Devoir à la maison n° 20

À rendre le 30 mai

Soient $m, n, p \in \mathbb{N}^*$.
Soit $A \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.
Le coefficient $a_{i,j}$ est dit *diagonal* si $i = j$.
La matrice A est dite *diagonale* si tous ses coefficients non diagonaux sont nuls.
On note u l'application linéaire canoniquement associée à A, *i.e.* l'application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ de matrice A relativement aux bases canoniques.
On appelle *inverse faible* de A toute matrice B de $\mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ vérifiant $ABA = A$.
On appelle *inverse généralisée* de A toute matrice B de $\mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ vérifiant $ABA = A$ et $BAB = B$.

1) Questions préliminaires :

- **a)** On suppose dans cette question seulement que A est carrée, d'ordre n, et vérifie $A^2 = A$.
  - **i)** Montrer que $\mathbb{R}^n = \operatorname{Im} u \oplus \operatorname{Ker} u$.
  - **ii)** Montrer que $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{tr}(A)$.
- **b)** Soient $B \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ et $C \in \mathscr{M}_{m,p}(\mathbb{R})$. Montrer que $\operatorname{rg} BC \leqslant \min(\operatorname{rg} B, \operatorname{rg} C)$.

2)

- **a)** Montrer que si A est carrée et inversible, elle a une unique inverse faible.
- **b)** Montrer que si D est une matrice diagonale de $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, alors elle admet une inverse généralisée. Cette inverse est-elle unique ?

3) Nous revenons maintenant au cas général.

- **a)** Montrer qu'il existe des matrices carrées inversibles P et Q, d'ordres respectifs n et m, telles que $Q^{-1}AP = D$, où D est diagonale.
  Montrer alors que A admet une inverse généralisée.
- **b)** **Exemple.** Déterminer une inverse généralisée de

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

4)

- **a)** Soit B une inverse faible de A. Montrer que $\operatorname{rg}(B) \geqslant \operatorname{rg}(A)$. Peut-on avoir inégalité stricte ?
- **b)** Soit B une inverse généralisée de A. Montrer que $\operatorname{rg}(B) = \operatorname{rg}(A)$.

5) Soit B une inverse faible de A.

- **a)** Que peut-on dire de $H = BA$? Montrer que $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{tr}(H)$.
- **b)** Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation $AX = 0$, avec $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, est $\operatorname{Im}(H - \mathrm{I}_n)$.
- **c)** Montrer que si l'équation $AX = Y$, où $Y \in \mathscr{M}_{m,1}(\mathbb{R})$, admet une solution, alors l'ensemble des solutions de cette équation est $\{ BY + (H - I)Z \mid Z \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \}$.

— **FIN** —