Feuille d'exercice n° 13 : **Groupes, anneaux, corps**

Exercice 1 Soient G_1 et G_2 deux groupes, dont les lois sont notées multiplicativement. On considère l'ensemble produit $G_1 \times G_2$ sur lequel on considère la loi interne $\otimes$ suivante :

$$\forall((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \in (G_1 \times G_2)^2 \quad (x_1, x_2) \otimes (y_1, y_2) = (x_1 y_1, x_2 y_2).$$

Montrer que $(G_1 \times G_2, \otimes)$ est un groupe. Quel est son neutre ?

Exercice 2 **– Un peu de sudoku –**

1) Soit $(G, *)$ un groupe, $a \in G$. Que peut-on dire de $\varphi_a : \begin{array}{ccc} G & \to & G \\ x & \mapsto & a * x \end{array}$?

2) Montrer qu'il existe une seule table possible pour un groupe d'ordre 3 (c'est-à-dire à trois éléments).

3) Est-ce vrai pour 4 ?

Exercice 3 Soit $(G, \times)$ un groupe, H et K deux sous-groupes de G, $(H_i)_{i \in I}$ une famille de sous-groupes de G.

1) Montrer que $\displaystyle\bigcap_{i \in I} H_i$ est un sous-groupe de G.

2) Montrer que $H \cup K$ est un sous-groupe de G si et seulement si $H \subset K$ ou $K \subset H$.

Exercice 4 Montrer que les sous-groupes de $\mathbb{Z}$ sont exactement tous les $n\mathbb{Z}$, avec $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5 Quel est le plus petit sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ contenant 1 ? Contenant 2 ? Même question avec $(\mathbb{R}^*, \times)$.

Exercice 6 On considère A et B deux sous-groupes de $(G, *)$ et l'on note :

$$A * B = \{ x \in G \mid \exists (a, b) \in A \times B,\ x = a * b \} = \{ a * b \mid (a, b) \in A \times B \}.$$

Montrer que $A * B$ est un sous-groupe de $(G, *)$ si et seulement si $A * B = B * A$.

Indication : pour le sens direct, on commencera par montrer $B * A \subset A * B$.

Exercice 7 Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ non réduit à $\{ 0 \}$. On pose $\alpha = \inf (\mathbb{R}_+^* \cap G)$

1) Montrer que si $\alpha > 0$, alors $G = \alpha\mathbb{Z} = \{ k\alpha \mid k \in \mathbb{Z} \}$.

2) Montrer que si $\alpha = 0$, alors G est dense dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que pour tout réel x et tout $\varepsilon > 0$, il existe $g \in G$ vérifiant $|x - g| \leqslant \varepsilon$.

Exercice 8 Décrire tous les endomorphismes de groupes de $(\mathbb{Z}, +)$. Déterminer ceux qui sont injectifs et ceux qui sont surjectifs.

Exercice 9 Soit G un groupe noté multiplicativement.
Pour $a \in G$, on note τ_a l'application de G vers G définie par $\tau_a : x \mapsto axa^{-1}$.

1) Soit $a \in G$, montrer que τ_a est un endomorphisme du groupe $(G, \times)$.

2) Vérifier que $\forall a, b \in G$, $\tau_a \circ \tau_b = \tau_{ab}$

3) Soit $a \in G$, montrer que τ_a est bijective et déterminer son application réciproque.

4) En déduire que $\mathcal{T} = \{\tau_a \mid a \in G\}$ muni du produit de composition est un groupe.

Exercice 10 Soit $(A, +, \times)$ un anneau. On dit que $x \in A$ est *nilpotent* s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x^n = 0$.

1) Montrer que si x est nilpotent alors $1 - x$ est inversible.

2) Montrer que si x et y sont nilpotents et commutent, alors xy et $x + y$ sont nilpotents.

3) Un corps admet-il des éléments nilpotents non nuls ?

Exercice 11 Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif. Soit a un élément de A. On appelle racine carrée de a dans A, tout élément x de A tel que $x^2 = a$.

1) Montrer que si A est intègre, alors tout élément de A admet au maximum 2 racines carrées.

2) Prenons maintenant $(A, +, \times) = (\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, \times)$. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 1$. Montrer que f admet une infinité de racines carrées.

Exercice 12 Soit $(A, +, \times)$ un anneau, soit $a \in A$. On appelle *commutant de a* la partie

$$C(a) = \{ \, x \in A \mid ax = xa \, \} \, .$$

On appelle *centre de A* la partie

$$Z = \{ \, x \in A \mid \forall a \in A, \; ax = xa \, \} \, .$$

Montrer que $C(a)$ et Z sont deux sous-anneaux de A.

Exercice 13 Soit $(A, +, \times)$ un anneau non nul, on considère

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & A \\ n & \longmapsto & n \cdot 1 = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n \text{ fois}} \end{array} \right. .$$

1) Montrer que φ est le seul morphisme d'anneaux de $\mathbb{Z}$ dans A.

2) Dans le cas où φ n'est pas injectif, montrer qu'il existe $c \in \mathbb{N}^*$ unique tel que $\mathrm{Ker}(\varphi) = c\mathbb{Z}$.

On se place dorénavant dans ce dernier cas, c est appelé *caractéristique* de l'anneau A, et A est supposé intègre et commutatif.

3) Montrer que c est un nombre premier.

4) Montrer que $x \mapsto x^c$ est un endomorphisme de l'anneau A.