Feuille d'exercice n° 29 : Espaces euclidiens

Exercice 1 ($^{\circ}$) Sur $\mathbb{R}_3[X]$, on considère les formes bilinéaires suivantes. Dire lesquelles sont des produits scalaires.

1)
$$\varphi(P,Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t) dt$$

2)
$$\chi(P,Q) = \int_{-1}^{1} (P'(t)Q(t) + P(t)Q'(t)) dt$$

3)
$$\psi(P,Q) = \int_{-1}^{1} P'(t)Q'(t) dt + P(0)Q(0).$$

Exercice 2 () À deux polynômes $P = a_0 + a_1X + a_2X^2$ et $Q = b_0 + b_1X + b_2X^2$ de $\mathbb{R}_2[X]$, on associe

$$\langle P, Q \rangle = (a_0 + a_1)b_0 + (a_0 + 3a_1)b_1 + 3a_2b_2.$$

Montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire.

Exercice 3 (\varnothing) Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et $\|\cdot\|$ la norme associée. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $v_1, \ldots, v_n \in E$.

Montrer l'inégalité :
$$\left\|\sum_{i=1}^n v_i\right\|^2 \leqslant n \sum_{i=1}^n \|v_i\|^2$$
.

Exercice 4 ($^{\circ}$) Soit a < b deux réels.

1) Soient f et g deux applications continues de [a,b] dans \mathbb{R} . Montrer que :

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t\int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t.$$

Étudier le cas d'égalité.

2) Soit f une application continue de [a,b] dans \mathbb{R} . Montrer que :

$$\left(\int_a^b f(t) \, \mathrm{d}t\right)^2 \leqslant (b-a) \int_a^b f^2(t) \, \mathrm{d}t.$$

Étudier le cas d'égalité.

Exercice 5 (\mathbb{A}) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- 1) Montrer que, sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'application $(A, B) \to \operatorname{tr}(A^{\top}B)$ est un produit scalaire.
- $\mathbf{2}$) Soit N la norme associée à ce produit scalaire (on l'appelle norme de Frobenius), montrer que :

$$\forall (A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), N(AB) \leqslant N(A)N(B).$$

3) Montrer que :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), |\operatorname{tr}(A)| \leq \sqrt{n}N(A).$$

Exercice 6 Soit E un espace euclidien, et $(e_1,...,e_n)$ des vecteurs unitaires vérifiant : $\forall x \in E$, $||x||^2 = \sum_{i=1}^n (x|e_i)^2$.

- 1) Montrer que $(e_1, ..., e_n)$ est une famille orthogonale.
- 2) Montrer que $(e_1, ..., e_n)$ est une base orthonormale.

Remarque : on ne suppose pas que la dimension de l'espace est n.

Exercice 7 () \mathbb{R}^3 est muni de sa structure canonique d'espace vectoriel euclidien. Vérifier que les vecteurs $e_1 = (1,0,1), e_2 = (1,0,2)$ et $e_3 = (1,1,1)$ forment une base de \mathbb{R}^3 et en déterminer l'orthonormalisée de Gram-Schmidt.

Exercice 8

- 1) Montrer qu'un parallélogramme est un rectangle si et seulement si ses diagonales sont de même longueur.
- 2) Montrer qu'un parallélogramme est un losange si et seulement si ses diagonales sont orthogonales.

Exercice 9 () Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer les égalités suivantes.

1)
$$F \subset G \Rightarrow G^{\perp} \subset F^{\perp}$$
 2) $(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$ 3) $(F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$

2)
$$(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$$

3)
$$(F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$$

Exercice 10 (%)

On munit $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ du produit scalaire usuel : $\langle f,g\rangle=\int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$. Déterminer F^\perp , avec $F = \{ f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) \mid f(0) = 0 \}$. Que peut-on en conclure? Indication : si $f \in F^{\perp}$, on pourra s'intéresser à la fonction $t \mapsto tf(t)$.

Exercice 11 (\nearrow) On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire : $(P,Q) \to \int_0^1 P(t)Q(t) dt$. Existe t-il $A \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $\forall P \in \mathbb{R}[X], (P|A) = P(0)$?

Soit $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien et $p\in\mathcal{L}(E)$ un projecteur. Montrer que p est Exercice 12 orthogonal (c'est-à-dire Ker $(p) \perp \text{Im}(p)$) si et seulement si : $\forall x \in E : ||p(x)|| \leq ||x||$.

Indication : pour montrer une des implications, avec $k \in \text{Ker } p$ et $i \in \text{Im } p$, on pourra considérer le vecteur $i + \lambda k$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 13 Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension supérieure ou égale à 2. Soit x et $y \in E$. Montrer les propriétés suivantes.

- 1) Si ||x|| = ||y||, alors il existe un hyperplan H de E tel que y = s(x) où s est la symétrie orthogonale par rapport à H.
- 2) Si $\langle x,y\rangle = \|y\|^2$, alors il existe un hyperplan H de E tel que y=p(x) où p est la projection orthogonale sur H.
- 3) Les hyperplans trouvés précédemment sont-ils uniques ?

Exercice 14 Déterminer
$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\int_0^1 (e^x - (ax+b))^2 dx$$
.

Exercice 15 (\circlearrowleft) Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. À tout couple (P,Q) de E, on associe $\langle P,Q \rangle = \int_0^{\pi} P(\cos t)Q(\cos t)dt$. On appelle k^e polynôme de Tchebychev le polynôme défini par :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \ P_k(\cos \theta) = \cos(k\theta).$$

- 1) Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur E.
- 2) Montrer que les polynômes de Tchebychev P_0, \ldots, P_n constituent une base orthogonale de E. Bonus : si cela n'est pas clair, montrez l'existence et l'unicité de ces polynômes, déterminer le degré et le coefficient dominant de chacun.

Exercice 16 Soit E un espace euclidien, f et g deux endomorphismes de E qui commutent. On suppose que les matrices de f et de g dans une base orthonormée sont respectivement symétriques et antisymétriques.

Montrer que $\forall u \in E, \langle f(u), g(u) \rangle = 0$, puis que $\forall u \in E, ||(f-g)(u)|| = ||(f+g)(u)||$.

Exercice 17 ($^{\circ}$) Soit $E = \mathbb{R}^3$, muni de sa structure euclidienne usuelle, soit $\mathscr{C} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 . Déterminer les matrices dans la base \mathscr{C} des transformations suivantes.

- 1) La symétrie et la projection orthogonale par rapport au plan d'équation x 2y + 3z = 0.
- 2) La symétrie et la projection orthogonale par rapport à la droite engendrée par le vecteur $e_1 4e_3$.

