

Feuille d'exercice n° 17 : **Dérivation**

**Exercice 1** (📌) – **Limite double** –

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue en 0, soit  $\ell \in \mathbb{R}$ . Montrer que  $f$  est dérivable en 0 et  $f'(0) = \ell$  si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall (h, k) \in ]0, \delta]^2, \quad \left| \frac{f(h) - f(-k)}{h + k} - \ell \right| \leq \varepsilon.$$

**Exercice 2** Soit  $f$  l'application :  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe une

$$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$$

fonction polynomiale  $P_n$  telle que :  $\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$ .

**Exercice 3** (📎) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Calculer la fonction dérivée d'ordre  $n$  des fonctions suivantes.

1)  $f : x \mapsto \sin x$

2)  $g : x \mapsto \sin^2 x$

3)  $h : x \mapsto \sin^3 x + \cos^3 x$

**Exercice 4** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Calculer la dérivée  $n^e$  de chacune des fonctions suivantes.

1)  $f : x \mapsto x^2 e^x$

2)  $g : x \mapsto x^2(1+x)^n$

3)  $h : x \mapsto \frac{x^2 + 1}{(x+1)^2}$

4)  $\varphi : x \mapsto x^{n-1} \ln x$

**Exercice 5** Déterminer toutes les applications  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivables telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x) + f(y).$$

**Exercice 6** (📌) Soit  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que  $a < b$  et  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable telle que  $f(a) = f(b) = 0$ . Montrer que par tout point  $(x_0, 0)$  avec  $x_0 \in \mathbb{R} \setminus [a, b]$ , il passe au moins une tangente à la courbe représentative de  $f$ .

**Exercice 7** (📎) Déterminer  $a, b \in \mathbb{R}$  de manière à ce que la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}_+$  par :

$$f(x) = \sqrt{x} \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \text{ et } f(x) = ax^2 + bx + 1 \text{ sinon}$$

soit dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

**Exercice 8** – **Rolle à l'infini** –

Soit  $a \in \mathbb{R}$ ,  $f$  une fonction continue et dérivable sur l'intervalle  $[a, +\infty[$ , vérifiant  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} f(a)$ .

Montrer qu'il existe un élément  $c$  dans  $]a, +\infty[$  tel que  $f'(c) = 0$ .

**Exercice 9** Soit  $a, b \in \mathbb{R}$ , avec  $a < b$ . Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable telle que  $f(a) = f(b) = 0$ ,  $f'(a) > 0$  et  $f'(b) > 0$ .

Montrer qu'il existe  $c_1, c_2, c_3 \in ]a, b[$  tels que  $c_1 < c_2 < c_3$  et  $f'(c_1) = f'(c_2) = f'(c_3) = 0$ .

**Exercice 10** Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  scindé sur  $\mathbb{R}$  à racines simples, de degré supérieur ou égal à 2.

- 1) Montrer que  $P'$  est aussi scindé à racines simples réelles.
- 2) Montrer que le polynôme  $P^2 + 1$  n'a que des racines simples dans  $\mathbb{C}$ .

**Exercice 11** (🚲) – **Polynômes de Legendre** –

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $f : t \mapsto (t^2 - 1)^n$ .

- 1) Montrer que  $\forall k \in \{0, \dots, n-1\}, f^{(k)}(1) = f^{(k)}(-1) = 0$ .
- 2) Calculer  $f^{(n)}(1)$  et  $f^{(n)}(-1)$ .
- 3) Montrer que  $f^{(n)}$  s'annule au moins  $n$  fois dans l'intervalle  $] -1, 1[$ .

**Exercice 12** (🚲) Étant donné  $\alpha$  dans  $]0, 1[$ , montrer que pour tout entier naturel  $n$  non nul

$$\frac{\alpha}{(n+1)^{1-\alpha}} \leq (n+1)^\alpha - n^\alpha \leq \frac{\alpha}{n^{1-\alpha}}.$$

En déduire la limite de la suite de terme général  $\sum_{p=1}^n \frac{1}{p^\alpha}$ .

**Exercice 13** – **Distance à la corde** –

Soit  $a, b \in \mathbb{R}$ , avec  $a < b$ . Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$ .

- 1) On suppose que  $f(a) = f(b) = 0$ . Soit  $c \in ]a, b[$ . Montrer qu'il existe  $d \in ]a, b[$  tel que :

$$f(c) = -\frac{(c-a)(b-c)}{2} f''(d).$$

*Indication* : considérer  $g : t \mapsto f(t) + \lambda(t-a)(b-t)$  où  $\lambda$  est choisi de sorte que  $g(c) = 0$ .

- 2) On traite maintenant le cas général. Soit  $c \in ]a, b[$ , montrer qu'il existe  $d \in ]a, b[$  tel que :

$$f(c) = \frac{b-c}{b-a} f(a) + \frac{c-a}{b-a} f(b) - \frac{(c-a)(b-c)}{2} f''(d).$$

**Exercice 14** (📐) Soit  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable, soit  $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ . On suppose que  $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell$ . Montrer que  $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell$ .

**Exercice 15**

- 1) Montrer que si une fonction  $f$  est lipschitzienne sur un intervalle  $I \subset \mathbb{R}$ , alors,  $|f|$  l'est aussi.
- 2) Montrer que la réciproque est fautive.
- 3) Montrer que la somme de deux fonctions lipschitziennes sur  $I$  est lipschitzienne sur  $I$ .


**Exercice 16** La fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$  est-elle lipschitzienne sur  $]0, +\infty[$  ? sur  $[1, +\infty[$  ?

**Exercice 17** (📐) On considère la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  définie par :  $u_0 \in [-1, +\infty[$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$ .

- 1) Montrer que cette suite ne possède qu'une seule limite finie éventuelle  $\alpha$  que l'on calculera.
- 2) Montrer que pour tout  $n \geq 2$ ,  $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} |u_n - \alpha|$ . En déduire la convergence de la suite  $(u_n)$ .

**Exercice 18** On considère la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  définie par  $u_0 = \frac{3}{2}$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = \frac{2}{u_n} + \ln(u_n)$ .


- 1) Montrer que l'équation  $x = \frac{2}{x} + \ln(x)$  possède une unique solution réelle  $L$ .
- 2) Justifier que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \in \left[\frac{3}{2}, 2\right]$  puis, que pour tout  $n \geq 0$ ,  $|u_n - L| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2}{9}\right)^n$ . Conclure.

**Exercice 19** () Soit  $p, q \in \mathbb{R}_+^*$  vérifiant  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Montrer que pour

$$\forall a, b \in \mathbb{R}_+^*, \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab.$$

**Exercice 20** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction.

- 1) Montrer que si  $f$  est convexe et majorée, alors  $f$  est constante.
- 2) Est-ce toujours le cas si  $f$  est définie sur  $[A, +\infty[$ , où  $A \in \mathbb{R}$  ?
- 3) Montrer que si  $f$  est deux fois dérivable, bornée et non constante, il existe  $a, b \in \mathbb{R}$  vérifiant  $f''(a)f''(b) < 0$ .

**Exercice 21** () Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue telle que  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$ .

- 1) Montrer par récurrence que pour tout  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  et  $k$  entier compris entre 0 et  $2^n$ , on a :  

$$f\left(\frac{k}{2^n}x + \left(1 - \frac{k}{2^n}\right)y\right) \leq \frac{k}{2^n}f(x) + \left(1 - \frac{k}{2^n}\right)f(y).$$
- 2) Montrer que tout réel est limite d'une suite de rationnels de la forme  $\frac{q}{2^n}$ ,  $q \in \mathbb{Z}$  et  $n \in \mathbb{N}$ , et en déduire que  $f$  est convexe.

