QCM n° 12

QCM - cocher une case si la phrase qui suit est correcte.

Question n°1 Soit A une matrice de rang r.

- ☐ A admet r vecteurs colonnes linéairement indépendants.
- ☐ A admet r vecteurs lignes linéairement indépendants.
- ☐ Toute famille contenant r vecteurs colonnes de A est libre.
- ☐ Toute famille contenant r vecteurs lignes de A est libre.

Question n°2 Combien vaut la matrice $(E_{12} + E_{21})^2$?

☐ $2E_{11}$ ☐ $2E_{22}$ ☐ $E_{12} + E_{21}$ ☐ $E_{11} + E_{22}$

Question n°3 Soit M la matrice dont tous les coefficients valent 0 sur la diagonale et 1 ailleurs. Les coefficients de M^2 valent

- ☐ 0 sur la diagonale et $n-1$ ailleurs
- ☐ $n-1$ sur la diagonale et $n-2$ ailleurs
- ☐ $n-2$ sur la diagonale et $n-1$ ailleurs
- ☐ $n-2$ sur la diagonale et n ailleurs

Question n°4 Soit A, B deux matrices carrées. Si A et B ne sont pas inversibles, laquelle des matrices suivantes peut quand même être inversible ?

☐ AB ☐ $2A$ ☐ $A + B$ ☐ ${}^tA$

Question n°5 Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n, A la matrice de u dans une base $\mathscr{B}$ et A' la matrice de u dans une autre base $\mathscr{B}'$. Si P est la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ on a

- ☐ $A' = PA$
- ☐ $A' = PAP^{-1}$
- ☐ $A' = AP^{-1}$
- ☐ $A' = P^{-1}AP$

Question n°6 Soit A une matrice carrée réelle de taille 4 telle que $A^2 = 0$. L'ensemble des valeurs que peut prendre le rang de A est

☐ $\{0\}$ ☐ $\{0,1\}$ ☐ $\{0,1,2\}$ ☐ $\{0,1,2,3\}$

Question n°7 Soit A une matrice (pas forcément carrée). On considère les deux systèmes linéaires $(S_1)\, AX = B_1$ et $(S_2)\, AX = B_2$. Laquelle des situations suivantes est impossible ?

☐ (S_1) et (S_2) n'ont pas de solution
☐ (S_1) n'a pas de solution et (S_2) a une infinité de solutions
☐ (S_1) n'a pas de solution et (S_2) a une unique solution
☐ (S_1) a une unique solution et (S_2) a une infinité de solutions

Question n°8

☐ Si σ est un cycle, σ^2 est un cycle.
☐ Le produit de deux cycles à supports non disjoints est un cycle.
☐ Deux permutations à supports disjoints commutent.
☐ S_n contient $\binom{n}{2}$ transpositions.
☐ S_n contient $3\binom{n}{3}$ 3-cycles.
☐ Une permutation de S_n qui admet un nombre d'orbites impair est de signature 1.

Question n°9

☐ Pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\det\left(A^\top.A\right) \geqslant 0$.
☐ Il existe $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $\det(A^2) = -1$.
☐ Pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, la fonction $t \mapsto \det(tA + \mathrm{I})$ est polynomiale de degré n.
☐ Pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, il existe au plus n scalaires $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $A - \lambda\mathrm{I}$ soit non inversible.

Question n°10 Soit σ la permutation circulaire de $\{1, 2, \ldots, n\}$, définie par $\sigma(k) = k + 1$ et $\sigma(n) = 1$. Quelle est sa signature ?

☐ 1 ☐ -1 ☐ $(-1)^n$ ☐ $(-1)^{n-1}$

Question n°11 Soit $\sigma \in S_n$ telle que $\sigma^2 = \mathrm{Id}$. Alors σ possède forcément un point fixe

☐ si n est pair
☐ si n est impair
☐ si la signature de σ vaut 1
☐ dans tous les cas

Question n°12 Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base d'un espace vectoriel E et x un vecteur de E. La coordonnée de x selon le vecteur e_1 vaut :

☐ $\det(e_1, x, x, \ldots, x)$
☐ $\det(e_1, e_2 + x, \ldots, e_n + x)$
☐ $\det(x, e_2, \ldots, e_n)$
☐ $\det_{\mathscr{B}}(x + e_1, e_2, \ldots, e_n)$

Question n°13 Soit A inversible de taille n. On effectue toutes les permutations possibles sur les lignes de A et on calcule les déterminants des matrices obtenues. Combien de résultats différents obtient-on ?

☐ 1 ☐ 2 ☐ n ☐ n !