Devoir à la maison n° 18

À rendre le 6 mai

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \neq 0$, soit f un endomorphisme de E. On cherche à démontrer le résultat suivant :

$$\exists\, p \in [\![1, n]\!], \quad E = \operatorname{Ker} f^p \oplus \operatorname{Im} f^p.$$

1) Cas général.

a) Montrer que $\operatorname{Ker} f^k \subset \operatorname{Ker} f^{k+1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

b) En déduire que la suite $(\dim \operatorname{Ker} f^p)_{p\in\mathbb{N}}$ est convergente.

c) Montrer qu'il existe un plus petit entier naturel k tel que $\operatorname{Ker} f^k = \operatorname{Ker} f^{k+1}$. On le notera p. Cet entier p est appelé *l'indice* de f.

d) Montrer qu'il existe une famille $(x_1, \ldots, x_p)$ telle que pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $x_i \in \operatorname{Ker} f^i \setminus \operatorname{Ker} f^{i-1}$.

e) Montrer que cette famille est libre.

f) En déduire que $p \leqslant n$.

g) Montrer par récurrence que $\operatorname{Ker} f^k = \operatorname{Ker} f^p$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geqslant p$.

h) En déduire que $E = \operatorname{Ker} f^p \oplus \operatorname{Im} f^p$.

2) Quelques exemples.

a) Calculer l'indice de f si f est nul ou si f est un automorphisme de E.

b) Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit f_a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ défini par :

$$f_a : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} ax + y + az \\ y + az + t \\ x + y + az \\ y \end{pmatrix}.$$

Déterminer pour quelles valeurs de a l'application f_a est bijective, et déterminer l'indice de f_a pour les valeurs de a pour lesquelles f_a n'est pas un automorphisme.

3) Contre-exemples. On ne suppose maintenant plus E de dimension finie.

a) Existe t-il nécessairement k tel que $\operatorname{Im} f^{k+1} = \operatorname{Im} f^k$?

b) Existe t-il nécessairement k tel que $\operatorname{Ker} f^{k+1} = \operatorname{Ker} f^k$?

c) On pose $F = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \operatorname{Im} f^k$ et $G = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \operatorname{Ker} f^k$. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.

d) A t-on nécessairement $E = F \oplus G$ dans le cas où E est de dimension finie ?

e) Et dans le cas où E n'est pas de dimension finie ?

— **FIN** —