ordre
- Influence du bouclage
  - Système du premier ordre
  - Système du deuxième ordre
- Influence de la bande passante

## Précision : cas d'une perturbation

- On considère désormais un système avec une consigne (entrée maîtrisée)  $E(p)$ , une entrée non-maîtrisée due à une perturbation ( $P(p)$ ) et une réponse ou sortie ( $S(p)$ ).
- Par le théorème de superposition (car système linéaire), on peut donner une relation entre  $S(p)$ ,  $E(p)$  et  $P(p)$  en introduisant les deux fonctions de transfert  $H_E(p)$  et  $H_P(p)$  :

$$S(p) = H_E(p) \cdot E(p) + H_P(p) \cdot P(p).$$

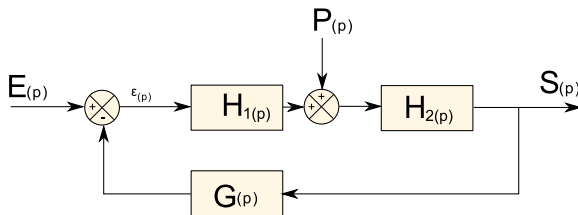




## Précision : cas d'une perturbation

- On considère désormais un système avec une consigne (entrée maîtrisée)  $E(p)$ , une entrée non-maîtrisée due à une perturbation ( $P(p)$ ) et une réponse ou sortie ( $S(p)$ ).
- Par le théorème de superposition (car système linéaire), on peut donner une relation entre  $S(p)$ ,  $E(p)$  et  $P(p)$  en introduisant les deux fonctions de transfert  $H_E(p)$  et  $H_P(p)$  :

$$S(p) = H_E(p) \cdot E(p) + H_P(p) \cdot P(p).$$



## Précision : cas d'une perturbation

- **Calcul de  $H_E(p)$  et  $H_P(p)$  :**

- Pour calculer  $H_P(p)$ , on prend  $E(p) = 0$  :

$$H_P(p) = \frac{H_2(p)}{1 + H_1(p) H_2(p) G(p)}$$

- Pour calculer  $H_E(p)$ , on prend  $P(p) = 0$  :

$$H_E(p) = \frac{H_1 H_2(p)}{1 + H_1(p) H_2(p) G(p)}$$

## Précision : cas d'une perturbation

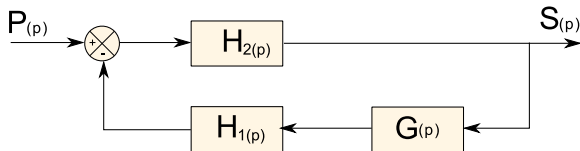
### • Calcul de $H_E(p)$ et $H_P(p)$ :

- Pour calculer  $H_P(p)$ , on prend  $E(p) = 0$  :

$$H_P(p) = \frac{H_2(p)}{1 + H_1(p) H_2(p) G(p)}$$

- Pour calculer  $H_E(p)$ , on prend  $P(p) = 0$  :

$$H_E(p) = \frac{H_1 H_2(p)}{1 + H_1(p) H_2(p) G(p)}$$



## Précision : cas d'une perturbation

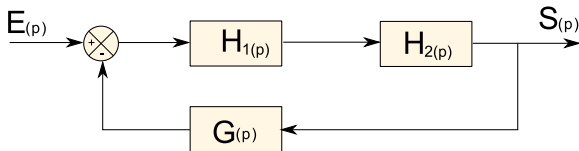
- Calcul de  $H_E(p)$  et  $H_P(p)$  :

- Pour calculer  $H_P(p)$ , on prend  $E(p) = 0$  :

$$H_P(p) = \frac{H_2(p)}{1 + H_1(p) H_2(p) G(p)}$$

- Pour calculer  $H_E(p)$ , on prend  $P(p) = 0$  :

$$H_E(p) = \frac{H_1 H_2(p)}{1 + H_1(p) H_2(p) G(p)}$$





## Précision : cas d'une perturbation

- Calculons  $\varepsilon(p) = E(p) - G(p) S(p)$

$$\varepsilon(p) = E(p) - \frac{G(p) H_1(p) H_2(p)}{1 + FTBO(p)} E(p) - \frac{G(p) H_2(p)}{1 + H_1(p) H_2(p) G(p)} P(p)$$

•

$$\varepsilon(p) = \frac{1}{1 + FTBO(p)} E(p) - \frac{G(p) H_2(p)}{1 + FTBO(p)} P(p).$$

- On note alors

$$\varepsilon(p) = \varepsilon_E(p) - \varepsilon_P(p).$$

- Avec  $\varepsilon_E(p)$  l'écart du à l'entrée et  $\varepsilon_P(p)$  l'écart du à la perturbation.

- Avec  $\varepsilon_E(p) =$

$$\varepsilon_E(p) = \frac{1}{1 + H_1(p) H_2(p) G(p)} E(p) = \frac{1}{1 + FTBO(p)} E(p).$$

- Avec  $\varepsilon_P(p) =$

$$\varepsilon_P(p) = \frac{G(p) H_2(p)}{1 + H_1(p) H_2(p) G(p)} P(p) = \frac{G(p) H_2(p)}{1 + FTBO(p)} P(p).$$

## Précision : cas d'une perturbation

- Calculons  $\varepsilon(p) = E(p) - G(p) S(p)$

$$\varepsilon(p) = E(p) - \frac{G(p) H_1(p) H_2(p)}{1 + FTBO(p)} E(p) - \frac{G(p) H_2(p)}{1 + H_1(p) H_2(p) G(p)} P(p)$$

•

$$\varepsilon(p) = \frac{1}{1 + FTBO(p)} E(p) - \frac{G(p) H_2(p)}{1 + FTBO(p)} P(p).$$

- On note alors

$$\varepsilon(p) = \varepsilon_E(p) - \varepsilon_P(p).$$

- Avec  $\varepsilon_E(p)$  l'écart du à l'entrée et  $\varepsilon_P(p)$  l'écart du à la perturbation.

- Avec  $\varepsilon_E(p) =$

$$\varepsilon_E(p) = \frac{1}{1 + H_1(p) H_2(p) G(p)} E(p) = \frac{1}{1 + FTBO(p)} E(p).$$

- Avec  $\varepsilon_P(p) =$

$$\varepsilon_P(p) = \frac{G(p) H_2(p)}{1 + H_1(p) H_2(p) G(p)} P(p) = \frac{G(p) H_2(p)}{1 + FTBO(p)} P(p).$$

## Précision : cas d'une perturbation

- Calculons  $\varepsilon(p) = E(p) - G(p) S(p)$

$$\varepsilon(p) = E(p) - \frac{G(p) H_1(p) H_2(p)}{1 + FTBO(p)} E(p) - \frac{G(p) H_2(p)}{1 + H_1(p) H_2(p) G(p)} P(p)$$

•

$$\varepsilon(p) = \frac{1}{1 + FTBO(p)} E(p) - \frac{G(p) H_2(p)}{1 + FTBO(p)} P(p).$$

- On note alors

$$\varepsilon(p) = \varepsilon_E(p) - \varepsilon_P(p).$$

- Avec  $\varepsilon_E(p)$  l'écart du à l'entrée et  $\varepsilon_P(p)$  l'écart du à la perturbation.

- Avec  $\varepsilon_E(p) =$

$$\varepsilon_E(p) = \frac{1}{1 + H_1(p) H_2(p) G(p)} E(p) = \frac{1}{1 + FTBO(p)} E(p).$$

- Avec  $\varepsilon_P(p) =$

$$\varepsilon_P(p) = \frac{G(p) H_2(p)}{1 + H_1(p) H_2(p) G(p)} P(p) = \frac{G(p) H_2(p)}{1 + FTBO(p)} P(p).$$

## Précision : cas d'une perturbation

- Calculons  $\varepsilon(p) = E(p) - G(p) S(p)$

$$\varepsilon(p) = E(p) - \frac{G(p) H_1(p) H_2(p)}{1 + FTBO(p)} E(p) - \frac{G(p) H_2(p)}{1 + H_1(p) H_2(p) G(p)} P(p)$$

•

$$\varepsilon(p) = \frac{1}{1 + FTBO(p)} E(p) - \frac{G(p) H_2(p)}{1 + FTBO(p)} P(p).$$

- On note alors

$$\varepsilon(p) = \varepsilon_E(p) - \varepsilon_P(p).$$

- Avec  $\varepsilon_E(p)$  l'écart du à l'entrée et  $\varepsilon_P(p)$  l'écart du à la perturbation.

- Avec  $\varepsilon_E(p) =$

$$\varepsilon_E(p) = \frac{1}{1 + H_1(p) H_2(p) G(p)} E(p) = \frac{1}{1 + FTBO(p)} E(p).$$

- Avec  $\varepsilon_P(p) =$

$$\varepsilon_P(p) = \frac{G(p) H_2(p)}{1 + H_1(p) H_2(p) G(p)} P(p) = \frac{G(p) H_2(p)}{1 + FTBO(p)} P(p).$$

## Précision : cas d'une perturbation

- Calculons  $\varepsilon(p) = E(p) - G(p) S(p)$

$$\varepsilon(p) = E(p) - \frac{G(p) H_1(p) H_2(p)}{1 + FTBO(p)} E(p) - \frac{G(p) H_2(p)}{1 + H_1(p) H_2(p) G(p)} P(p)$$

•

$$\varepsilon(p) = \frac{1}{1 + FTBO(p)} E(p) - \frac{G(p) H_2(p)}{1 + FTBO(p)} P(p).$$

- On note alors

$$\varepsilon(p) = \varepsilon_E(p) - \varepsilon_P(p).$$

- Avec  $\varepsilon_E(p)$  l'écart du à l'entrée et  $\varepsilon_P(p)$  l'écart du à la perturbation.

- Avec  $\varepsilon_E(p) =$

$$\varepsilon_E(p) = \frac{1}{1 + H_1(p) H_2(p) G(p)} E(p) = \frac{1}{1 + FTBO(p)} E(p).$$

- Avec  $\varepsilon_P(p) =$

$$\varepsilon_P(p) = \frac{G(p) H_2(p)}{1 + H_1(p) H_2(p) G(p)} P(p) = \frac{G(p) H_2(p)}{1 + FTBO(p)} P(p).$$

## Précision : cas d'une perturbation

- Calculons  $\varepsilon(p) = E(p) - G(p) S(p)$

$$\varepsilon(p) = E(p) - \frac{G(p) H_1(p) H_2(p)}{1 + FTBO(p)} E(p) - \frac{G(p) H_2(p)}{1 + H_1(p) H_2(p) G(p)} P(p)$$

•

$$\varepsilon(p) = \frac{1}{1 + FTBO(p)} E(p) - \frac{G(p) H_2(p)}{1 + FTBO(p)} P(p).$$

- On note alors

$$\varepsilon(p) = \varepsilon_E(p) - \varepsilon_P(p).$$

- Avec  $\varepsilon_E(p)$  l'écart du à l'entrée et  $\varepsilon_P(p)$  l'écart du à la perturbation.

- Avec  $\varepsilon_E(p) =$

$$\varepsilon_E(p) = \frac{1}{1 + H_1(p) H_2(p) G(p)} E(p) = \frac{1}{1 + FTBO(p)} E(p).$$

- Avec  $\varepsilon_P(p) =$

$$\varepsilon_P(p) = \frac{G(p) H_2(p)}{1 + H_1(p) H_2(p) G(p)} P(p) = \frac{G(p) H_2(p)}{1 + FTBO(p)} P(p).$$

## Précision : cas d'une perturbation

- On pose également :

- 

$$H_1(p) = \frac{K_1 N_1(p)}{p^{\alpha_1} D_1(p)};$$

- 

$$G(p) H_2(p) = \frac{K_2 N_2(p)}{p^{\alpha_2} D_2(p)};$$

- avec  $N_1(0) = D_1(0) = N_2(0) = D_2(0) = 1$  car les fonctions de transfert  $H_1(p)$  et  $G(p) H_2(p)$  sont exprimées sous formes canoniques.

## Précision : cas d'une perturbation

- On pose également :

- 

$$H_1(p) = \frac{K_1 N_1(p)}{p^{\alpha_1} D_1(p)};$$

- 

$$G(p) H_2(p) = \frac{K_2 N_2(p)}{p^{\alpha_2} D_2(p)};$$

- avec  $N_1(0) = D_1(0) = N_2(0) = D_2(0) = 1$  car les fonctions de transfert  $H_1(p)$  et  $G(p) H_2(p)$  sont exprimées sous formes canoniques.



## Précision : cas d'une perturbation

- On pose également :

- 

$$H_1(p) = \frac{K_1 N_1(p)}{p^{\alpha_1} D_1(p)};$$

- 

$$G(p) H_2(p) = \frac{K_2 N_2(p)}{p^{\alpha_2} D_2(p)};$$

- avec  $N_1(0) = D_1(0) = N_2(0) = D_2(0) = 1$  car les fonctions de transfert  $H_1(p)$  et  $G(p) H_2(p)$  sont exprimées sous formes canoniques.

## Précision : cas d'une perturbation

- On pose également :

- 

$$H_1(p) = \frac{K_1 N_1(p)}{p^{\alpha_1} D_1(p)};$$

- 

$$G(p) H_2(p) = \frac{K_2 N_2(p)}{p^{\alpha_2} D_2(p)};$$

- avec  $N_1(0) = D_1(0) = N_2(0) = D_2(0) = 1$  car les fonctions de transfert  $H_1(p)$  et  $G(p) H_2(p)$  sont exprimées sous formes canoniques.

## Précision : cas d'une perturbation de type indicielle

- On calcule  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_P(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon_P(p)$  avec  $P(p) = \frac{P_0}{p}$ .

•

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon_P(p) &= \lim_{p \rightarrow 0} \left( \frac{P_0 K_2 N_2(p) p^{\alpha_1} D_1(p)}{p^{\alpha_1} D_1(p) p^{\alpha_2} D_2(p) + K_1 N_1(p) K_2 N_2(p)} \right) \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \left( \frac{P_0 K_2 p^{\alpha_1}}{p^{\alpha_1 + \alpha_2} + K_1 K_2} \right) \end{aligned}$$

## Précision : cas d'une perturbation de type indicielle

- On calcule  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_P(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon_P(p)$  avec  $P(p) = \frac{P_0}{p}$ .
- 

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon_P(p) &= \lim_{p \rightarrow 0} \left( \frac{P_0 K_2 N_2(p) p^{\alpha_1} D_1(p)}{p^{\alpha_1} D_1(p) p^{\alpha_2} D_2(p) + K_1 N_1(p) K_2 N_2(p)} \right) \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \left( \frac{P_0 K_2 p^{\alpha_1}}{p^{\alpha_1 + \alpha_2} + K_1 K_2} \right) \end{aligned}$$

## Précision : cas d'une perturbation de type rampe

- On calcule  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_P(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon_P(p)$  avec  $P(p) = \frac{P_0}{p^2}$ .

•

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon_P(p) &= \lim_{p \rightarrow 0} \left( \frac{P_0 K_2 N_2(p) p^{\alpha_1 - 1} D_1(p)}{p^{\alpha_1} D_1(p) p^{\alpha_2} D_2(p) + K_1 N_1(p) K_2 N_2(p)} \right) \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \left( \frac{P_0 K_2 p^{\alpha_1 - 1}}{p^{\alpha_1 + \alpha_2} + K_1 K_2} \right) \end{aligned}$$

# Précision : cas d'une perturbation de type rampe

- On calcule  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_P(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon_P(p)$  avec  $P(p) = \frac{P_0}{p^2}$ .
- 

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon_P(p) &= \lim_{p \rightarrow 0} \left( \frac{P_0 K_2 N_2(p) p^{\alpha_1 - 1} D_1(p)}{p^{\alpha_1} D_1(p) p^{\alpha_2} D_2(p) + K_1 N_1(p) K_2 N_2(p)} \right) \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \left( \frac{P_0 K_2 p^{\alpha_1 - 1}}{p^{\alpha_1 + \alpha_2} + K_1 K_2} \right) \end{aligned}$$

## Précision : cas d'une perturbation

Perturbation $P(p)$	$\alpha_1 = 0$		$\alpha_1 = 1$	$\alpha_1 \geq 2$
	$\alpha_2 = 0$	$\alpha_2 \geq 1$	$\alpha_2 \in [0; +\infty]$	
Échelon : $P(p) = \frac{P_0}{p}$	$\frac{P_0}{1+K_1} \frac{K_2}{K_2}$	$\frac{P_0}{K_1}$	0	
	$\alpha_2 \in [0; +\infty]$			
Rampe : $P(p) = \frac{P_0}{p^2}$	$+\infty$		$\frac{P_0}{K_1}$	0

### Conclusion : précision en fonction de la perturbation

- En réponse à une perturbation de type échelon, un système comportant au moins une intégration en amont du point d'entrée de la perturbation présentera une erreur nulle.
- En réponse à une perturbation de type rampe, un système comportant au moins deux intégrations en amont du point d'entrée de la perturbation présentera une erreur nulle.
- Ainsi pour rendre un système plus précis, on cherchera à augmenter le gain statique de la fonction de transfert en boucle ouverte et d'en augmenter le nombre d'intégrateurs aux

## Précision : cas d'une perturbation

Perturbation $P(p)$	$\alpha_1 = 0$		$\alpha_1 = 1$	$\alpha_1 \geq 2$
	$\alpha_2 = 0$	$\alpha_2 \geq 1$	$\alpha_2 \in [0; +\infty]$	
Échelon : $P(p) = \frac{P_0}{p}$	$\frac{P_0}{1+K_1} \frac{K_2}{K_2}$	$\frac{P_0}{K_1}$	0	
	$\alpha_2 \in [0; +\infty]$			
Rampe : $P(p) = \frac{P_0}{p^2}$	$+\infty$		$\frac{P_0}{K_1}$	0

### Conclusion : précision en fonction de la perturbation

- En réponse à une **perturbation de type échelon**, un système comportant **au moins une intégration en amont du point d'entrée de la perturbation** présentera **une erreur nulle**.
- En réponse à une **perturbation de type rampe**, un système comportant **au moins deux intégrations en amont du point d'entrée de la perturbation** présentera **une erreur nulle**.
- Ainsi pour rendre un système **plus précis**, on cherchera à **augmenter le gain statique** de la fonction de transfert en boucle ouverte et d'en **augmenter le nombre d'intégrateurs nuls**.



## Précision : cas d'une perturbation

Perturbation $P(p)$	$\alpha_1 = 0$		$\alpha_1 = 1$	$\alpha_1 \geq 2$
	$\alpha_2 = 0$	$\alpha_2 \geq 1$	$\alpha_2 \in [0; +\infty]$	
Échelon : $P(p) = \frac{P_0}{p}$	$\frac{P_0}{1+K_1} \frac{K_2}{K_2}$	$\frac{P_0}{K_1}$	0	
	$\alpha_2 \in [0; +\infty]$			
Rampe : $P(p) = \frac{P_0}{p^2}$	$+\infty$		$\frac{P_0}{K_1}$	0

### Conclusion : précision en fonction de la perturbation

- En réponse à une **perturbation de type échelon**, un système comportant **au moins une intégration en amont du point d'entrée de la perturbation** présentera une **erreur nulle**.
- En réponse à une **perturbation de type rampe**, un système comportant **au moins deux intégrations en amont du point d'entrée de la perturbation** présentera une **erreur nulle**.
- Ainsi pour rendre un système **plus précis**, on cherchera à **augmenter le gain statique** de la fonction de transfert en boucle ouverte et d'en **augmenter le nombre d'intégrateurs nuls**.

## Précision : cas d'une perturbation

Perturbation $P(p)$	$\alpha_1 = 0$		$\alpha_1 = 1$	$\alpha_1 \geq 2$
	$\alpha_2 = 0$	$\alpha_2 \geq 1$	$\alpha_2 \in [0; +\infty]$	
Échelon : $P(p) = \frac{P_0}{p}$	$\frac{P_0}{1+K_1} \frac{K_2}{K_2}$	$\frac{P_0}{K_1}$	0	
	$\alpha_2 \in [0; +\infty]$			
Rampe : $P(p) = \frac{P_0}{p^2}$	$+\infty$		$\frac{P_0}{K_1}$	0

### Conclusion : précision en fonction de la perturbation

- En réponse à une **perturbation de type échelon**, un système comportant **au moins une intégration en amont du point d'entrée de la perturbation** présentera une **erreur nulle**.
- En réponse à une **perturbation de type rampe**, un système comportant **au moins deux intégrations en amont du point d'entrée de la perturbation** présentera une **erreur nulle**.
- Ainsi pour rendre un système **plus précis**, on cherchera à **augmenter le gain statique** de la fonction de transfert en boucle ouverte et d'en **augmenter le nombre d'intégrateurs purs**

# Plan

## 1 Quantification de la précision

- Définition de la précision
- Erreur indicielle
- Erreur de trainage
- Erreur d'accélération
- Récapitulatif
- Application aux systèmes du premier et du deuxième ordre
- Cas d'une perturbation

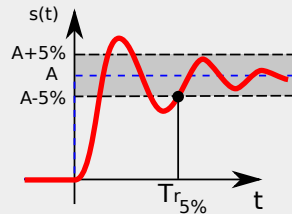
## 2 Rapidité des SLCI

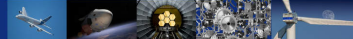
- Définition
- Influence de l'ordre
  - Système du premier ordre
  - Système du deuxième ordre
- Influence du bouclage
  - Système du premier ordre
  - Système du deuxième ordre
- Influence de la bande passante

## Rapidité des SLCI

### Rapidité des SLCI

- On peut définir la **rapidité** d'un système comme la durée qu'il faut pour un système à se stabiliser lorsqu'il est soumis à une variation brusque de la grandeur d'entrée (échelon par exemple).
- On peut la définir à partir du temps de réponse à  $n\%$  (généralement 5%).
- Cela nécessite que le système soit **stable**.





# Plan

## 1 Quantification de la précision

- Définition de la précision
- Erreur indicielle
- Erreur de trainage
- Erreur d'accélération
- Récapitulatif
- Application aux systèmes du premier et du deuxième ordre
- Cas d'une perturbation

## 2 Rapidité des SLCI

- Définition
- Influence de l'ordre
  - Système du premier ordre
  - Système du deuxième ordre
- Influence du bouclage
  - Système du premier ordre
  - Système du deuxième ordre
- Influence de la bande passante

## Rapidité des SLCI

### Rapidité des systèmes du premier ordre

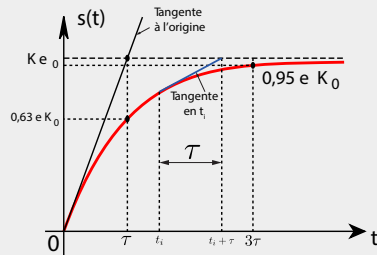
Pour un système du **premier ordre** de fonction de transfert :

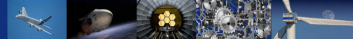
$$H(p) = \frac{K}{1 + \tau \cdot p}$$

soumis à un échelon le temps de réponse à 5% ( $t_{r5\%}$ ) est donné par :

$$t_{r5\%} = 3 \cdot \tau \quad (5)$$

Plus la constante de temps est petite  
plus le système est rapide.





## Rapidité des SLCI

### Rapidité des systèmes du deuxième ordre

Pour un système du **deuxième ordre** de fonction de transfert

$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

On peut retenir :

- $\xi = 0,7$  (Optimum de rapidité) :

$$t_{r5\%} = \frac{3}{\omega_0}$$

;

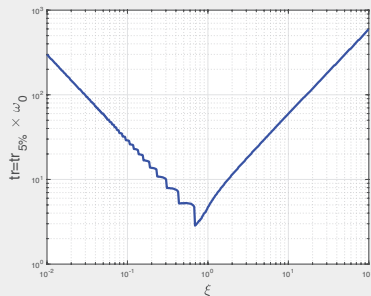
- $\xi = 1$  (Optimum de rapidité) :

$$t_{r5\%} = \frac{5}{\omega_0}$$

Pour le reste, on peut utiliser l'abaque ci-contre.

Pour un même coefficient d'amortissement  $\xi$ , plus  $\omega_0$  augmente et plus le temps de réponse à 5% diminue et donc le système sera plus rapide.

soumis à un échelon, le temps de réponse à 5% est donné selon des valeurs de  $\xi$  et dépend de  $\omega_0$ .



# Plan

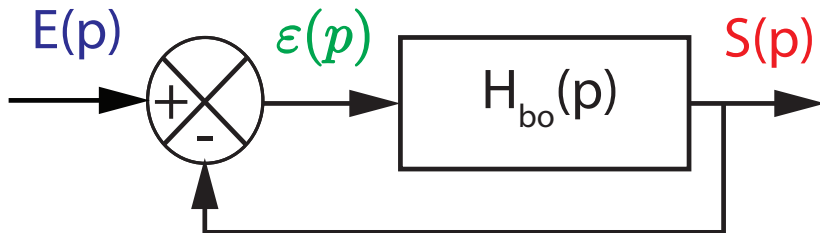
- 1 Quantification de la précision
  - Définition de la précision
  - Erreur indicielle
  - Erreur de trainage
  - Erreur d'accélération
  - Récapitulatif
  - Application aux systèmes du premier et du deuxième ordre
  - Cas d'une perturbation
- 2 Rapidité des SLCI
  - Définition
  - Influence de l'ordre
    - Système du premier ordre
    - Système du deuxième ordre
  - Influence du bouclage
    - Système du premier ordre
    - Système du deuxième ordre
  - Influence de la bande passante



## Rapidité des SLCI

Si considère un système en boucle ouverte que l'on souhaite boucler (on prendra ici un retour unitaire).

$$H_{BF} = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{H_{BO}(p)}{1 + H_{BO}(p)} \quad (6)$$



## Rapidité des SLCI

### Système bouclé du 1<sup>er</sup> ordre

Dans le cas d'une FTBO du 1<sup>er</sup> ordre :

$$H_{BO}(p) = \frac{K}{1 + \tau \cdot p}$$

On peut alors calculer  $H_{BF}(p) = \frac{K_{BF}}{1 + \tau_{BF} \cdot p}$  :

## Rapidité des SLCI

### Système bouclé du 1<sup>er</sup> ordre

Dans le cas d'une FTBO du 1<sup>er</sup> ordre :

$$H_{BO}(p) = \frac{K}{1 + \tau \cdot p}$$

On peut alors calculer  $H_{BF}(p) = \frac{K_{BF}}{1 + \tau_{BF} \cdot p}$  :

$$H_{BF}(p) = \frac{\frac{K}{1 + \tau \cdot p}}{1 + \frac{K}{1 + \tau \cdot p}} = \frac{\frac{K}{1 + K}}{1 + \frac{\tau}{1 + K} \cdot p}$$

## Rapidité des SLCI

### Système bouclé du 1<sup>er</sup> ordre

- $K_{BF}$  :

- $T_{BF}$  :

Ainsi le bouclage ayant une FTBO du 1<sup>er</sup> ordre permet :

- de conserver une fonction de transfert du 1<sup>er</sup> ordre ;
- de diminuer la valeur de la constante de temps.

## Rapidité des SLCI

### Système bouclé du 1<sup>er</sup> ordre

- $K_{BF}$  :

- $T_{BF}$  :

Ainsi le bouclage ayant une FTBO du 1<sup>er</sup> ordre permet :

- de conserver une fonction de transfert du 1<sup>er</sup> ordre ;
- de diminuer la valeur de la constante de temps.

## Rapidité des SLCI

### Système bouclé du 1<sup>er</sup> ordre

- $K_{BF}$  :

$$K_{BF} = \frac{K}{1 + K}$$

- $T_{BF}$  :

Ainsi le bouclage ayant une FTBO du 1<sup>er</sup> ordre permet :

- de conserver une fonction de transfert du 1<sup>er</sup> ordre ;
- de diminuer la valeur de la constante de temps.

## Rapidité des SLCI

### Système bouclé du 1<sup>er</sup> ordre

- $K_{BF}$  :

$$K_{BF} = \frac{K}{1 + K}$$

- $\tau_{BF}$  :

$$\tau_{BF} = \frac{\tau}{1 + K}$$

Ainsi le bouclage ayant une FTBO du 1<sup>er</sup> ordre permet :

- de conserver une fonction de transfert du 1<sup>er</sup> ordre ;
- de diminuer la valeur de la constante de temps.

## Rapidité des SLCI

### Système bouclé du 2<sup>ème</sup> ordre

Dans le cas d'une FTBO du 2<sup>ème</sup> ordre :

$$H_{BO}(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

On peut alors calculer  $H_{BF}(p) = \frac{K_{BF}}{1 + \frac{2\xi_{BF}}{\omega_{0BF}} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_{0BF}^2}}$  :



## Rapidité des SLCI

### Système bouclé du 2<sup>ème</sup> ordre

Dans le cas d'une FTBO du 2<sup>ème</sup> ordre :

$$H_{BO}(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

On peut alors calculer  $H_{BF}(p) = \frac{K_{BF}}{1 + \frac{2\xi_{BF}}{\omega_{0BF}} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_{0BF}^2}}$  :

$$\begin{aligned} H_{BF}(p) &= \frac{\frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}}{1 + \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}} = \frac{K}{K + 1 + \frac{2\xi}{\omega_0} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_0^2}} \\ &= \frac{\frac{K}{1+K}}{1 + \frac{2\xi}{(1+K)\omega_0} \cdot p + \frac{p^2}{(1+K)\omega_0^2}} \end{aligned}$$

## Rapidité des SLCI

### Système bouclé du 2<sup>ème</sup> ordre

- $K_{BF}$  :

- $\omega_{0BF}$  :

- $\xi_{BF}$  :

Ainsi le bouclage ayant une FTBO du 2<sup>ème</sup> ordre permet :

- de conserver une fonction de transfert du 2<sup>ème</sup> ordre ;
- de diminuer la valeur du coefficient d'amortissement  $\xi_{BF}$  lorsque l'on augmente le gain  $K$  de la FTBO. Par conséquent si  $\xi_{BF}$  diminue et :
  - si  $\xi_{BF}$  reste supérieur à 0,7, le système sera plus rapide,
  - si  $\xi_{BF}$  reste inférieur à 0,7, le système sera plus lent.

## Rapidité des SLCI

### Système bouclé du 2<sup>ème</sup> ordre

- $K_{BF}$  :

$$K_{BF} = \frac{K}{1 + K}$$

- $\omega_{0BF}$  :

- $\xi_{BF}$  :

Ainsi le bouclage ayant une FTBO du 2<sup>ème</sup> ordre permet :

- de conserver une fonction de transfert du 2<sup>ème</sup> ordre ;
- de diminuer la valeur du coefficient d'amortissement  $\xi_{BF}$  lorsque l'on augmente le gain  $K$  de la FTBO. Par conséquent si  $\xi_{BF}$  diminue et :
  - si  $\xi_{BF}$  reste supérieur à 0,7, le système sera plus rapide,
  - si  $\xi_{BF}$  reste inférieur à 0,7, le système sera plus lent.

## Rapidité des SLCI

### Système bouclé du 2<sup>ème</sup> ordre

- $K_{BF}$  :

$$K_{BF} = \frac{K}{1 + K}$$

- $\omega_{0BF}$  :

$$\omega_{0BF} = \sqrt{1 + K} \cdot \omega_0$$

- $\xi_{BF}$  :

Ainsi le bouclage ayant une FTBO du 2<sup>ème</sup> ordre permet :

- de conserver une fonction de transfert du 2<sup>ème</sup> ordre ;
- de diminuer la valeur du coefficient d'amortissement  $\xi_{BF}$  lorsque l'on augmente le gain  $K$  de la FTBO. Par conséquent si  $\xi_{BF}$  diminue et :
  - si  $\xi_{BF}$  reste supérieur à 0,7, le système sera plus rapide,
  - si  $\xi_{BF}$  reste inférieur à 0,7, le système sera plus lent.

## Rapidité des SLCI

### Système bouclé du 2<sup>ème</sup> ordre

- $K_{BF}$  :

$$K_{BF} = \frac{K}{1 + K}$$

- $\omega_{0BF}$  :

$$\omega_{0BF} = \sqrt{1 + K} \cdot \omega_0$$

- $\xi_{BF}$  :

$$\xi_{BF} = \frac{\omega_{0BF}}{2} \cdot \frac{2\xi}{(1 + K)\omega_0} = \frac{\sqrt{1 + K} \cdot \omega_0}{2} \cdot \frac{2\xi}{(1 + K)\omega_0} = \frac{\xi}{\sqrt{1 + K}}$$

Ainsi le bouclage ayant une FTBO du 2<sup>ème</sup> ordre permet :

- de conserver une fonction de transfert du 2<sup>ème</sup> ordre ;
- de diminuer la valeur du coefficient d'amortissement  $\xi_{BF}$  lorsque l'on augmente le gain  $K$  de la FTBO. Par conséquent si  $\xi_{BF}$  diminue et :
  - si  $\xi_{BF}$  reste supérieur à 0,7, le système sera plus rapide,
  - si  $\xi_{BF}$  reste inférieur à 0,7, le système sera plus lent.

# Plan

## 1 Quantification de la précision

- Définition de la précision
- Erreur indicielle
- Erreur de trainage
- Erreur d'accélération
- Récapitulatif
- Application aux systèmes du premier et du deuxième ordre
- Cas d'une perturbation

## 2 Rapidité des SLCI

- Définition
- Influence de l'ordre
  - Système du premier ordre
  - Système du deuxième ordre
- Influence du bouclage
  - Système du premier ordre
  - Système du deuxième ordre
- Influence de la bande passante



## Rapidité des SLCI

### Bande passante de la FTBF

- La bande passante à  $-n \cdot dB$  correspond à la bande de pulsation où le gain est supérieur au gain asymptotique des basses fréquences moins  $n$  décibels.
- Pour un 1<sup>er</sup> ordre la bande passante à  $-3dB$  correspond à la pulsation de cassure  $\frac{1}{\tau}$ .
- On peut montrer que plus la bande passante de la FTBF du système est importante plus le système sera rapide.

