Devoir surveillé n° 10 - Remarques

Barème.

- Calculs : chaque question sur 2 points, total sur 28 points, ramené sur 5 points.
- Problème : chaque question sur 4 points, total sur 160 points (v1) et 124 (v2), le tout ramené sur 15 points.

Statistiques descriptives.

	Calculs	v1	v2	Note finale sur 20
Note maximale	19	61	106	34
Note minimale	6	24	24	5
Moyenne	$\approx 12,22$	$\approx 40,35$	$\approx 42,47$	$\approx 11,54$
Écart-type	$\approx 2,89$	$\approx 11,51$	$\approx 19,74$	$\approx 4,93$

v1, I. Une famille de polynômes.

1.a. On ne peut plus classique et pourtant il y a encore quelques remarques à faire : $\varphi(0)=0$ ne fait pas partie de la définition de fonction linéaire, il n'y a pas à le vérifier ; il ne faut pas oublier la linéarité, ni que l'ensemble d'arrivée est E ; $\deg P' = \deg P - 1$ est faux en général, mais $\deg P' \leqslant \deg P - 1$ est toujours vrai et suffit pour répondre à la question.

4.a. La partie symétrique, puis linéaire par rapport à une variable, et donc bilinéaire a été très bien traitée. La partie $\langle f,f\rangle \geqslant 0$ a souvent été oubliée. La partie $\langle f,f\rangle = 0 \Rightarrow f=0$ a été affreusement mal traitée. Elle se faisait en 2 temps : $t\mapsto (1-t^2)f^2(t)$ est positive, continue, d'intégrale nulle, donc est nulle sur $[-1,1]$. Malgré tous mes avertissements, l'hypothèse « continue » a été quasiment systématiquement oubliée, et les autres aussi fréquemment. Ensuite, on en déduit que f est nulle sur $]-1,1[$. On étend cela à 1 et -1 par continuité de f.

4.b. Ici X est un polynôme, donc $\displaystyle\int_{-1}^{1} XP(X)Q(X)(1-X^2)\,\mathrm{d}X$ est très mal venu. Et $\displaystyle\int_{-1}^{1} XP(t)Q(t)(1-t^2)\,\mathrm{d}t$ n'a aucun sens. L'intégrale à considérer était ici $\displaystyle\int_{-1}^{1} tP(t)Q(t)(1-t^2)\,\mathrm{d}t$.

5.b. Le point central était de montrer que pour $k,l\in\mathbb{N}$, $k\neq l \Rightarrow (k+1)(k+2)\neq(l+1)(l+2)$. Personne ne s'est embarassé à le démontrer, vous vous êtes contentés de l'affirmer.

v1, II. Étude d'une série.

II.1.a. Encore une question hyper classique, qu'il est impensable de mal traitée. Et pourtant : la définition de « fonction de classe $\mathscr{C}^1$ » n'est toujours pas connue (ce n'est pas une fonction continue et dérivable). Et comment étudier la régularité de ce type de fonction sans jamais mentionner que le dénominateur ne s'annule pas ? ? Ce devrait être la première chose à regarder.
Évitez les formules toutes faites du style « par composition » ou « par produit » φ est dérivable : ici on a affaire à un quotient ! !
Et pour finir : je désespère de lire depuis le mois de septembre et dans plus d'une dizaine de copies que « t^α est continue ».

II.1.c. Que de bidouilles ... Beaucoup de variations autour de « $\varphi' \leqslant l$ donc le taux d'accroissement est aussi $\leqslant l$ ». Ceci laisse à penser que la dérivée est égale au taux d'accroissement (c'est faux), ou que $f\to l$ et $l\leqslant l'$ $\Rightarrow f\leqslant l'$ (c'est faux aussi, dans le cas où $l=l'$).
Il s'agissait d'utiliser l'IAF. Mais ce n'était pas tout d'y penser, encore fallait-il vérifier les hypothèses (comme d'hab' en somme).

III.2. Raisonnement faux : $(\cos(n))$ diverge et $\pi\sqrt{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc $(\cos(\pi\sqrt{n}))$ diverge. Avec ce raisonnement, $(\cos(2\pi n))$ diverge.

v2, I. Adjoint d'un endomorphisme.

À plusieurs reprises il fallait utiliser que si pour tout y on a $\langle x, y\rangle = 0$ alors $x = 0$. Pour le montrer, il suffit de poser $y = x$, alors $\langle x, x\rangle = 0$ donc $x = 0$. Il était bon de le montrer une fois dans la copie, et indispensable de bien mettre en évidence l'aspect « $\forall\ y$ ».

5. La deuxième égalité a posé problème. Mais on l'obtenait directement à partir de la première, en passant à l'adjoint et à l'orthgonal (on était en dimension finie).

6.a. et 7.a. Une caractérisation est un énoncé équivalent à une définition. On voulait donc une équivalence.

6.b. et 7.b. On avait $\operatorname{Ker} u = (\operatorname{Im} u)^{\perp}$, mais aussi $\operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u = E$.

7.b. $\operatorname{Ker}(-u) = \operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im}(-u) = \operatorname{Im} u$.

v2, II. Théorème de réarrangement de Riemann.

La partie I était une démonstration dans le cadre des séries du résulat de réarrangement vu en cours pour des familles sommables.
Les questions abordées l'ont été plutôt bien malgré leur difficulté.