QCM n° 11

Un peu de calcul.

Échauffement n°1 Donner un équivalent de : $\operatorname{sh}(\sin x) - \sin(\operatorname{sh} x)$ en 0 $\sqrt[n]{n} - \sqrt[n+1]{n+1}$ en $+\infty$

Échauffement n°2 Calculer $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$.

Échauffement n°3 Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{2t}}{1+\mathrm{e}^{t}}\,\mathrm{d}t$.

QCM - cocher une case si la phrase qui suit est correcte.

Dérivabilité et analyse asymptotique

Question n°1 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \leqslant a, f(x) = f_1(x)$ et $\forall x > a, f(x) = f_2(x)$.

- ☐ Si $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x)$, alors f est continue sur $\mathbb{R}$.
- ☐ Si f est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{a\}$ et $\lim\limits_{x\to a^+} f_2'(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f_1'(x)$, alors f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
- ☐ Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}\backslash\{a\}$ et $\lim\limits_{x\to a^+} f_2'(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f_1'(x)$, alors f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
- ☐ Si f_1 est croissante sur $]-\infty, a]$ et f_2 est croissante sur $]a, +\infty[$, alors f est croissante sur $\mathbb{R}\backslash\{a\}$.

Question n°2

- ☐ $\dfrac{t\ln(t)}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{-2t}{3}$
- ☐ $\dfrac{t\ln(t)}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}} \underset{t\to +\infty}{\sim} \dfrac{\ln(t)}{t^2}$
- ☐ $\mathrm{e}^{-2t}\sqrt{1+x^2\mathrm{e}^{2t}} \underset{t\to +\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-2t}$
- ☐ $\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x}{2}$

Algèbre linéaire

Question n°3 Soit $E = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,;\ f \text{ est croissante sur } \mathbb{R}\}$.

- ☐ La fonction nulle appartient à E.
- ☐ E est stable par addition.
- ☐ E est stable par multiplication par un scalaire.
- ☐ E est un espace vectoriel.

Question n°4 Soit E un espace vectoriel et f un endomorphisme involutif de E, c.à.d. un endomorphisme non nul de E tel que $f^2 = Id$, où Id est l'identité de E.

☐ f est bijective.
☐ $\mathrm{Im}(Id + f) \cap \mathrm{Im}(Id - f) = E$.
☐ $E = \mathrm{Im}(Id + f) + \mathrm{Im}(Id - f)$.
☐ $\mathrm{Im}(Id + f)$ et $\mathrm{Im}(Id - f)$ ne sont pas supplémentaires dans E.

Question n°5 Soit E un espace vectoriel et f un projecteur de E, c.à.d. un endomorphisme de E tel que $f^2 = f$. On notera Id l'identité de E.

☐ f est injective.
☐ $Id - f$ est un projecteur de E.
☐ $E = \ker f \oplus \mathrm{Im}\, f$.
☐ $\mathrm{Im}\, f = \ker(Id - f)$.

Question n°6 Soit n un entier ≥ 3 et $E = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,;\, x_1 = x_2 = \cdots = x_n\}$.

☐ $\dim E = n - 1$.
☐ $\dim E = n$.
☐ $\dim E = 1$.
☐ $E = \mathbb{R}$.

Question n°7 Soit E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimensions finies et f une application linéaire de E dans F. On pose $\dim E = n$ et $\dim F = m$.

☐ Si f est injective, alors $n \leq m$.
☐ Si $n \leq m$, alors f est injective.
☐ Si f est surjective, alors $n \geq m$.
☐ Si $n \geq m$, alors f est surjective.

Question n°8 Dans $\mathbb{R}_3[X]$, l'espace des polynômes à coefficients réels de degré ≤ 3, on considère les deux sous-espaces vectoriels :

$$E = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \,;\, P(0) = P(1) = 0\} \quad \text{et} \quad F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \,;\, P'(0) = P''(0) = 0\},$$

où P' (resp. P'') est la dérivée première (resp. seconde) de P.

☐ $\dim E = 3$.
☐ $\dim F = 1$.
☐ $E + F = \mathbb{R}_3[X]$.
☐ E et F sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$.

Intégration

Question n°9 Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Notons $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

☐ F est définie sur $[a, b]$.
☐ F est continue sur $[a, b]$.
☐ F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$.
☐ F est dérivable sur $[a, b]$ et $\forall x \in [a, b],\ F'(x) = f(x) - f(a)$.

Question n°10

☐ Pour tout entier n non nul, $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n+1}$.

☐ Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, donc par encadrement $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}\mathrm{d}x = 0$.

☐ Les fonctions $x \longmapsto \dfrac{x^n}{n}$ et $x \longmapsto \dfrac{x}{(1+x)}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$.

Donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}}{n(x+1)}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^n}{n(1+x)^2}\mathrm{d}x$.

☐ Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant (-1)^{n+1} \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}\mathrm{d}x \leqslant \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$.

☐ Alors $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2}\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$.

Probabilités

Question n°11 Soit $\mathscr{E}$ une expérience aléatoire et Ω l'univers qui lui a été associé. Soient A et B deux événements de probabilités respectives 0.5 et 0.6.

☐ A est inclus dans B car $\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$.

☐ A et B ne peuvent pas être incompatibles car $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) = 1.1 > 1$.

☐ Il est impossible que A et B soient indépendants si A implique B.

☐ Ω est indépendant de tout autre événement.

☐ Deux événements quelconques (mais non impossibles) ne peuvent être simultanément incompatibles et indépendants.

Supposons maintenant que $\mathbb{P}(A \cup B) = 4/5$. A et B sont-ils indépendants ?

☐ Oui.

☐ Non.

☐ On ne peut pas se prononcer car on ne dispose pas de $\mathbb{P}(A \cap B)$.

☐ On ne peut pas se prononcer car on ne dispose pas de détails sur l'expérience, sur Ω, A et B.

Question n°12 En France, on considère la population $\mathscr{P}$ des candidats au permis de conduire qui essaient de l'obtenir une fois, puis une seconde fois si la première tentative échoue. Parmi eux, un candidat sur trois l'obtient du premier coup, et parmi ceux qui ne l'ont pas eu du premier coup, 30% d'entre eux l'obtiennent à la seconde tentative. On considère l'expérience aléatoire consistant à sélectionner au hasard une personne issue de cette population $\mathscr{P}$.

Dans ce cadre, le(s)quel(s) des 2 espaces Ω ci-dessous peu(ven)t être considéré(s) pour cette expérience ?

☐ Seulement $\Omega = \{$ permis obtenu , permis non obtenu $\}$.

☐ Seulement $\Omega = \{$ il y a eu une tentative , il y a eu deux tentatives $\}$.

☐ Aucun des deux n'est un univers adéquat.

☐ Les deux peuvent convenir.

On suppose désormais qu'un espace Ω convenable a été choisi (mais on ne le détaille pas ici ; il permet en tout cas de définir les événements adéquats des questions suivantes). La probabilité d'obtenir le permis au plus tard à la seconde tentative vaut :

☐ 1/2

☐ 2/3

☐ Environ 53%
☐ Environ 23%

Peut-on définir les événements $A =$ « la seconde tentative a échoué sachant que la première a échoué » et $B =$ « la première tentative a échoué et la seconde a réussi » ?

☐ Oui pour A, oui pour B.
☐ Oui pour A, non pour B.
☐ Non pour A, oui pour B.
☐ Non pour A, non pour B.

Que vaut la probabilité d'avoir tenté l'épreuve une seconde fois sachant qu'on a obtenu le permis au final ?

☐ Zéro.
☐ $0,375$
☐ $0,1875$
☐ Une autre valeur que les réponses précédentes.
☐ La question n'a pas de sens.

Les événements $R =$ « le permis est obtenu à l'issue de l'expérience » et $T =$ « Une deuxième tentative a eu lieu » sont-ils :

☐ Indépendants.
☐ Incompatibles.
☐ Indépendants et incompatibles.
☐ Ni l'un ni l'autre.

Question n°13 Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\{0, 1, 2\}$ et de loi donnée par

$$\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X = 2) = a \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X = 1) = 1 - 2a$$

où a est une constante réelle.

Quelles valeurs la constante a a-t-elle le droit de prendre ?

☐ Toutes les valeurs de $]0, 1[$ car $\mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) = 1$.
☐ Seulement la valeur $a = 1/4$.
☐ Toutes les valeurs de $]0, 1/2[$.
☐ Une autre réponse que les précédentes.

Que valent l'espérance et la variance de X ?

☐ $\mathbb{E}(X) = 1$ et $\text{Var}(X) = 1 + 2a$.
☐ $\mathbb{E}(X) = 2a$ et $\text{Var}(X) = 4a^2$.
☐ $\mathbb{E}(X) = 1$ et $\text{Var}(X) = 2a$.

On pose $Y = 4 - 2X$. *Sans déterminer la loi de Y*, peut-on calculer l'espérance et l'écart-type de Y ?

☐ Oui, ils valent respectivement 2 et $\sqrt{8a}$.
☐ Oui, ils valent respectivement 2 et $\sqrt{4(1 - a)}$.
☐ Oui, ils valent respectivement $4(1 - a)$ et $4a$.
☐ Oui, mais aucune des propositions précédentes n'est correcte.
☐ Non, il nous faut nécessairement la loi pour calculer ces caractéristiques de Y.