Feuille d'exercice n° 30 : **Fonctions de deux variables**

Exercice 1 (✎) Montrer que $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = |x|^y$, avec la convention $0^0 = 1$.
En quels points la fonction f est-elle continue ?

Exercice 3 (✎) Étudier l'existence et, le cas échéant, calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes.

1) $f(x,y) = 2xy^3 - 3y$ **2)** $g(x,y) = \max(|x|,|y|)$ **3)** $h(x,y) = \sqrt{1+x^2y^2}$

Exercice 4 On définit sur $\mathbb{R}^2$ la fonction f par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(xy)}{|x|+|y|} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad x = y = 0 \end{cases}.$$

La fonction f est-elle continue ? De classe $\mathscr{C}^1$?

Exercice 5 (✎) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$. Déterminer les dérivées (évenuellement partielles) des fonctions suivantes.

1) $g : x \mapsto f(x,x)$ **2)** $h : (x,y) \mapsto f(y, f(x,x))$

Exercice 6 **– Fonctions positivement homogènes –**
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$, soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction f est dite *positivement homogène de degré* α si

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ f(tx,ty) = t^\alpha f(x,y).$$

1) Donner un exemple de fonction positivement homogène (avec son degré), et un exemple de fonction non homogène.

2) Montrer que si f est positivement homogène de degré α, alors ses dérivées partielles sont positivement homogènes de degré $\alpha - 1$.

3) Montrer que f est positivement homogène de degré α si et seulement si f vérifie la relation d'Euler :

$$\forall x,y \in \mathbb{R}^2,\ x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \alpha f(x,y).$$

Indication : étudier $\varphi : t \mapsto f(tx,ty)$.

Exercice 7 Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Résoudre sur $\mathbb{R}^2$ l'équation aux dérivées partielles suivantes, en utilisant le changement de variables $u = x+y$ et $v = x-y$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lambda.$$

Exercice 8 (🚲) **– Coordonnées polaires –**

On définit $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{ (x,0) \mid x \in \mathbb{R}_- \}$. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$, on définit sur $\mathbb{R}_+^* \times]-\pi,\pi[$ la fonction

$$g : (r,\theta) \mapsto f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)).$$

1) Représenter D et montrer que D est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

2) Justifier que g est de classe $\mathscr{C}^1$.

3) Exprimer les dérivées partielles de g en fonction de celles de f, et réciproquement.

4) *Exemple* : dériver $u \mapsto \|u\|$ en coordonnées cartésiennes et en coordonnées polaires.

5) *Application* : résoudre sur D les équations aux dérivées partielles suivantes, en utilisant les coordonnées polaires.

a) $x\dfrac{\partial f}{\partial y} - y\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$ **b)** $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^2+y^2}.$

Exercice 9 (✎) Étudier les extremums globaux des fonctions suivantes.

1) $f : (x,y) \mapsto x^3 + y^3$, sur $\mathbb{R}^2$.

2) $g : u \mapsto \|u\|^2 + \sin(\|u\|^2)$, sur $]-1,1[^2$.

3) $h : (x,y) \mapsto x^2 + 3y^2 - 2x - 10y + 2xy + 6$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 10 On note

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -1 < x < y < 1 \right\},$$
$$\overline{D} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -1 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1 \right\}.$$

On admet que D est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

1) Représenter D et $\overline{D}$.

2) Étudier sur $\overline{D}$ les extremums de la fonction

$$f : (x,y) \mapsto x^3 + 5y^3 + 3x^2y + 3xy^2 - 3y^2.$$