Devoir à la maison n° 13

À rendre le 15 février

On note E l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ bijectives, dérivables et vérifiant

$$f' = f^{-1}. \tag{$\star$}$$

Dans tout le problème, on considère $f \in E$.

1) Déterminer un élément de E de la forme $x \mapsto cx^p$, où c et p sont des réels.

2) Montrer que f et f^{-1} sont infiniment dérivables.

3) Quelle est la limite de f en 0 ? Et pour f' ?

4) Quelle est la limite de f en $+\infty$? Et pour f' ?

5) Montrer que $\dfrac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.

6) Montrer de même que $\dfrac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to +\infty]{} +\infty$.

7) En déduire que f admet au moins un point fixe sur $\mathbb{R}_+^*$.

8) Montrer que ce point fixe est unique.

9) Justifier que f est convexe. En déduire le signe de $f - \mathrm{Id}$.

10) Soit $g \in E$ distincte de f. On souhaite montrer que g admet le même point fixe que f.

Dans la suite, on note a le point fixe de f et b celui de g.

On raisonne par l'absurde, en supposant que $a < b$.

- **a)** Montrer que $\mathscr{E} = \{\, x \in [0, a[\mid g(x) \geqslant f(x) \,\}$ admet une borne supérieure c, puis que $g(c) = f(c)$.
- **b)** Montrer que pour tout $t \in]c, a[$, $f^{-1}(t) < g^{-1}(t)$.
- **c)** Conclure, et déterminer le point fixe commun des éléments de E.

— FIN —