

DS n°8 : Fiche de calculs

Durée : 60 minutes, calculatrices et documents interdits

Nom et prénom :

Note :

Porter directement les réponses sur la feuille, sans justification.

Analyse asymptotique

Donner un équivalent simple de chacune des fonctions suivantes, au point indiqué.

$$\frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt{x}} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \boxed{}. \quad (1)$$

$$e^{\sin x} - e \underset{x \rightarrow \pi/2}{\sim} \boxed{}. \quad (2)$$

$$\frac{x^{(x)}}{x^x - 1} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \boxed{}. \quad (3)$$

$$\cos(\sin x) + e^{\operatorname{ch} x - 1} - 2 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \boxed{}. \quad (4)$$

On considère la fonction $f : x \mapsto x \exp\left(\frac{2x}{x^2 - 1}\right)$. Notons \mathcal{C}_f sa courbe représentative.

Au voisinage de $+\infty$, \mathcal{C}_f a pour asymptote la droite Δ d'équation $y = \boxed{}$ (5)

Compléter : au voisinage de $+\infty$, \mathcal{C}_f est $\boxed{}$ de Δ . (6).

Intégration

Calculer les primitives ou intégrales suivantes :

$$\int^x \frac{t - 6}{(t - 1)(t^2 + 4)} dt = \boxed{} \quad (7)$$

$$\int_0^1 t^2 \arctan t dt = \boxed{} \quad (8)$$

$$\int_0^{\pi/3} \sin^5 t dt = \boxed{} \quad (9)$$

Donner un équivalent simple pour chacune des expressions suivantes.

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{n^2}{k^2 + 3n^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \quad (10)$$

$$\prod_{k=1}^n \left(\frac{n+2k}{n} \right)^{\frac{1}{n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \quad (11)$$

Dénombrement

Un taupin a dans sa bibliothèque 4 livres de mathématiques, 5 livres de physique, deux livres d'informatique et un livre d'anglais.

Combien a-t-il de manières de ranger sa bibliothèque en regroupant les livres matière par matière ?
(simplifier le résultat)

$$\square \quad (12)$$

Et de la ranger en ne plaçant jamais les deux livres d'informatique côte à côte? (ne pas simplifier le résultat)

$$\square \quad (13)$$

Soit $k \in \mathbb{N}$, combien y a-t-il d'entiers compris entre 1 et 10^k dont la somme des chiffres vaut 3 ?

$$\square \quad (14)$$

Combien existe-t-il de nombres entiers naturels de quatre chiffres écrits avec :

au moins un chiffre pair : (15) au moins un chiffre impair : (16)

Algèbre linéaire

On considère l'endomorphisme de \mathbb{R}^4 : $\varphi : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x & + & 2y & & + & 3t \\ 2x & - & y & + & 5z & + & t \\ -x & + & y & - & 3z & & \\ 3x & - & y & + & 7z & + & 2t \end{pmatrix}$.

Déterminer une base de chacun des sous-espaces vectoriels suivants de \mathbb{R}^4 .

$$\text{Ker}(f) : \quad (17) \quad \text{Im}(f) : \quad (18)$$

— FIN —