exercice 6 :

1) Supposons $a \wedge b \nmid c$.

Supposons qu'il existe $x, y \in \mathbb{Z}$, $ax + by = c$.

On a $a \wedge b \mid a$ et $a \wedge b \mid b$

Donc $a \wedge b \mid ax + by$

Donc $a \wedge b \mid c$ contradiction.

2) Supposons $a \wedge b \mid c$

2)a) On a d'après le théorème de Bezout, $\exists (x, y) \in \mathbb{Z}^2$,

$$ax + by = a \wedge b.$$

Alors $c = a \wedge b\, c'$ où $c' \in \mathbb{Z}$

Donc $cax + cby = c'\, a \wedge b = c$.

D'où $x_0 = \cancel{x}c'$ et $y_0 = c'y$ est solution de $(*)$

si $a = 0$ et $b \neq 0$: $by = c$ ssi $b \mid c$

si $a \neq 0$ et $b \neq 0$

2)b) Analyse soit x, y sol de $*$: $ax + by = c$.

Donc $ax + by = ax_0 + by_0$.

Donc $a(x - x_0) = b(y_0 - y)$

On note : $a = da'$ et $b = db'$ où $d = a \wedge b$.

Ainsi $a'(x - x_0) = b'(y_0 - y)$

D'où $a' \mid y_0 - y$ car $a' \wedge b' = 1$

Donc $y_0 - y = ka'$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Ainsi, $a'x - a'x_0 = b'ka'$

Donc $x - x_0 = b'k$.

D'où $x = x_0 + kb'$

Synthèse : $(x_0 + kb', y_0 - ka')$ est solution de $*$ pour $\forall k \in \mathbb{Z}$

$$a(x_0 + kb') + b(y_0 - ka') = ax_0 + k\cancel{ab'} + by_0 - k\cancel{ba'}$$
$$= ax_0 + by_0 \quad \text{car } ab' = a'db' = a'b$$

Donc $S = \{ (x_0 + kb', y_0 - ka') \mid k \in \mathbb{Z} \}$