

Devoir à la maison n° 15

À rendre le 28 mars

Soit E un espace vectoriel réel, non réduit au vecteur nul. On utilisera les notations usuelles d'anneau pour $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$. Notamment, la notation uv désigne $u \circ v$.

On note \mathcal{H} l'ensemble des homothéties de E , et \mathcal{P} celui des projecteurs de E .

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on note alors A_λ l'ensemble des endomorphismes u de E vérifiant $u^2 = \lambda u$.

- 1) Quels sont les éléments de A_λ qui sont des automorphismes de E ?
- 2) On suppose ici que $\lambda = 0$, et $u \in \mathcal{L}(E)$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\text{Im}(u)$ et $\text{Ker}(u)$ pour que $u \in A_0$.

Dorénavant, nous supposons que $\lambda \neq 0$.

- 3) Soit $u \in A_\lambda$.
 - a) Déterminer $u(x)$ si $x \in \text{Im}(u)$.
 - b) Montrer que $\text{Im}(u)$ et $\text{Ker}(u)$ sont supplémentaires dans E .
 - c) Montrer que $\text{Im}(u) = \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E)$.
 - d) Que peut-on dire de $u - \lambda \text{Id}_E$? Dédurre de la question précédente que $\text{Im}(u - \lambda \text{Id}_E) = \text{Ker}(u)$.
- 4) Exemple : dans cette partie, on suppose que $E = \mathbb{R}^4$. On considère

$$u : \begin{cases} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} & \longmapsto \begin{pmatrix} -9x & -4y & -8z & -8t \\ 2x & -4y & -6y & -8t \\ 8x & +6y & +11z & +4t \\ -9x & -4y & -8z & \end{pmatrix} \end{cases}.$$

- a) Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ unique tel que $u \in A_\lambda$. Quel est ce λ ?
 - b) Déterminer une base de $\text{Ker}(u)$ ainsi qu'une base de $\text{Ker}(u - \lambda \text{Id})$.
 - c) Construire à partir de ces deux bases précédentes une base de \mathbb{R}^4 .
- 5)
 - a) Pour $u \in A_\lambda$, existe-t-il $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que αu est un projecteur?
 - b) En déduire une écriture explicite de A_λ , en fonction notamment de \mathcal{P} et de λ .

Dans la suite, nous considérerons $u, v \in A_\lambda$.

- 6) Montrer que si $uv + vu = 0_{\mathcal{L}(E)}$, alors $uv = vu = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
- 7) a) Montrer que $u + v \in A_\lambda$ si et seulement si $uv = vu = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
On se place alors dans le cas où $u + v \in A_\lambda$.
 - b) Montrer que $\text{Im}(u + v) = \text{Im}(u) + \text{Im}(v)$.
 - c) Montrer que $\text{Ker}(u + v) = \text{Ker}(u) \cap \text{Ker}(v)$.
- 8) Dans cette question, on suppose uniquement que $uv = vu$.
 - a) Montrer qu'il existe $\lambda' \in \mathbb{R}$ tel que $uv \in A_{\lambda'}$. Ce λ' est-il unique? Le déterminer le cas échéant.
 - b) Montrer aussi que

$$\text{Im}(uv) = \text{Im}(u) \cap \text{Im}(v) \text{ et } \text{Ker}(uv) = \text{Ker}(u) + \text{Ker}(v).$$

— **FIN** —