C2 : Modélisation des systèmes asservis
C2-2 : Modelisation des systemes asservis

Émilien DURIF

Lycée La Martinière Monplaisir Lyon

Classe de MPSI

10 Octobre 2023

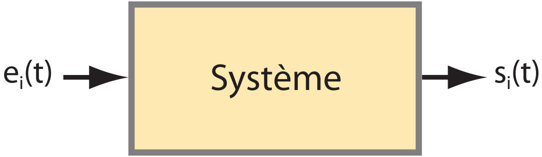
Plan

Plan

Système continu, linéaire et invariant : définition

Système linéaire

Un système est dit **linéaire** si, lorsque $s_1(t)$ et $s_2(t)$ sont respectivement les réponses de $e_1(t)$ et $e_2(t)$, alors $s_1(t) + \lambda s_2(t)$ est la réponse de $e_1(t) + \lambda e_2(t)$ pour tout réel λ.



Remarque

Causes de "non-linéarité" :

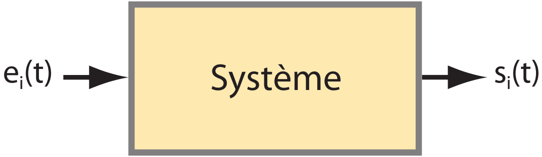
- la *saturation* (amplification, butée mécanique),
- le *seuil* (filtre, frottement),
- le *phénomène d'Hystérésis* (électromagnétisme, jeux mécaniques).

Un système réel est en général non linéaire, mais il est parfois possible, en se limitant à un domaine donné, d'en approcher le comportement par des approximations linéaires.

Système continu, linéaire et invariant : définition

Système linéaire

Un système est dit **linéaire** si, lorsque $s_1(t)$ et $s_2(t)$ sont respectivement les réponses de $e_1(t)$ et $e_2(t)$, alors $s_1(t) + \lambda s_2(t)$ est la réponse de $e_1(t) + \lambda e_2(t)$ pour tout réel λ.



Remarque

Causes de "non-linéarité" :

- la *saturation* (amplification, butée mécanique),
- le *seuil* (filtre, frottement),
- le *phénomène d'Hystérésis* (électromagnétisme, jeux mécaniques).

Un système réel est en général non linéaire, mais il est parfois possible, en se limitant à un domaine donné, d'en approcher le comportement par des approximations linéaires.

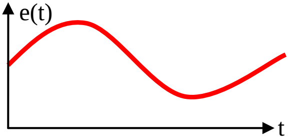
Système continu, linéaire et invariant : définition

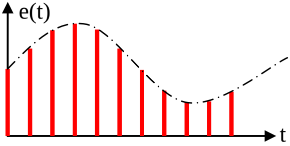
Système continu

Un système se défini comme **continu** si les fonctions qui le caractérisent (entrées, sorties, perturbations) sont des fonctions continues du temps. On parle alors de **systèmes analogiques**.

Remarque

L'utilisation de systèmes informatiques impose le traitement de systèmes échantillonnés (ou numériques), ce qui nécessite des convertisseurs des grandeurs continues en grandeurs échantillonnées, et inversement.





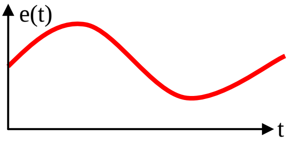
Système continu, linéaire et invariant : définition

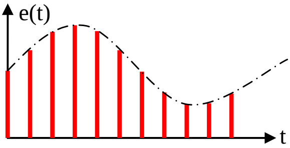
Système continu

Un système se défini comme **continu** si les fonctions qui le caractérisent (entrées, sorties, perturbations) sont des fonctions continues du temps. On parle alors de **systèmes analogiques**.

Remarque

L'utilisation de systèmes informatiques impose le traitement de systèmes échantillonnés (ou numériques), ce qui nécessite des convertisseurs des grandeurs continues en grandeurs échantillonnées, et inversement.





Système continu, linéaire et invariant : définition

Système invariant

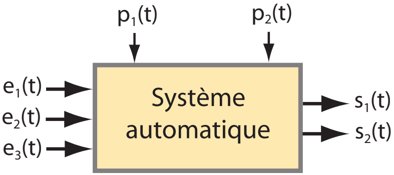
Un système est **invariant** si la relation entrée-sortie ne se modifie pas dans le temps (le système ne vieillit pas). Si $s(t)$ est la réponse à $e(t)$, alors $\forall \tau$, $s(t+\tau)$ est la réponse à $e(t+\tau)$.

Plan

Consignes, Perturbations et réponses

Definitions

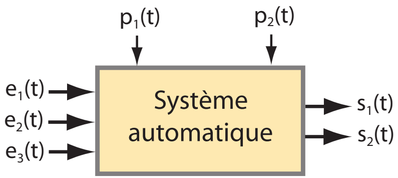
- Les **consignes** et les **perturbations** se définissent comme étant les **entrées** du système :
  - Les **consignes** sont les entrées imposées au systèmes. Elles sont maitrisées et peuvent se présentées sous différentes formes et peuvent être utilisées pour vérifier les performances des systèmes (signaux tests).
  - Les **perturbations** sont les entrées non-maitrisées pour le système et peuvent venir modifier le comportement de ce dernier.
- Pour quantifier les performances d'un système nous étudions alors les **réponses** (sortie) en fonction du type de consigne. Nous pouvons également vérifier la stabilité d'un système vis-à-vis d'une perturbation.



Consignes, Perturbations et réponses

Definitions

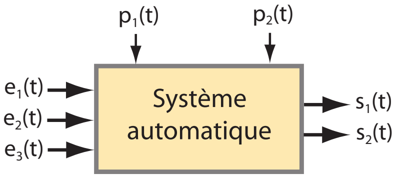
- Les **consignes** et les **perturbations** se définissent comme étant les **entrées** du système :
  - Les **consignes** sont les entrées imposées au systèmes. Elles sont maitrisées et peuvent se présentées sous différentes formes et peuvent être utilisées pour vérifier les performances des systèmes (signaux tests).
  - Les **perturbations** sont les entrées non-maitrisées pour le système et peuvent venir modifier le comportement de ce dernier.
- Pour quantifier les performances d'un système nous étudions alors les **réponses** (sortie) en fonction du type de consigne. Nous pouvons également vérifier la stabilité d'un système vis-à-vis d'une perturbation.



Consignes, Perturbations et réponses

Definitions

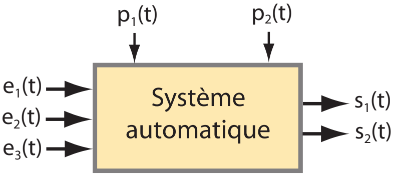
- Les **consignes** et les **perturbations** se définissent comme étant les **entrées** du système :
  - Les **consignes** sont les entrées imposées au systèmes. Elles sont maitrisées et peuvent se présentées sous différentes formes et peuvent être utilisées pour vérifier les performances des systèmes (signaux tests).
  - Les **perturbations** sont les entrées non-maitrisées pour le système et peuvent venir modifier le comportement de ce dernier.
- Pour quantifier les performances d'un système nous étudions alors les **réponses** (sortie) en fonction du type de consigne. Nous pouvons également vérifier la stabilité d'un système vis-à-vis d'une perturbation.



Consignes, Perturbations et réponses

Definitions

- Les **consignes** et les **perturbations** se définissent comme étant les **entrées** du système :
  - Les **consignes** sont les entrées imposées au systèmes. Elles sont maitrisées et peuvent se présentées sous différentes formes et peuvent être utilisées pour vérifier les performances des systèmes (signaux tests).
  - Les **perturbations** sont les entrées non-maitrisées pour le système et peuvent venir modifier le comportement de ce dernier.
- Pour quantifier les performances d'un système nous étudions alors les **réponses** (sortie) en fonction du type de consigne. Nous pouvons également vérifier la stabilité d'un système vis-à-vis d'une perturbation.



Définition de signaux canoniques (ou tests)

Définition

Un **"signal"** est une grandeur physique mesurable porteuse d'une information. L'information est contenue dans la valeur ou dans la forme de variation du signal. Exemples : tension (V), vitesse ($m.s^{-1}$), déplacement (m), force (N), température ($^\circ C$).

Généralement des signaux **canoniques** sont utilisés pour étudier les effets sur les réponses d'un système et ainsi en vérifier les performances. On pourra appliquer ces signaux tests de manière expérimentale ou théorique à l'aide d'une modélisation du système.

Définition de signaux canoniques

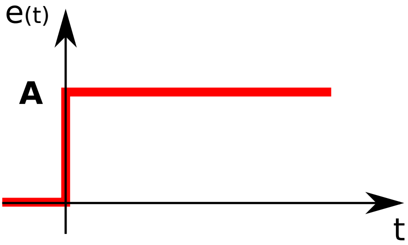
Échelon ou fonction d'Heavyside

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

Dans le cas général, un échelon à pour équation :

$$\boxed{e(t) = A\ u(t)} \quad (1)$$

où A est un scalaire constant appelé **amplitude de l'échelon**.



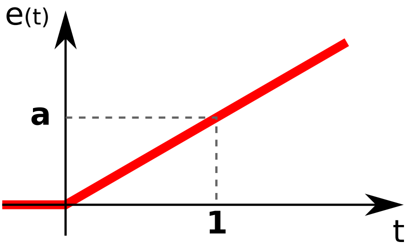
Définition de signaux canoniques

Rampe

La rampe (fig.??) est un fonction linaire (dans sa partie positive), définie par :

$$\boxed{e(t) = a\ t\ u(t)} \quad (2)$$

où $u(t)$ et l'échelon unité et a un scalaire.

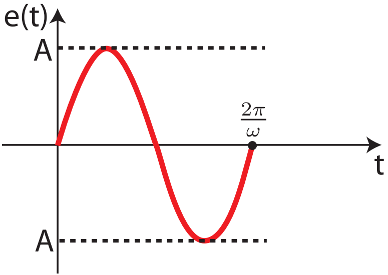


Définition de signaux canoniques

Sinusoïde ou harmonique

$$\boxed{e(t) = A\ \sin(\omega t)\ u(t).} \tag{3}$$

où $u(t)$ est l'échelon unité, A et ω sont des constantes, respectivement l'amplitude et la fréquence du sinus.



Définition de signaux canoniques

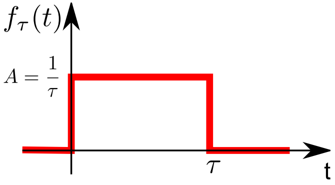
Dirac

Notée $\delta(t)$, la fonction dirac correspond à un créneau de durée infiniment petite ($\tau \mapsto 0$), d'une amplitude infiniment grande ($A \mapsto +\infty$), et telle que l'aire sous la courbe soit égale à 1. Elle se résume donc à une impulsion instantanée. Si $f_\tau(t)$ est la fonction créneau suivante :

$$f_\tau(t) = \begin{cases} \frac{1}{\tau} & \forall t \in [0;\tau] \\ 0 & \forall t \notin [0;\tau] \end{cases}$$

alors la définition de la fonction dirac sera :

$$\boxed{e(t) = \delta(t) = \lim_{\tau \to 0} f_\tau(t)} \qquad (4)$$



Comportement dynamique de la sortie d'un signal

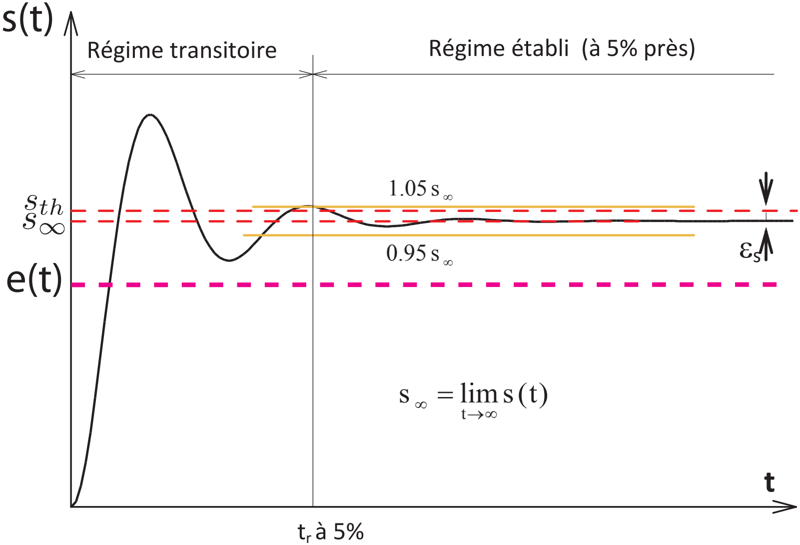
Définition

Un système est **dynamique** si la grandeur de sortie dépend des valeurs présentes et passées de la grandeur d'entrée (effet "mémoire"). Si elle ne dépend que de la valeur présente le système est dit **instantané**.

La réponse d'un système s'étudie en fonction du temps. On peut quantifier la performance d'un système en terme de forme temporelle de la sortie.

- entrée : échelon ($e(t)$) proportionnelle à une altitude souhaitée ($s(t) = F(t)$).

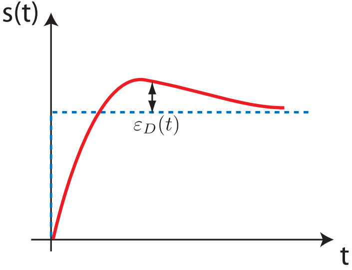
Comportement dynamique de la sortie d'un signal



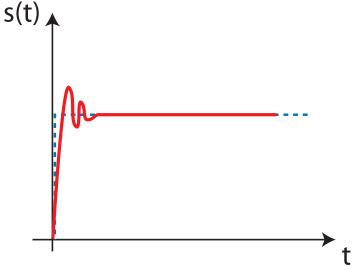
Comportement dynamique de la sortie d'un signal : rapidité

Rapidité

La **rapidité** d'un système concerne l'aspect dynamique de la performance d'un système et se définie comme son aptitude à atteindre rapidement la consigne souhaitée.



Système lent

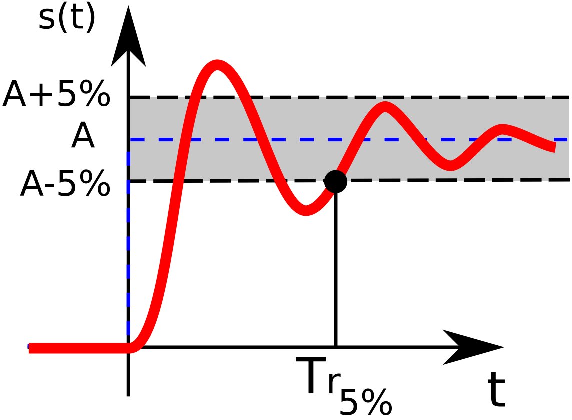


Système rapide

Comportement dynamique de la sortie d'un signal : rapidité

Propriété

La rapidité se caractérise par la durée que le signal met pour se stabiliser autour de valeurs comprises entre 95% et 105% de la valeur asymptotique à l'infinie (s_∞). On l'appelle le **temps de réponse à** 5% et on le note $t_{r5\%}$ ou t_{r05}.



Comportement dynamique de la sortie d'un signal : précision

Précision

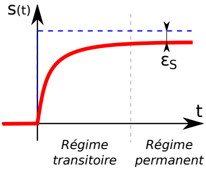
La précision se caractérise par la valeur de l'écart entre la réponse souhaité théorique d'un système (s_{th}) et la réponse obtenue.

- **l'erreur statique** (ou de position) : avec $e(t) = A\ u(t)$

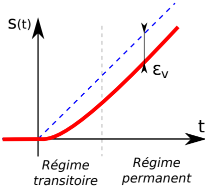
$$\varepsilon_S = \varepsilon_0 = |s_\infty - s_{th}| = \lim_{t \to +\infty} |s(t) - s_{th}|$$

- **l'erreur de traînage** (ou de vitesse) : avec $e(t) = A\ t\ u(t)$

$$\varepsilon_V = \varepsilon_1 = |s_\infty - s_{th}| = \lim_{t \to +\infty} |s(t) - s_{th}|$$



Erreur statique

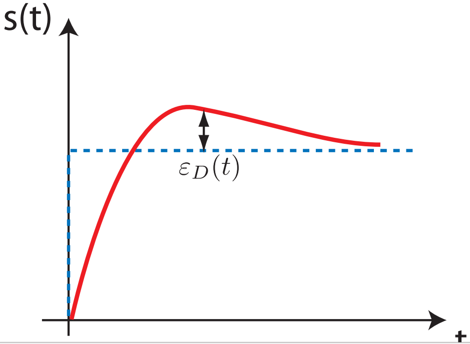


Erreur de trainage

Comportement dynamique de la sortie d'un signal : précision

Erreur dynamique

Elle caractérise l'écart en régime transitoire entre la réponse souhaitée et la réponse obtenue d'un point de vue instantané. On définit ainsi l'erreur dynamique $\varepsilon_D(t)$ instantanément en fonction du temps. Cette définition est valable quel que soit le signal de consigne. Les erreurs statique et de traînage peuvent être obtenues en cherchant la limite de l'erreur dynamique quand t tend vers l'infini (régime permanent).



Comportement dynamique de la sortie d'un signal : précision

Calcul de l'erreur en pratique

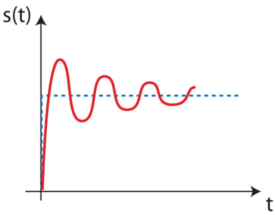
En pratique l'erreur sera calculée en prenant l'écart entre l'entrée $e(t)$ et la sortie $s(t)$ (à un coefficient près appelé gain statique)

$$\boxed{\varepsilon = \lim_{t \to +\infty} |e(t) - s(t)|.} \quad (5)$$

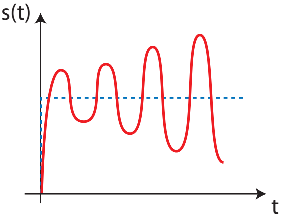
Comportement dynamique de la sortie d'un signal : stabilité

Stabilité

La stabilité traduit la propriété de convergence temporelle asymptotique vers un état d'équilibre sous l'effet d'une sollicitation de type échelon. Les figures **??** (a) et (b) illustrent donc la différence entre un système amorti et non amorti donc instable.



Système mal amorti



Système instable

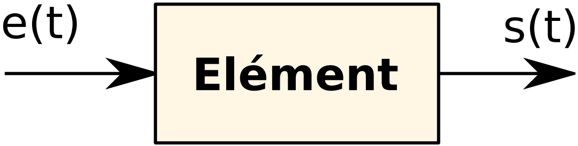
Plan

1. Système continu, linéaire et invariant
2. Performances de systèmes asservis
   - Consignes, Perturbations et réponses
   - Définition de signaux canoniques (ou tests)
   - Comportement dynamique de la sortie
3. Représentation des systèmes asservis
   - Représentation à l'aide d'un schéma bloc
   - Equations différentielles
   - Fonctions de transfert
   - Manipulations de schémas-blocs

Représentation à l'aide d'un schéma bloc

Définition

Un système asservi se représente à l'aide de **blocs élémentaires fonctionnels**. L'assemblage des blocs élémentaire constitue le schéma bloc et permet de représenter la modélisation d'un système. Chaque bloc fonctionnel est représenté par une **fonction de transfert**.



Propriété

Le bloc élémentaire représente une fonction élémentaire. Si f est le nom de cette fonction, $e(t)$ une consigne et $s(t)$ la réponse, alors :

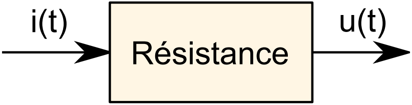
$$\boxed{s(t) = f\left(e(t)\right).} \tag{6}$$

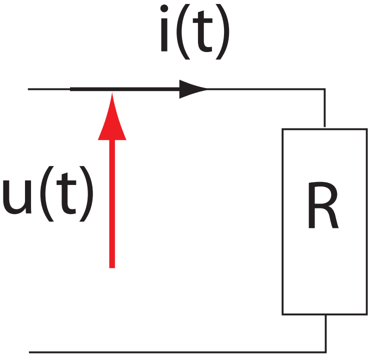
Représentation à l'aide d'un schéma bloc : exemples

Résistance électrique R :

$$u(t) = R\,i(t)$$

.



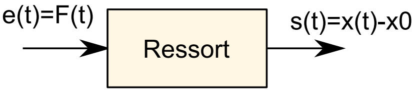


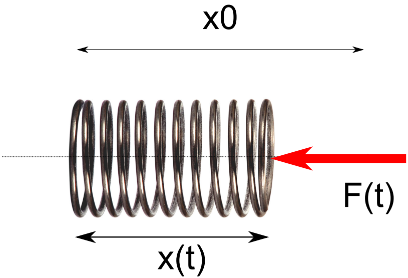
Représentation à l'aide d'un schéma bloc : exemples

Ressort de raideur K :

$$F(t) = -K\ \left(x(t) - x0\right)$$

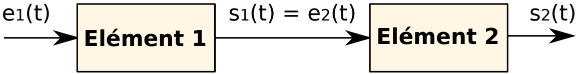
.





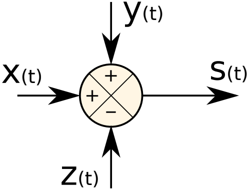
Représentation à l'aide d'un schéma bloc : composition

$$\boxed{s_2(t) = f_2\left(e_2(t)\right) = f_2\left(f_1\left(e_1(t)\right)\right)} \tag{7}$$



Représentation à l'aide d'un schéma bloc : jonctions

- **Les Comparateurs (ou sommateur) :**



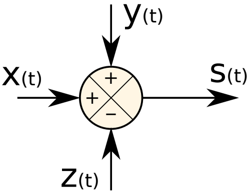
- **Dérivation - Points de prélèvement :**

Remarque

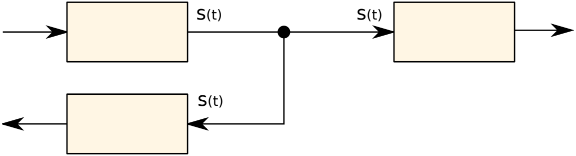
- Concrètement, ce prélèvement peut-être réalisé par le biais de capteurs.
- Un signal n'est pas modifié par le prélèvement de sa valeur

Représentation à l'aide d'un schéma bloc : jonctions

- **Les Comparateurs (ou sommateur) :**



- **Dérivation - Points de prélèvement :**

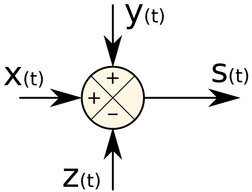


Remarque

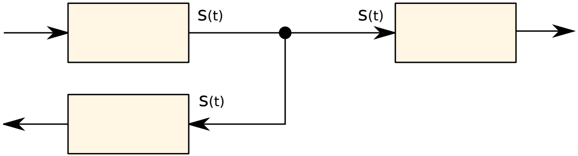
- Concrètement, ce prélèvement peut-être réalisé par le biais de capteurs.
- Un signal n'est pas modifié par le prélèvement de sa valeur

Représentation à l'aide d'un schéma bloc : jonctions

- **Les Comparateurs (ou sommateur) :**



- **Dérivation - Points de prélèvement :**

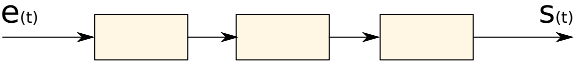


Remarque

- Concrètement, ce prélèvement peut-être réalisé par le biais de capteurs.
- Un signal n'est pas modifié par le prélèvement de sa valeur

Représentation à l'aide d'un schéma bloc : boucles ouvertes

- **Boucle ouverte :**

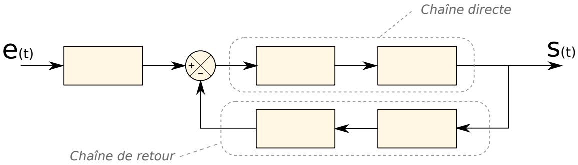


Les systèmes en boucles ouvertes n'ont aucun retour sur la réponse. Si le système n'est pas précis, ou s'il y a des perturbations, il n'y a aucun moyen de corriger le défaut.

Représentation à l'aide d'un schéma bloc : boucles fermées

Boucle fermée : une des grandeur est prélevée et réutilisée en amont.

- **La chaîne directe :** c'est l'ensemble des blocs directement placés entre la consigne et la réponse finale.
- **La chaîne de retour :** c'est l'ensemble des blocs qui permettent de remonter l'information.

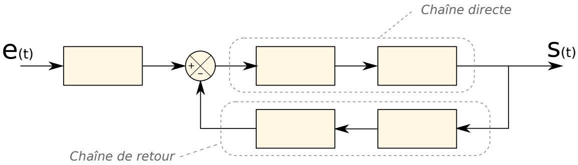


Les systèmes en boucle fermée permettent en particulier d'adapter la consigne en fonction de la réponse pour y apporter d'éventuelles corrections.
Classiquement la structure générale d'un système asservi se présente sous la forme du schéma bloc suivant.

Représentation à l'aide d'un schéma bloc : boucles fermées

Boucle fermée : une des grandeur est prélevée et réutilisée en amont.

- **La chaîne directe :** c'est l'ensemble des blocs directement placés entre la consigne et la réponse finale.
- **La chaîne de retour :** c'est l'ensemble des blocs qui permettent de remonter l'information.



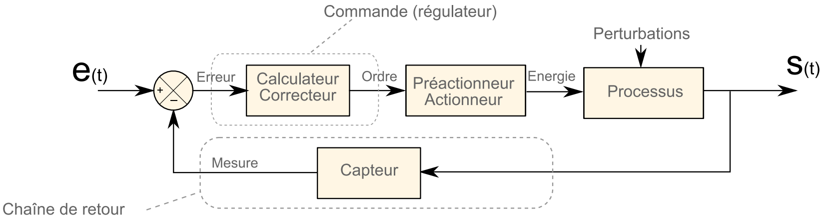
Les systèmes en boucle fermée permettent en particulier d'adapter la consigne en fonction de la réponse pour y apporter d'éventuelles corrections.
Classiquement la structure générale d'un système asservi se présente sous la forme du schéma bloc suivant.

Représentation à l'aide d'un schéma bloc : structure des systèmes asservis

Definition

Un système asservi peut être décomposé en deux grandes parties que l'on peut représenter à l'aide d'un schéma bloc :

- La **partie commande** (celle qui va traiter les données reçu de l'extérieur, mais aussi issues de l'état du système),
- La **partie opérative** (qui va agir pour générer le résultat du système).



Représentation par équations différentielles

Relation différentielle caractéristique

Système dynamique linéaire, continu et invariant toujours régi par une **équation différentielle** linéaire à coefficients constants :

$$\boxed{a_0\ s(t) + a_1\ \frac{ds(t)}{dt} + ... + a_n\ \frac{d^n s(t)}{dt^n} = b_0\ e(t) + b_1\ \frac{de(t)}{dt} + ... + b_m\ \frac{d^m e(t)}{dt^m}} \quad (8)$$

- $a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_n,\ b_0,\ b_1,\ \cdots,\ b_m$ sont des constantes (invariants).
- $\frac{d^n s(t)}{dt^n}$ est la dérivée d'ordre n de $s(t)$..
- L'équation s'exprime en fonction de $s(t)$ et de $e(t)$ ainsi que de leurs dérivées successives par rapport au temps (linéarité).
- n est l'ordre du système.

Représentation par équations différentielles

Relation différentielle caractéristique

Système dynamique linéaire, continu et invariant toujours régi par une **équation différentielle** linéaire à coefficients constants :

$$\boxed{a_0\ s(t) + a_1\ \frac{ds(t)}{dt} + \ldots + a_n\ \frac{d^n s(t)}{dt^n} = b_0\ e(t) + b_1\ \frac{de(t)}{dt} + \ldots + b_m\ \frac{d^m e(t)}{dt^m}} \quad (8)$$

- $a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_n,\ b_0,\ b_1,\ \cdots,\ b_m$ sont des constantes (invariants).
- $\frac{d^n s(t)}{dt^n}$ est la dérivée d'ordre n de $s(t)$..
- L'équation s'exprime en fonction de $s(t)$ et de $e(t)$ ainsi que de leurs dérivées successives par rapport au temps (linéarité).
- n est l'ordre du système.

Représentation par équations différentielles

Relation différentielle caractéristique

Système dynamique linéaire, continu et invariant toujours régi par une **équation différentielle** linéaire à coefficients constants :

$$\boxed{a_0\ s(t) + a_1\ \frac{ds(t)}{dt} + \ldots + a_n\ \frac{d^n s(t)}{dt^n} = b_0\ e(t) + b_1\ \frac{de(t)}{dt} + \ldots + b_m\ \frac{d^m e(t)}{dt^m}} \quad (8)$$

- $a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_n,\ b_0,\ b_1,\ \cdots,\ b_m$ sont des constantes (invariants).
- $\frac{d^n s(t)}{dt^n}$ est la dérivée d'ordre n de $s(t)$..
- L'équation s'exprime en fonction de $s(t)$ et de $e(t)$ ainsi que de leurs dérivées successives par rapport au temps (linéarité).
- n est l'ordre du système.

Représentation par équations différentielles

Relation différentielle caractéristique

Système dynamique linéaire, continu et invariant toujours régi par une **équation différentielle** linéaire à coefficients constants :

$$\boxed{a_0\ s(t) + a_1\ \frac{ds(t)}{dt} + \ldots + a_n\ \frac{d^n s(t)}{dt^n} = b_0\ e(t) + b_1\ \frac{de(t)}{dt} + \ldots + b_m\ \frac{d^m e(t)}{dt^m}} \quad (8)$$

- $a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_n,\ b_0,\ b_1,\ \cdots,\ b_m$ sont des constantes (invariants).
- $\frac{d^n s(t)}{dt^n}$ est la dérivée d'ordre n de $s(t)$..
- L'équation s'exprime en fonction de $s(t)$ et de $e(t)$ ainsi que de leurs dérivées successives par rapport au temps (linéarité).
- n est l'ordre du système.

Représentation par équations différentielles

Relation différentielle caractéristique

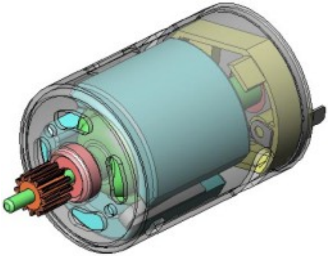
Système dynamique linéaire, continu et invariant toujours régi par une **équation différentielle** linéaire à coefficients constants :

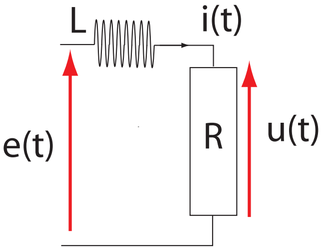
$$\boxed{a_0\ s(t) + a_1\ \frac{ds(t)}{dt} + ... + a_n\ \frac{d^n s(t)}{dt^n} = b_0\ e(t) + b_1\ \frac{de(t)}{dt} + ... + b_m\ \frac{d^m e(t)}{dt^m}} \quad (8)$$

- $a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_n,\ b_0,\ b_1,\ \cdots,\ b_m$ sont des constantes (invariants).
- $\frac{d^n s(t)}{dt^n}$ est la dérivée d'ordre n de $s(t)$..
- L'équation s'exprime en fonction de $s(t)$ et de $e(t)$ ainsi que de leurs dérivées successives par rapport au temps (linéarité).
- n est l'ordre du système.

Représentation par équations différentielles

Un circuit RL est habituellement utilisé pour modélisé des systèmes tels que les moteurs à courant continu ou des filtres.





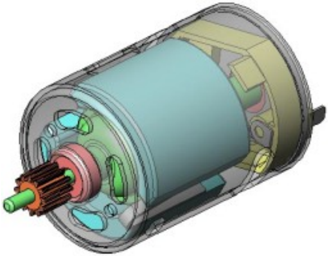
- Les équations électriques du circuit sont les suivantes :

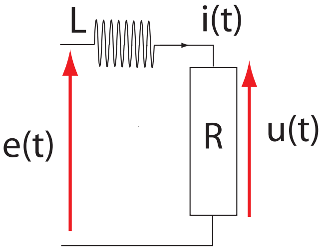
$$e(t) = L\,\frac{di(t)}{dt} + R\,i(t).$$

- Si on veut donner une relation entre $u(t)$ et l'entrée $e(t)$, il faut traduire l'équation différentiel par une relation simple.
- Les **transformées de Laplace** donnée dans la partie suivantes permettent de modéliser et de résoudre plus simplement ces équation.

Représentation par équations différentielles

Un circuit RL est habituellement utilisé pour modélisé des systèmes tels que les moteurs à courant continu ou des filtres.





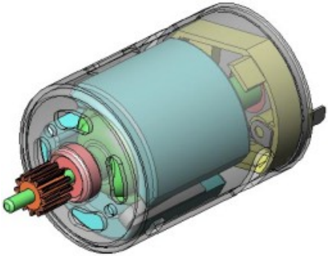
- Les équations électriques du circuit sont les suivantes :

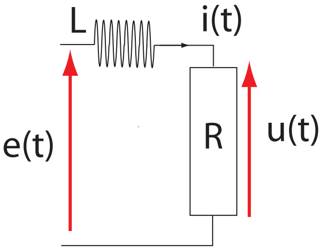
$$e(t) = L\,\frac{di(t)}{dt} + R\,i(t).$$

- Si on veut donner une relation entre $u(t)$ et l'entrée $e(t)$, il faut traduire l'équation différentiel par une relation simple.
- Les **transformées de Laplace** donnée dans la partie suivantes permettent de modéliser et de résoudre plus simplement ces équation.

Représentation par équations différentielles

Un circuit RL est habituellement utilisé pour modélisé des systèmes tels que les moteurs à courant continu ou des filtres.





- Les équations électriques du circuit sont les suivantes :

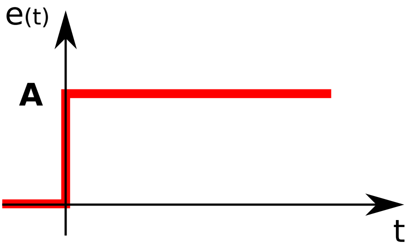
$$e(t) = L\,\frac{di(t)}{dt} + R\,i(t).$$

- Si on veut donner une relation entre $u(t)$ et l'entrée $e(t)$, il faut traduire l'équation différentiel par une relation simple.
- Les **transformées de Laplace** donnée dans la partie suivantes permettent de modéliser et de résoudre plus simplement ces équation.

Représentation par équations différentielles

Système causal

Pour un système physique, l'effet ne peut précéder la cause. Donc la sortie $s(t)$ à la date t ne peut dépendre que des entrées aux dates $t' \leq t$. Un système vérifiant cette propriété est dit causal. Cela se traduit sur la relation différentielle par $m \leq n$. De plus, on prendra pour référence $t = 0$, donc un système causal vérifie que $\forall t < 0,\ e(t) = 0$.



Représentation par les fonctions de transfert

Fonction de transfert

Soit f une fonction de la variable réelle $t \in \mathbb{R}$ et supposée nulle pour $t < 0$, on appelle **Transformée de Laplace** de f, la fonction F définie par :

$$\boxed{F(p) = \mathscr{L}\left[f(t)\right] = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\, dt.} \tag{9}$$

- p : Variable complexe.
- Pour l'asservissement, t est le temps et on se limite aux fonctions causales, c'est à dire les fonctions f telles que $f(t) = 0$ pour $t < 0$.

Remarque

On note

$$F(p) = \mathscr{L}\left[f(t)\right] = T\mathscr{L}\left[f(t)\right]$$

où $F(p)$ est l'image de $f(t)$. $F(p)$ est la transformée de Laplace de $f(t)$, et $f(t)$ est l'original de $F(p)$.

Représentation par les fonctions de transfert

Fonction de transfert

Soit f une fonction de la variable réelle $t \in \mathbb{R}$ et supposée nulle pour $t < 0$, on appelle **Transformée de Laplace** de f, la fonction F définie par :

$$\boxed{F(p) = \mathscr{L}\left[f(t)\right] = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\, dt.} \tag{9}$$

- p : Variable complexe.
- Pour l'asservissement, t est le temps et on se limite aux fonctions causales, c'est à dire les fonctions f telles que $f(t) = 0$ pour $t < 0$.

Remarque

On note

$$F(p) = \mathscr{L}\left[f(t)\right] = T\mathscr{L}\left[f(t)\right]$$

où $F(p)$ est l'image de $f(t)$. $F(p)$ est la transformée de Laplace de $f(t)$, et $f(t)$ est l'original de $F(p)$.

Représentation par les fonctions de transfert

Propriétés

- **Unicité :** à $f(t)$ correspond $F(p)$ unique, à $F(p)$ correspond $f(t)$ unique.
- **Linéarité :** $\mathscr{L}\left[\alpha\, f_1(t) + \beta\, f_2(t)\right] = \alpha\, \mathscr{L}\left[f_1(t)\right] + \beta\, \mathscr{L}\left[f_2(t)\right]$

Théorèmes généraux

- Facteur d'échelle :

$$\boxed{\mathscr{L}\left[f(at)\right] = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right).} \tag{10}$$

- Retard :

$$\boxed{\mathscr{L}\left[f(t-\tau)\right] = e^{-\tau p} F(p).} \tag{11}$$

- Amortissement :

$$\boxed{\mathscr{L}\left[e^{-\omega t} f(t)\right] = F(p+\omega).} \tag{12}$$

Représentation par les fonctions de transfert

Propriétés

- **Unicité :** à $f(t)$ correspond $F(p)$ unique, à $F(p)$ correspond $f(t)$ unique.
- **Linéarité :** $\mathscr{L}\left[\alpha\, f_1(t) + \beta\, f_2(t)\right] = \alpha\, \mathscr{L}\left[f_1(t)\right] + \beta\, \mathscr{L}\left[f_2(t)\right]$

Théorèmes généraux

- Facteur d'échelle :

$$\boxed{\mathscr{L}\left[f(at)\right] = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right).} \tag{10}$$

- Retard :

$$\boxed{\mathscr{L}\left[f(t-\tau)\right] = e^{-\tau p} F(p).} \tag{11}$$

- Amortissement :

$$\boxed{\mathscr{L}\left[e^{-\omega t} f(t)\right] = F(p+\omega).} \tag{12}$$

Représentation par les fonctions de transfert

Propriétés

- **Unicité :** à $f(t)$ correspond $F(p)$ unique, à $F(p)$ correspond $f(t)$ unique.
- **Linéarité :** $\mathscr{L}\left[\alpha\, f_1(t) + \beta\, f_2(t)\right] = \alpha\, \mathscr{L}\left[f_1(t)\right] + \beta\, \mathscr{L}\left[f_2(t)\right]$

Théorèmes généraux

- Facteur d'échelle :

$$\boxed{\mathscr{L}\left[f(at)\right] = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right).} \tag{10}$$

- Retard :

$$\boxed{\mathscr{L}\left[f(t-\tau)\right] = e^{-\tau p} F(p).} \tag{11}$$

- Amortissement :

$$\boxed{\mathscr{L}\left[e^{-\omega t} f(t)\right] = F(p+\omega).} \tag{12}$$

Représentation par les fonctions de transfert

Théorèmes généraux

- Dérivation première :

$$\boxed{\mathscr{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = p\,F(p) - f(0^-).} \qquad (13)$$

- Dérivation seconde :

$$\boxed{\mathscr{L}\left[\frac{d^2f}{dt^2}\right] = p^2F(p) - p\,f(0^-) - f'(0^-).} \qquad (14)$$

- Intégration :

$$\boxed{\mathscr{L}\left[g(t)\right] = \frac{1}{p}F(p) + \frac{g(0^-)}{p} \qquad \text{avec } f(t) = \frac{dg(t)}{dt}.} \qquad (15)$$

Représentation par les fonctions de transfert

Théorèmes généraux

- Dérivation première :

$$\boxed{\mathscr{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = p\,F(p) - f(0^-).} \qquad (13)$$

- Dérivation seconde :

$$\boxed{\mathscr{L}\left[\frac{d^2f}{dt^2}\right] = p^2F(p) - p\,f(0^-) - f'(0^-).} \qquad (14)$$

- Intégration :

$$\boxed{\mathscr{L}\left[g(t)\right] = \frac{1}{p}F(p) + \frac{g(0^-)}{p} \qquad \text{avec } f(t) = \frac{dg(t)}{dt}.} \qquad (15)$$

Représentation par les fonctions de transfert

Théorèmes généraux

- Dérivation première :

$$\boxed{\mathscr{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = p\,F(p) - f(0^-).} \quad (13)$$

- Dérivation seconde :

$$\boxed{\mathscr{L}\left[\frac{d^2f}{dt^2}\right] = p^2F(p) - p\,f(0^-) - f'(0^-).} \quad (14)$$

- Intégration :

$$\boxed{\mathscr{L}\left[g(t)\right] = \frac{1}{p}F(p) + \frac{g(0^-)}{p} \qquad \text{avec } f(t) = \frac{dg(t)}{dt}.} \quad (15)$$

Représentation par les fonctions de transfert

Théorèmes aux limites

- **Théorème de la valeur finale :** Si le système est stable,

$$\boxed{\lim_{t \to +\infty} f(t) = \lim_{p \to 0} p\, F(p).} \tag{16}$$

- **Théorème de la valeur initiale :**

$$\boxed{\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{p \to +\infty} p\, F(p).} \tag{17}$$

Représentation par les fonctions de transfert

Théorèmes aux limites

- **Théorème de la valeur finale :** Si le système est stable,

$$\boxed{\lim_{t \to +\infty} f(t) = \lim_{p \to 0} p\, F(p).} \quad (16)$$

- **Théorème de la valeur initiale :**

$$\boxed{\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{p \to +\infty} p\, F(p).} \quad (17)$$

Fonctions de transfert usuelles

$f(t)$	$F(p) = \mathscr{L}[f(t)]$	$f(t)$	$F(p) = \mathscr{L}[f(t)]$
$u(t)$	$\frac{1}{p}$	$\sin(\omega t)\ u(t)$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$K\ u(t)$	$\frac{K}{p}$	$\cos(\omega t)\ u(t)$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
$K\ t\ u(t)$	$\frac{K}{p^2}$	$\sinh(\omega t)\ u(t)$	$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{p+a}$	$\cosh(\omega t)\ u(t)$	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$
$t^n u(t)$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$e^{-at}\sin(\omega t)u(t)$	$\frac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$
$e^{at}t^n u(t)$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$	$e^{-at}\cos(\omega t)u(t)$	$\frac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2}$
$\delta(t)$	1	$K\ \delta(t)$	K

Fonctions de transfert et équations différentielles

$$\mathscr{L}\left(a_0\ s(t)+a_1\ \frac{ds(t)}{dt}+\ldots+a_n\ \frac{d^n s(t)}{dt^n}=b_0\ e(t)+b_1\ \frac{de(t)}{dt}+\ldots+b_m\ \frac{d^m e(t)}{dt^m}\right)$$
$$\Rightarrow a_0\ S(p)+a_1\ p\ S(p)+\ldots+a_n\ p^n\ S(p)=b_0\ E(p)+b_1\ p\ E(p)+\ldots+b_m\ p^m\ E(p).$$

$$\boxed{H(p)=\frac{S(p)}{E(p)}=\frac{b_0+b_1\ p+\ldots+b_m\ p^m}{a_0+a_1\ p+\ldots+a_n\ p^n}.} \quad (18)$$

Fonctions de transfert et équations différentielles

$$\boxed{H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{p^{\alpha}} \frac{1 + \tilde{b_1}\ p + ... + \tilde{b_m}\ p^m}{1 + \tilde{a_1}\ p + ... + \tilde{a_n}\ p^n}} \qquad (19)$$

Propriétés

- On appelle **pôles** de la fonction de transfert les valeurs de p qui annulent son dénominateur ;
- les zéros celles qui annulent son numérateur.
- Le degré n du dénominateur est appelé ordre du système.
- On appelle K le gain du système et α sa classe.

Fonctions de transfert et équations différentielles

$$\boxed{H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{p^{\alpha}} \frac{1 + \tilde{b_1}\ p + \ldots + \tilde{b_m}\ p^m}{1 + \tilde{a_1}\ p + \ldots + \tilde{a_n}\ p^n}} \quad (19)$$

Propriétés

- On appelle **pôles** de la fonction de transfert les valeurs de p qui annulent son dénominateur ;
- les **zéros** celles qui annulent son numérateur.
- Le degré **n** du dénominateur est appelé **ordre** du système.
- On appelle K le **gain** du système et α sa **classe**.

Fonctions de transfert et équations différentielles

$$\boxed{H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{p^{\alpha}} \frac{1 + \tilde{b_1}\ p + \ldots + \tilde{b_m}\ p^m}{1 + \tilde{a_1}\ p + \ldots + \tilde{a_n}\ p^n}} \qquad (19)$$

Propriétés

- On appelle **pôles** de la fonction de transfert les valeurs de p qui annulent son dénominateur ;
- les **zéros** celles qui annulent son numérateur.
- Le degré **n** du dénominateur est appelé **ordre** du système.
- On appelle K le **gain** du système et α sa **classe**.

Fonctions de transfert et équations différentielles

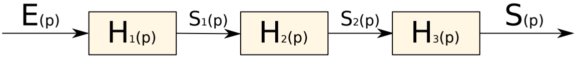
$$\boxed{H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{p^\alpha} \frac{1 + \tilde{b_1}\ p + ... + \tilde{b_m}\ p^m}{1 + \tilde{a_1}\ p + ... + \tilde{a_n}\ p^n}} \tag{19}$$

Propriétés

- On appelle **pôles** de la fonction de transfert les valeurs de p qui annulent son dénominateur ;
- les **zéros** celles qui annulent son numérateur.
- Le degré **n** du dénominateur est appelé **ordre** du système.
- On appelle K le **gain** du système et α sa **classe**.

Manipulations et simplifications de schémas-blocs

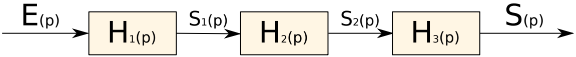
Blocs en série :



$$H(p) = ...$$

Manipulations et simplifications de schémas-blocs

Blocs en série :



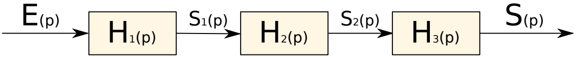
$$\begin{cases} S_1(p) = \\ S_2(p) = \\ S(p) = \end{cases} \implies S(p) =$$

Au final :

$$H(p) =$$

Manipulations et simplifications de schémas-blocs

Blocs en série :



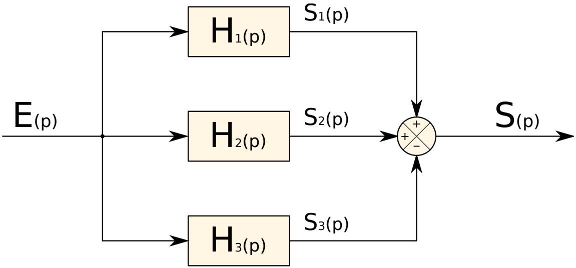
$$\left\{\begin{array}{l} S_1(p) = H_1(p)\ E(p) \\ S_2(p) = H_2(p)\ S_1(p) \\ S(p) = H_3(p)\ S_2(p) \end{array}\right. \implies S(p) = H_3(p)\ H_2(p)\ H_1(p)\ E(p)$$

Au final :

$$H(p) = H_3(p)\ H_2(p)\ H_1(p)$$

Manipulations et simplifications de schémas-blocs

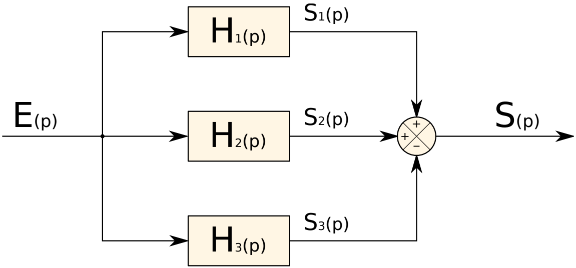
Blocs en parallèle :



$$H(p) = \ldots$$

Manipulations et simplifications de schémas-blocs

Blocs en parallèle :



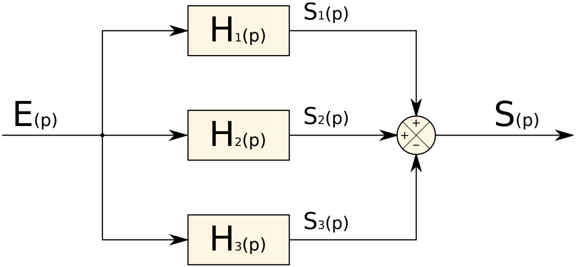
$$\begin{cases} S_1(p) = \\ S_2(p) =) \\ S_3(p) = \\ S(p) = \end{cases} \Longrightarrow S(p) =$$

Ainsi :

$$H(p) =$$

Manipulations et simplifications de schémas-blocs

Blocs en parallèle :



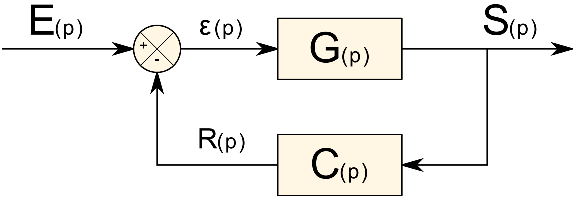
$$\begin{cases} S_1(p) = H_1(p)\ E(p) \\ S_2(p) = H_2(p)\ E(p) \\ S_3(p) = H_3(p)\ E(p) \\ S(p) = S_1(p) + S_2(p) - S_3(p) \end{cases} \Longrightarrow S(p) = [H_1(p) + H_2(p) - H_3(p)]\ E(p)$$

Ainsi :

$$H(p) = H_1(p) + H_2(p) - H_3(p)$$

Manipulations et simplifications de schémas-blocs

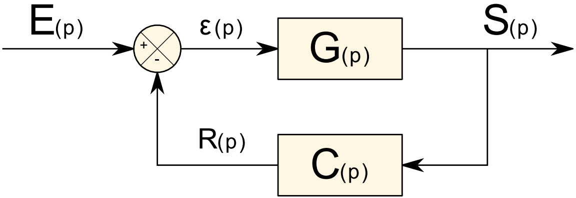
Systèmes bouclés :



$$H(p) = ...$$

Manipulations et simplifications de schémas-blocs

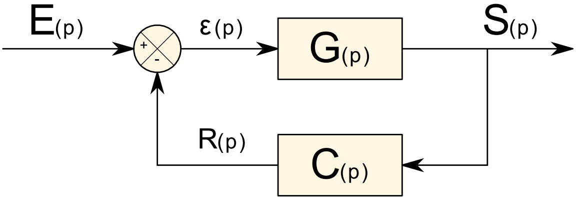
Systèmes bouclés :



$$\left.\begin{array}{lcl} S(p) & = & \\ R(p) & = & \\ \varepsilon(p) & = & \end{array}\right\} \Longrightarrow S(p) =$$

Manipulations et simplifications de schémas-blocs

Systèmes bouclés :



$$\left.\begin{array}{ll} S(p) & = G(p)\,\varepsilon(p) \\ R(p) & = C(p)\ S(p) \\ \varepsilon(p) & = E(p) - R(p) \end{array}\right\} \Longrightarrow S(p) = G(p)\left[E(p) - C(p)\ S(p)\right]$$

L'ensemble permet de définir alors la **Fonction de Transfert en Boucle Fermée** du système (FTBF) :

$$\boxed{FTBF(p) = \frac{G(p)}{1 + G(p)C(p)}.} \tag{20}$$

On peut aussi appelé cette formule : **formule de Black**.

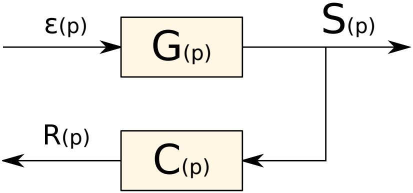
Manipulations et simplifications de schémas-blocs

Remarque

Le signe "+" du dénominateur est l'inverse du signe du comparateur (ici : un "−"). Si nous avions eu un comparateur "+/+", la fonction de transfert aurait été :

$$H(p) = \frac{G(p)}{1 - G(p)C(p)}$$

Certaines études se feront à partir de la **Fonction de Transfert en Boucle Ouverte**



Ici, la fonction de transfert en boucle ouverte est donc :

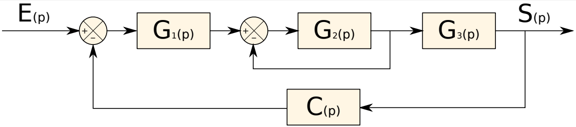
$$\boxed{FTBO(p) = \frac{R(p)}{\varepsilon(p)} = G(p)\ C(p).} \qquad (21)$$

Manipulations et simplifications de schémas-blocs

Simplifications de boucles concentriques

Technique

Si l'une des branches est constituée de plusieurs boucles strictement imbriquées les unes dans les autres, on peut alors calculer la fonction de transfert boucle par boucle, en commençant par la boucle la plus "*à l'intérieure*".

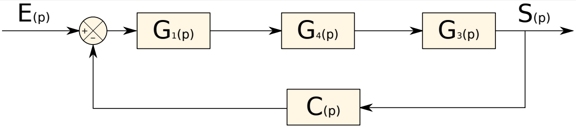


Manipulations et simplifications de schémas-blocs

Simplifications de boucles concentriques

Technique

Si l'une des branches est constituée de plusieurs boucles strictement imbriquées les unes dans les autres, on peut alors calculer la fonction de transfert boucle par boucle, en commençant par la boucle la plus "*à l'intérieure*".



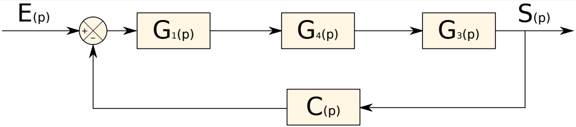
$$G_4(p) = \ldots$$

Manipulations et simplifications de schémas-blocs

Simplifications de boucles concentriques

Technique

Si l'une des branches est constituée de plusieurs boucles strictement imbriquées les unes dans les autres, on peut alors calculer la fonction de transfert boucle par boucle, en commençant par la boucle la plus "*à l'intérieure*".



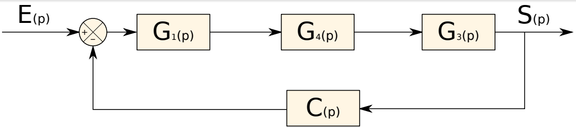
$$G_4(p) = \frac{G_2(p)}{1 + G_2(p)}$$

Manipulations et simplifications de schémas-blocs

Simplifications de boucles concentriques

Technique

Si l'une des branches est constituée de plusieurs boucles strictement imbriquées les unes dans les autres, on peut alors calculer la fonction de transfert boucle par boucle, en commençant par la boucle la plus "*à l'intérieure*".



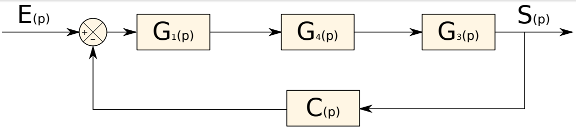
$$H(p) = \ldots$$

Manipulations et simplifications de schémas-blocs

Simplifications de boucles concentriques

Technique

Si l'une des branches est constituée de plusieurs boucles strictement imbriquées les unes dans les autres, on peut alors calculer la fonction de transfert boucle par boucle, en commençant par la boucle la plus "*à l'intérieure*".



$$H(p) = \frac{G_1(p)G_4(p)G_3(p)}{1+G_1(p)G_4(p)G_3(p)C(p)}$$

$$= \frac{G_1(p)G_3(p)\frac{G_2(p)}{1+G_2(p)}}{1+G_1(p)G_3(p)C(p)\frac{G_2(p)}{1+G_2(p)}}$$

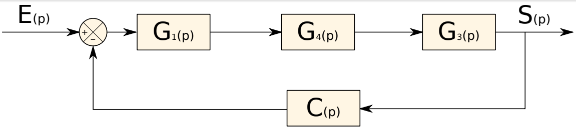
$$= \frac{\frac{G_1(p)G_2(p)G_3(p)}{1+G_2(p)}}{\frac{1+G_2(p)+G_1(p)G_2(p)G_3(p)C(p)}{1+G_2(p)}}$$

Manipulations et simplifications de schémas-blocs

Simplifications de boucles concentriques

Technique

Si l'une des branches est constituée de plusieurs boucles strictement imbriquées les unes dans les autres, on peut alors calculer la fonction de transfert boucle par boucle, en commençant par la boucle la plus "*à l'intérieure*".

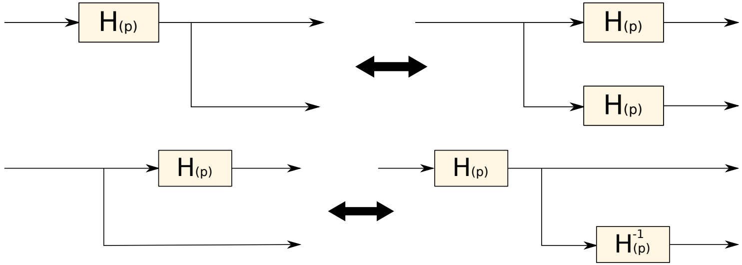


Ainsi :

$$H(p) = \frac{G_1(p)G_2(p)G_3(p)}{1 + G_2(p)\left(1 + G_1(p)G_3(p)C(p)\right)}$$

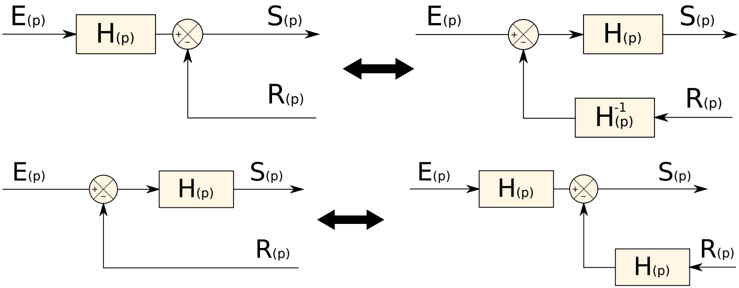
Manipulations et simplifications de schémas-blocs

Déplacement des blocs autour des points de prélèvement



Manipulations et simplifications de schémas-blocs

Déplacement des blocs autour des comparateurs

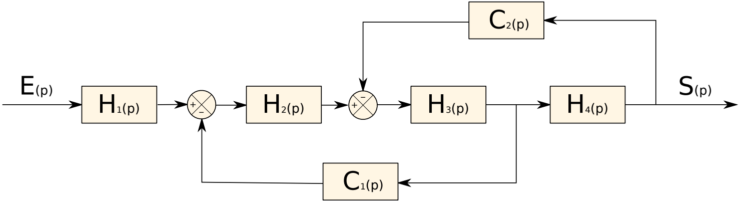


Attention

Dans le cas des comparateurs, il convient de veiller à l'homogénéité des entrées !

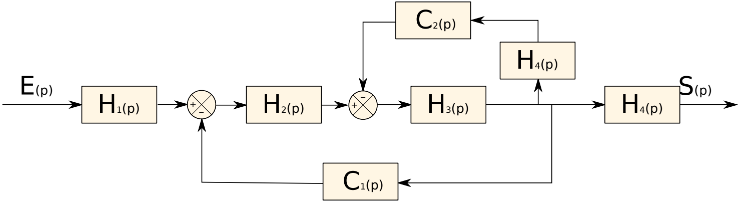
Manipulations et simplifications de schémas-blocs

Exemple



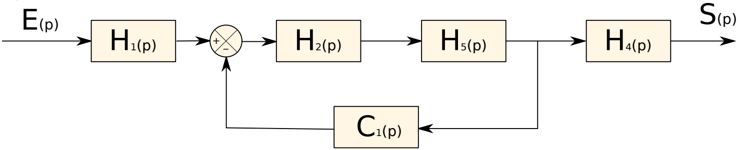
Manipulations et simplifications de schémas-blocs

Exemple



Manipulations et simplifications de schémas-blocs

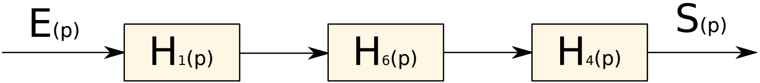
Exemple



$$H_5(p) = \frac{H_3(p)}{1 + H_3(p)H_4(p)C_2(p)}$$

Manipulations et simplifications de schémas-blocs

Exemple



$$H_6(p) = \frac{H_2(p)H_5(p)}{1 + H_2(p)H_5(p)C_1(p)}$$

Manipulations et simplifications de schémas-blocs

Exemple

$$
\begin{aligned}
H(p) &= H_1(p)H_6(p)H_4(p) \\
&= H_1(p)H_4(p)\frac{H_2(p)\frac{H_3(p)}{1+H_3(p)H_4(p)C_2(p)}}{1+H_2(p)\frac{H_3(p)}{1+H_3(p)H_4(p)C_2(p)}C_1(p)}
\end{aligned}
$$

Au final :

$$
H(p) = \frac{H_1(p)H_2(p)H_3(p)H_4(p)}{1+H_3(p)H_4(p)C_2(p)+H_2(p)H_3(p)C_1(p)}
$$