

Feuille d'exercice n° 22 : **Intégration**

**Exercice 1** (✎) Montrer que la composée de deux fonctions uniformément continues est uniformément continue.

**Exercice 2** (✎) Montrer que  $x \mapsto \ln x$  n'est pas uniformément continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

**Exercice 3** Montrer que  $\sqrt{\cdot}$  est uniformément continue sur  $\mathbb{R}_+$ .

**Exercice 4** (📐) Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uniformément continue telle que  $f(n) \xrightarrow[n \in \mathbb{N}]{n \rightarrow +\infty} +\infty$ .  
Montrer que  $f(x) \xrightarrow[x \in \mathbb{R}]{x \rightarrow +\infty} +\infty$ .

**Exercice 5** Soit  $a, b \in \mathbb{R}$ , avec  $a < b$ . Soit  $f, g \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ , avec  $g$  positive ou nulle.  
Montrer qu'il existe  $c \in [a, b]$  tel que  $\int_a^b fg = f(c) \int_a^b g$ .

**Exercice 6** Soit  $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$  telle que  $\int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{2}$ .  
Montrer qu'il existe  $a \in ]0, 1[$  telle que  $f(a) = a$ .

**Exercice 7** Soit  $f$  continue de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$ , soit  $n \in \mathbb{N}$  tels que  $\forall k \in \{0, \dots, n\}, \int_0^1 f(u) u^k du = 0$ .  
Montrer que  $f$  admet au moins  $n + 1$  zéros distincts dans  $]0, 1[$ .

**Exercice 8** Soit  $a, b \in \mathbb{R}$ , avec  $a < b$ . Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a, b]$ . Montrer que

$$\left( \left| \int_a^b f(x) dx \right| = \int_a^b |f(x)| dx \right) \Leftrightarrow [(f \text{ est positive}) \text{ ou } (f \text{ est négative})].$$

**Exercice 9** (✎)

- 1) Démontrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\sqrt{2} \leq \sqrt{1+x^n} \leq \sqrt{1 + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$  sur  $\left[1; 1 + \frac{1}{n}\right]$ .
- 2) Étudier la convergence de la suite de terme général  $u_n = \int_1^{1+1/n} \sqrt{1+x^n} dx$ .

**Exercice 10** (📐) Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une application continue strictement croissante telle que  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 1$ . Étudier la limite de la suite de terme général  $\int_0^1 f^n(t) dt$ .

**Exercice 11** (📐) Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  (avec  $a < b$ ), soit  $f$  continue et positive de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$ . Montrer

$$\left( \int_a^b f^n(t) dt \right)^{\frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sup \{ f(t) \mid t \in [a, b] \}$$

*Indication* : commencer par traiter le cas où  $f$  est constante.

**Exercice 12** Déterminer les limites des expressions suivantes lorsque  $x \rightarrow +\infty$ , sans pour autant calculer les intégrales correspondantes.

$$1) \int_x^{2x} \frac{\cos(1/t)}{t} dt \quad 2) \int_x^{2x} \frac{\sin t}{t} dt \quad 3) \int_x^{2x} \frac{e^{1/t}}{t} dt$$

**Exercice 13** Calculer les intégrales suivantes.

$$1) \int_0^1 (e^x + \frac{x^2}{2} - \ln(1+x)) dx \quad 3) \int_0^1 \frac{x-2}{(2x-3)^2} dx \quad 5) \int_1^2 \frac{x^3}{(1+x^4)^2} dx$$

$$2) \int_0^1 x(x+2-e)e^x dx \quad 4) \int_0^{\pi/4} \cos^4 x \sin^2 x dx \quad 6) \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2}$$

**Exercice 14** Calculer les intégrales et primitives suivantes.

$$1) \int^x \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} e^{\operatorname{Arcsin} t} dt \quad 4) \int^x \frac{t dt}{\sqrt{t+1}\sqrt{t+3}} \quad 7) \int_1^2 \frac{dt}{t\sqrt{1+t^2}}$$

$$2) \int_0^1 \ln(1+t^2) dt \quad 5) \int_0^1 \frac{t}{1+\sqrt{1+t}} dt \quad 8) \int_1^t \sqrt{\frac{1-\sqrt{t}}{t}} dt$$

$$3) \int_1^2 \frac{t}{\sqrt{1+t}} dt \quad 6) \int_1^5 \frac{\sqrt{t-1}}{t} dt \quad 9) \int_0^{\pi/2} t^2 \sin t dt$$

**Exercice 15** () Déterminer les primitives suivantes.

$$1) \int^x t \ln t dt \quad 3) \int^x (t^2 - t + 1)e^{-t} dt \quad 5) \int^x (t+1) \operatorname{ch} t dt$$



$$2) \int^x t \operatorname{Arctan} t dt \quad 4) \int^x (t-1) \sin t dt \quad 6) \int^x t \sin^3 t dt$$

**Exercice 16** On définit, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx$ .

- 1) Après avoir majoré  $\frac{x^n}{1+x^n}$  pour  $x \in [0, 1]$  par une fonction simple, montrer que la suite  $(I_n)$  converge vers 0.
- 2) Montrer que  $\int_0^1 \ln(1+x^n) dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .
- 3) À l'aide d'une intégration par parties, donner un équivalent de  $I_n$ .

**Exercice 17** Pour chaque  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $I_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$ .

- 1) Calculer  $I_0$  et  $I_1$ .
- 2) Établir une relation liant  $I_n$  et  $I_{n+1}$ .
- 3) En déduire que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $0 < I_n < \frac{e}{n+1}$ .
- 4) Déterminer la limite puis un équivalent de  $I_n$ .
- 5) Soit  $a \in \mathbb{R}$ , soit  $(u_n)$  la suite réelle définie par  $u_0 = a$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = e - (n+1)u_n$ .  
On suppose que  $a \neq I_0$ , montrer, en étudiant  $D_n = |u_n - I_n|$ , que  $|u_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ .

**Exercice 18** ( ) Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Justifier que les fonctions suivantes sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  et exprimer leurs dérivées.


$$1) \varphi : x \mapsto \int_{2x}^{x^2} f(t) dt \qquad 2) \chi : x \mapsto \int_0^x x f(t) dt \qquad 3) \psi : x \mapsto \int_0^x f(t+x) dt$$

**Exercice 19** () On définit la fonction  $F$  de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{R}$  par  $\forall x \in \mathbb{R}_+, F(x) = \int_0^\pi \frac{|\sin(tx)|}{t} dt$ .

- 1) Justifier proprement la définition de  $F$ .
- 2) Montrer que  $F$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  et calculer sa dérivée.
- 3) Nous étudions à présent le comportement asymptotique de  $F$ .

a) Montrer que  $\forall x > 1, F(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor - 1} \left( \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt \right) + \int_{\pi \lfloor x \rfloor}^{\pi x} \frac{|\sin t|}{t} dt$ .



b) On rappelle que  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln n$ . En déduire que  $F(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{\pi} \ln x$ .

**Exercice 20** () Soit  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \int_0^{\pi/2} (\sin t)^x dt$ .

- 1) Montrer que  $f$  est décroissante.
- 2) Montrer que pour tout  $x \in [1, +\infty[, (x+1)f(x+1) = xf(x-1)$ .
- 3) Soit  $\varphi(x) = xf(x)f(x-1)$ . Montrer que  $\varphi$  est périodique de période 1.
- 4) Calculer  $\varphi(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{N}^*$
- 5) En déduire que  $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2x}}$ , puis que  $\forall x \in [1, +\infty[, \varphi(x) = \frac{\pi}{2}$ .

**Exercice 21** Soit  $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ , avec  $a < b$ . Soit  $f$  une fonction continue sur  $\mathbb{R}^+$ .

- 1) Montrer que si  $f(0) = 0$  alors  $\int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t} dt \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$ .
- 2) Montrer que, dans le cas général,  $\int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t} dt \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} f(0) \ln \left( \frac{b}{a} \right)$


**Exercice 22** ( ) En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction  $x \mapsto \ln(1+x)$ , déterminer la limite de la suite de terme général  $u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ .

**Exercice 23** () Déterminer les primitives suivantes.

$$1) \int^x \frac{dt}{it+1} \qquad 2) \int^x e^t \cos t dt \qquad 3) \int^x te^t \sin t dt$$

**Exercice 24** Soit  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ , notons  $a = \operatorname{Re}(\lambda)$  et  $b = \operatorname{Im}(\lambda)$ . Établir

$$\int^x \frac{dt}{t-\lambda} = \ln|x-\lambda| + i \operatorname{Arctan} \left( \frac{x-a}{b} \right).$$

**Exercice 25** () Calculer la limite de la suite de terme général

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{8k^3 + n^3}.$$

**Exercice 26** (✎) Calculer la limite de la suite de terme général

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2kn}}.$$

**Exercice 27** Donner un équivalent de la suite de terme général

$$S_n = \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right).$$

**Exercice 28** Calculer la limite puis un équivalent de la suite de terme général

$$P_n = \prod_{k=n+1}^{2n} k^{\frac{1}{k}}.$$

**Exercice 29** Calculer la limite de la suite de terme général

$$P_n = \frac{1}{n} \sqrt[n]{\prod_{p=1}^n (n+p)}.$$

**Exercice 30** Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}}{n^\alpha}.$$

*Rappel* : c'est la suite  $\left(\sum_{n=1}^N u_n\right)_{N \in \mathbb{N}}$ .

