

DS n°6 : Fiche de calculs

Durée : 60 minutes, calculatrices et documents interdits

Nom et prénom :

Note :

Porter directement les réponses sur la feuille, sans justification.

Continuité

Indiquer si les fonctions suivantes sont prolongeables par continuité en 0 (répondre OUI ou NON) ; si c'est le cas, préciser la valeur en 0 du prolongement par continuité.

$$f_1 : x \mapsto \arccos x + \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \tan x \quad \boxed{} ; \text{ si oui, en posant } f_1(0) = \boxed{}. \quad (1)$$

$$f_2 : x \mapsto \left(\frac{\ln \left(\frac{x}{x+1} \right)}{\ln x} \right)^{\frac{\ln x}{x}} \quad \boxed{} ; \text{ si oui, en posant } f_2(0) = \boxed{}. \quad (2)$$

$$f_3 : x \mapsto \lfloor x \ln(x^2) \rfloor \quad \boxed{} ; \text{ si oui, en posant } f_3(0) = \boxed{}. \quad (3)$$

$$f_4 : x \mapsto \frac{e^{ix} - 1}{x} \quad \boxed{} ; \text{ si oui, en posant } f_4(0) = \boxed{}. \quad (4)$$

Donner un exemple de fonction bijective et continue, dont la réciproque n'est pas continue.

(5)

Polynômes

Écrire la division euclidienne de $C = 7X^5 - 4X^3 + 6X^2 + 3X - 1$ par $D = X^2 - 5X + 7$:

(6)

Le reste de la division euclidienne de $X^{4048} + X^{2024} - 3$ par $(X - 1)^2$ est :

$$\boxed{\hspace{15cm}} \tag{7}$$

Soient $A = X^4 + X^3 - 3X^2 - 4X - 1$ et $B = X^3 + X^2 - X - 1$.

$$A \wedge B = \boxed{\phantom{\int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1+xy} dx dy}} \quad (8)$$

Un couple de Bézout de A et B est :

Soit $Q = X^6 - 2X^5 - 14X^4 + 59X^3 - 98X^2 + 100X - 56$, alors, avec m la multiplicité de 2 comme racine de Q :

$$m = \boxed{} \quad (10)$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 42$ et $P_n = X^{2n+1} - 2X^{n+1} - n^2X^2 + (2n^2 + 1)X - n^2$. Déterminer la multiplicité de 1 en tant que racine de P_n .

$$\square \quad (12)$$

Décomposer $P = X^6 + 64$ et $Q = (X^2 - 5X + 7)^2 + 1$ en produit de facteurs irréductibles réels.

$$P = \boxed{\hspace{15cm}} \quad (13)$$

$$Q = \boxed{\hspace{15cm}} \quad (14)$$

Déterminer un polynôme P de degré minimal tel que $P(-3) = -27$, $P(-2) = -11$, $P(1) = 1$ et $P(3) = -1$.

$$P = \boxed{\hspace{10cm}} . \quad (15)$$

— FIN —