

Feuille d'exercice n° 17 : **Dérivation**

Exercice 1 (📌) – **Limite double** –

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue en 0, soit $\ell \in \mathbb{R}$. Montrer que f est dérivable en 0 et $f'(0) = \ell$ si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall (h, k) \in]0, \delta]^2, \quad \left| \frac{f(h) - f(-k)}{h + k} - \ell \right| \leq \varepsilon.$$

Exercice 2 Soit f l'application : $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une

$$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$$

fonction polynomiale P_n telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$.

Exercice 3 (📎) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la fonction dérivée d'ordre n des fonctions suivantes.

1) $f : x \mapsto \sin x$

2) $g : x \mapsto \sin^2 x$

3) $h : x \mapsto \sin^3 x + \cos^3 x$

Exercice 4 Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer la dérivée n^e de chacune des fonctions suivantes.

1) $f : x \mapsto x^2 e^x$

2) $g : x \mapsto x^2(1+x)^n$

3) $h : x \mapsto \frac{x^2 + 1}{(x+1)^2}$

4) $\varphi : x \mapsto x^{n-1} \ln x$

Exercice 5 Déterminer toutes les applications $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Exercice 6 (📌) Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(a) = f(b) = 0$. Montrer que par tout point $(x_0, 0)$ avec $x_0 \in \mathbb{R} \setminus [a, b]$, il passe au moins une tangente à la courbe représentative de f .

Exercice 7 (📎) Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ de manière à ce que la fonction f définie sur \mathbb{R}_+ par :

$$f(x) = \sqrt{x} \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \text{ et } f(x) = ax^2 + bx + 1 \text{ sinon}$$

soit dérivable sur \mathbb{R}_+^* .

Exercice 8 – **Rolle à l'infini** –

Soit $a \in \mathbb{R}$, f une fonction continue et dérivable sur l'intervalle $[a, +\infty[$, vérifiant $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} f(a)$.

Montrer qu'il existe un élément c dans $]a, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 9 Soit $a, b \in \mathbb{R}$, avec $a < b$. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(a) = f(b) = 0$, $f'(a) > 0$ et $f'(b) > 0$.

Montrer qu'il existe $c_1, c_2, c_3 \in]a, b[$ tels que $c_1 < c_2 < c_3$ et $f'(c_1) = f'(c_2) = f'(c_3) = 0$.

Exercice 10 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé sur \mathbb{R} à racines simples, de degré supérieur ou égal à 2.

- 1) Montrer que P' est aussi scindé à racines simples réelles.
- 2) Montrer que le polynôme $P^2 + 1$ n'a que des racines simples dans \mathbb{C} .

Exercice 11 (🚲) – **Polynômes de Legendre** –

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f : t \mapsto (t^2 - 1)^n$.

- 1) Montrer que $\forall k \in \{0, \dots, n-1\}, f^{(k)}(1) = f^{(k)}(-1) = 0$.
- 2) Calculer $f^{(n)}(1)$ et $f^{(n)}(-1)$.
- 3) Montrer que $f^{(n)}$ s'annule au moins n fois dans l'intervalle $] -1, 1[$.

Exercice 12 (🚲) Étant donné α dans $]0, 1[$, montrer que pour tout entier naturel n non nul

$$\frac{\alpha}{(n+1)^{1-\alpha}} \leq (n+1)^\alpha - n^\alpha \leq \frac{\alpha}{n^{1-\alpha}}.$$

En déduire la limite de la suite de terme général $\sum_{p=1}^n \frac{1}{p^\alpha}$.

Exercice 13 – **Distance à la corde** –

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, avec $a < b$. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 .

- 1) On suppose que $f(a) = f(b) = 0$. Soit $c \in]a, b[$. Montrer qu'il existe $d \in]a, b[$ tel que :

$$f(c) = -\frac{(c-a)(b-c)}{2} f''(d).$$

Indication : considérer $g : t \mapsto f(t) + \lambda(t-a)(b-t)$ où λ est choisi de sorte que $g(c) = 0$.

- 2) On traite maintenant le cas général. Soit $c \in]a, b[$, montrer qu'il existe $d \in]a, b[$ tel que :

$$f(c) = \frac{b-c}{b-a} f(a) + \frac{c-a}{b-a} f(b) - \frac{(c-a)(b-c)}{2} f''(d).$$

Exercice 14 (📐) Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable, soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. On suppose que $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell$. Montrer que $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell$.

Exercice 15

- 1) Montrer que si une fonction f est lipschitzienne sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, alors, $|f|$ l'est aussi.
- 2) Montrer que la réciproque est fautive.
- 3) Montrer que la somme de deux fonctions lipschitziennes sur I est lipschitzienne sur I .


Exercice 16 La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est-elle lipschitzienne sur $]0, +\infty[$? sur $[1, +\infty[$?

Exercice 17 (📐) On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par : $u_0 \in [-1, +\infty[$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$.

- 1) Montrer que cette suite ne possède qu'une seule limite finie éventuelle α que l'on calculera.
- 2) Montrer que pour tout $n \geq 2$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} |u_n - \alpha|$. En déduire la convergence de la suite (u_n) .

Exercice 18 On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par $u_0 = \frac{3}{2}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{2}{u_n} + \ln(u_n)$.


- 1) Montrer que l'équation $x = \frac{2}{x} + \ln(x)$ possède une unique solution réelle L .
- 2) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[\frac{3}{2}, 2\right]$ puis, que pour tout $n \geq 0$, $|u_n - L| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2}{9}\right)^n$. Conclure.

Exercice 19 () Soit $p, q \in \mathbb{R}_+^*$ vérifiant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Montrer que pour

$$\forall a, b \in \mathbb{R}_+^*, \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab.$$

Exercice 20 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- 1) Montrer que si f est convexe et majorée, alors f est constante.
- 2) Est-ce toujours le cas si f est définie sur $[A, +\infty[$, où $A \in \mathbb{R}$?
- 3) Montrer que si f est deux fois dérivable, bornée et non constante, il existe $a, b \in \mathbb{R}$ vérifiant $f''(a)f''(b) < 0$.

Exercice 21 () Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$.

- 1) Montrer par récurrence que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ et k entier compris entre 0 et 2^n , on a :

$$f\left(\frac{k}{2^n}x + \left(1 - \frac{k}{2^n}\right)y\right) \leq \frac{k}{2^n}f(x) + \left(1 - \frac{k}{2^n}\right)f(y).$$
- 2) Montrer que tout réel est limite d'une suite de rationnels de la forme $\frac{q}{2^n}$, $q \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$, et en déduire que f est convexe.

