Rapport DS03

Barème :

Feuilles de calculs : chaque question sur 2 points, total sur 36 points, ramené sur 5 points

Problème : chaque question sur 4 points, total sur 96 points, ramené sur 15 points

Remarques Générales :

- 1 point sur 20 pour ceux qui n'encadrent pas ou à main levée sans règle ou encore si il y a trop de gribouillis ! Aux concours, un certain nombre de points sont dediés à la presentation ! Prenez rapidement de bonnes habitudes, afin que cela soit un reflexe !

Il faut introduire les variables que vous utilisez !

Attention à l'usage abusif et hors sujet des symbols $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$

Cependant, la redaction s'améliore. Bravo !

I Exercice de TD :

C'est très bien globalement, continuez aussi !

II Une équation differentielle non linéaire

P.1) 1) Avant de deriver, il faut justifier la derivabilité avec minutie lorsque f est construite de fonction :

$x \mapsto \sqrt{x}$	puisque definie sur $\mathbb{R}_+$	mais derivable sur $\mathbb{R}_+^*$
$x \mapsto \mathrm{Arccos}\, x$	" " " $[-1,1]$	" $]-1,1[$
$x \mapsto \mathrm{Arcsin}\, x$	" " " $[-1,1]$	" $]-1,1[$

(P.1)2) Utilisez le thm de la bijection continue pour prouver f est bijective de I sur f(I), d'ailleurs ce thm donne aussi f(I).

C'était préferable à prouver separement f est injective et surjective

Le thm de la bijection est mal redigé : il doit apparaitre clairement dans la copie : les hypothèses : f continue, strictement croissante ou decroissante et les limites de f ou valeurs de f au bord de I.

On évitera de dire strictement monotone, mais plutôt strictement croissante ou strictement décroissante.
On évitera d'invoquer le théorème des valeurs intermédiaires (TVI) à la place du thm de la bijection, puisque il n'y a pas d'hypothèses de strict monotonie dans le TVI !

Si on sait que f est bijective de I sur $f(I)$; pour déterminer f^{-1} il est possible de raisonner qu'avec des implications, à condition de justifier !

- Soit $y \in J$ et $x \in I$, $y = f(x) \Rightarrow \dots \Rightarrow x = g(y)$
Puisque $f : I \to J$ est bijective, $g(y)$ est l'unique solution de $y = f(x)$ et donc g est la réciproque de f.

- Si pour $x \in J$ $f(g(x)) = x$, il faut expliquer pourquoi cela donne $g = f^{-1}$.
Ici, comme on avait justifié $f : I \to J$ bijective on obtenait : $f^{-1}(f(g(x))) = f^{-1}(x)$ pour $x \in J$.
d'où $g(x) = f^{-1}(x)$

P2)3) Décevant ! Primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x(1-x)}$: méthode à savoir !
Attention :

$$\cancel{\int^x f(x)\,dx} \qquad \int^x f(t)\,dt$$

2 variables différentes

P3) La partie 3 était un raisonnement par analyse - synthèse, peu l'ont compris !

9)b) On ne pouvait pas appliquer le thm de Cauchy - Lipschitz puisque l'équation différentielle (K) n'est pas de la forme
$y' + a(t)y = b(t)$ avec $a, b : I \to \mathbb{R}$ continues, I intervalle

Attention ! $S = \{ \cancel{\lambda\sqrt{\frac{1-x}{x}} / \lambda \in \mathbb{R}} \}$

on note $S = \left\{ \begin{array}{l}]0,1[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \lambda\sqrt{\frac{1-x}{x}} \end{array} / \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

III Une fonction de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Les méthodes classiques ne sont pas connues et/ou mal rédigées !

Pour montrer $A \subset B$: où A, B des parties de E.

On considère $x \in A$, puis après un raisonnement, on conclut $x \in B$

Pour montrer $A = B$

2 méthodes :

1) On montre $A \subset B$ et $B \subset A$

2) On montre $\forall x \in E$, $x \in A \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x \in B$

les équivalences doivent être justifiées, ça va de soit !

Pour montrer $P \Rightarrow Q$

On suppose P, et on en déduit Q après raisonnement.

Pour montrer $P \Leftrightarrow Q$

2 méthodes : 1) on montre $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$

2) on raisonne par équivalence $P \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow Q$

$(X \cap A) \cup B = X \cup B \cap A \cup B$ sans parenthèse n'a pas de sens !

$= (X \cup B) \cap (A \cup B)$

$X \cap A = Y \cap A \Leftrightarrow X = Y$

NON ! c ex : $X = \{1,2,3\}$, $Y = \{1,2\}$ et $A = \{3\}$

$X \setminus A = Y \setminus A \Leftrightarrow X = Y$

NON ! c ex : le m !

C-S = Condition suffisante C-N = Condition nécessaire

Pour démontrer : (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii)

On peut démontrer : (i) $\Rightarrow$ (ii) , (ii) $\Rightarrow$ (iii)

Ou alors

$$\begin{tikzcd} & (i) \arrow[dr, Rightarrow] & \\ (iii) \arrow[ur, Rightarrow] & & (ii) \arrow[ll, Rightarrow] \end{tikzcd}$$

des implications circulaires !

$Id_E : E \to E$ est bijective (facile à justifier : $Id_E \circ Id_E = Id_E$) donc elle est injective et surjective !

⚠ f et $f(x)$ sont deux objets mathématiques différents

fonction — élément de l'espace d'arrivée