

C6 : Analyse temporelle des systèmes asservis

C6-1 : Analyse temporelle des systèmes asservis du 1er ordre

Émilien DURIF

Lycée La Martinière Monplaisir Lyon
Classe de MPSI
12 Mars 2024

Plan

1 Définitions

- Système du premier ordre
- Exemple du cours

2 Caractérisations de la réponse d'un système du premier ordre

- Réponse à un échelon
- Réponse à une rampe

Plan

1

Définitions

- Système du premier ordre
- Exemple du cours

2

Caractérisations de la réponse d'un système du premier ordre

- Réponse à un échelon
- Réponse à une rampe

Système du premier ordre

Système du premier ordre

On appelle **système du premier ordre** tout système linéaire, continu et invariant régi par une équation différentielle du premier degré de la forme :

$$\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K e(t). \quad (1)$$

Remarque

Pour la suite du cours, on considérera que les conditions initiales de $s(t)$ sont toujours nulles :

- pour une équation différentielle du premier ordre : $s(t=0) = 0$;
- pour une équation différentielle du deuxième ordre : $s'(t=0) = 0$



Système du premier ordre

Système du premier ordre

On appelle **système du premier ordre** tout système linéaire, continu et invariant régi par une équation différentielle du premier degré de la forme :

$$\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K e(t). \quad (1)$$

Remarque

*Pour la suite du cours, on considérera que les **conditions initiales de $s(t)$** sont toujours nulles :*

- pour une équation différentielle du premier ordre : $s(t = 0) = 0$;
- pour une équation différentielle du deuxième ordre : $s'(t = 0) = 0$

Système du premier ordre

Système du premier ordre

On appelle **système du premier ordre** tout système linéaire, continu et invariant régi par une équation différentielle du premier degré de la forme :

$$\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K e(t). \quad (1)$$

Remarque

*Pour la suite du cours, on considérera que les **conditions initiales de s(t)** sont toujours nulles :*

- pour une équation différentielle du premier ordre : $s(t = 0) = 0$;
- pour une équation différentielle du deuxième ordre : $s'(t = 0) = 0$

Système du premier ordre

Propriété

La fonction de transfert de ces systèmes peut s'écrire sous la **forme canonique** suivante :

$$H(p) = \frac{K}{1 + \tau p} \quad (2)$$

où :

- τ : constante de temps (en s) ;
- K : gain statique (unité selon l'application).

Système du premier ordre

Propriété

La fonction de transfert de ces systèmes peut s'écrire sous la **forme canonique** suivante :

$$H(p) = \frac{K}{1 + \tau p} \quad (2)$$

où :

- τ : **constante de temps** (en s) ;
- K : **gain statique** (unité selon l'application).

Système du premier ordre

Propriété

La fonction de transfert de ces systèmes peut s'écrire sous la **forme canonique** suivante :

$$H(p) = \frac{K}{1 + \tau p} \quad (2)$$

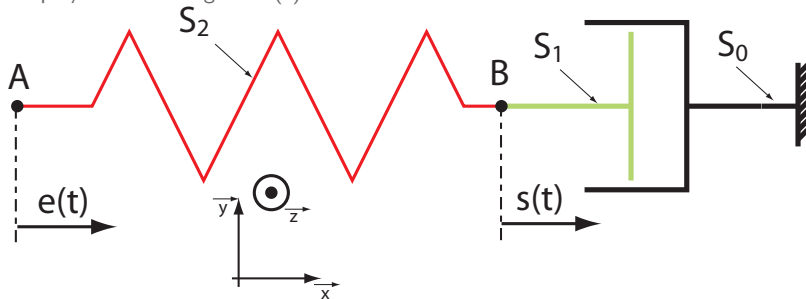
où :

- τ : **constante de temps** (en s) ;
- K : **gain statique** (unité selon l'application).

Système du premier ordre : exemple

Exemple : ressort de raideur k et amortisseur de coefficient c

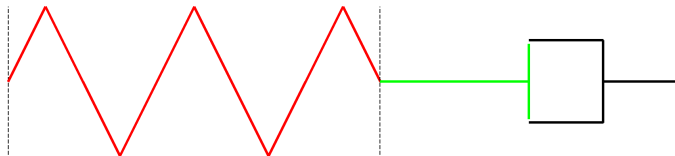
On déplace l'extrémité A d'une longueur $e(t)$. Le point B répond à ce déplacement en se déplaçant d'une longueur $s(t)$.



Système du premier ordre : exemple

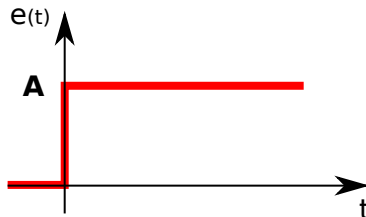
Exemple : ressort de raideur k et amortisseur de coefficient c

On déplace l'extrémité A d'une longueur $e(t)$. Le point B répond à ce déplacement en se déplaçant d'une longueur $s(t)$.



On impose un échelon sur le déplacement $e(t)$:

$$e(t = 0) = 0$$

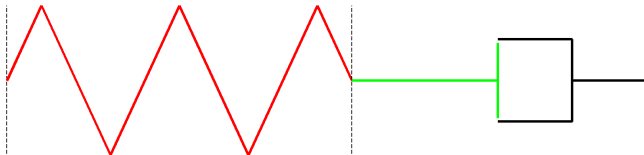




Système du premier ordre : exemple

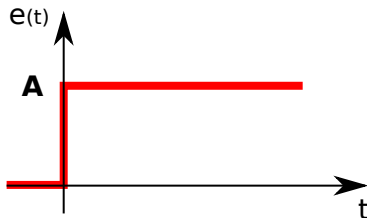
Exemple : ressort de raideur k et amortisseur de coefficient c

On déplace l'extrémité A d'une longueur $e(t)$. Le point B répond à ce déplacement en se déplaçant d'une longueur $s(t)$.



On impose un échelon sur le déplacement $e(t)$:

$$e(t = 0^+) = e_0$$



Système du premier ordre : exemple

Exemple : ressort de raideur k et amortisseur de coefficient c

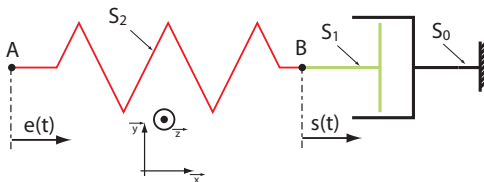
Question : Comment le système va répondre ?

Système oscillant

Système amorti

Système du premier ordre : exemple

Exemple : ressort de raideur k et amortisseur de coefficient c



On déplace l'extrémité A d'une longueur $e(t)$. Le point B répond à ce déplacement en se déplaçant d'une longueur $s(t)$. En isolant le solide S_1 de masse (m), on obtient le bilan des actions mécaniques extérieurs suivant \vec{x} :

- Le ressort S_2 de raideur k exerce un effort de rappel donné par sa valeur algébrique suivant \vec{x} ,

$$F_r = -k(s(t) - e(t)).$$

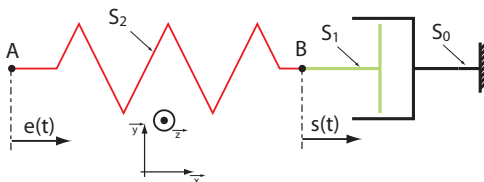
- L'amortisseur S_0 de coefficient de viscosité c exerce un effort de rappel donné par sa valeur algébrique suivant \vec{x} ,

$$F_c = -c \cdot \frac{ds(t)}{dt}.$$

- On néglige le poids du solide S_1 .

Système du premier ordre : exemple

Exemple : ressort de raideur k et amortisseur de coefficient c



On déplace l'extrémité A d'une longueur $e(t)$. Le point B répond à ce déplacement en se déplaçant d'une longueur $s(t)$. En isolant le solide S_1 de masse (m), on obtient le bilan des actions mécaniques extérieurs suivant \vec{x} :

- Le ressort S_2 de raideur k exerce un effort de rappel donné par sa valeur algébrique suivant \vec{x} ,

$$F_r = -k(s(t) - e(t)).$$

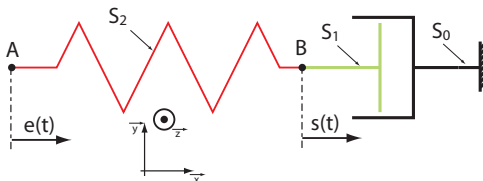
- L'amortisseur S_0 de coefficient de viscosité c exerce un effort de rappel donné par sa valeur algébrique suivant \vec{x} ,

$$F_c = -c \cdot \frac{ds(t)}{dt}.$$

- On néglige le poids du solide S_1 .

Système du premier ordre : exemple

Exemple : ressort de raideur k et amortisseur de coefficient c



On déplace l'extrémité A d'une longueur $e(t)$. Le point B répond à ce déplacement en se déplaçant d'une longueur $s(t)$. En isolant le solide S_1 de masse (m), on obtient le bilan des actions mécaniques extérieurs suivant \vec{x} :

- Le ressort S_2 de raideur k exerce un effort de rappel donné par sa valeur algébrique suivant \vec{x} ,

$$F_r = -k(s(t) - e(t)).$$

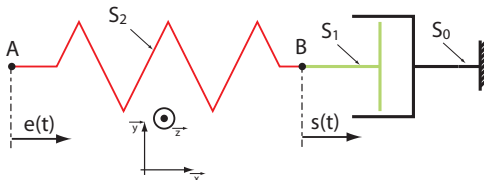
- L'amortisseur S_0 de coefficient de viscosité c exerce un effort de rappel donné par sa valeur algébrique suivant \vec{x} ,

$$F_c = -c \cdot \frac{ds(t)}{dt}.$$

- On néglige le poids du solide S_1 .

Système du premier ordre : exemple

Exemple : ressort de raideur k et amortisseur de coefficient c



- En appliquant le Principe Fondamental de la Dynamique suivant la direction \vec{x} , on obtient :

$$F_r + F_c = m \frac{d^2 s(t)}{dt^2}.$$

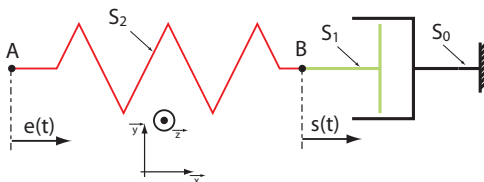
- En négligeant la masse m (ce qui revient à négliger l'inertie), on obtient alors,

$$\boxed{c \frac{ds(t)}{dt} + ks(t) = ke(t)}. \quad (3)$$

- Cette équation différentielle de degré 1 caractérise **un système du premier ordre**.
- On considère que les conditions initiales sont nulles ($s(t=0) = 0$).

Système du premier ordre : exemple

Exemple : ressort de raideur k et amortisseur de coefficient c



- En appliquant le Principe Fondamental de la Dynamique suivant la direction \vec{x} , on obtient :

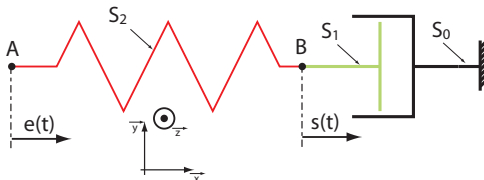
$$F_r + F_c = m \frac{d^2 s(t)}{dt^2}.$$

- En négligeant la masse m (ce qui revient à négliger l'inertie), on obtient alors,

$$c \frac{ds(t)}{dt} + ks(t) = ke(t). \quad (3)$$

Système du premier ordre : exemple

Exemple : ressort de raideur k et amortisseur de coefficient c



- En appliquant le Principe Fondamental de la Dynamique suivant la direction \vec{x} , on obtient :

$$F_r + F_c = m \frac{d^2 s(t)}{dt^2}.$$

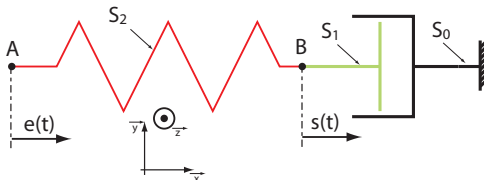
- En négligeant la masse m (ce qui revient à négliger l'inertie), on obtient alors,

$$c \frac{ds(t)}{dt} + ks(t) = ke(t). \quad (3)$$

- Cette équation différentielle de degré 1 caractérise **un système du premier ordre**.
- On considère que les conditions initiales sont nulles ($s(t=0) = 0$).

Système du premier ordre : exemple

Exemple : ressort de raideur k et amortisseur de coefficient c



- En appliquant le Principe Fondamental de la Dynamique suivant la direction \vec{x} , on obtient :

$$F_r + F_c = m \frac{d^2 s(t)}{dt^2}.$$

- En négligeant la masse m (ce qui revient à négliger l'inertie), on obtient alors,

$$\boxed{c \frac{ds(t)}{dt} + ks(t) = ke(t).} \quad (3)$$

- Cette équation différentielle de degré 1 caractérise **un système du premier ordre**.
- On considère que les conditions initiales sont nulles ($s(t = 0) = 0$).

Système du premier ordre : exemple

Détermination dans le domaine de Laplace de la fonction de transfert associée

- Dans le domaine de Laplace on obtient :

$$c \cdot p \cdot S(p) + kS(p) = kE(p).$$

- On obtient alors,

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{k}{k + c \cdot p};$$

- qui s'écrit sous la forme canonique :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1}{1 + \frac{c}{k} \cdot p};$$

- On peut alors identifier la forme canonique avec les coefficients :

- $\tau = \frac{c}{k}$
- $K = 1$

Système du premier ordre : exemple

Détermination dans le domaine de Laplace de la fonction de transfert associée

- Dans le domaine de Laplace on obtient :

$$c \cdot p \cdot S(p) + kS(p) = kE(p).$$

- On obtient alors,

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{k}{k + c \cdot p};$$

- qui s'écrit sous la forme canonique :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1}{1 + \frac{c}{k} \cdot p};$$

- On peut alors identifier la forme canonique avec les coefficients :

- $\tau = \frac{c}{k}$
- $K = 1$

Système du premier ordre : exemple

Détermination dans le domaine de Laplace de la fonction de transfert associée

- Dans le domaine de Laplace on obtient :

$$c \cdot p \cdot S(p) + kS(p) = kE(p).$$

- On obtient alors,

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{k}{k + c \cdot p};$$

- qui s'écrit sous la forme canonique :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1}{1 + \frac{c}{k} \cdot p};$$

- On peut alors identifier la forme canonique avec les coefficients :

- $\tau = \frac{c}{k}$
- $K = 1$

Système du premier ordre : exemple

Détermination dans le domaine de Laplace de la fonction de transfert associée

- Dans le domaine de Laplace on obtient :

$$c \cdot p \cdot S(p) + kS(p) = kE(p).$$

- On obtient alors,

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{k}{k + c \cdot p};$$

- qui s'écrit sous la forme canonique :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1}{1 + \frac{c}{k} \cdot p};$$

- On peut alors identifier la forme canonique avec les coefficients :

- $\tau = \frac{c}{k}$
- $K = 1$

Système du premier ordre : exemple

Détermination dans le domaine de Laplace de la fonction de transfert associée

- Dans le domaine de Laplace on obtient :

$$c \cdot p \cdot S(p) + kS(p) = kE(p).$$

- On obtient alors,

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{k}{k + c \cdot p};$$

- qui s'écrit sous la forme canonique :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1}{1 + \frac{c}{k} \cdot p};$$

- On peut alors identifier la forme canonique avec les coefficients :

- $\tau = \frac{c}{k}$
- $K = 1$

Plan

1 Définitions

- Système du premier ordre
- Exemple du cours

2 Caractérisations de la réponse d'un système du premier ordre

- Réponse à un échelon
- Réponse à une rampe

Système du premier ordre : caractérisation de la réponse à un échelon

Réponse indicielle

$$e(t) = e_0 \cdot u(t).$$

Si $e_0 = 1$, la réponse $e(t)$ est appelée **réponse indicielle**.

Équation de la réponse

On cherche à calculer $s(t)$ à partir de $H(p)$ et $E(p)$:

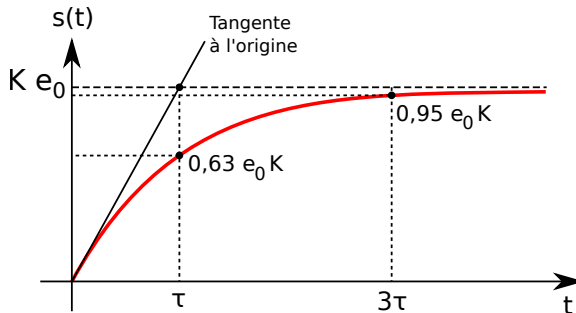
$$\begin{aligned} E(p) &= \frac{e_0}{p} \\ S(p) &= H(p) \cdot E(p) \\ &= \left(\frac{K}{1 + \tau p} \right) \frac{e_0}{p} \end{aligned}$$

Système du premier ordre : caractérisation de la réponse à un échelon

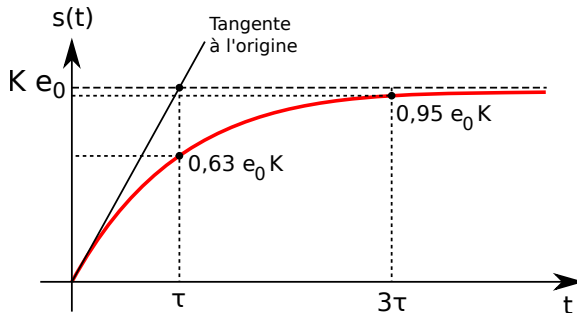
Réponse à un échelon

La réponse d'un système du 1^{er} ordre à un échelon est de la forme :

$$s(t) = K \cdot e_0 \left(1 - e^{-t/\tau}\right) \cdot u(t). \quad (4)$$



Système du premier ordre : caractérisation de la réponse à un échelon



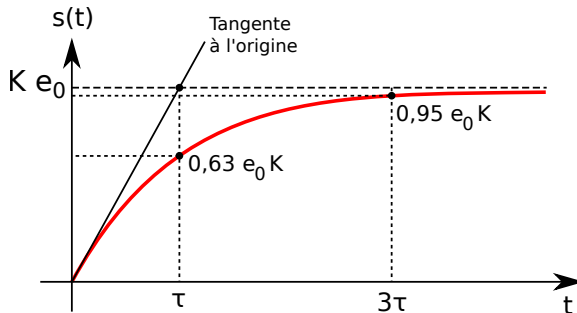
Au voisinage de $+\infty$:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} s(t) = \dots$$

Au voisinage de 0 :

$$\lim_{t \rightarrow 0} s(t) = \dots$$

Système du premier ordre : caractérisation de la réponse à un échelon



$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow +\infty} s(t) &= \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot S(p) \\ &= K e_0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{ds(t)}{dt} &= \lim_{p \rightarrow 0} p^2 \cdot S(p) \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow 0} s(t) &= \lim_{p \rightarrow +\infty} p \cdot S(p) \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow 0} \frac{ds(t)}{dt} &= \lim_{p \rightarrow +\infty} p^2 \cdot S(p) \\ &= \frac{K \cdot e_0}{\tau}\end{aligned}$$

Système du premier ordre : caractérisation de la réponse à un échelon

Propriétés

- La réponse indicielle à un système du 1^{er} ordre possède :
 - une **asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$** d'ordonnée à l'origine $K \cdot e_0$,
 - une **tangente à l'origine de coefficient directeur $\frac{K \cdot e_0}{\tau}$** .
- La **rapidité** d'une réponse à un échelon pour un premier ordre est quantifiée par le **temps de réponse à 5%** (noté t_r) :

$$t_r \approx 3 \tau. \quad (5)$$

- La **Précision** de la réponse à un échelon peut être indiquée par l'**erreur statique**, noté ε_s . Elle s'obtient en recherchant l'écart au voisinage de $+\infty$:

$$\varepsilon_s = \lim_{t \rightarrow +\infty} (e(t) - s(t)) \quad (6)$$

- L'erreur statique ε_s d'un système du 1^{er} ordre de **gain unitaire** soumis à un échelon est nulle :

$$\varepsilon_s = 0. \quad (7)$$

Système du premier ordre : caractérisation de la réponse à un échelon

Démonstration de la rapidité

Calculons le temps de réponse à 5% pour un premier ordre

Système du premier ordre : caractérisation de la réponse à un échelon

Démonstration de la rapidité

$$s(t_r) = K e_0 \left(1 - e^{-t_r/\tau} \right) = 0,95 K e_0$$

$$\Leftrightarrow t_r = -\tau \ln(0,05)$$

avec $\ln(0.05) \approx -3$.

Système du premier ordre : caractérisation de la réponse à un échelon

Démonstration de la précision

Pour illustrer cela, prenons un gain $K = 1$. D'après le raisonnement suivant :

Système du premier ordre : caractérisation de la réponse à un échelon

Démonstration de la précision

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_s &= \lim_{t \rightarrow +\infty} (e(t) - s(t)) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot (E(p) - H(p) \cdot E(p)) \\
 &= \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot E(p) \left(1 - \frac{1}{1 + \tau p}\right) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{e_0}{p} \left(1 - \frac{1}{1 + \tau p}\right) \\
 &= \lim_{p \rightarrow 0} e_0 \left(1 - \frac{1}{1}\right) = 0
 \end{aligned}$$

Système du premier ordre : caractérisation de la réponse à un échelon

Attention

Verifier l'homogénéité !!!

$$\varepsilon_s = \lim_{t \rightarrow +\infty} (K e(t) - s(t)). \quad (8)$$

Dans tous les cas

$$\varepsilon_s = 0. \quad (9)$$

Système du premier ordre : caractérisation de la réponse à un échelon



Système du premier ordre : caractérisation de la réponse à une rampe

Équation de la réponse

On cherche à calculer $s(t)$ à partir de $H(p)$ et $E(p)$:

$$E(p) = \frac{a}{p^2}$$

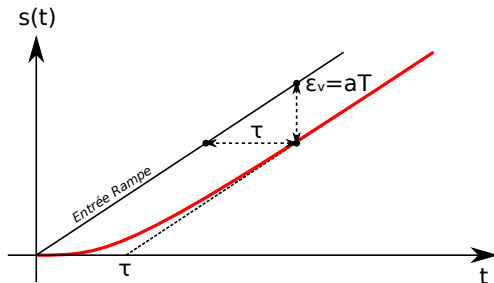
$$S(p) = H(p)E(p) = \left(\frac{K}{1 + \tau p} \right) \frac{a}{p^2} = K a \left(\frac{1}{p^2} - \frac{\tau}{p} + \frac{\tau^2}{1 + \tau p} \right)$$

Après transformée inverse, on obtient :

La réponse d'un système du 1^{er} ordre soumis à une rampe est de la forme :

$$s(t) = K a \left(t + \tau \left(e^{-t/\tau} - 1 \right) \right) u(t). \quad (10)$$

Système du premier ordre : caractérisation de la réponse à une rampe



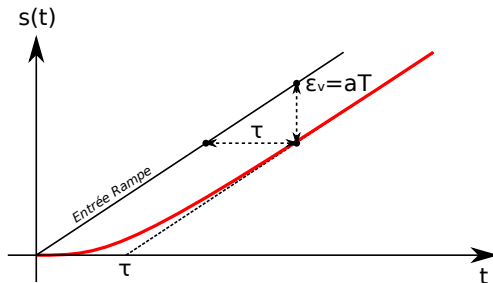
Au voisinage de $+\infty$:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} s(t) = \dots$$

Au voisinage de 0 :

$$\lim_{t \rightarrow 0} s(t) = \dots$$

Système du premier ordre : caractérisation de la réponse à une rampe



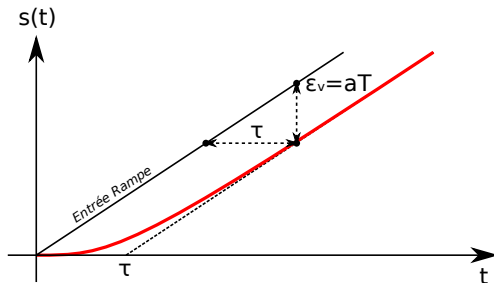
Au voisinage de $+\infty$:

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow +\infty} s(t) &= \lim_{p \rightarrow 0} p S(p) \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{K a}{p(1 + \tau p)} \\ &= +\infty \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{ds(t)}{dt} &= K a\end{aligned}$$

Au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow 0} s(t) &= \lim_{p \rightarrow +\infty} p S(p) \\ &= \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{K a}{p(1 + \tau p)} \\ &= 0 \\ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{ds(t)}{dt} &= 0\end{aligned}$$

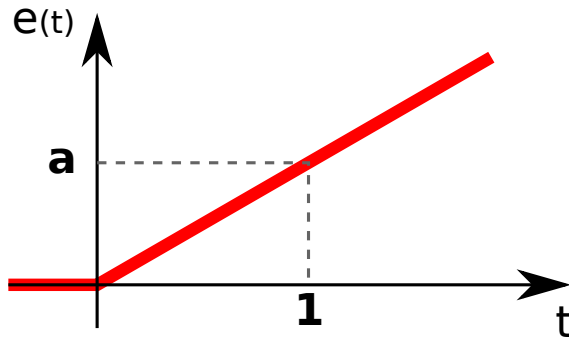
Système du premier ordre : caractérisation de la réponse à une rampe



Propriétés

- une **tangente horizontale** au voisinage de 0,
- une **asymptote oblique**, de coefficient directeur $K a$.

Système du premier ordre : caractérisation de la réponse à une rampe



Système du premier ordre : caractérisation de la réponse à une rampe

Propriétés

- La réponse d'un système du 1^{er} ordre à une rampe possède :
 - une tangente horizontale au voisinage de 0,
 - une asymptote oblique, de coefficient directeur K a car une asymptote oblique d'équation $y(t) = a(t - \tau)$ au voisinage de $+\infty$.
- **Précision** : Pour $K = 1$, on trouve :

$$\varepsilon_v = a \tau. \quad (11)$$

- **Rapidité** : La rapidité d'une réponse à une rampe d'un système du 1^{er} ordre peut se caractériser par un **retard de traînage** r_t :

$$r_t = \tau. \quad (12)$$

Système du premier ordre : caractérisation de la réponse à une impulsion

Réponse à une impulsion :

On considère maintenant un dirac :

$$e(t) = a \cdot \delta t.$$

Équation de la réponse

On cherche à calculer $s(t)$ à partir de $H(p)$ et $E(p)$:

$$E(p) = 1$$

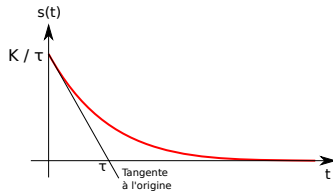
$$S(p) = H(p)E(p) = \left(\frac{K}{1 + \tau p} \right) \times 1 = \frac{K}{\tau} \left(\frac{1}{\frac{1}{\tau} + p} \right)$$

Après transformée inverse, on obtient :

la réponse temporelle d'un système du 1^{er} ordre à une impulsion a pour équation :

$$s(t) = \frac{K}{\tau} e^{-t/\tau}. \quad (13)$$

Système du premier ordre : caractérisation de la réponse à une impulsion



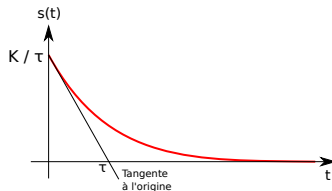
Au voisinage de $+\infty$:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} s(t) = \dots$$

Au voisinage de 0 :

$$\lim_{t \rightarrow 0} s(t) = \dots$$

Système du premier ordre : caractérisation de la réponse à une impulsion



Au voisinage de 0 :

$$\lim_{t \rightarrow 0} s(t) = \lim_{p \rightarrow +\infty} p S(p)$$

Au voisinage de $+\infty$:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} s(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p S(p)$$

$$= \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{K p}{1 + \tau p}$$

$$= \frac{K}{\tau}$$

$$= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{K p}{1 + \tau p}$$

$$= 0$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{ds(t)}{dt} = \lim_{p \rightarrow +\infty} p \left[p \frac{K}{1 + \tau p} - \frac{K}{\tau} \right]$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{ds(t)}{dt} = 0$$

$$= \lim_{p \rightarrow +\infty} p \left[\frac{pK\tau - K - pK\tau}{\tau(1 + \tau p)} \right] = \lim_{p \rightarrow +\infty} -\frac{-K p}{\tau(1 + \tau p)}$$

$$= -\frac{K}{\tau}$$

Système du premier ordre : caractérisation de la réponse à une impulsion

Propriétés

La réponse d'un système du 1^{er} ordre sollicité par un Dirac possède :

- une **asymptote horizontale** d'équation $s(t) = 0$ au voisinage de $+\infty$,
- une **tangente d'équation** $s(t) = -\frac{K}{\tau^2}t + \frac{K}{\tau}$ au voisinage de 0.