

Feuille d'exercice n° 06 : Équations différentielles

Exercice 1 (✎) Calculer les intégrales suivantes via un changement de variable adéquat.

- | | | |
|---|--|--|
| 1) $\int_0^1 \frac{dt}{\operatorname{ch}(t)}$ | 4) $\int_1^e \frac{dt}{t + t(\ln t)^2}$ | 7) $\int_0^\pi \frac{\sin t}{3 + \cos^2 t} dt$ |
| 2) $\int_0^1 t^2 \sqrt{1-t^2} dt$ | 5) $\int_1^e \frac{dt}{t\sqrt{\ln t + 1}}$ | 8) $\int_1^2 \frac{dt}{\sqrt{t} + 2t}$ |
| 3) $\int_1^2 \frac{\ln t}{\sqrt{t}} dt$ | 6) $\int_0^1 \frac{dt}{e^t + 1}$ | 9) $\int_1^2 \frac{\ln(1+t) - \ln t}{t^2} dt$ |

Exercice 2 (📐) Soit $a, b \in \mathbb{R}$, soit $I(a, b) = \int_a^b \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)\sqrt{x^4 + 1}} dx$.

- Montrer que $I(a, b) = I(-b, -a)$
- Soient a et b de même signe. Montrer que $I\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right) = I(a, b)$. En déduire que $I(a, \frac{1}{a}) = 0$.
- Soit $y \in [1, +\infty[$, montrer qu'il existe un unique $x \in \mathbb{R}_+$ tel que $y = \operatorname{ch}(x)$. On note alors $x = \operatorname{Argch}(y)$.
Remarque : on dit que x est l'argument cosinus hyperbolique de y .
- Exprimer alors $e^{\operatorname{Argch}(y)}$ en fonction de y
Facultatif : exprimer $\operatorname{Argch}(y)$ en fonction de y et étudier la fonction Argch .
- Calculer $I(a, b)$ pour $a \geq 1$ et $b \geq 1$ en commençant par poser $u = x + \frac{1}{x}$, puis $u = \sqrt{2} \operatorname{ch}(t)$.
- En déduire $I(a, b)$ lorsque a et b sont de même signe (non nul).

Exercice 3 On pose, pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, $I_{n,p} = \int_0^1 x^n (1-x)^p dx$.

- Exprimer, pour tout $(n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, $I_{n,p}$ en fonction de $I_{n+1,p-1}$.
- En déduire $I_{n,p}$ pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$,
- Calculer $I_{n,n}$ pour tout entier naturel n et en déduire la limite de la suite $(I_{n,n})_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 4 (✎)

- Vérifier que la fonction $f : x \mapsto \ln \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$ est définie et dérivable sur $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ et calculer sa dérivée.
 - Résoudre : $y' - y \tan x = \frac{1}{\cos^2 x}$ sur $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ avec $y(0) = 1$.

Déterminer les solutions réelles des équations différentielles suivantes.

- | | |
|--|--|
| 2) $y' + y = (x^2 - 2x + 2)e^{2x}$ sur \mathbb{R} avec $y(0) = 0$. | 6) $xy' - y = x$ sur \mathbb{R}_+^* . |
| 3) $y' - 2y = \operatorname{sh} x - 2x \operatorname{ch} x$ sur \mathbb{R} . | 7) $y' \sqrt{1-x^2} - y = 1$ sur $] -1, 1[$. |
| 4) $xy' \ln x - y = 3x^2 \ln^2 x$ sur $]0, 1[$. | 8) $y' - 3y = x^2 e^x + x e^{3x}$ sur \mathbb{R} avec $y(0) = 1$. |
| 5) $y' + x^2 y + x^2 = 0$ sur \mathbb{R} avec $y(0) = 0$. | |

Exercice 5 Déterminer les fonctions $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que $\forall x \in [0, 1] \quad f'(x) + f(x) = f(0) + f(1)$.

Exercice 6 (🚲) Donner l'ensemble des solutions de l'équation différentielle suivante sur \mathbb{R}_+^* , \mathbb{R}_-^* , \mathbb{R}^* et \mathbb{R} :

$$xy' + y = x(3x + 4).$$

Exercice 7 (📐) Déterminer les solutions réelles des équations différentielles suivantes.

- 1) $y'' + y' - 2y = 8 \sin x$ avec $y(\pi) = 0$ et $y'(\pi) = 1$
- 2) $y'' + y' = 4x^2 e^x$ avec $y(0) = e$ et $y'(0) = 0$
- 3) $y'' + 4y = x^2 - x + 1$
- 5) $y'' - 3y' + y = \sin x + \cos x$
- 4) $y'' + y' + 2y = (8x + 1)e^x$
- 6) $y'' - y = \operatorname{sh} x$

Exercice 8 (🚲📐) On étudie les équations différentielles d'Euler, qui sont de la forme (\mathcal{E}) : $ax^2y'' + bxy' + cy = g(x)$, où a , b et c sont des constantes et g est une fonction.

- 1) On suppose que l'on étudie (\mathcal{E}) sur \mathbb{R}_+^* et l'on pose $z(t) = y(e^t)$. Montrer que y est solution de (\mathcal{E}) si et seulement si z est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre deux, à coefficients constants (à déterminer en fonction de a , b et c).
- 2) Résoudre $x^2y'' + xy' - y = 2x \ln(x)$ sur \mathbb{R}_+^* .
- 3) Résoudre $x^2y'' + 3xy' + y = (x + 1)^2$ sur \mathbb{R}_+^* .
- 4) Résoudre $x^2y'' + 3xy' + y = 0$ sur \mathbb{R} .

Exercice 9 (🚲) Trouver les applications de $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) + f(-x) = xe^x.$$

Exercice 10 Le but de cet exercice est de résoudre le système différentiel **(S)** suivant :

$$\begin{cases} x'' &= x' + y' - y \\ y'' &= x' + y' - x \end{cases}, \quad \text{en } x, y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

- 1) Soient $x, y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On pose $u = x + y$ et $v = x - y$. Montrer alors qu'il existe deux équations différentielles du second ordre **(E)** et **(F)** telles que l'on ait : (x, y) est solution de **(S)** si et seulement si u est solution de **(E)** et v est solution de **(F)**.
- 2) Résoudre **(E)**.
- 3) Résoudre **(F)**.
- 4) En déduire les solutions de **(S)**.

