

Semaine n° 26 : du 8 avril au 12 avril

Lundi 8 avril

- Cours à préparer : Chapitre XXV - Probabilités sur un univers fini

Les définitions des parties 1.1 et 1.2 sont à connaître parfaitement.

- *Partie 1.1* : Expérience aléatoire, univers, événement ; événement impossible, événement certain ; événements incompatibles ; événements deux à deux incompatibles, mutuellement incompatibles.
Variable aléatoire, univers image ; pour une variable aléatoire X , événement $(X \in A)$; si X est réelle, événements $(X = x)$, $(X \leq x)$, etc.
Système complet d'événements ; système complet d'événements $(X = x)_{x \in X(\Omega)}$
- *Partie 1.2* : Probabilité sur un univers fini, espace probabilisé fini ; événement presque sûr, événement négligeable ; probabilité uniforme ; propriétés d'une probabilité ; formule des probabilités totales ; détermination par les images des événements élémentaires.
- *Partie 1.3* : Probabilité conditionnelle ; si B est un événement de probabilité non nulle, P_B est une probabilité ; formule des probabilités composées, formule des probabilités totales ; formules de Bayes.
- Exercices à traiter en TD
 - Feuille d'exercices n° 24 : exercices 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 16, 17.

Mardi 9 avril

- Cours à préparer : Chapitre XXV - Probabilités sur un univers fini
 - *Partie 1.4* : Couple d'événements indépendants ; famille finie d'événements mutuellement indépendantes.
- Exercices à corriger en classe
 - Feuille d'exercices n° 24 : exercices 10, 12, 13.

Jeudi 11 avril

- Cours à préparer : Chapitre XXV - Probabilités sur un univers fini
 - *Partie 2.2* : Loi d'une variable aléatoire ; image d'une variable aléatoire X par une application f , loi de $f(X)$; loi conditionnelle.
 - *Partie 2.4* : Loi uniforme ; loi de Bernoulli ; loi binomiale.
- Exercices à corriger en classe
 - Feuille d'exercices n° 24 : exercices 11, 14, 15.

Vendredi 12 avril

- Cours à préparer : Chapitre XXV - Probabilités sur un univers fini
 - *Partie 2.5* : Couple de variables aléatoires ; loi conjointe, lois marginales.
 - *Partie 2.6* : Variables aléatoires indépendantes ; lemme des coalitions ; somme de n variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi de Bernoulli.

Échauffements

Mardi 9 avril

- *Cocher toutes les assertions vraies :*

Soit n un entier ≥ 3 et $E = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_1 = x_2 = \dots = x_n\}$.

- ☐ $\dim E = n - 1$.
- ☐ $\dim E = n$.
- ☐ $\dim E = 1$.
- ☐ $E = \mathbb{R}$.

- *Cocher toutes les assertions vraies :* Dans $\mathbb{R}_3[X]$, l'espace des polynômes à coefficients réels de degré ≤ 3 , on considère les deux sous-espaces vectoriels :

$$E = \{P \in \mathbb{R}_3[X]; P(0) = P(1) = 0\} \text{ et } F = \{P \in \mathbb{R}_3[X]; P'(0) = P''(0) = 0\},$$

où P' (resp. P'') est la dérivée première (resp. seconde) de P .

- ☐ $\dim E = 3$.
- ☐ $\dim F = 1$.
- ☐ $E + F = \mathbb{R}_3[X]$.
- ☐ E et F sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$.

Jeudi 11 avril

- *Cocher toutes les assertions vraies :* Soit l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ sa base canonique. Soit f l'endomorphisme de E défini par

$$\forall (x, y, z) \in E, f(x, y, z) = (x + 3z, 0, y - 2z)$$

- ☐ $f(e_1) = e_1 + 3e_3, f(e_2) = 0, f(e_3) = e_2 - 2e_3$.
- ☐ $f(e_1) = e_1, f(e_2) = e_3, f(e_3) = 3e_1 - 2e_3$.
- ☐ f est de rang 3 car E est de dimension 3.
- ☐ f est de rang 2 car (e_1, e_3) est une base de $\text{Im } f$.
- ☐ $\text{Ker } f = \{0\}$.
- ☐ $\text{Ker } f$ est de dimension 1 car $\dim \text{Ker } f = \dim E - \text{rg } f$.
- ☐ $\text{Ker } f$ est un sous-espace vectoriel de $\text{Im } f$ car $\dim \text{Ker } f \leq \dim \text{Im } f$.
- ☐ L'égalité « $\dim E = \dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f$ » suffit pour affirmer que $\text{Im } f$ et $\text{Ker } f$ sont supplémentaires.
- ☐ f est surjective.
- ☐ f est injective.

Vendredi 12 avril

- Soit $u : x \mapsto \frac{1}{x} \ln(x + \cos x)$ et $f : x \mapsto (x + \cos x)^{1/x}$. On note \mathcal{C} la courbe représentative de f .
 - ☐ Pour obtenir un $DL_2(0)$ de f , il suffit de prendre un $DL_2(0)$ de $\ln(x + \cos x)$.
 - ☐ $f(x) = e^{u(x)}$ donc, si $u(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + o(x^2)$ au voisinage de 0, alors :

$$f(x) = 1 + p(x) + \frac{p(x)^2}{2!} + o(x^2)$$

- ☐ Le $DL_2(0)$ de f est : $f(x) = e \left[1 - x - \frac{4}{3}x^2 \right] + o(x^2)$.
- ☐ Du $DL_2(0)$ de f , on déduit un prolongement par continuité de f en 0 en une fonction dérivable en 0, et un positionnement de \mathcal{C} au-dessus de sa tangente au point d'abscisse 0.
- *Cocher toutes les assertions vraies :* Soit E et F deux \mathbb{R} -espaces vectoriels de dimensions finies et f une application linéaire de E dans F . On pose $\dim E = n$ et $\dim F = m$.
 - ☐ Si f est injective, alors $n \leq m$.
 - ☐ Si $n \leq m$, alors f est injective.
 - ☐ Si f est surjective, alors $n \geq m$.
 - ☐ Si $n \geq m$, alors f est surjective.