Feuille d'exercice n° 27 : **Déterminants**

Exercice 1 (✎) On pose $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 7 & 1 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ et $\theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 2 & 7 & 6 & 5 & 3 \end{pmatrix}$. Écrire $\sigma\theta$ et σ^{-1} sous forme de produits de cycles de supports disjoints et déterminer les signatures de ces permutations.

Exercice 2 (✎) Soit $s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 10 & 6 & 4 & 2 & 1 & 7 & 5 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

Décomposer s en produit de cycles à supports disjoints, puis en produit de transpositions. Donner la signature de s.

Exercice 3 (✎) Écrire la permutation $\tau = (1,2)(2,4,6,5)(1,3,7)(2,5,4)(3,5,6,1)(2,5)(1,4,6)$ sous forme d'un produit de cycles de supports disjoints. Quelle est la signature de τ ?

Exercice 4 (✎) Calculer la signature des permutations suivantes.

1) $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 4 & 2 & 1 & 6 & 8 & 7 & 3 \end{pmatrix}$ **2)** $g = (1,3,4)(2,4,3,1)(2,3)$ **3)** $h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$

Exercice 5

1) Montrer que les transpositions $(1 \quad i)$ (pour $i \in [\![2, n]\!]$) engendrent le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$.

2) Montrer que les transpositions $(i \quad i+1)$ (pour $i \in [\![1, n-1]\!]$) engendrent le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$.

3) Montrer que les cycles de longueur 3 engendrent $\mathfrak{A}_n$.

4) Montrer que les cycles de la forme $(1\ i\ j)$ avec $i, j \in [\![2, n]\!]$, $i \neq j$, engendrent $\mathfrak{A}_n$.

5) Montrer que les cycles de la forme $(1\ 2\ j)$ avec $j \in [\![3, n]\!]$, engendrent $\mathfrak{A}_n$.

Exercice 6 (✎) Dans chacun des cas ci-dessous, dire si l'application de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ considérée est multilinéaire.

1) $\varphi : \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \right) \longmapsto x_1 + y_2 + z_3$

2) $\chi : \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \right) \longmapsto x_1y_3 + y_2z_1 + z_3x_2$

3) $\psi : \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \right) \longmapsto x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2$

4) $\omega : \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \right) \longmapsto x_1x_2x_3 + y_1y_2y_3 + z_1z_2z_3$

5) $\alpha : \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \right) \longmapsto x_1y_1z_1 + x_2y_2z_2 + x_3y_3z_3$

6) $\beta : \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \right) \longmapsto (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)(z_1 + z_3)$

7) $\gamma : \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \right) \longmapsto (x_1 + 2x_2)(z_1 + z_3)$

Exercice 7 (✎) Soit $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ anti-symétrique. Calculer $\det(A)$. Ce résultat vaut-il encore pour $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$?

Généraliser ceci.

Exercice 8 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que $B = P^{-1}AP$. Montrer qu'il existe $Q \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $B = Q^{-1}AQ$.

Indice : avec $P = R + iS$, tel que $R, S \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on pourra montrer que $RB = AR$, $SB = AS$ et en déduire que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $(R + tS)B = A(R + tS)$.

Exercice 9 ( ) **– Déterminant circulant –**
Soit $(a,b,c) \in (\mathbb{K})^3$. On note $j = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}}$, et l'on considère les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \qquad \text{et } V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}.$$

Calculer le produit AV, puis $\det(V)$ et $\det(AV)$, et en déduire $\det(A)$.

Exercice 10 Pour quelles valeurs de $k \in \mathbb{K}$ les matrices suivantes sont-elles inversibles ?

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & k \end{pmatrix}$ **2)** $B = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 2 & -1 & k \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 11 ( ) Calculer les déterminants suivants.

1) $\alpha = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ **2)** $\beta = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ **3)** $\gamma = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 6 & 8 & 0 \end{vmatrix}$

Exercice 12 Montrer que : $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}$ est divisible par $(x-1)^3$.

Exercice 13 On note a, b, c [...] des réels. Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} a & x & y & z \\ b & x & y & z \\ c & x' & y' & z' \\ d & x' & y' & z' \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1+a & b & a & b \\ b & 1+a & b & a \\ a & b & 1+a & b \\ b & a & b & 1+a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & a & a^2 & b+c+d \\ a & b & b^2 & c+d+a \\ a & c & c^2 & d+a+b \\ a & d & d^2 & a+b+c \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ a & 0 & a & 0 & 3 \\ b & a & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & a \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a+b+c & b & b & b \\ c & a+b+c & b & b \\ c & c & a+b+c & b \\ c & c & c & a+b+c \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} p & 1 & & 0 \\ 1 & p & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & 1 & p \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & \dots & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 14 ( ) Calculer les déterminants suivants, d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$.

1) $A_n = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & & & 0 \\ x & 1+x^2 & x & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & x & 1+x^2 & x \\ 0 & & & x & 1+x^2 \end{vmatrix}$ **2)** $B_n = \begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1 & \dots & \dots & a_1 \\ a_2 & a_2+b_2 & a_2 & \dots & a_2 \\ a_3 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots \\ a_n & \dots & \dots & a_n & a_n+b_n \end{vmatrix}$

Exercice 15 Soit $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Calculer les déterminants des matrices suivantes.

1) $\Big(\sin(a_i + a_j)\Big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ **2)** $\Big(\cos\left((i-1)a_j\right)\Big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$

Exercice 16 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [\![0, n]\!]$. On définit la matrice $A_{n,p}$ de $\mathscr{M}_{p+1}(\mathbb{R})$ par :

$$A_{n,p} = \begin{pmatrix} 1 & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \cdots & \binom{n}{p} \\ 1 & \binom{n+1}{1} & \binom{n+1}{2} & \cdots & \binom{n+1}{p} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & \binom{n+p}{1} & \binom{n+p}{2} & \cdots & \binom{n+p}{p} \end{pmatrix}.$$

Calculer $\det A_{n,p}$.

Exercice 17 ( ) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique (notée $\mathscr{C}$) est $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1) On appelle valeur propre de f tout scalaire λ pour lequel $f - \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$ n'est pas injective. Déterminer toutes les valeurs propres de f en calculant un déterminant. On notera λ_1, λ_2 et λ_3 ces valeurs propres, avec $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.

2) Si λ est une valeur propre de f, on appelle sous-espace propre de f associé à λ le noyau de $f - \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$. Déterminer les trois sous-espaces propres de f. On appellera E_i le sous-espace propre associé à λ_i, et on le notera $E_i = \mathrm{Vect}(v_i)$, pour un vecteur v_i à déterminer.

3) Écrire la matrice de f dans la base $\mathscr{B} = (v_1, v_2, v_3)$. De quelle forme est-elle ?