Devoir à la maison n° 3

À rendre le 5 octobre

I. Étude d'une fonction

1) Soit f la fonction définie sur $[0,\pi]$ par

$$\forall x \in [0,\pi] \qquad f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{5-4\cos x}} \ .$$

a) Calculer la dérivée de f. Vérifier que $f'(x)$ est du même signe que $\cos(x) - \frac{1}{2}$.

b) En déduire les variations de f sur $[0,\pi]$ et tracer sa courbe représentative.

2) Soit g la fonction définie sur $[0,\pi]$ par

$$\forall x \in [0,\pi] \qquad g(x) = \operatorname{Arccos}\left(\frac{4-5\cos x}{5-4\cos x}\right) \ .$$

a) Vérifier que g est bien définie en tout point de $[0,\pi]$.

b) Pour $x \in [0,\pi]$, simplifier les expressions $\cos\Big(g(x)\Big)$ et $\sin\Big(g(x)\Big)$.

c) Calculer $g'(x)$ pour $x \in]0,\pi[$ (*pour cela, on pourra dériver la relation donnant* $\cos\Big(g(x)\Big)$ *obtenue à la question précédente*).

d) Vérifier que $\forall x \in [0,\pi] \quad g\Big(g(x)\Big) = x$.
Qu'en déduit-on concernant la courbe (Γ) représentant g ?

e) Construire la courbe (Γ).

3) Soit x un réel appartenant à l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{3}\right[$.

a) Montrer qu'il existe un unique $z \in \left]\frac{\pi}{3}, \pi\right]$ tel que $f(z) = f(x)$.

b) Montrer que $z = g(x)$.

II. Autour d'une somme

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \binom{n}{k} (-1)^{k-1}.$$

On se propose de montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_{n+1} - S_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} \left[\binom{n+1}{k} - \binom{n}{k} \right] (-1)^{k-1}.$$

2) En déduire une expression simplifiée de $S_{n+1} - S_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3) Montrer que, pour tout $n, k \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{k} \binom{n}{k-1} = \frac{1}{n+1} \binom{n+1}{k}.$$

4) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_{n+1} - S_n = \frac{1}{n+1}.$$

5) Conclure, sans utiliser de raisonnement par récurrence.

— FIN —