DS n°10 : Fiche de calculs

Durée : 60 minutes, calculatrices et documents interdits

Nom et prénom : | | Note : | |

Porter directement les réponses sur la feuille, sans justification.

Déterminants

Soit

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 8 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Écrire σ comme produit de cycles à supports disjoints et déterminer sa signature.

$$\sigma = \boxed{} \quad (1) \qquad \varepsilon(\sigma) = \boxed{} \quad (2)$$

Calculer sous forme factorisée les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = \boxed{} \qquad (3)$$

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix} = \boxed{} \qquad (4)$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les déterminants $n \times n$ suivants.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} = \boxed{} \qquad (5)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & n & n-1 & \dots & 2 \\ 2 & 1 & \ddots & & 3 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ n-1 & & \ddots & 1 & n \\ n & n-1 & \dots & 2 & 1 \end{vmatrix} = \boxed{} \qquad (6)$$

Déterminer l'ensemble des paramètres $\lambda \in \mathbb{C}$ pour lesquels $\begin{pmatrix} \lambda-2 & 1 & -2 \\ -1 & \lambda & -2 \\ -1 & 1 & \lambda-3 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible.

$$\boxed{} \tag{7}$$

Sommes

Déterminer la nature des séries suivantes (on écrira **CV** ou **DIV**), dont le terme général vaut

$$u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) : \boxed{} \tag{8}$$

$$\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n} : \boxed{} \tag{9}$$

$$\frac{1! + 2! + \cdots + n!}{(n+2)!} : \boxed{} \tag{10}$$

Calculer la somme et un équivalent

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n^2+n)(n+2)} = \boxed{} \tag{11}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \sim \boxed{} \tag{12}$$

Espaces préhilbertiens réels

Soit F un sev de $\mathbb{R}^4$, muni du produit scalaire canonique, d'équations : $\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x+2y+3z+4t=0 \end{cases}$

Déterminer la matrice M, dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$, de la projection orthogonale p sur F :

$$M = \boxed{} \tag{13}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique $(M, N) \longmapsto (M \mid N) = \operatorname{tr}\left(M^\top N\right)$. On admet que $\mathbf{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathbf{A}_n(\mathbb{R})$ sont deux sev supplémentaires orthogonaux dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$. Pour toute $M \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$:

$$d\left(M, \mathbf{S}_n(\mathbb{R})\right) = \boxed{} \tag{14}$$

— **FIN** —