


Feuille d'exercice n° 24 : **Applications linéaires**

Exercice 1 () Dire si les applications suivantes sont des applications linéaires.



- 1) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 2x^2$
- 2) $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 4x - 3$
- 3) $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x^2}$
- 4) $\varphi : \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto f(3/4)$
- 5) $\chi : \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto - \int_{1/2}^1 f(t) dt$
- 6) $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \sin(3x + 5y)$
- 7) $\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto xy$
- 8) $\rho : \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R}), f \mapsto \left(x \mapsto e^{-x} \int_0^1 f(t) dt \right)$

Exercice 2 () Calculer le noyau et l'image de $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$.



$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + 2y \\ -x - 4y + 2z \\ 2x + 5y - z \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 Pour chaque propriété suivante, donner un exemple d'endomorphisme f de \mathbb{R}^2 la vérifiant.

- 1) $\text{Ker}(f)$ est inclus strictement dans $\text{Im}(f)$.
- 2) $\text{Im}(f)$ est inclus strictement dans $\text{Ker}(f)$.
- 3) $\text{Ker}(f) = \text{Im}(f)$.
- 4) $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$ sont supplémentaires.

Exercice 4 ( ) Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$.


- 1) Montrer que $\text{Ker } f \subset \text{Ker } f^2$ et $\text{Im } f^2 \subset \text{Im } f$.
- 2) Montrer que $\text{Im } f \cap \text{Ker } f = \{0_E\} \iff \text{Ker } f^2 = \text{Ker } f$.
- 3) Montrer que $E = \text{Ker } f + \text{Im } f \iff \text{Im } f^2 = \text{Im } f$.

Exercice 5 ( )

- 1) Soit E, F et G trois \mathbb{K} -espaces vectoriels, soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Établir l'équivalence

$$g \circ f = 0_{\mathcal{L}(E, G)} \iff \text{Im } f \subset \text{Ker } g.$$

- 2) Soit f un endomorphisme d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E , vérifiant $f^2 + f - 2\text{Id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
 - a) Montrer que $(f - \text{Id}_E) \circ (f + 2\text{Id}_E) = (f + 2\text{Id}_E) \circ (f - \text{Id}_E) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
 - b) En déduire que $\text{Im}(f - \text{Id}_E) \subset \text{Ker}(f + 2\text{Id}_E)$ et $\text{Im}(f + 2\text{Id}_E) \subset \text{Ker}(f - \text{Id}_E)$.
 - c) Montrer que $E = \text{Ker}(f - \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(f + 2\text{Id}_E)$.

Exercice 6 () Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, où E est un \mathbb{K} -espace vectoriel. On suppose que

$$\forall x \in E, \exists \lambda \in \mathbb{K}, f(x) = \lambda x.$$

Montrer que

$$\exists \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, f(x) = \lambda x.$$

Exercice 7 (✎)

- 1) Montrer que l'application $\varphi : \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K} \times \mathbb{K}[X]$ est un isomorphisme.

$$P \mapsto (P(0), P')$$
- 2) En déduire que $\mathbb{K}[X]$ n'est pas de dimension finie.

Exercice 8 (✎) Soient E un espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E . Soit f une application linéaire de E dans lui-même.

- 1) Montrer que, si $F \subset f(F)$ alors $f(F) = F$.
- 2) Montrer que, si f est injective et $f(F) \subset F$ alors $f(F) = F$.

Exercice 9 Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer l'équivalence des trois propriétés suivantes.

- 1) $\text{Ker } f = \text{Ker } f^2$
- 2) $\text{Im } f = \text{Im } f^2$
- 3) $E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$

Exercice 10 Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, soit $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que $E = \text{Im } f + \text{Im } g = \text{Ker}(f) + \text{Ker}(g)$. Montrer que ces sommes sont directes.

Exercice 11 (✎) Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimensions finies et $u, v \in \mathcal{L}(E, F)$.

- 1) Montrer que $\text{rg}(u + v) \leq \text{rg}(u) + \text{rg}(v)$.
- 2) En déduire que $|\text{rg}(u) - \text{rg}(v)| \leq \text{rg}(u + v)$.

Exercice 12 – Suite exacte d'applications linéaires –

Soient E_0, E_1, \dots, E_n $n+1$ espaces vectoriels sur un même corps commutatif \mathbb{K} , de dimensions respectives $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$. On suppose qu'il existe n applications linéaires f_0, f_1, \dots, f_{n-1} telles que :

$$\forall k \in \{0, \dots, n-1\}, f_k \in \mathcal{L}(E_k, E_{k+1}).$$

et de plus :

- f_0 est injective;
- $\forall j \in \{1, \dots, n-1\}, \text{Im } f_{j-1} = \text{Ker}(f_j)$;
- f_{n-1} est surjective.

Montrer que

$$\sum_{j=0}^n (-1)^j \alpha_j = 0.$$

Exercice 13 Soit f l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ définie par $f : P \mapsto P + P' + P''$.

- 1) Montrer que f est injective. En déduire que f est bijective.
- 2) On appelle φ l'application de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ définie par $\varphi : P \mapsto P + P' + P''$. Montrer que φ est surjective puis bijective.

Exercice 14 Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension égale à n . Montrer que

$$n \text{ est pair} \Leftrightarrow \exists f \in \mathcal{L}(E) \quad \text{Im } f = \text{Ker } f.$$

Exercice 15 Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension finie.

- 1) Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un endomorphisme u tel que $\text{Ker}(u) = F$ et $\text{Im}(u) = G$.
- 2) Construire un tel endomorphisme u avec $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0 \}$ dans \mathbb{R}^3 et $G = \{ \lambda(2, -1, -1) \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$.

Exercice 16 (🚲) Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}$, soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\text{rg}(f^n) = \text{rg}(f^{n+1})$.

Exercice 17 (📐) Soient $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{K}$ et $H = \{ P \in \mathbb{K}_n[X] \mid P(\alpha) = 0 \}$. Montrer que H est un hyperplan de $\mathbb{K}_n[X]$ et en déterminer une base.

Exercice 18 (📐) Montrer que les formes linéaires sur \mathbb{K}^3 $\varphi : (x, y, z) \mapsto x + 2y + 3z$ et $\psi : (x, y, z) \mapsto x - 2y + 3z$ sont linéairement indépendantes.

Exercice 19 Quelle est la nature de l'application $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$?

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -5x & + & 2y \\ -12x & + & 5y \\ -4x & + & 2y & - & z \end{pmatrix}$$

Déterminer ses éléments caractéristiques.

Exercice 20 Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, soit $p, q \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il y a équivalence entre les deux assertions suivantes :

- 1) $p \circ q = p$ et $q \circ p = q$;
- 2) p et q sont deux projecteurs de même noyau.

Exercice 21 (📐) On pose $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z\}$ et $G = \text{Vect}(1, 1, 0)$.

- 1) Montrer que F et G sont supplémentaires dans \mathbb{R}^3 .
- 2) Déterminer une expression explicite de la projection de \mathbb{R}^3 sur F parallèlement à G .

Exercice 22 Soit p et q deux projecteurs d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E . Montrer que $p - q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = q$.

