Devoir surveillé n° 5 - Remarques

Barème.

- Calculs : chaque question sur 2 points, total sur 38 points, ramené sur 5 points.
- Problème : v1, exercice de TD sur 8 points, chaque question sur 4 points, total sur 96 points ; v2, chaque question sur 4 points, total sur 112 points ; pour les deux versions, le tout ramené sur 15 points.

Statistiques descriptives.

	Calculs	v1	v2	Note finale sur 20
Note maximale	36	62	100	34
Note minimale	10	18	8	$5,5$
Moyenne	$\approx 21,33$	≈ 35	$\approx 31,15$	$\approx 11,24$
Écart-type	$\approx 5,06$	$\approx 10,42$	$\approx 18,86$	$\approx 4,66$

Remarques générales.

Les phrases « $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, f est décroissante » ou « $\forall n \in \mathbb{N}$, (u_n) est croissante » sont parfaitement absurdes. « f est décroissante » ne dépend pas de x, donc que signifie ce $\forall x$ avant ? On écrira « f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ ». Pour la seconde phrase, on écrira « (u_n) est croissante » et c'est tout.
J'ai encore vu quelques « $f(x)$ est continue » : c'est une horreur.

Les formulations : « soit $f(x) \in \mathbb{R}$ », « $\forall \frac{\varepsilon}{2} \in \mathbb{R}_+^*$ », « $\exists x^{-1} \in G$ »... n'ont aucun sens ! Après soit, ou avant $\forall$ et $\exists$, on met un nom de variable et c'est tout, on ne met pas une expression. Dans ces exemples, qui sont x, ε ? Ils ne sont définis nulle part.

La v2 était évidemment plus difficile. À commencer par l'énoncé : beaucoup n'ont pas compris toutes les définitions qu'il donnait. De manière générale, beaucoup d'élèves sont passés à côté de cette v2 à cause de ces problèmes de compréhension, et parce que leurs réponses sont très floues, pleines de détours et peu rigoureuses. Attachez-vous à bien comprendre l'énoncé en détail, à bien identifier dans chaque question quelles sont les hypothèses et ce qu'il faut montrer. Ensuite, appliquez les méthodes habituelles et allez droit au but. Si vous commencez à rédiger des phrases entières en français pour « expliquer » ce qu'il se passe : stop ! C'est toujours du blabla, du charabia, ça ne rapporte pas de points.

v1, I. Un exercice vu en TD.

L'erreur à ne surtout pas faire dans cet exercice : « $S_{2n} = \sum_{k=0}^{n} u_{2k}$ ». En effet, par exemple pour $n = 3$: $S_{2\times 3} = S_6 = u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - u_5 + u_6$, qui n'a absolument rien à voir avec $\sum_{k=0}^{3} u_{2k} = u_0 + u_2 + u_4 + u_6$.
L'autre erreur : « (S_n) admet deux sous-suites convergeant vers une même limite, donc elle converge vers cette même limite ». Avec ce raisonnement, $(-1)^{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et $(-1)^{4n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc $(-1)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

v1, II. Une suite récurrente.

1.a. et 3.a. Il est tout à fait inutile de dériver ces fonctions pour détermine leurs variations : f est un produit de deux fonctions strictement décroissantes et strictement positives, donc elle est strictement croissante. Et g est une somme de deux fonctions strictement décroissante, donc elle est strictement décroissante. Ayez le réflexe de commencer par regarder si ce genre de résultat ne peut pas s'appliquer.

1.b. La stabilité de $\mathbb{R}_+^*$ par f suffisait à répondre à la question. Pensez à utiliser les résultats sur les intervalles stables, ils sont très efficaces.

2. Les programmes à eux seuls ne donnaient pas tant de résultats que ça. Mais ils éclairent des résultats mathématiques théoriques. Lorsque l'on sait que f est décroissante, on peut en déduire que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones de sens contraires, et là les programmes donnent des informations intéressantes. Sans cette observation théorique, on peut raconter à peu près n'importe quoi.

4.b. Là aussi, la réponse devait commencer par : f est décroissante donc (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones de sens contraires.

5.b. Il fallait distinguer les cas $x = 0$ et $x > 0$.

v1, III. Les quaternions de Hamilton.

1. Il y avait beaucoup de points à mentionner, il faut connaître la liste et ne pas en oublier. Il en a souvent manqué, et ils étaient parfois donnés sans queue ni tête. Par exemple parler d'inverse avant d'avoir justifier qu'il y a un neutre n'a pas de sens. Et la première chose à dire est que ces lois sont des lci, les autres propriétés n'ayant là non plus pas de sens sans cela.
Attention, le raisonnement suivant est faux : soit $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. Alors $(a, b) \times (c, d) = (a, b) \Rightarrow ac - bd = a$ et $ad + bc = b \Rightarrow c = 1, d = 0$. En effet, si $a = b = 0$ et $c = d = 9$, on a $(a, b) \times (c, d) = (a, b)$ mais pas $c = 1, d = 0$.

2. Que d'erreurs de calculs. C'était une question bête et méchante, pas passionnante mais avec des points à ramasser facilement.

4.a. Vous êtes beaucoup trop nombreux à vous focaliser sur les aspects endo, iso, auto, et à totalement oublier que tout d'abord, σ doit être un morphisme !

4.c. Un bon nombre d'élèves a montré que $\sigma(A \times B) = \sigma(A) \times \sigma(B)$. Non seulement cela prouve qu'ils ont mal lu l'énoncé, mais en plus ils avaient tellement envie d'y croire qu'ils ont réussi à démontrer un résultat faux : cela fait très mauvaise impression.

v2, I. Suites de Cauchy.

1.a. Lu dans un grand nombre de copies : « on a : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists n_1 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_1,\ |u_n| \leqslant \varepsilon$, et de même $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists n_2 \in \mathbb{N},\ \forall m \geqslant n_2,\ |u_m| \leqslant \varepsilon$ ». C'est inquiétant : vous n'avez toujours pas compris ce qu'est une variable muette. Ces deux phrases sont absolument identiques. Ces deux phrases sont absolument identiques. Ça fait bizarre de lire deux fois la même phrase, non ? et surtout ça ne sert à rien. Alors on n'écrit que la 1ère phrase, et si on prend deux entiers n et m supérieurs à n_1 alors on peut directement affirmer que $|u_n| \leqslant \varepsilon$ ET $|u_m| \leqslant \varepsilon$.

1.c. Un exemple typique d'à peu près dans les copies. Pour montrer qu'une suite n'est pas de Cauchy, il faut montrer que : $\exists \varepsilon > 0,\ \forall n_0 \in \mathbb{N},\ \exists n \geqslant n_0, \exists m \geqslant n_0,\ |u_n - u_m| > \varepsilon$. Donc, prendre $\varepsilon = 1$ et affirmer que pour tout n, m, si n et m n'ont pas la même parité alors $|u_n - u_m| = 2 > 1$ ne répond pas à la question : où est n_0 ? Il ne s'agit pas seulement de trouver n et m tels que $|u_n - u_m| > 1$, il faut pouvoir les prendre arbitrairement grands.

4.a. On vous demande de montrer qu'un sup existe ? Aucun problème, il y a UNE SEULE solution : le théorème de la borne sup. Et il a deux hypothèses : non vide et majoré. Donc vous prenez votre ensemble, vous montrez qu'il n'est pas vide, et qu'il est majoré, et vous concluez. Facile non ? Pourtant je n'ai pas lu beaucoup de démonstrations claires et concises. Souvent, les mots sont là, les arguments aussi, mais dans le plus grand fouillis.

4.b. Là encore, il ne s'agit pas de montrer que la suite prend les valeurs 1 et -1 : il faut montrer que si on fixe un rang n, après ce rang la suite atteint ces deux valeurs.

8. Distinguez deux cas : $m \geqslant n$ ou $m < n$. Ne trainez pas l'expression $\min(n, m)$ dans les calculs, c'est indigeste.

9. $\dfrac{1}{2^{\min(n,m)}} \underset{n\to+\infty,\ m\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ n'a aucun sens, $\dfrac{1}{2^{\min(n,m)}} \longrightarrow 0$ encore moins. On ne connait pas les limites doubles quand deux variables tendent vers $+\infty$.

v2, II. Sous-groupes distingués.

Attention : $gH = Hg$ ne signifie pas que pour tout $h \in H$, $gh = hg$. Cette erreur a déjà été soulignée dans l'exercice 6, TD 13 (qui d'ailleurs était contenu dans ce DS). Mais beaucoup ont utilisé ce faux résultat dans un bon nombre de questions, ce qui leur a coûté très cher.
Dans la question 2.b., on disait bien « en déduire » : donc utilisez la question précédente, au lieu de tout refaire. Il fallait remarquer que $C_G(X) = \bigcap_{x \in X} C_G(x)$: et surtout pas une réunion. Attention, une réunion de sous-groupes n'est en général pas un sous-groupe (cf. ex. 3 TD 13).