Devoir à la maison n° 10

À rendre le 11 janvier

On définit l'ensemble des *entiers de Gauss* : $\mathbb{Z}[i] = \{ a + ib \mid a, b \in \mathbb{Z} \}$.
Pour $a, b \in \mathbb{Z}$, on définit $N(a+ib) = a^2 + b^2$.

1) Montrer que $(\mathbb{Z}[i], +, \times)$ est un anneau commutatif.

On rappelle qu'un élément $z \in \mathbb{Z}[i]$ est inversible s'il existe $y \in \mathbb{Z}[i]$ tel que $zy = 1$.

2) **a)** Montrer que, pour tout $x, y \in \mathbb{Z}[i]$, $N(xy) = N(x)N(y)$.

b) En déduire que, pour tout $z \in \mathbb{Z}[i]$, z est inversible si et seulement si $N(z) = 1$.

c) Quels sont les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i]$?

On rappelle aussi que, si $x, y \in \mathbb{Z}[i]$, alors x divise y (ou est un diviseur de y) s'il existe $z \in \mathbb{Z}[i]$ vérifiant $y = zx$. On appelle *élément irréductible* de $\mathbb{Z}[i]$ tout élément non inversible de $\mathbb{Z}[i]$ qui ne peut s'écrire comme produit de deux éléments non inversibles de $\mathbb{Z}[i]$.

3) **a)** Soit $z \in \mathbb{Z}[i]$, supposons que $N(z)$ est un nombre premier. Montrer que z est irréductible.

b) La réciproque est elle vraie ?

c) Soit p un nombre premier. Montrer que p est irréductible dans $\mathbb{Z}[i]$ si et seulement si p ne s'écrit pas comme la somme de carrés de deux entiers.

d) Déterminer l'ensemble des diviseurs de $1 - 3i$.

4) Division euclidienne sur $\mathbb{Z}[i]$.

a) Montrer que tout nombre réel est à distance au plus $\dfrac{1}{2}$ d'un entier.

En déduire que si $z \in \mathbb{C}$, on peut trouver $q \in \mathbb{Z}[i]$ vérifiant $|z - q| < 1$.

b) En déduire que, pour tout $a, b \in \mathbb{Z}[i]$, avec $b \neq 0$, il existe $q, r \in \mathbb{Z}[i]$ vérifiant $a = bq + r$ ainsi que $N(r) < N(b)$.

Indication : On pourra considérer $\dfrac{a}{b}$.

c) Y a-t-il unicité de cette écriture ?

— **FIN** —