Devoir surveillé n° 6
Version 1

Durée : 3 heures, calculatrices et documents interdits

I. Un exercice vu en TD.

– Fonctions contractantes –
Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Soit $f : [a,b] \to [a,b]$ telle que, pour tout $x, x' \in [a,b]$ avec $x \neq x'$, on a :

$$|f(x) - f(x')| < |x - x'|.$$

1) Montrer que f est continue sur $[a,b]$.

2) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution dans $[a,b]$.

II. Une équation fonctionnelle.

☐ $\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

☐ L'objectif du problème est d'étudier les ensembles $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ suivants :

$\mathscr{E} = \{f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)\}$.

$\mathscr{F}$ est la partie constituée des éléments f de $\mathscr{E}$ tels que :
- f n'est pas la fonction identiquement nulle.
- f s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

Première Partie :

1) Montrer que la fonction cosinus est dans l'ensemble $\mathscr{E}$.

2) Démontrer la formule : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y = \operatorname{ch}(x+y)$. En déduire que la fonction ch est dans l'ensemble $\mathscr{E}$.

3) Soit f dans $\mathscr{E}$; on définit pour tout α :

$$f_\alpha(x) : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(\alpha\, x) \end{array}.$$

Montrer que pour tout réel α, la fonction f_α est dans $\mathscr{E}$.

4) On fixe un élément f de $\mathscr{E}$.
En donnant à x et à y des valeurs particulières, prouver que :

a) $f(0)$ vaut 0 ou 1.

b) Si $f(0) = 0$, alors f est la fonction identiquement nulle.

c) Si $f(0) = 1$, alors f est une fonction paire.

Deuxième Partie :

On pourra utiliser librement le résultat suivant :
Si a est un élément fixé de $\mathbb{R}_+^*$ et si $D_a = \left\{ a\,\dfrac{p}{2^q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}$, tout réel est limite d'une suite d'éléments de D_a.

Soit f un élément de $\mathscr{F}$. On pose $E = \{x > 0 \mid f(x) = 0\}$.

5) **a)** En utilisant un résultat de la première partie, montrer que $f(0) = 1$, et que f s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Montrer que E admet une borne inférieure que l'on note a.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_n \in E$ tel que $x_n \in [a, a + 1/n[$. En déduire qu'il existe une suite d'éléments de E qui converge vers a.

d) En utilisant la continuité de f en a, prouver que $f(a) = 0$. En déduire que : $a > 0$.

e) En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, montrer que : $\forall x \in [0, a[\,,\ f(x) > 0$.

6) On pose $\omega = \dfrac{\pi}{2a}$, et on note

$$g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos(\omega\, x) \end{array}.$$

a) Soit $q \in \mathbb{N}$. En se rappelant que $f(0) = 1$, montrer que

$$f\left(\frac{a}{2^q}\right) + 1 = 2\left[f\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right)\right]^2.$$

b) En déduire, en raisonnant par récurrence sur q, que :

$$\forall q \in \mathbb{N},\ f\left(\frac{a}{2^q}\right) = g\left(\frac{a}{2^q}\right).$$

On démontrerait de même le résultat suivant, que le candidat pourra utiliser librement : si $q \in \mathbb{N}$ est fixé, alors $\forall p \in \mathbb{N},\ f\left(p\frac{a}{2^q}\right) = g\left(p\frac{a}{2^q}\right)$.

c) Prouver que : $\forall x \in D_a,\ f(x) = g(x)$.

d) En déduire que $f = g$.

7) En déduire tous les éléments de $\mathscr{F}$.

III. Les polynômes de Bernoulli.

Dans tout ce problème, on identifiera un polynôme et la fonction polynomiale qui lui est associée.

1) *Question de cours :* Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Montrer qu'il existe un polynôme $Q_0 \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ vérifiant $Q_0' = P$. Déterminer en fonction de Q_0 tous les polynômes Q vérifiant $Q' = P$.

On considère une suite de polynômes $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (suite de Bernoulli) par les relations suivantes :

(a) $B_0 = 1$;

(b) $\forall n \in \mathbb{N},\ B'_{n+1} = (n+1)B_n$;

(c) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\int_0^1 B_n(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

2) Montrer l'existence et l'unicité d'une telle suite (B_n).

3) Expliciter les polynômes B_1, B_2 et montrer que $B_3 = X^3 - \dfrac{3}{2}X^2 + \dfrac{1}{2}X$.

4) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, B_n est un polynôme unitaire de degré n.

5) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ vérifiant $n \geqslant 2$, $B_n(0) = B_n(1)$.

6) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, B_n vérifie l'équation :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x).$$

Indication : on pensera à utiliser l'unicité obtenue à la question **2)**.

Dans toute la suite, on note pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\beta_n = B_n(0)$ (n^{e} nombre de Bernoulli).

7) Expliciter les valeurs de β_1, β_2 et β_3.

8) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 3$ impair, $\beta_n = 0$.

9) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \beta_k X^{n-k}.$$

Indication : on pourra commencer par exprimer $B_n^{(k)}$ en fonction de B_{n-k}.

10) En déduire que, pour tout $n \geqslant 2$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \beta_k = 0.$$

En déduire enfin pour tout $n \geqslant 1$ une expression de β_n en fonction de $\beta_0, \dots, \beta_{n-1}$.

11) Écrire dans le langage Python une fonction `Bernoulli(n)` prenant en argument un entier naturel `n` et renvoyant la valeur de $\beta_{\mathtt{n}}$.

— FIN —