DS n°9 : Fiche de calculs

Durée : 60 minutes, calculatrices et documents interdits

Nom et prénom : | | Note : | |

Porter directement les réponses sur la feuille, sans justification.

Probabilité

Un joueur lance une infinité de fois une pièce, qui fait pile avec probabilité a. Il marque à chaque fois un point s'il fait pile et deux points s'il fait face. Si $n \in \mathbb{N}$, on note p_n la probabilité qu'il marque n points exactement à un moment du jeu.Déterminer les probabilités suivantes.

$p_1 =$ $\boxed{}$ (1) $p_2 =$ $\boxed{}$ (2)

Une relation de récurrence entre p_{n+1}, p_{n-1} et p_n est

$$\boxed{} \qquad (3)$$

Une expression de p_n en fonction de n et a est

$$p_n = \boxed{} \qquad (4)$$

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0, n]\!]$ telle qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $P(X = k) = a\binom{n}{k}$. Alors :

$a =$ $\boxed{}$ (5) $E[X] =$ $\boxed{}$ (6) $V(X) =$ $\boxed{}$ (7)

Matrices et algèbre linéaire

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{} \qquad (8)$$

Soient f_1, f_2, f_3, définies par $\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_1(t) = e^{2t}, \quad f_2(t) = te^{2t} \quad$ et $\quad f_3(t) = t^2 e^{2t}$.
E l'espace vectoriel dont une base est $\mathscr{B} = (f_1, f_2, f_3)$ et l'application linéaire $\varphi : E \to E$ définie par $\varphi(f) = f + f'$.

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi) = \tag{9}$$

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice A dans la base canonique $\mathscr{B} = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ est $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -1 & 7 & 2 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$. Soit $\mathscr{B}' = ((1,1,-1),(1,-1,1),(1,1,1))$ une autre base de $\mathbb{R}^3$. Alors, en notant $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ et $P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}$ celle de $\mathscr{B}'$ à $\mathscr{B}$,

$$P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} = \tag{10}$$

$$P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}} = \tag{11}$$

Donner une relation entre les matrices $A, P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}, P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(u)$

$$\tag{12}$$

En déduire les coefficients de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(u)$ puis, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les coefficients de A^n :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(u) = \tag{13}$$

$$A^n = \tag{14}$$

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à M.

Donner une base $\mathscr{C}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

$$\mathscr{C} = \tag{15}$$

— FIN —