

Feuille d'exercice n° 03 : **Sommes et calculs**

Exercice 1 (✎🚲) Soient $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{C}$. Quelles sont les expressions toujours égales entre elles ?

$$\begin{aligned} 1) & \sum_{k=1}^n a_k b_k, \quad \sum_{k=1}^n a_{n+1-k} b_{n+1-k}, \quad \frac{1}{4} \left(\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2 - \sum_{k=1}^n (a_k - b_k)^2 \right) \\ 2) & \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k \right), \quad \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) \left(\sum_{p=1}^n b_p \right), \quad \sum_{k=1}^n \sum_{p=1}^n (a_k b_p), \quad \sum_{k=1}^n \left(a_k \sum_{p=1}^n b_p \right), \quad \sum_{k=1}^n a_k b_k \end{aligned}$$

Exercice 2 (🚲) Montrer que pour toute famille $(z_k)_{1 \leq k \leq n} \in \mathbb{C}^n$, on a :

$$\left(\sum_{k=1}^n z_k \right)^2 = \sum_{k=1}^n z_k^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} z_i z_j.$$

Quel résultat bien connu cette formule généralise-t-elle ?

Exercice 3 Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n k \cdot k! = (n+1)! - 1$.

Exercice 4 (✎)

- 1) Soit $k \in \mathbb{N}$. Écrire $(1+k)^4 - k^4$ sous la forme d'un polynôme de degré 3 en k .
- 2) Soit $n \in \mathbb{N}$. En s'inspirant de la démonstration du cours donnant la valeur de $\sum_{k=0}^n k^2$, calculer la valeur de $\sum_{k=0}^n k^3$ (on donnera cette valeur sous la forme la plus factorisée possible).

Exercice 5 (🚲) Donner une expression simplifiée des quantités suivantes.

$$\begin{aligned} 1) & \sum_{1 \leq i, j \leq n} i \cdot j & 2) & \sum_{1 \leq i, j \leq n} i + j & 3) & \sum_{1 \leq i, j \leq n} i - j & 4) & \sum_{1 \leq i, j \leq n} \min(i, j) \end{aligned}$$

Même question en remplaçant $\sum_{1 \leq i, j \leq n}$ par $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n}$ puis par $\sum_{1 \leq i < j \leq n}$.

Exercice 6 En considérant $(1+1)^n$ et $(1-1)^n$, calculer les sommes $\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k}$ et $\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1}$, où $\lfloor \cdot \rfloor$ est la fonction « partie entière ».

Remarque : ces sommes sont souvent notées $\sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k}$ et $\sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1}$.


Exercice 7 () Écrire avec des factorielles les quantités suivantes.

1) $\prod_{k=n}^m k$ pour $n, m \in \mathbb{N}^*$ t.q. $n < m$.

3) $\prod_{k=1}^p \frac{n-p+k}{k}$ pour $n \geq 2$ et $1 \leq p \leq n-1$.

2) $\prod_{k=1}^p n-p+k$ pour $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ t.q. $p \leq n$.

4) $\prod_{k=1}^n \frac{2k+1}{2k}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 8 ()

1) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $T_n = \sum_{k=1}^n ki^{k-1} = \frac{i - ni^n - (n+1)i^{(n+1)}}{2}$

2) Soit $p \in \mathbb{N}$. En déduire les valeurs des deux sommes :

$$S_1(p) = 1 - 3 + 5 - 7 + \cdots + (-1)^p(2p+1),$$

$$S_2(p) = 2 - 4 + 6 - 8 + \cdots + (-1)^{(p+1)}2p.$$

Exercice 9 Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant la fonction $f : x \mapsto (1+x)^n$, calculer les quantités suivantes.

1) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$

2) $\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}$

3) $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}$

Exercice 10 Soit a un nombre réel. On étudie le système linéaire suivant.

$$\mathcal{S}_a : \begin{cases} x - 2y + 3z = 2 \\ x + 3y - 2z = 5 \\ 2x - y + az = 1 \end{cases}$$

1) En fonction des valeurs du paramètre a , déterminer si le système \mathcal{S}_a peut :

- a) n'admettre aucune solution ;
- b) admettre exactement une solution ;
- c) admettre une infinité de solutions.

2) Résoudre le système \mathcal{S}_a lorsque celui-ci admet une (des) solution(s).

Exercice 11 Discuter et résoudre suivant les valeurs des réels λ, a, b, c, d le système suivant.

$$(S) \begin{cases} (1+\lambda)x + y + z + t = a \\ x + (1+\lambda)y + z + t = b \\ x + y + (1+\lambda)z + t = c \\ x + y + z + (1+\lambda)t = d \end{cases}$$

