Devoir surveillé n°2

Durée : 3 heures, calculatrices et documents interdits

I. Un exercice vu en TD.

Tracer les courbes représentatives des fonctions suivantes.

1) $f : x \mapsto \sin(\operatorname{Arcsin} x)$

2) $g : x \mapsto \operatorname{Arcsin}(\sin x)$

II. L'inégalité arithmético-géométrique.

L'objectif de ce problème est de montrer, de deux manières différentes, l'**inégalité arithmético-géométrique** :

$$\text{Soit } n \in \mathbb{N}^* \text{ et } x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+^*, \text{ alors } \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k} \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Le réel $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$ est la *moyenne arithmétique* de $x_1, \ldots, x_n$;
Le réel $\displaystyle\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k}$ est leur *moyenne géométrique.*

1) Le prix de l'essence augmente de 28% cette année, de 8% l'année prochaine et de 25% l'année suivante. Quelle est son augmentation moyenne sur ces trois années ?

Partie 1 : une première démonstration

2) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \leqslant \mathrm{e}^{x-1}$. Pour quelles valeurs de x a-t-on une égalité ?

3) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$. On pose $m = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$. En considérant les réels $\displaystyle\frac{x_1}{m}, \ldots, \frac{x_n}{m}$, montrer l'inégalité voulue.

4) Déterminer les cas d'égalité.

Partie 2 : une démonstration par récurrence

5) Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+$, $\sqrt{xy} \leqslant \dfrac{x+y}{2}$.

6) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tous $x_1, x_2, \ldots, x_{2^n} \in \mathbb{R}_+^*$, $\left(\prod\limits_{k=1}^{2^n} x_k\right)^{\frac{1}{2^n}} \leqslant \dfrac{1}{2^n}\sum\limits_{k=1}^{2^n} x_k$.

7) **a)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $2^n \geqslant n$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$. On pose $m = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} x_k$.

D'après la question précédente, on peut poser $x_i = m$ pour tout $i \in [\![n+1, 2^n]\!]$. Conclure.

Partie 3 : une dernière inégalité

Soit h le réel strictement positif tel que

$$\frac{1}{h} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}.$$

Le réel h est la *moyenne harmonique* des nombres $x_1, \ldots, x_n$.

8) Soit g la moyenne géométrique des nombres $x_1, \ldots, x_n$.
Comparer g et h et déterminer les cas d'égalité.

En supposant que vos notes sont toujours strictement positives, quelle est la moyenne que vous préférez voir apparaître sur votre bulletin semestriel parmi les trois moyennes présentées ?

III. Birapport, cocyclicité et homographies.

Dans tout le problème, on confondra le complexe z et le point du plan d'affixe z.
a, b, c, d étant quatre complexes deux à deux distincts, on définit le birapport :

$$B(a,b,c,d) = \frac{a-c}{a-d} \times \frac{b-d}{b-c}.$$

Préliminaire : lien entre le birapport et la cocyclicité.

On rappelle le théorème de l'angle au centre :

« Soit A, B et C trois points deux à deux distints et $\mathscr{C}$ un cercle de centre Ω, passant par A et B. Le point C est sur $\mathscr{C}$ si et seulement si $\left(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}\right) = 2\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right)$ $[2\pi]$ ».

Soit a, b, c, d quatre nombres complexes, représentant respectivement les points A, B, C et D du plan. On montre dans cette partie que le birapport de ces quatres points est réel si et seulement si ces points sont alignés ou cocycliques (*i.e,*, appartiennent à un même cercle).

1) **a)** Exprimer l'argument de $B(a, b, c, d)$ comme une différence d'angle faisant intervenir les points A, B, C, D.

b) Montrer que si A, B, C et D sont alignés, alors $\arg\left(B(a, b, c, d)\right) = 0[\pi]$.

c) Montrer que si A, B, C et D sont cocycliques, alors $\arg\left(B(a, b, c, d)\right) = 0[\pi]$.

d) Que peut-on donc conclure ?

2) Réciproquement, supposons que $B(a, b, c, d) \in \mathbb{R}$.

a) Que peut-on dire si A, C et D sont alignés ?

b) Sinon, montrer que A, B, C et D sont cocycliques.

Partie principale : étude d'une homographie.

On pose $E = \mathbb{C} \setminus \{i, 1\}$. On définit $f : \begin{array}{ccc} E & \to & C \\ z & \mapsto & \dfrac{z+i}{z-i} \end{array}$.

Si A est un ensemble, on note $f(A)$ l'image directe de A par f. C'est l'ensemble des images des éléments de A par f, soit $\{f(z) \mid z \in A\}$.

3) **a)** Montrer : $\forall z \in E,\ f(z) \in E$.

b) Montrer que pour tout élément z' de E, il existe un unique $z \in E$ vérifiant $z' = f(z)$. Exprimer alors ce z en fonction de z'. *On dit alors que f est bijective et l'on vient de trouver l'expression de sa réciproque.*

c) Calculer $(f \circ f)(z)$ et en déduire que $f \circ f \circ f = Id_E$.

4) **a)** Démontrer que $f(\mathbb{R}\setminus\{1\}) = \mathbb{U} \cap E$, où $\mathbb{U}$ est le cercle unité de $\mathbb{C}$.

b) Soient $P = \{z \in E \mid \mathrm{Im}(z) < 0\}$ et $D = \{z \in E \mid |z| < 1\}$. Démontrer que $f(P) = D$.

5) Soient a, b, c, d quatre éléments distincts de E et a', b', c', d' leurs images par f.

a) Montrer : $\dfrac{a'-c'}{a'-d'} = \dfrac{a-c}{a-d} \times \dfrac{d-i}{c-i}$.

b) En déduire : $B(a', b', c', d') = B(a, b, c, d)$.

c) Que peut-on en déduire si a, b, c, d sont cocycliques ou alignés ?

d) Montrer que a, c, d sont alignés si et seulement si $a', 1, c', d'$ sont cocycliques ou alignés.

6) **a)** Déterminer les complexes de E tels que $f(z) = z$.
On trouvera deux solutions distinctes que l'on notera α et β avec $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$.

b) Vérifier : $\dfrac{\beta - i}{\alpha - i} = j^2$ avec $j = \exp(\frac{2i\pi}{3})$.

c) Soient $z \in E \setminus \{\alpha, \beta\}$ et $z' = f(z)$.
Montrer : $z' \neq \alpha,\ z' \neq \beta$.
Etablir $\dfrac{z'-\alpha}{z'-\beta} = j^2 \dfrac{z-\alpha}{z-\beta}$.

7) Construction géométrique de l'image d'un point

On note Δ la médiatrice de $[\alpha, \beta]$.

a) Montrer que $f(\Delta \cap E) = \Delta \cap E$.
Indication : utiliser le résultat de la question précédente.

b) Montrer que Δ est la droite passant par 1 et i.

c) Montrer que $\forall z \in E,\ z \in \Delta \iff f(z) \in \Delta$.

d) Soit $z \in \Delta \cap E$ et $z' = f(z)$.
Montrer que $(\overrightarrow{z\alpha}, \overrightarrow{zi}) = (\overrightarrow{zi}, \overrightarrow{z\beta})\ [2\pi]$ et $(\overrightarrow{z'\alpha}, \overrightarrow{z'i}) = (\overrightarrow{z'i}, \overrightarrow{z'\beta})\ [2\pi]$.
En déduire que les mesures des angles orientés entre les droites $((\alpha z), (\alpha z'))$ et $((\beta z), (\beta z'))$ valent respectivement $-\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{3}$ (modulo π).

e) Soit $z \in E$ tel que α, z, β ne soient pas alignés.
Alors les droites (αz) et (βz) coupent Δ en deux points distincts a, b de E.
Expliquer comment construire géométriquement $a' = f(a)$ et $b' = f(b)$ puis $z' = f(z)$.
Indication : on pourra utiliser le résultat de la question **5)d)**.
Réaliser cette construction pour $z = \frac{1}{2}$ (unité 5cm).

— **FIN** —