



Feuille d'exercice n° 05 : **Nombres complexes**

**Exercice 1** () Résoudre pour  $z \in \mathbb{C}$ ,  $2 \arg(z + i) = \arg(z) + \arg(i)$   $[2\pi]$ .


**Exercice 2** Soit  $\omega = \exp\left(\frac{2i\pi}{7}\right)$ . Calculer  $A = \omega + \omega^2 + \omega^4$  et  $B = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6$ .

(Indication : on pourra d'abord calculer  $AB$  et  $A + B$ .)


**Exercice 3** () Déterminer les racines 4<sup>es</sup> dans  $\mathbb{C}$  de  $-119 + 120i$

**Exercice 4** () Soit  $(n, z) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{C}$  tel que  $z^n = (z + 1)^n = 1$ . Montrer que  $n$  est multiple de 6 et que  $z^3 = 1$ .

**Exercice 5** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation d'inconnue  $x$  :  $(1 + x)^{2n} = (1 - x)^{2n}$ . Calculer alors le produit des solutions de cette équation.

**Exercice 6** () Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 2.

- 1) Écrire  $-i$  et  $1 + i$  sous forme trigonométrique.
- 2) Calculer les racines  $n^{\text{es}}$  de  $-i$  et de  $1 + i$ .
- 3) Résoudre  $z^2 - z + 1 - i = 0$ .
- 4) En déduire les racines de  $z^{2n} - z^n + 1 - i = 0$ .

**Exercice 7** () Soit  $n$  un entier naturel non nul, notons  $\omega = \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right)$ . Calculer

$$\sum_{k=0}^{n-1} (1 + \omega^k)^n.$$

**Exercice 8** Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $\bar{z} = z^3$ .

**Exercice 9** Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation d'inconnue  $z$  :  $z^4 + 2\lambda^2 z^2(1 + \cos \theta) \cos \theta + \lambda^4(1 + \cos \theta)^2 = 0$  ( $\lambda \in \mathbb{C}, \theta \in [0, \pi]$ ). Pour  $n \in \mathbb{N}$ , calculer  $\sum_{k=1}^4 z_k^n$  où les  $z_k$  sont les racines de cette équation.

**Exercice 10**

- 1) Calculer les racines carrées de  $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ . En déduire les valeurs de  $\cos(\pi/8)$  et  $\sin(\pi/8)$ .
- 2) Calculer les valeurs de  $\cos(\pi/12)$  et  $\sin(\pi/12)$ .

**Exercice 11**


- 1) Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Exprimer  $\cos(5x)$  en fonction de  $\cos(x)$ .
- 2) En déduire que  $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$  est racine du polynôme  $16X^4 - 20X^2 + 5$ .
- 3) En déduire la valeur de  $\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right)$ .
- 4) Montrer que  $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$ .

**Exercice 12** () Calculer  $\cos 5\theta$ ,  $\cos 8\theta$ ,  $\sin 6\theta$ ,  $\sin 9\theta$ , en fonction de  $\cos \theta$  et  $\sin \theta$ .

**Exercice 13** () Linéariser les quantités suivantes.

1)  $\cos^3(x) \sin^2(x)$ .

2)  $\cos^6(x) + \sin^6(x)$ .

**Exercice 14** () Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $a, b \in \mathbb{R}$ . Calculer  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(a + kb)$  et  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(a + kb)$ .

**Exercice 15** Déterminer l'ensemble des nombres complexes  $z$  vérifiant chacune des équations suivantes.

1)  $\left| \frac{z-3}{z-5} \right| = 1$

2)  $\left| \frac{z-3}{z-5} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$


**Exercice 16** Quel est l'ensemble des nombres complexes  $z$  tels que  $\frac{z+1}{z-1}$  est imaginaire pur ?

**Exercice 17** Déterminer les points d'affixe  $z \in \mathbb{C}$  vérifiant chaque situation.

- 1) 1,  $z$  et  $z^2$  soient les affixes de trois points alignés.
- 2)  $z$  et  $\frac{1}{z}$  soient les affixes de deux vecteurs orthogonaux.
- 3) 1,  $z$  et  $z+i$  soient les affixes des sommets d'un triangle dont le centre du cercle circonscrit est l'origine  $O$  du repère.
- 4)  $z$ ,  $\frac{1}{z}$  et  $z-1$  soient les affixes de trois points situés sur un même cercle de centre  $O$ .

**Exercice 18** Soient  $A, B$  et  $C$  trois points, distincts deux à deux, d'affixes respectifs  $a, b$  et  $c$ . Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes.

- 1)  $ABC$  est un triangle équilatéral.
- 2)  $j$  ou  $j^2$  est racine du polynôme  $aX^2 + bX + c$ .
- 3)  $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$ .
- 4)  $(b-a)^2 + (c-b)^2 + (a-c)^2 = 0$ .

**Exercice 19** ()

- 1) Caractériser géométriquement l'application  $\begin{cases} \mathbb{C} & \rightarrow \mathbb{C} \\ z & \mapsto (2+2i)z - (7+4i) \end{cases}$
- 2) Soit  $r$  la rotation de centre le point d'affixe  $1+i$  et d'angle de mesure  $\frac{\pi}{4}$ . Déterminer l'expression complexe de  $r$ .
- 3) Soient  $r$  la rotation de centre le point d'affixe 1 et d'angle de mesure  $\frac{\pi}{2}$ , et  $s$  la symétrie centrale de centre le point d'affixe  $i+3$ . Caractériser géométriquement l'application  $s \circ r$ .

