Devoir surveillé n°7
Version 2
Durée : 3 heures, calculatrices et documents interdits

I. Conjugaison de Fenchel de fonctions strictement convexes.

Notations

Dans ce problème, on notera $\mathcal{N}$ l'ensemble des fonctions f de $\mathbb{R}_+$ dans lui-même telles que $f(0) = 0$ et qui admettent une dérivée positive, continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
On notera $\mathcal{N}_0$ le sous-ensemble de $\mathcal{N}$ formé des fonctions f telles que

$$f'(0) = 0 \text{ et } f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$

Partie 1 : conjugaison de Fenchel

Dans toute cette partie f désigne un élément de $\mathcal{N}$.

1) Quels sont les différents comportements possibles de $f'(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$?

2) On se propose d'établir dans cette question l'équivalence entre les deux propositions :

$$f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty \text{ et } \frac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty.$$

a) Montrer que pour tout x, réel positif, on a l'inégalité :

$$f(x) \leqslant xf'(x)$$

et vérifier que cette inégalité est stricte si $x > 0$.

b) En déduire que la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ est strictement croissante.

c) Justifier, pour tout x réel positif l'inégalité :

$$xf'(x) \leqslant f(2x).$$

Indication : on pourra évaluer la différence $f(2x) - f(x)$.

d) Conclure quant à l'équivalence énoncée ci-dessus.

3) **Un exemple.** Soit F l'unique primitive de Arctan sur $\mathbb{R}_+$ nulle en 0. Prouver que F appartient à $\mathcal{N}$ et expliciter $F(x)$ pour x réel positif.
Donner une représentation graphique de F en précisant la tangente au point d'abscisse 0.

Dans toute la suite du problème, on supposera que f est un élément de $\mathcal{N}_0$.

4) **a)** Montrer que, pour tout t réel positif, la fonction

$$w_t : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & tx - f(x) \end{array}$$

admet un maximum et qu'elle l'atteint en un unique réel positif x_t.

On notera

$$\varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & x_t \end{array}$$

et

$$f^* : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & w_t(x_t) \end{array} .$$

La fonction f^* sera appelée *fonction conjuguée* de f.

4) **b)** Démontrer que φ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, que $\varphi(0) = 0$ et que $\varphi(t)$ tend vers $+\infty$ lorsque t tend vers $+\infty$.

5) **a)** Dans cette question, t est un réel strictement positif et h est un réel vérifiant : $|h| \leqslant t$.
Justifier l'existence d'un réel $\alpha_{t,h}$ compris entre t et $t+h$ tel que :

$$f(\varphi(t+h)) - f(\varphi(t)) = \alpha_{t,h}(\varphi(t+h) - \varphi(t))$$

En déduire que l'on peut écrire :

$$f^*(t+h) - f^*(t) = h\varphi(t) + \beta_{t,h}\left(\varphi(t+h) - \varphi(t)\right)$$

où $\beta_{t,h}$ est un réel vérifiant : $|\beta_{t,h}| \leq |h|$.

b) En déduire que f^* est dérivable en tout point de $\mathbb{R}_+^*$ et que sa dérivée sur $\mathbb{R}_+^*$ est la fonction φ.

c) Montrer que f^* est dérivable en 0 et donner $(f^*)'(0)$.

d) Vérifier que les fonctions dérivées f' et $(f^*)'$ sont réciproques l'une de l'autre.
En déduire que f^* appartient à $\mathcal{N}_0$ et que l'on a :

$$f^{**} = f$$

où l'on note f^{**} la fonction conjuguée de f^*.

6) Des exemples :

Dans les trois cas suivants, justifier l'appartenance de f à $\mathcal{N}_0$ et exprimer $f^*(t)$ en fonction de t pour t réel positif.

a) Premier cas : Soit $K \in \mathbb{R}_+^*$. On pose : $\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & Kx^2 \end{array}$

On montrera de plus qu'il existe un unique K tel que $f^* = f$.

b) Deuxième cas : Soit $m > 1$. On pose : $\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^m \end{array}$

On mettra $f^*(t)$ sous la forme $\lambda_m \left(\dfrac{t}{m}\right)^{\beta}$.

c) Troisième cas : $\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \mathrm{e}^x - 1 - x \end{array}$

Partie 2 : Recherche des fonctions f vérifiant l'égalité $f = f^*$

7) Vérifier pour tout couple (x, t) de réels positifs, l'inégalité :

$$xt \leq f(x) + f^*(t)$$

Montrer que cette inégalité est une égalité si et seulement si $x = \varphi(t)$.

8) Montrer que, si g est un élément de $\mathcal{N}_0$, on a :

$$f \leqslant g \Longrightarrow g^* \leqslant f^*$$

où g^* est la fonction conjuguée de g.

9) En déduire que la seule fonction f de $\mathcal{N}_0$ vérifiant l'égalité $f = f^*$ est la fonction

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{x^2}{2} \end{array}.$$

II. Une suite de sous-espaces supplémentaires

On note E l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, muni de sa structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel usuelle. On identifiera un polynôme à sa fonction polynomiale associée, et l'on considérera donc que $\mathbb{R}[X]$ est un sous-espace vectoriel de E.

Soit $(a_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels distincts deux à deux. Si $i \in \mathbb{N}^*$, on note

$$F_i = \{\, f \in E \mid f(a_1) = \cdots = f(a_i) = 0 \,\}$$

et

$$G_i = \mathbb{R}_{i-1}[X].$$

1) Montrer que chaque F_i est un sous-espace vectoriel de E.

2) Comparer pour chaque $i \geqslant 1$: F_i et F_{i+1} ; G_i et G_{i+1}.

3) Montrer que, pour chaque $i \geqslant 1$, F_i et G_i sont supplémentaires dans E.

On pose maintenant

$$F = \bigcap_{i\geqslant 1} F_i$$

et

$$G = \bigcup_{i\geqslant 1} G_i$$

4) Justifier que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.

5) Est-ce que F et G sont en somme directe ? supplémentaires dans E ?

— FIN —