Devoir surveillé n° 10
Version 2

Durée : 3 heures, calculatrices et documents interdits

I. Adjoint d'un endomorphisme.

Soit $(E, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ un espace vectoriel euclidien, et $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E. Soit u un endomorphisme de E. On définit l'application u^* de E dans E par :

$$\forall x \in E, \quad u^*(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x \mid u(e_i) \rangle \, e_i.$$

1) Montrer que u^* est un endomorphisme de E. On l'appelle l'*adjoint* de u.

2) **a)** Soit $x \in E$. Montrer que :

$$\forall j \in \{1, \ldots, n\}, \ \langle u^*(x) \mid e_j \rangle = \langle x \mid u(e_j) \rangle \, .$$

b) En déduire que pour tout $(x, y) \in E^2$:

$$\langle u^*(x) \mid y \rangle = \langle x \mid u(y) \rangle \, .$$

c) Montrer que si une application v de E dans E satisfait :

$$\forall (x, y) \in E^2, \ \langle v(x) \mid y \rangle = \langle x \mid u(y) \rangle \, ,$$

alors $v = u^*$.
Quel est l'adjoint de u^* ?

3) Montrer que la définition de u^* ne dépend pas de la base orthonormale choisie.

4) Montrer que, dans toute base orthonormale, la matrice de u^* est la transposée de celle de u.

5) Montrer que :

$$\operatorname{Ker} u^* = (\operatorname{Im} u)^\perp \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} u^* = (\operatorname{Ker} u)^\perp$$

6) L'endomorphisme u est dit *symétrique* si et seulement si $u^* = u$.

a) Caractériser matriciellement un endomorphisme symétrique.

b) Que peut-on dire de l'image et du noyau d'un endomorphisme symétrique ?

c) Montrer qu'une symétrie est un endomorphisme symétrique si et seulement si c'est une symétrie orthogonale.

d) Montrer qu'un projecteur est un endomorphisme symétrique si et seulement si c'est un projecteur orthogonal.

7) L'endomorphisme u est dit *antisymétrique* si et seulement si $u^* = -u$.

a) Caractériser matriciellement un endomorphisme antisymétrique.

b) Que peut-on dire de l'image et du noyau d'un endomorphisme antisymétrique ?

c) Montrer que u est antisymétrique si et seulement si :

$$\forall x \in E,\ \langle u(x) \mid x \rangle = 0$$

8) Soit u un endomorphisme antisymétrique.

a) Montrer que :

$$\forall x \in \operatorname{Im} u,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ u(x) = \lambda x \Longrightarrow x = 0$$

b) Soit u' l'endomorphisme de $\operatorname{Im} u$ induit par u. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\det(u' - \lambda \mathrm{Id}_{\operatorname{Im} u}) \neq 0$.

c) En déduire que le rang de u est pair.

II. Théorème de réarrangement de Riemann.

On rappelle qu'une série réelle est *semi-convergente* si elle converge sans converger absolument. On appelle réarrangement d'une série $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ toute série $\sum_{n \geqslant 0} u_{\varphi(n)}$, où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une bijection. Un réarrangement d'une série consiste donc juste à permuter les termes de cette série.

Préliminaire : Un exemple.

1) Donner un exemple simple de série semi-convergente en le justifiant brièvement.

Partie I : Réarrangement de série absolument convergente.

On se propose de montrer le résultat suivant : « tout réarrangement d'une série absolument convergente est convergent et la somme de cette série et de ses réarrangements coïncident ». Soit $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ une série absolument convergente, soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une bijection.

1) Montrer que la suite des sommes partielles de la série $\left(\sum_{n \geqslant 0} \left| u_{\varphi(n)} \right| \right)$ est majorée et en déduire le premier point.

2) Soit $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{n=N+1}^{+\infty} |u_n| \leqslant \varepsilon$. Montrer qu'il existe $N' \in \mathbb{N}$ vérifiant $\left| \sum_{n=0}^{N} u_n - \sum_{n=0}^{N'} u_{\varphi(n)} \right| \leqslant \varepsilon$.

3) En déduire que $\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n - \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\varphi(n)} \right| \leqslant 3\varepsilon$ et conclure.

Partie II : Théorème de réarrangement de Riemann.

On montre maintenant le théorème de réarrangement de Riemann : « soit une série semi-convergente et $\ell \in \mathbb{R}$, alors il existe un réarrangement convergent de cette série dont la somme vaut ℓ ». Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ une série semi-convergente et $\ell \in \mathbb{R}$. On note $A = \{n \in \mathbb{N} \mid u_n \geqslant 0\}$ et $B = \{n \in \mathbb{N} \mid u_n < 0\}$. On construit aussi les suites (a_n) et (b_n) définies par, si $n \geqslant 0$, $a_n = 0$ si $u_n < 0$ et $a_n = u_n$ sinon ; $b_n = 0$ si $u_n > 0$ et $b_n = u_n$ sinon.

1) Justifier que les ensembles A et B sont infinis.

2) Étudier la nature de $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ et de $\sum_{n\geqslant 0} b_n$ (n'en détailler qu'une).

On construit alors la permutation φ par récurrence en suivant l'idée suivante : si la somme partielle précédente est inférieure à ℓ, on rajoute le premier terme positif de (u_n) non rajouté, et inversement si elle est supérieure à ℓ. On pose donc $\varphi(0) = 0$ et, si $n \in \mathbb{N}$, en supposant que $(\varphi(0), \ldots, \varphi(n))$ est construite :

— si $\sum_{k=0}^{n} u_{\varphi(k)} > \ell$, on pose $\varphi(n+1)$ comme étant le plus petit élément de $B \setminus \{\varphi(0), \ldots, \varphi(n)\}$;

— si $\sum_{k=0}^{n} u_{\varphi(k)} \leqslant \ell$, on pose $\varphi(n+1)$ comme étant le plus petit élément de $A \setminus \{\varphi(0), \ldots, \varphi(n)\}$.

Par construction, $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

3) Justifier brièvement que φ est injective.

4) Montrer que si à partir d'un certain rang φ ne prend que des valeurs dans A ou que des valeurs dans B, alors $\sum_{n\geqslant 0} u_{\varphi(n)}$ diverge.

5) Montrer que si à partir d'un certain rang φ ne prend que des valeurs dans A ou que des valeurs dans B, alors $\sum_{n\geqslant 0} u_{\varphi(n)}$ converge. Quelle conclusion en tirer ?

6) On veut montrer que φ est surjective. Supposons qu'il existe $N \in \mathbb{N} \setminus \operatorname{Im} \varphi$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $N \in A$, le cas $N \in B$ étant similaire.
Montrer qu'à partir d'un certain rang, $\varphi(n) \in B$ et conclure.

7) Montrer que $(u_{\varphi(n)})$ converge vers 0.

8) Si $n \in \mathbb{N}$, notons :

— $c(n)$ le plus grand entier naturel c inférieur ou égal à $n-1$ tel que $[\varphi(c) \in B$ et $\varphi(c+1) \in A]$ ou $[\varphi(c) \in A$ et $\varphi(c+1) \in B]$;

— $d(n)$ le plus petit entier naturel d supérieur ou égal à n tel que $[\varphi(d) \in B$ et $\varphi(d+1) \in A]$ ou $[\varphi(d) \in A$ et $\varphi(d+1) \in B]$

Les question précédentes justifient l'existence de c (à partir d'un certain rang, mais on ne s'en souciera pas) et de d.

Moralement, ce sont donc les indices des deux changements de signes de u_φ qui encadrent $\varphi(n)$.

a) Montrer que $c(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

b) Si $n \in \mathbb{N}$, encadrer $\sum_{k=0}^{n} u_{\varphi(n)}$ et en déduire une majoration de $\left|\sum_{k=0}^{n} u_{\varphi(n)} - \ell\right|$ faisant intervenir $u_{\varphi(c(n)+1)}$ et $u_{\varphi(d(n))}$.

c) Conclure.

— FIN —