Devoir surveillé n° 5
Version 2
Durée : 3 heures, calculatrices et documents interdits

I. Suites de Cauchy.

Lorsqu'une partie X de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$, on notera cette dernière $\sup X$.

Partie 1 : Suites de Cauchy

Étant donné $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes réels, on dit que u est une suite *de Cauchy* lorsque

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ \forall m \geqslant n_0,\ |u_n - u_m| \leqslant \varepsilon.$$

1) Lesquelles des suites ci-dessous sont de Cauchy ? Justifier.

a) $\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ **b)** $\left(\frac{(-1)^n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ **c)** $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$

2) Soit u une suite de Cauchy. Montrer que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ |u_n| \leqslant |u_{n_0}| + \varepsilon.$$

En déduire que toute suite de Cauchy est bornée.
La réciproque est-elle vraie ?

3) Montrer que toute suite convergente est de Cauchy.

Partie 2 : Convergence des suites de Cauchy

On cherche maintenant à démontrer la réciproque de $\boxed{\textbf{3)}}$ de la partie précédente.
Dans cette partie $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une suite bornée à termes réels. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$a_n = \inf \{\, u_m \mid m \geqslant n \,\}$$

et

$$b_n = \sup \{\, u_m \mid m \geqslant n \,\}.$$

4) **a)** Justifier que les définitions respectives de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ont bien un sens.

b) Expliciter les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $u = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

5) **a)** Montrer l'encadrement

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leqslant u_n \leqslant b_n.$$

b) Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

c) On suppose qu'on a un réel $h > 0$ et un entier naturel n tels que

$$\forall m \geqslant n,\ |u_m - u_n| \leqslant h.$$

Montrer l'encadrement $b_n - h \leqslant u_n \leqslant a_n + h$.

6) On suppose maintenant que u est une suite de Cauchy.
Montrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

7) En déduire que toute suite de Cauchy est convergente.

Partie 3 : Une application

On se donne une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\{-1, 1\}$, et on définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\varepsilon_k}{2^k}.$$

8) Montrer que pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$,

$$|S_m - S_n| \leqslant \frac{1}{2^{\min(m,n)}}$$

9) En déduire que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.

10) Montrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un élément de $[-2, 2]$.

II. Sous-groupes distingués.

Dans tout ce problème, on considère un groupe $(G, *)$ de neutre e. On adoptera des notations multiplicatives : pour tout $x, y \in G$, on notera $xy = x * y$.

Si $g \in G$ et si H est un sous-groupe de G, on introduit le *translaté à gauche* de H par g comme

$$gH = \{\ gh \mid h \in H\ \}$$

et le *translaté à droite* de H par g comme

$$Hg = \{\ hg \mid h \in H\ \}.$$

Si H est un sous-groupe de G, on introduit le *normalisateur* de H dans G comme

$$\mathrm{N}_G(H) = \{\ g \in G \mid gH = Hg\ \}.$$

On dit que ce sous-groupe H est *distingué* (on dit aussi parfois *normal*) si $\mathrm{N}_G(H) = G$, *i.e.* si pour tout $g \in G$: $gH = Hg$.

Si X est une partie de G, on introduit le *centralisateur* de X dans G comme

$$\mathrm{C}_G(X) = \{\ g \in G \mid \forall x \in X,\ gx = xg\ \}.$$

Si $x \in G$, on notera $\mathrm{C}_G(x)$ à la place de $\mathrm{C}_G(\{x\})$.

I – Quelques généralités.

1) Soit H un sous-groupe de G.

a) Montrer que
$$\mathrm{N}_G(H) = \left\{\, g \in G \;\middle|\; gHg^{-1} = H \,\right\}.$$

b) Montrer que $\mathrm{N}_G(H)$ est un sous-groupe de G.

c) Montrer que $H \subset \mathrm{N}_G(H)$.

2) Soit X une partie de G.

a) Montrer que, pour tout $x \in X$, $\mathrm{C}_G(x)$ est un sous-groupe de G.

b) En déduire que $\mathrm{C}_G(X)$ est un sous-groupe de G.

3) Soit H un sous-groupe de G. Comparer (au sens de l'inclusion) $\mathrm{N}_G(H)$ et $\mathrm{C}_G(H)$.

II – Produit semi-direct.

Dans cette partie, on considère deux sous-groupes de G, que l'on notera H et K. On définit alors
$$HK = \{\, hk \mid (h,k) \in H \times K \,\}.$$

4) Montrer que l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} H \times K & \longrightarrow & HK \\ (h,k) & \longmapsto & hk \end{array} \right.$ est une bijection si et seulement si $H \cap K = \{e\}$.

5) **a)** Montrer que HK est un sous-groupe de G si et seulement si $HK = KH$.

b) Dans ce cas, montrer que HK est le plus petit sous-groupe de G contenant $H \cup K$.

On dit alors que G est le *produit semi-direct* de K par H si

— $G = HK$;

— $H \cap K = \{e\}$;

— K est un sous-groupe distingué de G.

6) On suppose dans cette question que G est le produit semi-direct de K par H.

a) Montrer qu'il existe une unique application $\alpha : G \to H$ telle que, pour tout $(h,k) \in H \times K$, $\alpha(hk) = h$.

b) Montrer que α est un morphisme de groupes.

c) Montrer que $\alpha(H) = H$ et que $H \cap \mathrm{Ker}(\alpha) = \{e\}$.

7) Réciproquement, soit $\alpha : G \to H$ un morphisme de groupes vérifiant $\alpha(H) = H$ et $H \cap \mathrm{Ker}(\alpha) = \{e\}$. Montrer que G est le produit semi-direct de $\mathrm{Ker}(\alpha)$ par H.

— FIN —