


Feuille d'exercice n° 16 : Polynômes

**Exercice 1** Résoudre les équations suivantes.

- 1)  $Q^2 = XP^2$ , d'inconnues  $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ .
- 2)  $P \circ P = P$ , d'inconnue  $P \in \mathbb{K}[X]$ .

**Exercice 2** Résoudre en  $P \in \mathbb{C}[X]$  l'équation  $P \circ (X^2) = (X^2 + 1)P(X)$ .

**Exercice 3** () Soient  $a, b \in \mathbb{K}$ , avec  $a \neq b$ , soit  $P \in \mathbb{K}[X]$ . Exprimer le reste de la division euclidienne de  $P$  par  $(X - a)(X - b)$ , en fonction de  $P(a)$  et  $P(b)$ .


**Exercice 4** () Dans  $\mathbb{C}[X]$ , effectuer les divisions euclidiennes suivantes.

- 1)  $X^2 - 3iX - 5(1 + i)$  par  $X - 1 + i$
- 2)  $4X^3 + X^2$  par  $X + 1 + i$

**Exercice 5** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur  $n$  pour que  $X^2 + X + 1$  divise  $X^{2n} + X^n + 1$ .

**Exercice 6** () Décomposer dans  $\mathbb{R}[X]$  le polynôme  $P = X^6 + 1$  en produit de facteurs irréductibles.


**Exercice 7** Trouver le(s) polynôme(s)  $A$  de degré 4 tel(s) que :  $X^2 + 1 | A$  et  $X^3 + 1 | A - 1$ .

**Exercice 8** () Montrer que si  $P \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$  vérifie  $P(X^2) = P(X)P(X + 1)$  ses racines sont parmi  $0, 1, -j, -j^2$ . En déduire tous les polynômes solution de cette équation.

**Exercice 9** Soit  $P$  un polynôme de  $\mathbb{R}[X]$  tel que  $P(x) \geq 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

Montrer qu'il existe  $S, T \in \mathbb{R}[X]$  tels que  $P = S^2 + T^2$ . *Indications :*

- 1) Montrer que les racines réelles de  $P$  sont de multiplicité paire.
- 2) Pour  $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ , écrire  $(X - \alpha)(X - \bar{\alpha})$  comme somme de deux carrés de polynômes.

**Exercice 10** () Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Calculer le reste de la division euclidienne du polynôme  $X^n + X + 1$  par le polynôme  $(X - 1)^2$ .

**Exercice 11** Résoudre les équations suivantes.

- 1)  $(P')^2 = 4P$  d'inconnue  $P \in \mathbb{K}[X]$ .
- 2)  $(X^2 + 1)P'' - 6P = 0$  d'inconnue  $P \in \mathbb{K}[X]$ .


**Exercice 12** Résoudre le système 
$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 &= 14 \\ a + b + c &= 2 \\ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} &= \frac{5}{6} \end{cases}.$$

**Exercice 13** () Déterminer le PGCD de chacun des couples de polynômes suivants.

- 1)  $X^5 + 3X^4 + X^3 + X^2 + 3X + 1$  et  $X^4 + 2X^3 + X + 2$
- 2)  $X^4 + X^3 - 3X^2 - 4X - 1$  et  $X^3 + X^2 - X - 1$
- 3)  $X^5 + 5X^4 + 9X^3 + 7X^2 + 5X + 3$  et  $X^4 + 2X^3 + 2X^2 + X + 1$

**Exercice 14** () Calculer un couple de Bézout pour chacun des couples de polynômes suivants.

- 1)  $X^5 - X^4 + 2X^3 - X^2 + X - 2$  et  $X^4 - 2X^3 - X + 2$
- 2)  $X^4 + 2X^3 - X - 2$  et  $X^5 + X^4 - 3X^3 + X^2 + 4X - 4$

**Exercice 15** () Soient  $P, Q$  deux polynômes premiers entre eux.

- 1) Montrer qu'alors  $P^n$  et  $Q^m$  sont premiers entre eux, où  $n, m$  sont deux entiers positifs.
- 2) Montrer de même que  $P + Q$  et  $PQ$  sont premiers entre eux.

**Exercice 16** Soit  $P$  un polynôme de  $\mathbb{C}[X]$ , non constant. Soit  $a \in \mathbb{N}$  et  $b \in \mathbb{N}^*$ .

- 1) Montrer que quel que soit l'entier naturel  $q$ ,  $P^b - 1$  divise  $P^{bq} - 1$ .
- 2) En déduire que le reste de la division de  $P^a - 1$  par  $P^b - 1$  est  $P^r - 1$  où  $r$  est le reste de la division dans  $\mathbb{N}$  de  $a$  par  $b$ .
- 3) En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer le pgcd de  $P^a - 1$  et  $P^b - 1$ .
- 4) Retrouver ce résultat en utilisant le théorème de Bézout dans  $\mathbb{Z}$  et dans  $\mathbb{C}[X]$ .
- 5) Application : trouver le pgcd de  $X^{5400} - 1$  et  $X^{1920} - 1$ , et déterminer  $\mathbb{U}_{5400} \cap \mathbb{U}_{1920}$ .

**Exercice 17** Les polynômes complexes  $P = X^{2025} + X + 1$  et  $Q = X^5 + X + 1$  sont-ils premiers entre eux ?

**Exercice 18** () Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

- 1) Montrer qu'il existe deux polynômes  $U, V$ , vérifiant  $(1 - X)^n U + X^n V = 1$  (\*).
- 2) Déterminer deux polynômes  $U_1, V_1$  de degré strictement inférieur à  $n$ , satisfaisant (\*).  
*Indication* : On pourra utiliser la formule du binôme de Newton.
- 3) En déduire tous les polynômes  $U, V$  vérifiant (\*).
- 4) Montrer que  $U_1$  et  $V_1$  sont les seuls polynômes de degré strictement inférieur à  $n$  satisfaisant (\*).
- 5) Déterminer les coefficients de  $U_1$  et de  $V_1$ .

**Exercice 19**

- 1) Déterminer les polynômes  $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ , premiers entre eux et à coefficients entiers, tels que  $P^2 + Q^2 = (X^2 + 1)^2$ .
- 2) En déduire que l'équation  $x^2 + y^2 = z^2$  a une infinité de solutions (non proportionnelles) dans  $\mathbb{Z}$ .

