

Devoir à la maison n° 22

À rendre le 13 juin

Soit d un entier, $d \geq 2$. Soit $\omega = (\omega_n)_{n \geq 1}$ une suite de complexes, périodique de période d , c'est-à-dire telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \omega_{n+d} = \omega_n.$$

Dans ce problème, on s'intéresse à la nature (convergente ou divergente) de la série $\sum u_n(\lambda)$ de terme général

$$\forall n \geq 1 \quad u_n(\lambda) = \frac{\omega_n + \lambda}{n}$$

où λ est un complexe. On note plus simplement $u_n = u_n(0)$ pour tout $n \geq 1$.

- 1) Supposons, dans cette question uniquement, qu'il existe un complexe λ tel que $\sum u_n(\lambda)$ converge.

Montrer que, pour toute valeur $\mu \neq \lambda$, la série $\sum u_n(\mu)$ diverge.

- 2) Dans cette question, on choisit $\lambda = 0$. Pour tout entier naturel n non nul, on note S_n la somme

partielle associée à la série $\sum u_n$, c'est-à-dire $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{\omega_k}{k}$.

- a) Pour tout entier naturel m , exprimer $\frac{1}{md+1} \sum_{k=1}^d \omega_{md+k}$ en fonction de $\Omega = \sum_{k=1}^d \omega_k$.

- b) Déterminer un réel α tel que

$$S_{(m+1)d} - S_{md} = \frac{1}{md+1} \sum_{k=1}^d \omega_{md+k} + \frac{\alpha}{m^2} + o_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{m^2} \right)$$

- c) En déduire une condition nécessaire et suffisante sur Ω pour que la série $\sum (S_{(m+1)d} - S_{md})$ converge.

- d) Montrer très soigneusement que la condition obtenue à la question précédente est une condition nécessaire et suffisante pour que la série $\sum u_n$ converge.

- 3) Montrer qu'il existe une unique valeur $\lambda \in \mathbb{C}$ telle que la série $\sum u_n(\lambda)$ converge.

- 4) **Une généralisation :** Dans cette question, on se donne une suite croissante $(a_n)_{n \geq 1}$ de réels, telle que $a_1 > 0$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$. On suppose que $\Omega = 0$. On pose, pour tout $n \geq 1$,

$$u_n = \frac{\omega_n}{a_n} \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{k=1}^n \omega_k.$$

Par souci de commodité, on note également $T_0 = 0$.

- a) Montrer que la suite $(T_n)_{n \geq 1}$ est bornée.

- b) Montrer que pour tout entier naturel n non nul,

$$\sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n T_k \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} \right) + \frac{T_n}{a_{n+1}}.$$

- c) Montrer que la série $\sum T_k \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} \right)$ converge.

- d) Montrer que la série $\sum u_k$ converge.

— FIN —