Devoir à la maison n° 4

À rendre le 12 octobre

I. Complexe et géométrie

Ce sont trois questions indépendantes. Dans chacune d'elles, le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\mathcal{R} = (O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$.

1) Soit $ABCD$ un quadrilatère quelconque. On construit quatre points M, N, P, Q de façon que les triangles AMB, BNC, CPD et DQA soient rectangles isocèles directs (les angles droits étant en M, N, P, Q respectivement). Exprimer les affixes m, n, p, q des points M, N, P, Q en fonction des affixes a, b, c, d des points A, B, C, D. En déduire que les segments $[MP]$ et $[NQ]$ sont perpendiculaires et de même longueur. Faire un schéma.

2) Soient A, B, C, D quatre points distincts du plan, d'affixes a, b, c, d. On suppose que

$$a + ib = c + id \qquad \text{et} \qquad a + c = b + d\ .$$

Montrer que le quadrilatère $ABCD$ est un carré (*penser aux propriétés des diagonales* $[AC]$ *et* $[BD]$). Étudier la réciproque.

3) Soient a, b, c trois nombres complexes distincts, affixes des sommets A, B, C d'un triangle. Soit z un nombre complexe. On pose

$$f(z) = \frac{z-a}{b-c}\ ; \quad g(z) = \frac{z-b}{c-a}\ ; \quad h(z) = \frac{z-c}{a-b}\ .$$

Montrer que, si deux des trois expressions ci-dessus sont imaginaires pures, alors la troisième l'est aussi. Interprétation géométrique ?

II. Une suite complexe

Soit un réel $\theta \in]0, 2\pi[$. On définit la suite complexe $(z_n)_{n\geqslant 0}$ par son premier terme $z_0 = 1$ et la relation : $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = \mathrm{e}^{i\theta} z_n + \frac{1}{2}\left(1 - \mathrm{e}^{i\theta}\right)$.

1) Montrer que la suite $(w_n)_{n\geqslant 0}$, définie par $w_n = z_n - \dfrac{1}{2}$, est une suite géométrique.

2) En déduire directement, pour tout entier $n \geqslant 0$, une expression de w_n puis de z_n en fonction de n (et de θ).

3) Que vaut le module de z_n ?

4) Pour tout entier $n \geqslant 0$, on définit la somme $S_n(\theta) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} z_k$.

Montrer qu'on a $S_n(\theta) = \dfrac{n+1}{2} + \dfrac{\mathrm{e}^{i\frac{n\theta}{2}} \sin \frac{(n+1)\theta}{2}}{2 \sin \frac{\theta}{2}}$.

5) On pose, pour tout entier $n \geqslant 0$: $T_n(\theta) = \dfrac{S_n(\theta)}{n+1}$. Montrer que l'on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left| T_n(\theta) - \frac{1}{2} \right| = 0$. On dit que la suite complexe $(T_n(\theta))_{n\geqslant 0}$ converge vers le nombre $\dfrac{1}{2}$.

6) Un entier n étant fixé, déterminer la limite de $T_n(\theta)$, lorsque θ tend vers zéro : autrement dit calculer $\displaystyle\lim_{\theta\to 0} T_n(\theta)$.

7) Calculer alors et comparer les deux quantités : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\lim_{\theta\to 0} T_n(\theta) \right)$ et $\displaystyle\lim_{\theta\to 0} \left(\lim_{n\to+\infty} T_n(\theta) \right)$. Conclusion ?

— **FIN** —