Suites

Exercice 1 On considère la suite complexe $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $z_0 \in \mathbb{C}$ et $z_{n+1} = \dfrac{z_n + |z_n|}{2}$.

1) Montrer que si $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors sa limite est réelle.

2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_n \in \mathbb{R} \iff z_{n+1} \in \mathbb{R}$.

3) Que peut-on dire de la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $z_0 \in \mathbb{R}_+$? Et si $z_0 \in \mathbb{R}_-$?

4) On suppose dans cette question que $z_0 \notin \mathbb{R}$ et on écrit $z_0 = r_0 \mathrm{e}^{i\alpha_0}$, avec $r_0 > 0$ et $\alpha_0 \in]-\pi,\pi[\setminus\{0\}$.

a) Montrer qu'il existe une suite réelle géométrique $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une suite réelle strictement positive $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que pour tout entier n on ait $z_n = r_n \mathrm{e}^{i\alpha_n}$. Exprimer r_{n+1} et α_{n+1} en fonction de r_n et de α_n.

b) Montrer que la suite $r_n \sin \alpha_n$ est aussi géométrique.

c) En déduire que la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite (on pourra utiliser que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$).

Exercice 2 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n \leqslant \sqrt{n} + \sqrt{n-1}$.

2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $2\sqrt{n+1} - 2 \leqslant S_n$.

3) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{S_n}{\sqrt{n}}$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite convergente.

4) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = S_n - 2\sqrt{n}$. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite convergente.

Tourner la page ↬

Exercice 3 Le but de l'exercice est l'étude des suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ définies par $0 < x_0 < y_0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = x_n^{\frac{2}{3}}\, y_n^{\frac{1}{3}} \quad \text{et} \quad y_{n+1} = x_n^{\frac{1}{3}}\, y_n^{\frac{2}{3}}.$$

1) **a)** Montrer par récurrence que : $\forall n \geqslant 0$, $x_n > 0$ et $y_n > 0$.

On peut donc définir les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ par : $\forall n \geqslant 0$, $u_n = \ln(x_n)$ et $v_n = \ln(y_n)$.

b) Prouver que : $\forall n \geqslant 0$, $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}v_n \quad$ et $\quad v_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{2}{3}v_n$.

2) Dans cette question on considère la suite $(w_n)_n$ définie par : $\forall n \geqslant 0$, $w_n = v_n - u_n$.

a) Prouver que $w_0 = \ln\left(\frac{y_0}{x_0}\right)$.

b) Montrer que (w_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

c) En déduire l'expression de $(w_n)_n$ puis calculer sa limite.

3) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < v_n$.

4) Montrer que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes.

5) **a)** Démontrer que $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ convergent et ont la même limite ℓ.

b) Prouver que $\ell > 0$.

c) En étudiant la suite produit $(x_n\, y_n)_n$, déterminer ℓ en fonction de x_0 et y_0.