KTH Elektro-
och systemteknik

Teoretisk elektroteknik F, del 2

Tidigare tentamina

Avdelningen för elektroteknisk teori och konstruktion
KTH, 100 44 Stockholm

TEORETISK ELEKTROTEKNIK DEL 2 för F2 2H1308/2 **2000–12–16**

Examinator: Martin Norgren, tel. 7907410

Hjälpmedel: Kursboken, βeta och fickräknare

Varje uppgift ger maximalt 5p. Godkänt garanteras på 10p.

Namn och personnummer på varje blad. **Endast en uppgift per blad.**

Uppställda samband skall motiveras!
Ofullständiga motiveringar ger poängavdrag!
Används formler, skall giltigheten diskuteras!

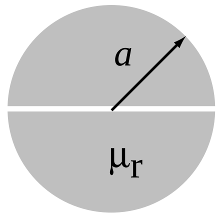
1.

En elektrisk dipolantenn $\mathbf{p}(t) = p_0 \cos(\omega t)\,\hat{\mathbf{z}}$ och en magnetisk dipolantenn $\mathbf{m}(t) = m_0 \sin(\omega t)\,\hat{\mathbf{z}}$ är båda belägna i origo. Bestäm förhållandet mellan amplituderna p_0 och m_0, på dipolmomenten, så att Poyntings vektor i fjärrzonen blir oberoende av tiden.

- -

2.

En cirkulärcylindrisk järnstav med relativa permeabiliteten μ_{r}, längden l och radien a ($a << l$) är kluven mitt itu i sin längdriktning, enligt figuren. Luftspalten mellan de två halvorna antages vara försvinnande liten. Staven för, i sin längdriktning, en likström I som är jämnt fördelad över det totala tvärsnittet. Använd Maxwells spänningar för att bestämma den kraft som fordras för att sära på halvorna. Numeriska värden: $l = 1$ m, $a = 5$ mm, $I = 100$ A, $\mu_r = 400$

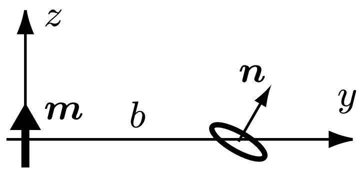


Ledning: **B**-fältet, i både staven och luftspalten, blir approximativt detsamma som då luftspalten saknas.

- -

3.

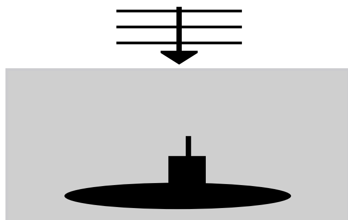
En magnetisk dipol $\mathbf{m}(t) = m_0 \cos(\omega t)\,\hat{\mathbf{z}}$ befinner sig i origo. I punkten $b\hat{\mathbf{y}}$ befinner sig en cirkulär slinga med radien a och resistansen R. Slingans ytnormal ges av $\hat{\mathbf{n}} = \sin\alpha\hat{\mathbf{y}} + \cos\alpha\hat{\mathbf{z}}$. Bestäm vridmomentet på slingan som funktion av tiden om $b << \lambda$ (våglängden) och $a << b$. Slingans egeninduktans antages vara försumbar.



- -

4.

Vid kommunikation med en ubåt sänds radiovågen via jonosfären och kan därför i första approximationen antagas infalla vinkelrätt mot vattenytan. För att ubåten skall kunna uppfatta signalen måste elektriska fältets amplitud överstiga 1.0 μV/m. Infallande vågens frekvens är 20 kHz och tidmedelvärdet av dess effekttäthet är 1.0 kW/m^2. Vattnets permittivitetstal $\varepsilon_{\mathrm{r}} = 80$ och dess ledningsförmåga $\sigma = 1.0$ S/m. Vilket är det största djup på vilket ubåten kan ta emot en signal?



Ledning: Gör rimliga approximationer utifrån de givna värdena.

- -

5.

En punktladdning q ligger stilla i origo fram till tiden $t = 0$. Vid $t = 0$ börjar laddningen röra sig med den konstanta accelerationen a_0 längs med den positiva z-axeln. Vid tiden $t = T$ upphör accelerationen. Antag att avståndet r, från origo till observationspunkten, är mycket större än den sträcka laddningen förflyttas under accelerationsfasen $t \in [0, T]$. Bestäm det elektriska accelerationsfältet. Beroendet av $\mathbf{r}$ skall uttryckas i de sfäriska koordinaterna (r, θ, φ), där θ är vinkeln mellan ortsvektorn och den positiva z-axeln. I svaret får den retarderade tiden ingå men då skall svaret kompletteras med ett explicit uttryck för den retarderade tiden, uttryckt i (r, θ, φ) och tiden t vid fältpunkten.

TEORETISK ELEKTROTEKNIK DEL 2 för F2 2H1308/2 **2000–12–16**

Förslag på lösningar

1.

Fjärrfälten från $\mathbf{p}(t)$ blir (Griffiths (11.18) och (11.19))

$$\mathbf{E}_{\mathrm{p}} = -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi}\left(\frac{\sin\theta}{r}\right)\cos\left[\omega\left(t - r/c\right)\right]\hat{\theta}, \quad \mathbf{B}_{\mathrm{p}} = -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi c}\left(\frac{\sin\theta}{r}\right)\cos\left[\omega\left(t - r/c\right)\right]\hat{\phi}$$

Fjärrfälten från $\mathbf{m}(t)$ blir (jmf Griffiths (11.36) och (11.37))

$$\mathbf{E}_{\mathrm{m}} = \frac{\mu_0 m_0 \omega^2}{4\pi c}\left(\frac{\sin\theta}{r}\right)\sin\left[\omega\left(t - r/c\right)\right]\hat{\phi}, \quad \mathbf{B}_{\mathrm{m}} = -\frac{\mu_0 m_0 \omega^2}{4\pi c^2}\left(\frac{\sin\theta}{r}\right)\sin\left[\omega\left(t - r/c\right)\right]\hat{\theta}$$

Poyntings vektor blir $\mathbf{S} = \dfrac{1}{\mu_0}\mathbf{E}\times\mathbf{B} = \dfrac{1}{\mu_0}\left(\mathbf{E}_{\mathrm{p}} + \mathbf{E}_{\mathrm{m}}\right)\times\left(\mathbf{B}_{\mathrm{p}} + \mathbf{B}_{\mathrm{m}}\right)$

$$= \frac{1}{\mu_0}\left(\mathbf{E}_{\mathrm{p}}\times\mathbf{B}_{\mathrm{p}} + \mathbf{E}_{\mathrm{m}}\times\mathbf{B}_{\mathrm{m}} + \underbrace{\mathbf{E}_{\mathrm{p}}\times\mathbf{B}_{\mathrm{m}}}_{=0} + \underbrace{\mathbf{E}_{\mathrm{m}}\times\mathbf{B}_{\mathrm{p}}}_{=0}\right) = \frac{1}{\mu_0}\left(\mathbf{E}_{\mathrm{p}}\times\mathbf{B}_{\mathrm{p}} + \mathbf{E}_{\mathrm{m}}\times\mathbf{B}_{\mathrm{m}}\right)$$

Eftersom vi inte får någon “korseffekt” adderas enbart de enskilda bidragen ((11.20) och (11.38)), vilket ger att

$$\mathbf{S} = \frac{\mu_0}{c}\left(\frac{\omega^2}{4\pi}\frac{\sin\theta}{r}\right)^2\left[p_0^2\cos^2\left[\omega\left(t - r/c\right)\right] + \frac{m_0^2}{c^2}\sin^2\left[\omega\left(t - r/c\right)\right]\right]\hat{\mathbf{r}}$$

Nu gäller att $p_0^2\cos^2\phi + \dfrac{m_0^2}{c_0^2}\sin^2\phi = p_0^2\cos^2\phi + \dfrac{m_0^2}{c_0^2}\left(1 - \cos^2\phi\right) = \dfrac{m_0^2}{c_0^2} + \left(p_0^2 - \dfrac{m_0^2}{c_0^2}\right)\cos^2\phi$, vilket blir oberoende av argumentet ϕ om $\dfrac{m_0}{p_0} = \pm c =$ **Svar**

2.

Med $l >> a$ bortser vi från effekter närmast ändarna och betraktar staven som oändligt lång. Luftspalten δ antages vara så liten att den cirkulära symmetrin inte påverkas nämnvärt. Utanför staven ger då Ampéres cirkulationslag $\oint \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \mu_0 I$ att

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi s}\hat{\phi}, \quad s > a$$

Eftersom **B**-fältet antages bilda cirkulära banor även inuti staven och normalkomponenten av **B** alltid är kontinuerlig, blir beloppet av **B**-fältet, på ett visst radiellt avstånd s, detsamma i både luftspalten och staven. Ampéres cirkulationslag ger

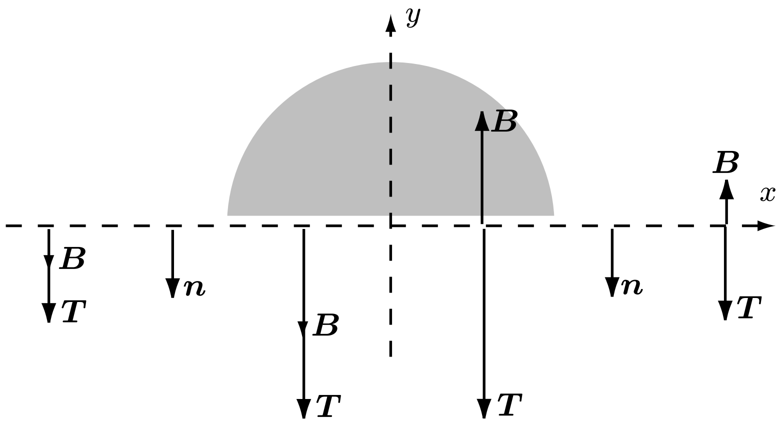
$$\oint \mathbf{H} \cdot \mathrm{dl} \approx \frac{B_\phi}{\mu_\mathrm{r}\mu_0} 2\pi s + \frac{B_\phi}{\mu_0}\delta = I_\mathrm{inne}(s) = I\frac{s^2}{a^2}$$

Eftersom luftspalten antages vara försvinnande liten gäller, oavsett hur stort (men ändligt) μ_r vi har, att $\delta << 2\pi s/\mu_r$, vilket medför att magnetfältet inuti staven och i luftspalten blir

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_\mathrm{r}\mu_0 I s}{2\pi a^2}\hat{\phi}, \quad s < a$$

Vi beräknar kraften på t.ex. den övre halvan mha Maxwells spänningstensor. Eftersom problemet är statiskt ändras inte rörelsemängden i fälten och ytkraften bidrar då enbart till kraften på laddningsbärarna. Kraften/längdenhet fås genom att integrera ytkraften längs en kurva vilken enbart omkretsar den övre staven. Den vektoriella ytkraften (tensorn multiplicerad med ytnormalen) blir tlll beloppet

$$|\mathbf{T}| = \frac{B^2}{2\mu_0} = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 s^2}, & s > a \\ \\ \dfrac{\mu_0 \mu_\mathrm{r}^2 I^2}{8\pi^2 a^4} x^2, & |x| < a \text{ (i luftspalten)} \end{cases}$$



Som integrationskurva väljer vi hela x-axeln och en stor cirkelbåge, i området $y > 0$, vars radie har gått mot ∞. Eftersom $\mathbf{T} \sim \dfrac{1}{s^2}$ och båglängden $\sim s$ fås inget bidrag ifrån den stora cirkelbågen. På x-axeln blir den utåtriktade ytnormalen $\hat{\mathbf{n}} = -\hat{\mathbf{y}}$ och eftersom **B**, som är bisektris till $\hat{\mathbf{n}}$ och **T**, där är riktad i $\pm y$-led gäller att **T** är riktad i $-y$-led längs med hela x-axeln. Alltså har vi att

$$\mathbf{T} = -\frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 x^2}\hat{\mathbf{y}}, \quad |x| > a, \qquad \mathbf{T} = -\frac{\mu_0 \mu_\mathrm{r}^2 I^2 x^2}{8\pi^2 a^4}\hat{\mathbf{y}}, \quad |x| < a$$

Kraften på hela staven blir då

$$\mathbf{F} = -\frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2}\hat{\mathbf{y}} \cdot 2\left(\int_a^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2} + \frac{\mu_\mathrm{r}^2}{a^4}\int_0^a x^2 \mathrm{d}x\right) \cdot l = -\frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi^2}\hat{\mathbf{y}}\left(\frac{1}{a} + \frac{\mu_\mathrm{r}^2}{3a}\right) = -\frac{\mu_0 I^2 l}{12\pi^2 a}\left(3 + \mu_\mathrm{r}^2\right)\hat{\mathbf{y}} = \textbf{ Delsvar 1}$$

Numeriska värden: $l = 1$ m, $a = 5$ mm, $I = 100$ A, $\mu_r = 400$ ger att $|\mathbf{F}| \approx 3400$ N = **Delsvar 2**

- -

3.

$b << \lambda \Rightarrow$ det dominerande fältet är ett kvasistationärt dipolfält:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 m_0 \cos(\omega t)}{4\pi r^3}\left(2\cos\theta\hat{\mathbf{r}} + \sin\theta\hat{\theta}\right),$$

Med $a << b$ kan fältet från $\mathbf{m}$ anses vara homogent över slingan och beräknas i dess mittpunkt:

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0 m_0}{4\pi b^3}\cos(\omega t)\,\hat{\mathbf{z}}$$

Flödet genom slingan blir $\Phi = \mathbf{B}\cdot\hat{\mathbf{n}}\pi a^2 = -\frac{\mu_0 m_0 a^2}{4b^3}\cos\alpha\cos(\omega t)$

Strömmen i slingan blir $I = \frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mu_0 m_0 a^2\omega}{4b^3 R}\cos\alpha\sin(\omega t)$

Det i slingan inducerade dipolmomentet blir $\mathbf{m}_\mathrm{s} = I\pi a^2\hat{\mathbf{n}} = -\frac{\pi\mu_0 m_0 a^4\omega}{4b^3 R}\cos\alpha\sin(\omega t)(\sin\alpha\hat{\mathbf{y}} + \cos\alpha\hat{\mathbf{z}})$

Slutligen, vridmomentet på slingan blir

$$\begin{aligned}\mathbf{N} &= \mathbf{m}_\mathrm{s}\times\mathbf{B} = \frac{\pi\mu_0 m_0 a^4\omega}{4b^3 R}\cos\alpha\sin(\omega t)\,\frac{\mu_0 m_0}{4\pi b^3}\cos(\omega t)(\sin\alpha\hat{\mathbf{y}} + \cos\alpha\hat{\mathbf{z}})\times\hat{\mathbf{z}}\\ &= \left(\frac{\mu_0 m_0 a^2}{4b^3}\right)^2\frac{\omega}{R}\sin\alpha\cos\alpha\sin(\omega t)\cos(\omega t)\,\hat{\mathbf{x}} = \left(\frac{\mu_0 m_0 a^2}{4b^3}\right)^2\frac{\omega}{4R}\sin(2\alpha)\sin(2\omega t)\,\hat{\mathbf{x}} = \textbf{Svar}\end{aligned}$$

- -

4.

Givet: $\langle\mathbf{S}_\mathrm{in}\rangle = 1.0$ kW/m^2, $\varepsilon_\mathrm{r} = 80$, $\sigma = 1.0$ S/m, $\omega = 4\pi\cdot 10^4$ s^{-1}.
Låt luften vara område 1 och vattnet område 2.

Enligt t.ex. Griffiths (9.61) blir amplituden på den infallande vågens **E**-fält $E_{0\mathrm{I}} = \sqrt{\frac{2\langle\mathbf{S}_\mathrm{in}\rangle}{\varepsilon_0 c}}$

(vi har ingen information om fasläget och antar då för enkelhets skull att $E_{0\mathrm{I}}$ är reell)

Griffiths (9.147) ger att transmitterade fältets amplitud blir $E_{0\mathrm{T}} = \left(\frac{2}{1+\beta}\right)E_{0\mathrm{I}}$,

där $\beta = \frac{\mu_1 v_1}{\mu_2\omega}k_2 = \frac{ck_2}{\omega}$ och $k_2 = \sqrt{\mu_0(\varepsilon_\mathrm{r}\varepsilon_0\omega^2 + \imath\omega\sigma)} = \{\sigma >> \omega\varepsilon_\mathrm{r}\varepsilon_0\} = \sqrt{\imath\mu_0\omega\sigma} = \sqrt{\frac{\mu_0\omega\sigma}{2}}(1+\imath)$

$\beta = \frac{c}{\omega}\sqrt{\frac{\mu_0\omega\sigma}{2}}(1+\imath) = c\sqrt{\frac{\mu_0\sigma}{\omega}}\exp(\imath\pi/4)$.

Har att $|\beta| >> 1 \Rightarrow E_{0\mathrm{T}} \approx \left(\frac{2}{\beta}\right)E_{0\mathrm{I}} = \frac{2}{c}\sqrt{\frac{\omega}{\mu_0\sigma}}\exp(-\imath\pi/4)\sqrt{\frac{2\langle\mathbf{S}_\mathrm{in}\rangle}{\varepsilon_0 c}} = 2\sqrt{\frac{2\omega\langle\mathbf{S}_\mathrm{in}\rangle}{\sigma c}}\exp(-\imath\pi/4)$

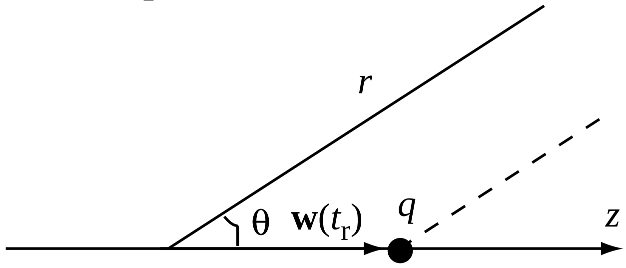
Med koordinatsystemet så att infallet blir i $+z$-led och polarisationen i x-led blir det transmitterade fältet:

$\mathbf{E}_\mathrm{T}(z,t) = \mathrm{Re}\{E_{0\mathrm{T}}\exp[\imath(k_2 z - \omega t)]\}\,\hat{\mathbf{x}} = 2\sqrt{\frac{2\omega\langle\mathbf{S}_\mathrm{in}\rangle}{\sigma c}}\exp\left(-\sqrt{\frac{\mu_0\omega\sigma}{2}}z\right)\cos\left(\sqrt{\frac{\mu_0\omega\sigma}{2}}z - \omega t - \pi/4\right)\hat{\mathbf{x}}$

Med $E_\mathrm{min} = |\mathbf{E}_\mathrm{T}(z_\mathrm{max},t)| = 1$ μV/m fås **Svar:** $z_\mathrm{max} = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\omega\sigma}}\ln\left(\frac{2}{E_\mathrm{min}}\sqrt{\frac{2\omega\langle\mathbf{S}_\mathrm{in}\rangle}{\sigma c}}\right) \approx 51$ m.

5.

I retarderade tidintervallet $t_\mathrm{r} \in [0, T]$ ges laddningens läge som $\mathbf{w}(t_\mathrm{r}) = \frac{a_0 t_\mathrm{r}^2}{2}\hat{\mathbf{z}}$ och vi förutsätter alltså att $r >> \frac{a_0 T^2}{2}$.



Ekvationen för den retarderade tiden (Griffiths (10.33)) blir då

$$c(t - t_\mathrm{r}) = |\mathbf{r} - \mathbf{w}(t_\mathrm{r})| = \left(r^2 - 2\mathbf{r}\cdot\mathbf{w} + w^2\right)^{1/2} \approx r - \frac{a_0 t_\mathrm{r}^2}{2}\cos\theta \Rightarrow t_\mathrm{r}^2 - \frac{2c}{a_0\cos\theta}t_\mathrm{r} - \frac{2(r - ct)}{a_0\cos\theta} = 0$$

Den rätta lösningen till andragradsekvationen är

$$t_\mathrm{r} = \frac{c}{a_0\cos\theta}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{2a_0\cos\theta}{c^2}(r - ct)}\right),$$

vilken ej blir singulär samt ger det rätta gränsvärdet $t_\mathrm{r} = t - r/c$ då $\cos\theta \to 0$ (då observationriktningen är vinkelrät mot rörelseriktningen).

Elektriska accelerationsfältet blir enligt Griffiths (10.65) $\mathbf{E}_\mathrm{a}(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R}{(\mathbf{R}\cdot\mathbf{u})^3}\mathbf{R}\times(\mathbf{u}\times\mathbf{a})$, där $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{w}(t_\mathrm{r})$ och $\mathbf{u} = c\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{v}$. I retarderade tidintervallet $t_\mathrm{r} \in [0, T]$ har vi att $\mathbf{a} = a_0\hat{\mathbf{z}}$ och $\mathbf{v} = a_0 t_\mathrm{r}\hat{\mathbf{z}}$. För övriga retarderade tider är $\mathbf{a} = 0 \Rightarrow \mathbf{E}_\mathrm{a} = 0$.

Eftersom $r >> w$ approximerar vi: $\mathbf{R} \approx \mathbf{r}, R \approx r, \hat{\mathbf{R}} \approx \hat{\mathbf{r}}$.

Vi får att $\mathbf{R}\cdot\mathbf{u} \approx r\hat{\mathbf{r}}\cdot(c\hat{\mathbf{r}} - a_0 t_\mathrm{r}\hat{\mathbf{z}}) = r(c - a_0 t_\mathrm{r}\hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\mathbf{z}}) = r(c - a_0 t_\mathrm{r}\cos\theta)$

Vidare erhålles $\mathbf{R}\times(\mathbf{u}\times\mathbf{a}) \approx a_0 r\hat{\mathbf{r}}\times((c\hat{\mathbf{r}} - a_0 t_\mathrm{r}\hat{\mathbf{z}})\times\hat{\mathbf{z}}) = a_0 cr\hat{\mathbf{r}}\times(\hat{\mathbf{r}}\times\hat{\mathbf{z}}) = a_0 cr(\hat{\mathbf{r}}(\hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\mathbf{z}}) - \hat{\mathbf{z}}) = a_0 cr\left(\hat{\mathbf{r}}\cos\theta - \left(\hat{\mathbf{r}}\cos\theta - \hat{\theta}\sin\theta\right)\right) = a_0 cr\sin\theta\hat{\theta}$

Vi får nu att $\mathbf{E}_\mathrm{a} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r}{r^3(c - a_0 t_\mathrm{r}\cos\theta)^3}a_0 cr\sin\theta\hat{\theta}$.

$$\textbf{Svar}\quad \mathbf{E}_\mathrm{a}(\mathbf{r}, t) = H(t_\mathrm{r})H(T - t_\mathrm{r})\frac{qa_0}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{1}{\left(1 - \frac{a_0 t_\mathrm{r}}{c}\cos\theta\right)^3}\frac{\sin\theta}{r}\hat{\theta}$$

$$= H(t_\mathrm{r})H(T - t_\mathrm{r})\frac{\mu_0 q a_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\left(1 + \frac{2a_0\cos\theta}{c^2}(r - ct)\right)^{3/2}}\frac{\sin\theta}{r}\hat{\theta},$$

där H är Heavisides stegfunktion och $t_\mathrm{r} = \frac{c}{a_0\cos\theta}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{2a_0\cos\theta}{c^2}(r - ct)}\right)$

Examinator: Martin Norgren, tel. 7907410

Hjälpmedel: Kursboken, βeta och fickräknare

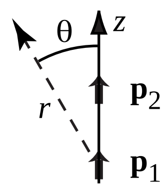
Varje uppgift ger maximalt 5p. Godkänt garanteras på 10p.

Namn och personnummer på varje blad. **Endast en uppgift per blad.**

Uppställda samband skall motiveras!
Ofullständiga motiveringar ger poängavdrag!
Används formler, skall giltigheten diskuteras!

1.

Två elektriska elementardipoler, $\mathbf{p}_1 = p_0 \cos(\omega t)\,\hat{\mathbf{z}}, \mathbf{p}_2 = p_0 \cos(\omega t + \alpha)\,\hat{\mathbf{z}}$, ligger utefter z-axeln i punkterna $z = 0$ och $z = \lambda/2$, respektive (λ = våglängden).

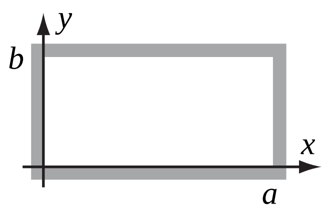


Bestäm α så att fältbidragen i fjärrzonen från bägge dipolerna ligger i fas i riktningen $\theta = \pi/3$ (60°).

Med ovan bestämda α, bestäm också de riktningar θ där fjärrzonsfältet är noll.

2.

Inuti en luftfylld rektangulär vågledare av metall, med tvärsnittet $a \times b$ enligt figuren, finns en våg vars magnetfält ges som



$$\mathbf{B} = B_0 \left[-\frac{a\beta}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \sin(\omega t - \beta z)\,\hat{\mathbf{x}} + \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cos(\omega t - \beta z)\,\hat{\mathbf{z}} \right],$$

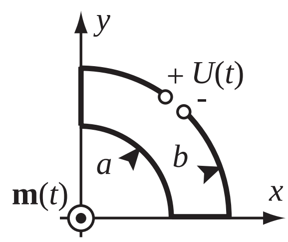
där $\beta = \sqrt{\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}$ ($\beta > 0$).

(a) Bestäm vågens elektriska fält $\mathbf{E}(x, y, z, t)$ (3 poäng).

(b) Bestäm tidmedelvärdet av den effekt som vågledaren transporterar (2 poäng).

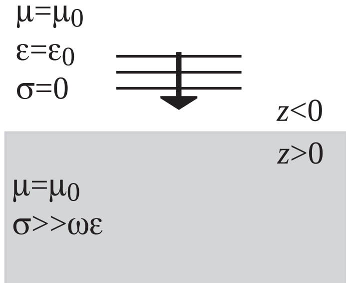
3.

En magnetisk dipol $\mathbf{m}(t) = m_0 \cos(\omega t)\,\hat{\mathbf{z}}$ befinner sig i origo.
En nästan sluten slinga av metall ligger i xy-planet enligt figuren .
Bestäm spänningen $U(t)$, under förutsättningen att frekvensen är måttligt hög (retardationen försummas).



4.

En plan våg i vakuum faller in vinkelrätt mot ett område $z > 0$, innehållande ett material med en mycket hög ledningsförmåga.
Vid gränsytan är de transmitterade elektriska och magnetiska fälten

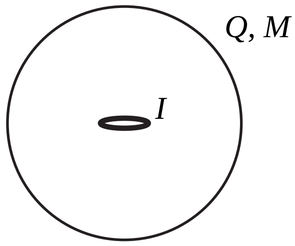


$$\mathbf{E}_{\text{tr}}\left(z = 0^+, t\right) = 1.0 \cos(-\omega t)\,\hat{\mathbf{x}} \text{ V/m},$$
$$\mathbf{B}_{\text{tr}}\left(z = 0^+, t\right) = 0.3 \cos(\pi/4 - \omega t)\,\hat{\mathbf{y}}\ \mu\text{T}.$$

Bestäm härur fälten i den infallande vågen, i området $z < 0$, dvs $\mathbf{E}_{\text{in}}(z, t)$ och $\mathbf{B}_{\text{in}}(z, t)$.
Ledning: Gör rimliga approximationer.

5.

Ett tunt sfäriskt skal med radien a har massan M och totalladdningen Q. Både M och Q är jämnt fördelade över skalets yta. Runt skalets centrum ligger en cirkulär strömslinga med radien $b << a$. Skalet antages vara upphängt så att det kan rotera fritt runt konfigurationens symmetriaxel. Inledningsvis gäller att skalet är stilla och att slingan är strömlös.
När en likström kopplas på i slingan börjar skalet att rotera. För att undvika retardationseffekter antages att strömmen vrids på långsamt upp till det slutliga värdet I.



Bestäm skalets slutliga vinkelfrekvens $\boldsymbol{\omega}$.

Ledningar:
Skalets mekaniska rörelsemängdsmoment är $\mathbf{L}_{\text{mek}} = \frac{2}{3}Ma^2\boldsymbol{\omega}$.
Försumma det magnetfält som alstras av det roterande skalet.

Förslag på lösningar

1.

Avståndet till fjärrzonspunkten, från de två dipolerna, blir $r_1 = r, r_2 = r - \frac{\lambda}{2}\cos\theta$.
Dipolerna har samma orientering och samma amplitud, men olika faslägen på dipolmomentet. Med hänsyn till faslägena och placeringarna fås mha Griffiths (11.18) att det totala elektriska fjärrfältet blir

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi}\left(\frac{\sin\theta}{r}\right)\hat{\boldsymbol{\theta}}\left[\cos\left(\omega\left(t-\frac{r_1}{c}\right)\right)+\cos\left(\omega\left(t-\frac{r_2}{c}\right)+\alpha\right)\right] = \left\{\frac{\omega}{c}=\frac{2\pi}{\lambda}\right\}\\ &= -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi}\left(\frac{\sin\theta}{r}\right)\hat{\boldsymbol{\theta}}\left[\cos\left(\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right)+\cos\left(\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)+\pi\cos\theta+\alpha\right)\right]\end{aligned}$$

$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$. För att dipolerna skall få samma fasläge måste det då gälla att $\alpha + \frac{\pi}{2} = n\cdot 2\pi$ (n =heltal)
T.ex. $n = 0 \Rightarrow$ **Delsvar:** $\alpha = -\frac{\pi}{2}$.

Nollriktningar är θ sådana att $\sin\theta\left[\cos\left(\omega\left(t-r/c\right)+\cos\left(\omega\left(t-r/c\right)+\pi\cos\theta+\alpha\right)\right)\right] = 0$, för alla t och alla $r > 0$. Först ger $\sin\theta = 0$ att $\theta = \{0, \pi\}$ är nollriktningar.
Inför $x = \omega\left(t - r/c\right)$ och $y = \pi\cos\theta + \alpha = \pi\left(\cos\theta - 1/2\right)$, vilket ger

$$\begin{aligned}&\cos(x) + \cos(x+y) = \cos(x) + \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) = 0 \quad \forall x\\ &\Rightarrow 1 + \cos(y) = \tan(x)\sin(y) \quad \forall x \Rightarrow \sin(y) = 1 + \cos(y) = 0\\ &\Rightarrow y = (2n+1)\pi, n = \text{heltal} \Rightarrow \cos\theta = \frac{4n+3}{2}\end{aligned}$$

Reell θ endast för $n = -1 \Rightarrow \cos\theta = -\frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow$ **Delsvar:** Nollriktningarna är $\theta = \{0, 2\pi/3, \pi\}$.

- -

2.

(a) Använd Ampéres generaliserade lag, vilken med $\mathbf{J} = 0$ blir $\nabla\times\mathbf{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$

$$\begin{aligned}\nabla\times\mathbf{B} &= \hat{\mathbf{y}}\left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}\right) = B_0\left(\frac{a\beta^2}{\pi}+\frac{\pi}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\cos\left(\omega t - \beta z\right)\hat{\mathbf{y}}\\ &= B_0\frac{a}{\pi}\omega^2\mu_0\varepsilon_0\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\cos\left(\omega t-\beta z\right)\hat{\mathbf{y}} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

Integrering map tiden och utelämnande av den statiska integrationskonstanten ger

Svar a: $\mathbf{E}(x,y,z,t) = B_0\frac{a\omega}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\sin\left(\omega t - \beta z\right)\hat{\mathbf{y}}$

(b) Den momentana effekten som transporteras genom ett tvärsnitt z fås mha Poyntings vektor som

$$\begin{aligned}P(z,t) &= \int \mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{z}}\mathrm{d}a = \frac{1}{\mu_0}\int_0^a \mathrm{d}x\int_0^b \mathrm{d}y\left(\mathbf{E}\times\mathbf{B}\right)\cdot\hat{\mathbf{z}} = \frac{1}{\mu_0}\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^b\mathrm{d}y\,\underbrace{\left(\mathbf{B}\times\hat{\mathbf{z}}\right)}_{=-B_x\hat{\mathbf{y}}}\cdot\mathbf{E}\\ &= -\frac{1}{\mu_0}\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^b\mathrm{d}y E_y B_x = B_0^2\frac{1}{\mu_0}\frac{a\omega}{\pi}\frac{a\beta}{\pi}\sin^2\left(\omega t-\beta z\right)\underbrace{\int_0^a\sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right)\mathrm{d}x\int_0^b\mathrm{d}y}_{=ab/2}\\ &= \frac{B_0^2\omega\beta a^3 b}{2\pi^2\mu_0}\sin^2\left(\omega t-\beta z\right)\end{aligned}$$

Medelvärdet över en periodtid $T = \frac{2\pi}{\omega}$: $\left\langle\sin^2\left(\omega t-\beta z\right)\right\rangle = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$**Svar b:** $\langle P\rangle = \frac{B_0^2\omega\beta a^3 b}{4\pi^2\mu_0}$

3.

Inuti metalltråden gäller att $\mathbf{E} = -\nabla V - \dfrac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = 0$.
Integration längs tråden, från pluspolen till minuspolen, ger då att

$$0 = \int_{(+)}^{(-)} \left(\nabla V + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = V_{(-)} - V_{(+)} + \int_{(+)}^{(-)} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l}$$

Spänningen:

$$U(t) = V_{(+)} - V_{(-)} = \{\text{slingan stilla}\} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{(+)}^{(-)} \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} \approx \{\text{nästan sluten}\} \approx \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \oint \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l}$$

I xy-planet, där $\mathbf{r} = s\hat{\mathbf{s}}$, fås från Griffiths (5.83) att vektorpotentialen blir $\mathbf{A} = \dfrac{\mu_0 m_0 \cos(\omega t)}{4\pi} \dfrac{\hat{\boldsymbol{\phi}}}{s^2} \Rightarrow$ endast de bågformade delarna av slingan, där $\mathrm{d}\mathbf{l} = s\hat{\boldsymbol{\phi}}\mathrm{d}\phi$, bidrager till linjeintegralen.
Vi får att $\oint \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \dfrac{\mu_0 m_0 \cos(\omega t)}{4\pi} \left\{ \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\phi}{b} + \int_{\pi/2}^{0} \frac{\mathrm{d}\phi}{a} \right\} = \dfrac{\mu_0 m_0 \cos(\omega t)}{8} \left(\dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{a} \right)$
Sluligen, $U(t) = -\dfrac{\mu_0 m_0}{8} \left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b} \right) \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \cos(\omega t) = \dfrac{\mu_0 m_0 \omega}{8} \left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b} \right) \sin(\omega t) =$ **Svar**

4.

Jämförelse med ekvation (9.138) i Griffiths ger att för de transmitterade fälten gäller att $E_0 = 1.0$ V/m, $B_0 = 0.3$ μT, $\delta_E = 0, \phi = \pi/4$.

(9.137) ger att $\dfrac{B_0}{E_0} = \dfrac{K}{\omega} = 0.3 \cdot 10^{-6}$ s/m och (9.132) ger sedan att det komplexa vågtalet i området $z > 0$ blir $\tilde{k}_2 = K\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} = 0.3 \cdot 10^{-6} \omega \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$ m^{-1}.

Hastigheten i området $z < 0$ är $v_1 = c \approx 3 \cdot 10^8$ m/s och permeabiliteterna är $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$.
(9.146) ger då att konstanten $\tilde{\beta} = \dfrac{\mu_1 v_1}{\mu_2 \omega} \tilde{k}_2 = 90\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$.
Sambandet mellan de komplexvärda amplituderna för de transmitterade och infallande **E**-fälten är (Griffiths (9.147)) $\tilde{E}_{0_T} = \dfrac{2}{1 + \tilde{\beta}} \tilde{E}_{0_I}$. Med $|\tilde{\beta}| >> 1$ fås att $\tilde{E}_{0_I} \approx \dfrac{\tilde{\beta}}{2} \tilde{E}_{0_T} = 45\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4} E_0 = 45\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$ V/m.

(9.140) ger att de infallande komplexa fälten blir $\tilde{\mathbf{E}} = 45\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_1 z - \omega t)}\hat{\mathbf{x}}$, $\tilde{\mathbf{B}} = \dfrac{45}{3 \cdot 10^8}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_1 z - \omega t)}\hat{\mathbf{y}}$, där vågtalet $k_1 = \dfrac{\omega}{c}$.

Svar: De reella, fysikaliska, infallande fälten blir
$\mathbf{E}_{\text{in}} = 45 \cos\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\omega}{c} z - \omega t \right) \hat{\mathbf{x}}$ V/m, $\quad \mathbf{B}_{\text{in}} = 0.15 \cos\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\omega}{c} z - \omega t \right) \hat{\mathbf{y}}$ μT

- -

5.

Utnyttja konservering av rörelsemängdsmoment. Initialt är skalet stilla, vilket ger $\mathbf{L}_{\text{mek}}^{\text{före}} = 0$.
Det elektromagnetiska rörelsemängdsmomentet fås som (Griffiths (8.34))

$$\mathbf{L}_{em} = \varepsilon_0 \int \mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B})\, \mathrm{d}\tau.$$

Gauss lag ger att elektriska fältet är $\mathbf{E} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{\mathbf{r}}, r > a; \quad \mathbf{E} = 0, r < a.$
Initialt är slingan strömlös vilket ger att $\mathbf{B} = 0$ överallt med konsekvensen att $\mathbf{L}_{\text{em}}^{\text{före}} = 0$.
Konservering av rörelsemängdsmoment ger då att det hela tiden måste gälla att $\mathbf{L} = \mathbf{L}_{\text{mek}} + \mathbf{L}_{\text{em}} = 0$.
Mha ledningen fås då att vinkelfrekvensen blir $\boldsymbol{\omega} = -\dfrac{3}{2Ma^2}\mathbf{L}_{\text{em}}$.
$b << a \Rightarrow$ slingan approximeras som en magnetisk dipol med det slutliga dipolmomentet $\mathbf{m} = I\pi b^2\hat{\mathbf{z}}$ (z-axeln som symmetriaxel).
Magnetfältet från dipolen blir (Griffiths (5.86)) $\mathbf{B} = \dfrac{\mu_0 I b^2}{4r^3}\left(2\cos\theta\hat{\mathbf{r}} + \sin\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)$ och $\mathbf{E}$-fältet förblir detsamma även då skalet roterar.

$$\begin{aligned}
\mathbf{l}_{\text{em}} &= \varepsilon_0 \mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \varepsilon_0 r \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{\mu_0 I b^2}{4r^3}\sin\theta\hat{\mathbf{r}} \times \underbrace{\left(\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}}\right)}_{=\hat{\boldsymbol{\phi}}} \\
&= \frac{\mu_0 Q I b^2}{16\pi r^4}\sin\theta\left(-\hat{\boldsymbol{\theta}}(\theta,\phi)\right) = \frac{\mu_0 Q I b^2}{16\pi r^4}\sin\theta\left(\sin\theta\hat{\mathbf{z}} - \cos\theta\hat{\mathbf{s}}(\phi)\right), r > a; \quad \mathbf{l}_{\text{em}} = 0, r < a
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}_{\text{em}} &= \int \mathbf{l}_{\text{em}}\mathrm{d}\tau = \frac{\mu_0 Q I b^2}{16\pi}\int_a^\infty r^2\mathrm{d}r\int_0^\pi \sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\frac{1}{r^4}\left(\sin^2\theta\hat{\mathbf{z}} - \sin\theta\cos\theta\hat{\mathbf{s}}(\phi)\right) \\
&= \frac{\mu_0 Q I b^2}{8}\hat{\mathbf{z}}\int_a^\infty \frac{\mathrm{d}r}{r^2}\int_0^\pi \sin^3\theta\mathrm{d}\theta = \frac{\mu_0 Q I b^2}{8a}\hat{\mathbf{z}}\underbrace{\int_0^\pi\left(1-\cos^2\theta\right)\sin\theta\mathrm{d}\theta}_{=4/3} = \frac{\mu_0 Q I b^2}{6a}\hat{\mathbf{z}}
\end{aligned}$$

Vinkelfrekvensen blir alltså: $\boldsymbol{\omega} = -\dfrac{\mu_0 Q I b^2}{4Ma^3}\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{Svar}$

Examinator: Martin Norgren, tel. 790 7410

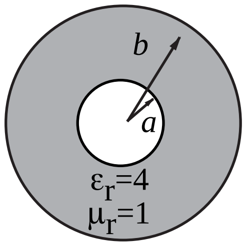
Hjälpmedel: Kursboken, βeta och fickräknare

Varje uppgift ger maximalt 5p. Godkänt garanteras på 10p.

Namn och personnummer på varje blad. **Endast en uppgift per blad.**

Uppställda samband skall motiveras!
Ofullständiga motiveringar ger poängavdrag!
Används formler hämtade ur kursboken, skall giltigheten diskuteras!

1.



I en koaxialkabel med innerradien a och ytterradien b är magnetfältet

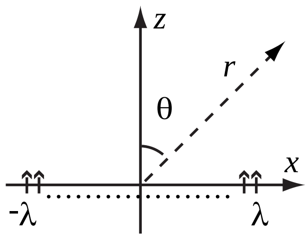
$$\boldsymbol{B} = A\cos\left(\frac{\omega}{v}z - \omega t\right)\left[\frac{-y}{x^2+y^2}\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{x}{x^2+y^2}\hat{\boldsymbol{y}}\right].$$

Materialet mellan ledarna är förlustfritt och har den relativa permittiviteten $\varepsilon_{\rm r} = 4$ och den relativa permeabiliteten $\mu_{\rm r} = 1$.

a) Bestäm det elektriska fältet $\boldsymbol{E}$ mellan ledarna (3 poäng)!
b) Bestäm därefter fashastigheten v genom att härleda $\boldsymbol{B}$-fältet från det erhållna $\boldsymbol{E}$-fältet (2 poäng)!

- -

2.



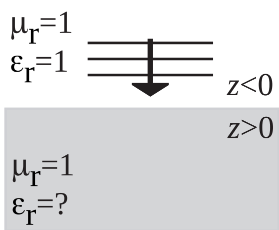
100 st dipolantenner är ekvidistant placerade utefter x-axeln i intervallet $-\lambda \leq x \leq \lambda$ (λ =våglängden). Dipolmomentet för en antenn vid en viss position $x = x_k$ ges som $\boldsymbol{p}_k = p_0 \dfrac{x_k}{\lambda}\cos(\omega t)\,\hat{\boldsymbol{z}}$.

Bestäm det elektriska fjärrfältet för alla riktningar i xz-planet!

Ledning: Betrakta antennerna som en, i intervallet, kontinuerlig fördelning av dipolmoment, där dipolmomentet från sträckan dx kring punkten x ges som $\mathrm{d}\boldsymbol{p} = 50p_0\cos(\omega t)\,\hat{\boldsymbol{z}}\,\dfrac{x}{\lambda^2}\mathrm{d}x$.

- -

3.



En plan våg med det elektriska fältet $\boldsymbol{E} = E_0\cos\left(\dfrac{\omega z}{c} - \omega t\right)\hat{\boldsymbol{x}}$ utbreder sig i halvrymden $z < 0$, som är fylld med luft. Vågen faller in mot området $z > 0$, som innehåller ett förlustfritt material med den relativa permeabiliteten $\mu_{\rm r} = 1$.

Bestäm den relativa permittiviteten $\varepsilon_{\rm r}$ för materialet i området $z > 0$ utifrån observationen att 75 % av den infallande vågens effekt transmitteras vidare in i området $z > 0$ (förutsätt att $\varepsilon_{\rm r} > 1$)!

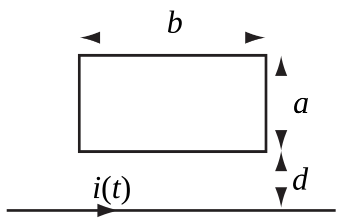
Vänd!

- -

4.

En rektangulär slinga med resistansen R (och en försumbar egeninduktans) ligger i samma plan som en lång rak tråd förande strömmen $i(t) = \hat{I}\cos\omega t$; se figuren. Frekvensen är måttlig, vilket innebär att avstånden i figuren är mycket mindre än $\dfrac{c}{\omega}$.

Bestäm momentanvärdet av kraften på slingan, till storlek och riktning!

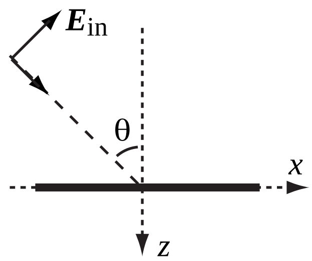


- -

5.

En plan våg med det elektriska fältet
$\boldsymbol{E}_{\text{in}} = E_0 \cos\left(\dfrac{\omega}{c}\left(x\sin\theta + z\cos\theta\right) - \omega t\right)\left(\hat{\boldsymbol{x}}\cos\theta - \hat{\boldsymbol{z}}\sin\theta\right)$
faller in mot en stor (åtskilliga våglängder i utsträckning) tunn metallplåt belägen i planet $z = 0$. De totala fälten ovanför den "belysta" sidan av plåten blir då med god approximation

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E} = &\quad -2E_0\left[\hat{\boldsymbol{x}}\cos\theta\sin\left(\frac{\omega}{c}z\cos\theta\right)\sin\left(\frac{\omega}{c}x\sin\theta - \omega t\right)\right. \\
&\qquad \left. + \,\hat{\boldsymbol{z}}\sin\theta\cos\left(\frac{\omega}{c}z\cos\theta\right)\cos\left(\frac{\omega}{c}x\sin\theta - \omega t\right)\right] \\
\boldsymbol{B} = &\quad 2\frac{E_0}{c}\cos\left(\frac{\omega}{c}z\cos\theta\right)\cos\left(\frac{\omega}{c}x\sin\theta - \omega t\right)\hat{\boldsymbol{y}}
\end{aligned}$$



Bestäm, som funktion av x, y, t och θ, den kraft per ytenhet som det elektromagnetiska fältet utövar på plåtens belysta sida!

Ledning: Ytkraften fås som $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}}{\mathrm{d}a} = \overleftrightarrow{\mathbf{T}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} = \overleftrightarrow{\mathbf{T}} \cdot (-\hat{\boldsymbol{z}}) = -\hat{\boldsymbol{x}}T_{xz} - \hat{\boldsymbol{y}}T_{yz} - \hat{\boldsymbol{z}}T_{zz}$,
där $\overleftrightarrow{\mathbf{T}}$ är Maxwells spänningstensor.

Förslag på lösning.

1.

Först går vi över till cylinderkoordinater (s, ϕ, z) genom sambanden $\sqrt{x^2+y^2} = s, \frac{-y}{s}\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{x}{s}\hat{\boldsymbol{y}} = \hat{\boldsymbol{\phi}}$.
Detta ger $\boldsymbol{B} = A\cos\left(\frac{\omega}{v}z - \omega t\right)\frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}}{s}$. Talet löses mha Maxwells ekvationer i material (Griffiths (7.55)).
Utan fria strömmar, mellan ledarna, blir Ampéres generaliserade lag: $\nabla \times \boldsymbol{H} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$.
Med $\boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu_r\mu_0}\boldsymbol{B}, \boldsymbol{D} = \varepsilon_r\varepsilon_0\boldsymbol{E}$ (Griffiths (7.57)) fås att

$$\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \frac{1}{\mu_r\mu_0\varepsilon_r\varepsilon_0}\nabla \times \boldsymbol{B} = \frac{1}{4\mu_0\varepsilon_0}\left[-\frac{\partial B_\phi}{\partial z}\hat{\boldsymbol{s}} + \frac{1}{s}\underbrace{\frac{\partial (sB_\phi)}{\partial s}}_{=0}\hat{\boldsymbol{z}}\right] = \frac{A\omega}{4\mu_0\varepsilon_0 v}\sin\left(\frac{\omega}{v}z - \omega t\right)\frac{\hat{\boldsymbol{s}}}{s}$$

Integrering map tiden, utelämnande den mot ett statiskt fält svarande integrationskonstanten, ger sedan

$$\textbf{Delsvar a: } \boldsymbol{E} = \frac{A}{4\mu_0\varepsilon_0 v}\cos\left(\frac{\omega}{v}z - \omega t\right)\frac{\hat{\boldsymbol{s}}}{s}$$

Insättning av det erhållna elektriska fältet i Faradays lag ger att

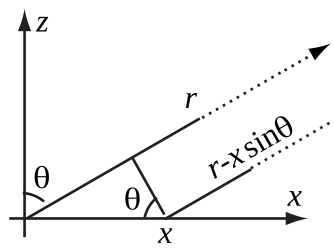
$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = -\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial E_s}{\partial z}\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{1}{s}\underbrace{\frac{\partial (E_s)}{\partial \phi}}_{=0}\hat{\boldsymbol{z}} = \frac{A\omega}{4\mu_0\varepsilon_0 v^2}\sin\left(\frac{\omega}{v}z - \omega t\right)\frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}}{s}$$

medan derivering map tiden av det givna magnetiska fältet ger att $\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = A\omega\sin\left(\frac{\omega}{v}z - \omega t\right)\frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}}{s}$.
Jämförelse ger slutligen att $4\mu_0\varepsilon_0 v^2 = 1 \Rightarrow$ **Delsvar b:** $v = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = \frac{c}{2}$ (halva vakuumhastigheten).

2.

Avståndet från en punkt $x\hat{\boldsymbol{x}}$, på x-axeln, till fjärrzonspunkten blir $d(x) = r - x\sin\theta$; se figuren.
Differentiellt användande av Griffiths (11.18) och bytet $r \to d(x)$, i tidsfördröjningen, ger då att det differentiella bidraget till det elektriska fältet blir

$$\mathrm{d}\boldsymbol{E} = -50\frac{\mu_0 p_0\omega^2}{4\pi\lambda^2}\frac{\sin\theta}{r}\cos\left(\omega(t - r/c) + \frac{\omega}{c}x\sin\theta\right)x\mathrm{d}x\hat{\boldsymbol{\theta}}$$



Inför $\alpha = \omega(t - r/c)$ och expandera cosinus-termen till $\cos\alpha\cos((\omega/c)x\sin\theta) - \sin\alpha\sin((\omega/c)x\sin\theta)$.
$x\cos((\omega/c)x\sin\theta)$ är en udda funktion av x, och ger därmed inget bidrag efter integration över intervallet $-\lambda \le x \le \lambda$. $x\sin((\omega/c)x\sin\theta)$ är en jämn funktion, vilket ger att det totala elektriska fjärrfältet blir

$$\boldsymbol{E} = 50\frac{\mu_0 p_0\omega^2}{4\pi\lambda^2}\frac{\sin\theta}{r}\hat{\boldsymbol{\theta}}\sin\alpha\; 2\int_0^\lambda x\sin((\omega/c)x\sin\theta)\,\mathrm{d}x$$

Inför $k = \frac{\omega}{c}\sin\theta = \frac{2\pi}{\lambda}\sin\theta$. Integralen tas enkelt medelst partiell integration: $\int_0^\lambda x\sin(kx)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{x\cos(kx)}{k} + \frac{\sin(kx)}{k^2}\right]_0^\lambda = \frac{\lambda^2}{2\pi\sin\theta}\left(-\cos(2\pi\sin\theta) + \frac{\sin(2\pi\sin\theta)}{2\pi\sin\theta}\right)$

Insättning och förenkling ger, **Svar:** $\boldsymbol{E} = \frac{25\mu_0 p_0\omega^2}{2\pi^2}\frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{r}\sin(\omega(t - r/c))\left(\frac{\sin(2\pi\sin\theta)}{2\pi\sin\theta} - \cos(2\pi\sin\theta)\right)$

3.

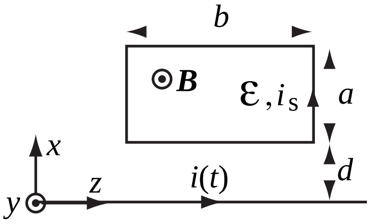
Effekterna är proportionella mot intensiteterna. Griffiths (9.63) ger den infallande vågens intensitet som $I_{\mathrm{in}} = \frac{1}{2} c\varepsilon_0 E_0^2$, medan G.(9.73) ger den transmitterade vågens intensitet som $I_{\mathrm{tr}} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mathrm{r}}\varepsilon_0 v E_{\mathrm{tr}}^2$, där E_{tr} är den transmittera vågens amplitud och fashastigheten $v = 1/\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{r}}\varepsilon_0\mu_0} = c/\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{r}}}$ (se G.(9.68)).

Alltså $I_{\mathrm{tr}} = \frac{1}{2} c\varepsilon_0 E_{\mathrm{tr}}^2 \sqrt{\varepsilon_{\mathrm{r}}}$. G.(9.82) ger att $E_{\mathrm{tr}} = \dfrac{2}{1+\beta} E_0$ där (G.(9.81)) $\beta = \dfrac{\mu_1 v_1}{\mu_2 v_2} = \dfrac{\mu_0 c}{\mu_0 c/\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{r}}}} = \sqrt{\varepsilon_{\mathrm{r}}}$.

Detta ger nu att $I_{\mathrm{tr}} = \frac{1}{2} c\varepsilon_0 E_0^2 \dfrac{4}{\left(1+\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{r}}}\right)^2}\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{r}}} = I_{\mathrm{in}} \dfrac{4\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{r}}}}{\left(1+\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{r}}}\right)^2} = \dfrac{3}{4} I_{\mathrm{in}}$.

Med $x = \sqrt{\varepsilon_{\mathrm{r}}}$ erhålles $\dfrac{4x}{(1+x)^2} = \dfrac{3}{4}$, vilket är en andragradsekvation: $x^2 - \dfrac{10}{3}x + 1 = 0$, med rötterna $3, 1/3$. Med $\varepsilon_{\mathrm{r}} > 1$ fås att $\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{r}}} = 3$ vilket ger **Svar:** $\varepsilon_{\mathrm{r}} = 9$.

4.



Med koordinatsystemet enligt figuren, blir magnetfältet i slingans plan $\boldsymbol{B} = \dfrac{\mu_0 \hat{I}}{2\pi x}\cos(\omega t)\,\hat{\boldsymbol{y}}$ (använd Ampéres cirkulationslag). Med emk:ns riktning definierad enligt figuren skall slingan ha ytnormalen $\hat{\boldsymbol{n}} = \hat{\boldsymbol{y}}$, vilket ger att flödet genom slingan blir $\Phi = b\int_d^{d+a} \boldsymbol{B}(x)\cdot\hat{\boldsymbol{y}}\mathrm{d}x = \dfrac{b\mu_0\hat{I}}{2\pi}\cos(\omega t)\displaystyle\int_d^{d+a}\dfrac{\mathrm{d}x}{x} = \dfrac{b\mu_0\hat{I}}{2\pi}\cos(\omega t)\ln\left(1+\dfrac{a}{d}\right)$.

Den i slingan inducerade strömmen blir: $i_{\mathrm{s}} = \dfrac{\mathcal{E}}{R} = -\dfrac{1}{R}\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \dfrac{b\mu_0\hat{I}\omega}{2\pi R}\sin(\omega t)\ln\left(1+\dfrac{a}{d}\right)$

På slingans "a"-sidor fås lika stora men motriktade bidrag till kraften. Mha $\mathrm{d}\boldsymbol{F} = I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B}$ fås att resluterande kraften på "b"-sidorna blir:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{F} &= i_{\mathrm{s}}\left[b\hat{\boldsymbol{z}}\times\boldsymbol{B}(x=d) - b\hat{\boldsymbol{z}}\times\boldsymbol{B}(x=d+a)\right] = i_{\mathrm{s}} b\frac{\mu_0\hat{I}}{2\pi}\cos(\omega t)\,\hat{\boldsymbol{z}}\times\hat{\boldsymbol{y}}\left(\frac{1}{d}-\frac{1}{d+a}\right)\\
&= -i_{\mathrm{s}}\frac{b\mu_0\hat{I}}{2\pi}\cos(\omega t)\,\frac{a}{d(d+a)}\hat{\boldsymbol{x}} = -\left(\frac{b\mu_0\hat{I}}{2\pi}\right)^2\frac{\omega}{R}\cos(\omega t)\sin(\omega t)\,\frac{a}{d(d+a)}\ln\left(1+\frac{a}{d}\right)\hat{\boldsymbol{x}}\\
&= -\left(\frac{b\mu_0\hat{I}}{2\pi}\right)^2\frac{\omega a}{2Rd(d+a)}\ln\left(1+\frac{a}{d}\right)\sin(2\omega t)\,\hat{\boldsymbol{x}} = \ \textbf{Svar}
\end{aligned}
$$

5.

Plåtens belysta är vid $z = 0^-$. Med $z = 0$ insatt i de givna fältuttrycken fås att fälten vid den belysta sidan blir

$$
\boldsymbol{E} = -2E_0\sin\theta\cos\left(\frac{\omega}{c}x\sin\theta - \omega t\right)\hat{\boldsymbol{z}}, \qquad \boldsymbol{B} = 2\frac{E_0}{c}\cos\left(\frac{\omega}{c}x\sin\theta-\omega t\right)\hat{\boldsymbol{y}}.
$$

Spänningstensorns komponenter fås från Griffiths (8.19). Då $\boldsymbol{E}$ och $\boldsymbol{B}$ båda har endast en kartesisk komponent, fås att $T_{xz} = \varepsilon_0 E_x E_z + \mu_0^{-1}B_x B_z = 0, T_{yz} = \varepsilon_0 E_y E_z + \mu_0^{-1} B_y B_z = 0$. terstår då

$$
\begin{aligned}
T_{zz} &= \frac{\varepsilon_0}{2}E_z^2 + \frac{1}{2\mu_0}\left(-B_y^2\right) = \frac{\varepsilon_0}{2}4E_0^2\sin^2\theta\cos^2\left(\frac{\omega}{c}x\sin\theta-\omega t\right) - \frac{1}{2\mu_0 c^2}4E_0^2\cos^2\left(\frac{\omega}{c}x\sin\theta-\omega t\right)\\
&= \left\{1/c^2 = \mu_0\varepsilon_0\right\} = -2\varepsilon_0 E_0^2\left(1-\sin^2\theta\right)\cos^2\left(\frac{\omega}{c}x\sin\theta-\omega t\right)
\end{aligned}
$$

Svar: Ytkraften (strålningstrycket) blir $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}}{\mathrm{d}a} = -\hat{\boldsymbol{z}}T_{zz} = 2\varepsilon_0 E_0^2\cos^2\theta\cos^2\left(\dfrac{\omega}{c}x\sin\theta-\omega t\right)$

Examinator: Martin Norgren, tel. 790 7410

Hjälpmedel: βeta; ett A4-ark med egna anteckningar.

Varje uppgift ger maximalt 5p. Godkänt garanteras på 10p.

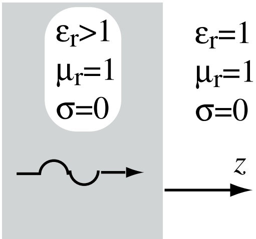
Namn och personnummer på varje blad. **Endast en uppgift per blad.**

Uppställda samband skall motiveras!
Ofullständiga motiveringar ger poängavdrag!

1.

Området $z > 0$ är vakuum, området $z < 0$ har $\sigma = 0, \varepsilon_\mathrm{r} > 1$ och $\mu_\mathrm{r} = 1$.
En plan våg vars amplitud för $\boldsymbol{E}$-fältet är E_in alstras i dielektriket och går i positiv z-led.

Bestäm amplituden hos $\boldsymbol{E}$-fältet för $z > 0$, dvs utanför dielektriket, då vinkelfrekvensen är ω!



- -

2.

I ett interstellärt skikt med tjockleken a finns en oscillerande strömtäthet. Skiktet, vilket betraktas som plant, befinner sig i området $|z| < a/2$.

Mätningar från en rymdsond visar att det elektriska fältet i skiktet ser ut enligt följande:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = E_0 \left[\cos\left(\frac{\omega z}{c}\right) \sin\left(\omega t - \frac{\omega a}{2c}\right) - \sin(\omega t) \right] \hat{\boldsymbol{x}}$$

(a) Bestäm det (tidvariabla) magnetiska fältet $\boldsymbol{B}$ i skiktet (3 poäng)!

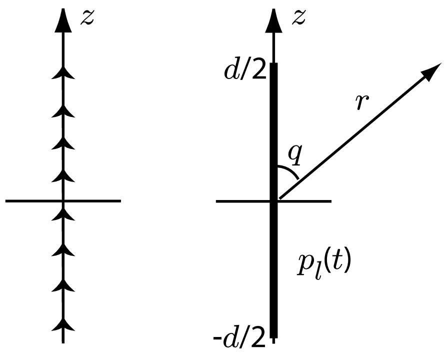
(b) Bestäm (den tidvariabla) strömtätheten $\boldsymbol{J}$ i skiktet (2 poäng)!

Ledning: James Clerk Maxwell (1831-1879)

- -

3.

För att erhålla god täckning används i basstationer för mobiltelefoni ofta rundstrålande antenner. Ett sätt att då öka andelen effekt som strålar ut i horisontalplanet är att stapla flera dipolantenner ovanpå varandra (se t.ex. taket på höghuset vid Körsbärsvägen). Om samtliga antenner då matas i fas erhålles maximal samverkan i horisontalplanet ($\theta = 90°$, se figuren).
Vi antar att N st dipolantenner, samtliga med dipolmomentet $\boldsymbol{p}(t) = p_0 \cos(\omega t)\, \hat{\boldsymbol{z}}$, staplats jämnt fördelade över en sträcka d. Vidare antages att antennerna är så pass många och nära varandra att det ryms flera per våglängd λ. Vi kan då, för att förenkla beräkningarna, approximera antennerna med en kontinuerlig fördelning av dipolmoment längs sträckan d. Dipolmomentet per längdenhet blir då $\boldsymbol{p}_l(t) = \dfrac{N\boldsymbol{p}(t)}{d} = \dfrac{p_0 N}{d} \cos(\omega t)\, \hat{\boldsymbol{z}}$.



Bestäm uttrycket för det elektriska fältet $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)$ i fjärrzonen ($r >> \lambda$ och $r >> d$) samt sträckan d, uttryckt i våglängder λ, så att nollriktningarna närmast huvudloben (riktningen där $\boldsymbol{E}$ är starkast) hamnar vid $\theta = 60°$ och $\theta = 120°$!

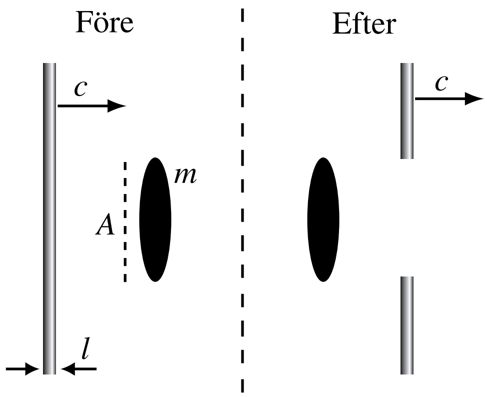
- -

Vänd!

- -

4.

En elektromagnetisk puls (EMP), från en atombomb, utbreder sig ovanför havsytan och faller in mot bredsidan av ett fartyg vilket är belagt med ett så kallat radarabsorberande material.
Fartyget har massan m och den yta fartyget uppvisar (ovanför vattenlinjen) vinkelrät mot pulsens utbredningsriktning betecknas A. Fartyget är långskepps riktat i y-led och pulsen beskrivs som en i positiv z-led gående plan våg med de elektromagnetiska fälten



$$\boldsymbol{E}(z,t) = E_0 \sin\left(\frac{\pi}{l}(z-ct)\right)\hat{\boldsymbol{x}},$$
$$\boldsymbol{B}(z,t) = \frac{E_0}{c}\sin\left(\frac{\pi}{l}(z-ct)\right)\hat{\boldsymbol{y}},$$

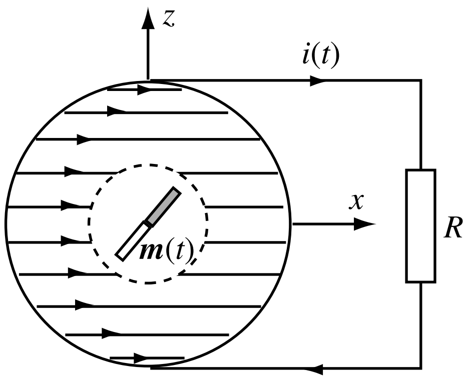
för $ct \leq z \leq ct+l$ och $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$ för $z < ct$ samt $z > ct+l$.
Vi antar att pulsens utsträckning i z-led $l << \sqrt{A}$ samt att det radarabsorberande materialet på fartyget fungerar perfekt för alla möjliga infallsriktningar, vilket leder till approximationen att den del av pulsen som träffar fartyget absorberas fullständigt av detsamma.

Bestäm ett uttryck för ändringen $\Delta\boldsymbol{v}$ i fartygets hastighet efter det att pulsen passerat förbi!
(bortse från inverkan av vattnet)

- -

5.

En elektrisk generator är utformad enligt nedanstående.
Statorn består av en isolerad ledningstråd som lindats från botten till toppen utanpå ett tunt sfäriskt plastskal med ytterradien a.
Tråden är lindad så tätt det går i ett enda lager vilket innebär att stigningen per varv kan försummas och att varvtätheten är konstant i θ-led, där $\theta \in [0, \pi]$ är polvinkeln räknad från positiva z-axeln.
Vid skalets poler är statorn ansluten till ett yttre belastningsmotstånd R via två st trådar, enligt figuren.
Rotorn består av en liten permanentmagnet placerad i plast-skalets centrum. Permanentmagneten roterar med vinkelhastigheten $\boldsymbol{\omega} = \omega\hat{\boldsymbol{y}}$, vinkelrät mot dipolmomentaxeln, på sådant sätt att det tidvariabla magnetiska dipolmomentet blir $\boldsymbol{m}(t) = m_0[\sin(\omega t)\hat{\boldsymbol{x}} + \cos(\omega t)\hat{\boldsymbol{z}}]$.



Bestäm momentanvärdet $i(t)$ av den ström som går genom statorlindningen och belastningsmotståndet!

Ledningar:
Använd vektorpotentialen $\boldsymbol{A}$ för att beräkna flödena genom de cirkulära varven i statorlindningen.
Rotorns vinkelhastighet ω är så pass liten att $\frac{\omega a}{c} << 1$ (kvasistatiskt).
Försumma egeninduktansen hos statorlindningen och den yttre delen av strömkretsen.
I den yttre delen av strömkretsen induceras det inga bidrag till emk:n

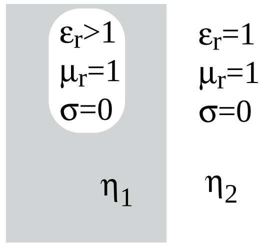
---

GOD JUL & GOTT NYTT ÅR
önskar
KURSENS LÄRARE

Förslag på lösning.

1.

Förhållandet mellan (de komplexa) amplituderna vid transmission från ett område 1 till ett område 2 bestäms av transmissionskoefficienten $\tau \equiv \dfrac{E_{\mathrm{tr}}}{E_{\mathrm{in}}} = \dfrac{2\eta_2}{\eta_1+\eta_2}$. Vågimpedanserna i respektive område ges av uttrycket $\eta = \sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon - \mathrm{j}\sigma/\omega}}$. Vi har att $\eta_1 = \sqrt{\dfrac{\mu_0}{\varepsilon_{\mathrm{r}}\varepsilon_0}}$ och att $\eta_2 = \sqrt{\dfrac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = \sqrt{\varepsilon_{\mathrm{r}}}\eta_1$, vilket ger att $\tau = \dfrac{2\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{r}}}}{1+\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{r}}}} \Rightarrow E_{\mathrm{tr}} = \dfrac{2\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{r}}}}{1+\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{r}}}}E_{\mathrm{in}} = \textbf{Svar}$



- -

2.

Använd Maxwells ekvationer. Givet: $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = E_0\left[\cos\left(\dfrac{\omega z}{c}\right)\sin\left(\omega t - \dfrac{\omega a}{2c}\right) - \sin(\omega t)\right]\hat{\boldsymbol{x}}$
Bestäm magnetfältet $\boldsymbol{B}$ mha Faradays lag:

$$\nabla\times\boldsymbol{E} = \hat{\boldsymbol{y}}\frac{\partial E_x}{\partial z} = -E_0\frac{\omega}{c}\sin\left(\frac{\omega z}{c}\right)\sin\left(\omega t - \frac{\omega a}{2c}\right)\hat{\boldsymbol{y}} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

Integrering map tiden och utelämnandet av den mot ett statiskt fält svarande integrationskonstanten ger **Svar a:** $\boldsymbol{B} = -E_0\dfrac{1}{c}\sin\left(\dfrac{\omega z}{c}\right)\cos\left(\omega t - \dfrac{\omega a}{2c}\right)\hat{\boldsymbol{y}}$

Med både $\boldsymbol{E}$ och $\boldsymbol{B}$ kända fås strömtätheten $\boldsymbol{J}$ ur Ampéres generaliserade lag:

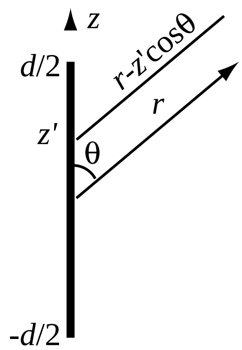
$$\begin{aligned}\boldsymbol{J} &= \frac{1}{\mu_0}\nabla\times\boldsymbol{B} - \varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} = -\frac{\partial B_y}{\partial z}\frac{1}{\mu_0}\hat{\boldsymbol{x}} - \varepsilon_0\frac{\partial E_x}{\partial t}\hat{\boldsymbol{x}}\\ &= E_0\frac{\omega}{\mu_0 c^2}\cos\left(\frac{\omega z}{c}\right)\cos\left(\omega t - \frac{\omega a}{2c}\right)\hat{\boldsymbol{x}} - \varepsilon_0\omega E_0\left[\cos\left(\frac{\omega z}{c}\right)\cos\left(\omega t - \frac{\omega a}{2c}\right) - \cos(\omega t)\right]\hat{\boldsymbol{x}}\end{aligned}$$

Med $\dfrac{1}{\mu_0 c^2} = \varepsilon_0$ förenklas slutligen uttrycket till **Svar b:** $\boldsymbol{J} = \omega\varepsilon_0 E_0\cos(\omega t)\,\hat{\boldsymbol{x}}$

- -

3.

Det komplexa dipolmomentet för en sträcka $\mathrm{d}z'$, vid $z'\hat{\boldsymbol{z}}$, blir $\mathrm{d}\boldsymbol{p} = \dfrac{p_0 N}{d}\hat{\boldsymbol{z}}\mathrm{d}z'$.
Avståndet till fältpunkten i fjärrzonen blir $r - z'\cos\theta$.
Bidraget till det komplexa elektriska fjärrfältet blir:



$$\begin{aligned}\mathrm{d}E_\theta &= -\frac{\mu_0\omega^2 p_0 N}{4\pi d}\frac{\sin\theta}{r}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega/c)\left(r - z'\cos\theta\right)}\mathrm{d}z'\\ &= \left\{\frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}\right\} = -\frac{\mu_0\omega^2 p_0 N}{4\pi d}\frac{\sin\theta}{r}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega/c)r}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(2\pi/\lambda)z'\cos\theta}\mathrm{d}z'\end{aligned}$$

Integrering ger sedan att

$$E_\theta = -\frac{\mu_0\omega^2 p_0 N}{4\pi d}\frac{\sin\theta}{r}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega/c)r}\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}(2\pi/\lambda)z'\cos\theta}}{\mathrm{j}2(\pi/\lambda)\cos\theta}\right]_{-d/2}^{d/2} = -\frac{\mu_0\omega^2 p_0 N}{4\pi}\frac{\sin\theta}{r}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega/c)r}\frac{\sin\left(\pi\frac{d}{\lambda}\cos\theta\right)}{\pi\frac{d}{\lambda}\cos\theta}$$

Tillbaks i tiddomänen fås **Delsvar:** $\boldsymbol{E}(r,\theta,\phi,t) = -\dfrac{\mu_0\omega^2 p_0 N}{4\pi r}\sin\theta\dfrac{\sin\left(\pi\frac{d}{\lambda}\cos\theta\right)}{\pi\frac{d}{\lambda}\cos\theta}\cos\left[\omega\left(t - r/c\right)\right]\hat{\boldsymbol{\theta}}(\theta,\phi)$

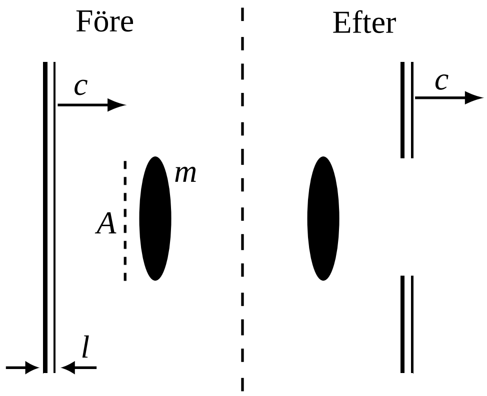
Strålningsfunktionen $F(\theta) = \sin\theta \dfrac{\sin\left(\pi\frac{d}{\lambda}\cos\theta\right)}{\pi\frac{d}{\lambda}\cos\theta}$ antar det maximala värdet 1, som gränsvärdet då $\theta \to 90°$. Elementardipolernas nollriktningar $\theta = 0°, 180°$ återfinns i faktorn $\sin\theta$. Ytterligare nollriktningar, pga interferens mellan de olika delarna av fördelningen, måste sökas i termen $\sin\left(\pi\frac{d}{\lambda}\cos\theta\right)$.

Nollriktningarna ges av de reella θ som uppfyller $\pi\dfrac{d}{\lambda}\cos\theta = n\pi, n = \pm 1, \pm 2, \ldots$. $n = 0$ ger maxriktningen $\theta = 90°$ och de närmaste nollriktningarna är då $n = \pm 1$, där $\cos\theta = \cos 60° = -\cos 120° = 0.5$. Detta ger att $d = 2\lambda =$ **Delsvar**

- -

4.

Använd konserveringslagen för rörelsemängd.
Den elektromagnetiska rörelsemängden hos den absorberade delen av EMP:n övergår i mekanisk rörelsemängd hos fartyget.



$$\boldsymbol{p}_{\text{em}} = \varepsilon_0 \int \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B} \mathrm{d}\tau$$

$$\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B} = \frac{E_0^2}{c}\hat{\boldsymbol{x}} \times \hat{\boldsymbol{y}} \sin^2\left(\frac{\pi}{l}(z - ct)\right), \quad ct \le z \le ct + l$$

$$\Delta\boldsymbol{p}_{\text{em}} = \boldsymbol{p}_{\text{em,efter}} - \boldsymbol{p}_{\text{em,före}}$$

$$= -\frac{\varepsilon_0}{c}E_0^2\hat{\boldsymbol{z}}A\int_{ct}^{ct+l}\sin^2\left(\frac{\pi}{l}(z - ct)\right)\mathrm{d}z$$

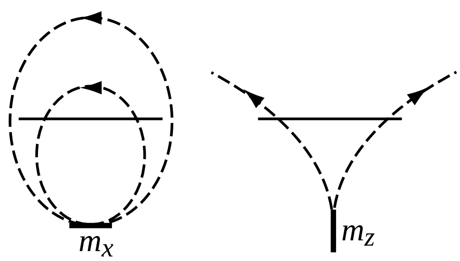
$$= -\frac{\varepsilon_0}{c}E_0^2\hat{\boldsymbol{z}}A\frac{l}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^2(u)\,\mathrm{d}u = -\frac{\varepsilon_0 E_0^2 A l}{2c}\hat{\boldsymbol{z}}$$

Ytterst rimligt att $v << c \Rightarrow \boldsymbol{p}_{\text{mek}} = m\boldsymbol{v}$. Konservering: $\Delta\boldsymbol{p}_{\text{mek}} + \Delta\boldsymbol{p}_{\text{em}} = \boldsymbol{0} \Rightarrow$
$\Delta\boldsymbol{p}_{\text{mek}} = m\Delta\boldsymbol{v} = -\Delta\boldsymbol{p}_{\text{em}} = \dfrac{\varepsilon_0 E_0^2 A l}{2c}\hat{\boldsymbol{z}} \Rightarrow \Delta\boldsymbol{v} = \dfrac{\varepsilon_0 E_0^2 A l}{2mc}\hat{\boldsymbol{z}} =$**Svar, för de yngre**
Energin: $W = \int\left(\dfrac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \dfrac{B^2}{2\mu_0}\right)\mathrm{d}V = \varepsilon_0 E_0^2 A\int_{ct}^{ct+l}\sin^2\left(\frac{\pi}{l}(z - ct)\right)\mathrm{d}z = \dfrac{\varepsilon_0 E_0^2 A l}{2} =$ **Svar, för de äldre**
Anm. Kvoten energi/rörelsemängd hos pulsen blir c, pss som för fotonen (elektromagnetiska kvantat).

- -

5.

$\dfrac{\omega a}{c} << 1 \Rightarrow$ det kvasistatiska dipolfältet dominerar.
Enligt superpositionsprincipen kan vi studera bidragen från dipolens x- och z-komponenter var för sig. En fältbildsbetraktelse, se figuren, ger vid handen att dipolens x-komponent inte ger några resulterande flöden genom de cirkulära varven i statorlindningen.
Vi betraktar då fortsättningsvis enbart bidragen från dipolens z-komponent: $\boldsymbol{m}_z(t) = m_0\cos(\omega t)\,\hat{\boldsymbol{z}}$
Vektorpotentialen från z-komponenten blir



$$\boldsymbol{A}(r,\theta,\phi,t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\boldsymbol{m}_z \times \hat{\boldsymbol{r}}}{r^2} = \frac{\mu_0 m_0}{4\pi}\cos(\omega t)\frac{\hat{\boldsymbol{z}} \times \hat{\boldsymbol{r}}}{r^2} = \frac{\mu_0 m_0}{4\pi}\cos(\omega t)\frac{\sin\theta}{r^2}\hat{\boldsymbol{\phi}}(\phi)$$

Flödet genom ett statorvarv beläget vid polvinkeln θ blir

$$\Phi_{\text{varv}}(\theta,t) = \oint \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \frac{\mu_0 m_0}{4\pi}\cos(\omega t)\frac{\sin\theta}{a^2}\int_0^{2\pi}\hat{\boldsymbol{\phi}}\cdot\left(a\sin\theta\hat{\boldsymbol{\phi}}\mathrm{d}\phi\right) = \frac{\mu_0 m_0}{2a}\cos(\omega t)\sin^2\theta$$

Jämn varvbeläggning i θ-led $\Rightarrow$ i intervallet $\mathrm{d}\theta$ finns $dN = \dfrac{N}{\pi}\mathrm{d}\theta$ st varv som passeras av flödet $\Phi_{\text{varv}}(\theta)$.
Bidraget till det sammanlagda flödet blir $\mathrm{d}\Phi = \Phi_{\text{varv}}\mathrm{d}N = \dfrac{\mu_0 m_0 N}{2\pi a}\cos(\omega t)\sin^2\theta\mathrm{d}\theta$
Totala flödet: $\Phi(t) = \dfrac{\mu_0 m_0 N}{2\pi a}\cos(\omega t)\displaystyle\int_0^{\pi}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta = \dfrac{\mu_0 m_0 N}{4a}\cos(\omega t)$
Elektromotoriska kraften i statorlindningen: $\mathcal{E}(t) = -\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mu_0 m_0 N\omega}{4a}\sin(\omega t)$.
Strömmen i belastningsmotståndet: $i(t) = \dfrac{\mathcal{E}(t)}{R} \Rightarrow$ **Svar:** $i(t) = \dfrac{\mu_0 m_0 N\omega}{4aR}\sin(\omega t)$

Examinator: Martin Norgren, tel. 790 7410

Hjälpmedel: βeta; ett A4-ark med egna anteckningar.

Varje uppgift ger maximalt 5p. Godkänt garanteras på 10p.

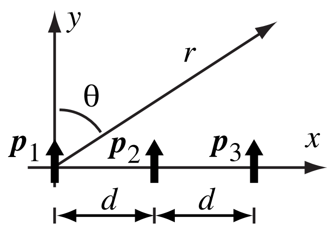
Namn och personnummer på varje blad. **Endast en uppgift per blad.**

Uppställda samband skall motiveras!
Ofullständiga motiveringar ger poängavdrag!

1.

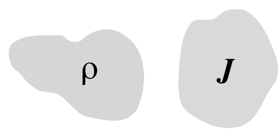
Tre elementardipoler är placerade enligt figur.
$\boldsymbol{p}_1(t) = p_0 \cos(\omega t)\,\hat{\boldsymbol{y}}$, $\boldsymbol{p}_2(t) = p_0 \cos(\omega t + \alpha)\,\hat{\boldsymbol{y}}$
och $\boldsymbol{p}_3(t) = p_0 \cos(\omega t + 2\alpha)\,\hat{\boldsymbol{y}}$.

Bestäm effektivvärdet av $\boldsymbol{B}$-fältet i en avlägsen punkt i xy-planet som funktion av r och θ!



2.

En i rummet begränsad statisk laddningsfördelning ρ alstrar ett elektrostatiskt fält $\boldsymbol{E} = -\nabla V$. Därutöver finns det en i rummet begränsad, och i varje punkt laddningsneutral, likströmsfördelning $\boldsymbol{J}$ vilken alstrar ett magnetostatiskt fält $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$.



(a) Vilka är de långsammaste möjliga avtagandena för V och $\boldsymbol{E}$ samt $\boldsymbol{A}$ och $\boldsymbol{B}$ på stora avstånd från ρ respektive $\boldsymbol{J}$? (1 poäng)

(b) Visa att den elektromagnetiskt upplagrade rörelsemängden kan skrivas $\boldsymbol{p}_{\text{em}} = \frac{1}{c^2} \int V \boldsymbol{J}\, \mathrm{d}\tau$ (4 poäng)

3.

En plan, linjärt polariserad våg har en elektrisk fältstyrka enligt

$$\boldsymbol{E} = E_0 \cos\left(\frac{\omega}{c}(y \cos\alpha - z \sin\alpha) - \omega t\right)(\hat{\boldsymbol{x}} + \hat{\boldsymbol{y}} \sin\alpha + \hat{\boldsymbol{z}} \cos\alpha)$$

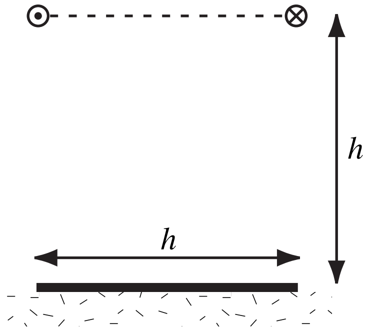
Denna våg reflekteras i ett metallplan beläget i ytan $z = 0$.

Beräkna tiduttrycken för de reflekterade elektriska och magnetiska fälten!

Vänd!

4.

Emil bor alldeles intill en enfas kraftledning för 50 Hz. Emil tycker att elräkningen är för dyr och funderar därför på att "stjäla" effekt från elleverantören, genom att använda induktionslagen; ett förfarande som är straffbart.
Emil placerar mitt under kraftledningen på det vertikala avståndet h en horisontell kvadratisk slinga med sidan h, på sådant sätt att två av sidorna blir parallella med ledningen. Han mäter sedan upp den i slingan inducerade spänningen och blir väldigt besviken!
Emils kompis F-Osquar, som har bättre kunskaper i fältberäkning, beräknar i stället den inducerade spänningen och spar därigenom en mängd onödigt besvär.



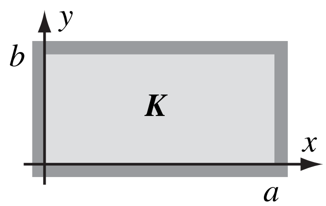
F-Osquar antar att följande värden gäller: Spänningen mellan trådarna har effektivvärdet U_0. Trådarna ligger på samma höjd och har inbördes avståndet h. Den överförda skenbara effekten är S_0. Han antar vidare att man kan bortse från markens inverkan på den inducerade spänningen.
Vilket uttryck för emkens effektivvärde får F-Osquar?
Vilket var Emils uppmätta värde, om $h = 5\,\mathrm{m}$, $U_0 = 40\,\mathrm{kV}$, $S_0 = 20\,\mathrm{MVA}$?
Svaret får ges med 1 signifikant siffra!

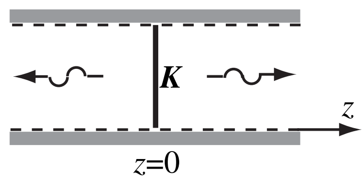
Ledningar: Skenbara effekten fås som $S_0 = U_0 I_0$, där I_0 är strömmens effektivvärde. $\ln 2 \approx 0,7$

5.

En luftfylld rektangulär vågledare av metall har innermåtten $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$. I tvärsnittplanet $z = 0$ finns det en källa i form av en ytströmtäthet $\boldsymbol{K}$, vilken inuti vågledaren ger upphov till två elektromagnetiska vågor, en på vardera sidan om $\boldsymbol{K}$, vilka båda utbreder sig bort från källan.
Det elektriska fältet ges (för båda vågorna) av följande uttryck

$$\boldsymbol{E}(x,y,z,t) = E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\omega t - |z| \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}\right) \hat{\boldsymbol{y}}$$





(a) Bestäm det magnetiska fältet $\boldsymbol{B}$ i vågledaren (3 poäng)!

(b) Bestäm ytströmtätheten $\boldsymbol{K}$ (2 poäng)!

Förslag till lösning.

1.

Se lösningen i studiehäftet elektromagnetism, sidan 187, uppgift Ö9.

2.

(a) I statikkursen, TET del 1, har det visats att utanför begränsade laddning- samt strömfördelningar är de långsammaste avtagandena

$$V \propto \frac{1}{r}, \quad \boldsymbol{E} \propto \frac{1}{r^2}, \quad \boldsymbol{A} \propto \frac{1}{r^2}, \quad \boldsymbol{B} \propto \frac{1}{r^3}$$

(b) Rörelsemängden i fälten blir

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p}_{\text{em}} &= \varepsilon_0 \int \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B} \mathrm{d}\tau = -\varepsilon_0 \int \nabla V \times \boldsymbol{B} \mathrm{d}\tau = -\varepsilon_0 \int \left[\nabla \times (V\boldsymbol{B}) - V \nabla \times \boldsymbol{B}\right] \mathrm{d}\tau \\ &= \{\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J}\} = -\varepsilon_0 \oint \hat{\boldsymbol{n}} \times (V\boldsymbol{B})\, \mathrm{d}a + \varepsilon_0 \mu_0 \int V \boldsymbol{J} \mathrm{d}\tau \end{aligned}$$

Integrationen skall ske över hela $\mathcal{R}^3$, vilket för ytintegralen innebär att $V\boldsymbol{B} \propto \frac{1}{r^4}$, medan ytan $\propto r^2$. Sammantaget innebär det att ytintegralen inte ger något bidrag då $r \to \infty$ och med $\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$ fås slutligen att

$$\boldsymbol{p}_{\text{em}} = \frac{1}{c^2} \int V \boldsymbol{J} \mathrm{d}\tau \qquad \textbf{V. S. V.}$$

3.

På komplex form blir den infallande vågens elektriska fält

$$\boldsymbol{E}^{\text{in}} = \boldsymbol{E}_0^{\text{in}} \exp\left(\mathrm{i}\left(\boldsymbol{k}^{\text{in}} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t\right)\right)$$

där $\boldsymbol{E}_0^{\text{in}} = E_0 (\hat{\boldsymbol{x}} + \hat{\boldsymbol{y}} \sin\alpha + \hat{\boldsymbol{z}} \cos\alpha)$ och den infallande vågvektorn är $\boldsymbol{k}^{\text{in}} = \frac{\omega}{c} (\hat{\boldsymbol{y}} \cos\alpha - \hat{\boldsymbol{z}} \sin\alpha)$

Planets ekvation $\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{r} = a$ blir i det här fallet $\hat{\boldsymbol{z}} \cdot \boldsymbol{r} = 0$, dvs $\hat{\boldsymbol{n}} = \hat{\boldsymbol{z}},\ a = 0$.

Den reflekterade vågvektorn blir $\boldsymbol{k}^{\text{refl}} = \boldsymbol{k}^{\text{in}} - 2\left(\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{k}^{\text{in}}\right)\hat{\boldsymbol{n}} = \frac{\omega}{c}(\hat{\boldsymbol{y}} \cos\alpha + \hat{\boldsymbol{z}} \sin\alpha)$.

Amplitudfaktorn för det reflekterade fältet blir

$\boldsymbol{E}_0^{\text{refl}} = \exp\left(\mathrm{i}2\left(\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{k}^{\text{in}}\right) a\right)\left(2\left(\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{E}_0^{\text{in}}\right)\hat{\boldsymbol{n}} - \boldsymbol{E}_0^{\text{in}}\right) = E_0 (-\hat{\boldsymbol{x}} - \hat{\boldsymbol{y}} \sin\alpha + \hat{\boldsymbol{z}} \cos\alpha)$

Det reellvärda reflekterade elektriska fältet blir då

$$\boldsymbol{E}^{\text{refl}}(x, y, z, t) = E_0 \cos\left(\frac{\omega}{c}(y \cos\alpha + z \sin\alpha) - \omega t\right)(-\hat{\boldsymbol{x}} - \hat{\boldsymbol{y}} \sin\alpha + \hat{\boldsymbol{z}} \cos\alpha) = \textbf{Delsvar}$$

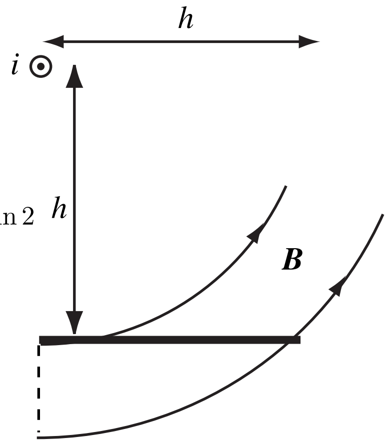
Det reflekterade magnetiska fältet blir

$$\begin{aligned} \boldsymbol{B}^{\text{refl}}(x, y, z, t) &= \frac{1}{c} \hat{\boldsymbol{k}}^{\text{refl}} \times \boldsymbol{E}^{\text{refl}} \\ &= \frac{E_0}{c} \cos\left(\frac{\omega}{c}(y \cos\alpha + z \sin\alpha) - \omega t\right)(\hat{\boldsymbol{y}} \cos\alpha + \hat{\boldsymbol{z}} \sin\alpha) \times (-\hat{\boldsymbol{x}} - \hat{\boldsymbol{y}} \sin\alpha + \hat{\boldsymbol{z}} \cos\alpha) \\ &= \frac{E_0}{c} \cos\left(\frac{\omega}{c}(y \cos\alpha + z \sin\alpha) - \omega t\right)\left(\hat{\boldsymbol{z}} \cos\alpha + \hat{\boldsymbol{x}} \cos^2\alpha - \hat{\boldsymbol{y}} \sin\alpha + \hat{\boldsymbol{x}} \sin^2\alpha\right) \\ &= \frac{E_0}{c} \cos\left(\frac{\omega}{c}(y \cos\alpha + z \sin\alpha) - \omega t\right)(\hat{\boldsymbol{x}} - \hat{\boldsymbol{y}} \sin\alpha + \hat{\boldsymbol{z}} \cos\alpha) = \textbf{Delsvar} \end{aligned}$$

- -

4.

Kraftledningens båda trådar ger lika stora och samverkande bidrag till flödet. $\boldsymbol{B}$-linjerna genom slingan från en tråd passerar vinkelrät genom en yta rakt under tråden vilken begränsas av avståndet h och $h\sqrt{2}$ från tråden. Det totala flödet blir



$$\Phi = 2 \cdot h \int_h^{h\sqrt{2}} B_\varphi \mathrm{d}s = 2h \frac{\mu_0 i(t)}{2\pi} \int_h^{h\sqrt{2}} \frac{\mathrm{d}s}{s} = \frac{h\mu_0 i(t)}{\pi} \ln\sqrt{2} = \frac{h\mu_0 i(t)}{2\pi} \ln 2$$

Strömmen: $i(t) = I_0\sqrt{2}\cos(\omega t) = \dfrac{S_0\sqrt{2}}{U_0}\cos(\omega t)$

$\mathcal{E} = -\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\omega h \mu_0 S_0 \sqrt{2}}{2\pi U_0} \ln 2 \sin(\omega t) \Rightarrow \mathcal{E}_{\text{eff}} = \dfrac{\omega h \mu_0 S_0}{2\pi U_0} \ln 2 =$**Delsvar**

Numeriska värden: $\mathcal{E}_{\text{eff}} = \dfrac{2 \cdot 50 \cdot \pi \cdot 5 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2 \cdot 10^7}{2\pi 4 \cdot 10^4} \cdot \ln 2 = \dfrac{\pi \ln 2}{20} \approx 0.1$ V = **Delsvar**
(ingen vidare hög spänning alltså)

- -

5.

(a) Beräkna $\boldsymbol{B}$ från $\boldsymbol{E}$ medelst Faradays lag: $\nabla \times \boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$

Inför $k_z = \sqrt{\left(\dfrac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\dfrac{\pi}{a}\right)^2}$, för vågtalet i z-led: $\boldsymbol{E}(x,y,z,t) = E_0 \sin\left(\dfrac{\pi x}{a}\right)\cos(\omega t - k_z|z|)\,\hat{\boldsymbol{y}}$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\hat{\boldsymbol{x}}\frac{\partial E_y}{\partial z} + \hat{\boldsymbol{z}}\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\hat{\boldsymbol{x}}E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) k_z \frac{z}{|z|}\sin(\omega t - k_z|z|) + \hat{\boldsymbol{z}}E_0\frac{\pi}{a}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos(\omega t - k_z|z|)$$

Integrering map tiden och utelämnandet av den mot ett statiskt fält svarande integrationskonstanten ger

$$\boldsymbol{B}(x,y,z,t) = -E_0\frac{k_z}{\omega}\frac{z}{|z|}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos(\omega t - k_z|z|)\,\hat{\boldsymbol{x}} - E_0\frac{\pi}{a\omega}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin(\omega t - k_z|z|)\,\hat{\boldsymbol{z}} = \textbf{Delsvar}$$

(b) Ytströmtätheten fås genom att använda det tangentialla randvillkoret för magnetfältet; vi får

$$\boldsymbol{K}(x,y,t) = \frac{1}{\mu_0}\hat{\boldsymbol{z}} \times \left(\boldsymbol{B}\left(x,y,z=0^+,t\right) - \boldsymbol{B}\left(x,y,z=0^-,t\right)\right) = -2E_0\frac{k_z}{\mu_0\omega}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos(\omega t)\,\hat{\boldsymbol{y}} = \textbf{Delsvar}$$

---

2. För f98 och äldre

Använd $\nabla \times \boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial B}{\partial t}$, $\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \mu_0\boldsymbol{J}$, $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{E}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{E}) - \nabla^2\boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\nabla\rho - \nabla^2\boldsymbol{E} = -\nabla \times \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\nabla \times \boldsymbol{B} = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2} - \mu_0\frac{\partial \boldsymbol{J}}{\partial t}$$

Samling av $\boldsymbol{E}$-termer i vänsterledet ger att

$$\left(\nabla^2 - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\nabla\rho + \mu_0\frac{\partial \boldsymbol{J}}{\partial t} \quad \textbf{V.S.V.}$$

TEORETISK ELEKTROTEKNIK del 2 (2H1308/2) för F **2002–08–19**

Examinator: Martin Norgren, tel. 790 7410

Hjälpmedel: βeta; ett A4-ark med egna anteckningar.

Varje uppgift ger maximalt 5p. Godkänt garanteras på 10p.

Namn och personnummer på varje blad. **Endast en uppgift per blad.**

Uppställda samband skall motiveras!
Ofullständiga motiveringar ger poängavdrag!

1.

Inträngningsdjupet (sträckan längs med vilken amplituden minskar med faktorn e^{-1}) i vatten i Bottenviken är 1 m för plana vågor vid frekvensen 1 MHz. Vattnet har $\varepsilon_r = 81$.

Bestäm inträngningsdjupet vid frekvensen 10 kHz!

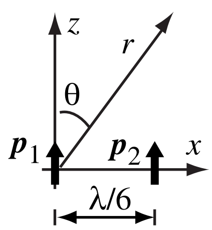
Ledning: Bestäm först vattnets ledningsförmåga.

- -

2.

Två elektriska elementardipoler, $\boldsymbol{p}_1 = p_0 \cos(\omega t)\,\hat{\boldsymbol{z}}$ och $\boldsymbol{p}_2 = p_0 \cos(\omega t - \pi/2)\,\hat{\boldsymbol{z}}$, är placerade på det inbördes avståndet $\lambda/6$ enligt figuren.
I en punkt i fjärrzonen i xz-planet i riktningen $\theta = 30°$ har det elektriska fältet amplituden E_1. Om dipolerna får byta plats, blir amplituden i samma punkt E_2.

Bestäm $\dfrac{E_2}{E_1}$!

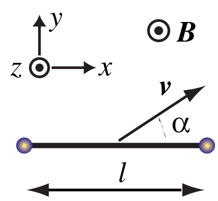


- -

3.

Två satelliter är sammanbunda med en (sträckt) stållina som har längden $l =$ 20 km. Hela anordningen rör sig med en konstant hastighet $\boldsymbol{v}$ i xy-planet, vinkelrät mot det jordmagnetiska fältet $\boldsymbol{B} = B\hat{\boldsymbol{z}}$, där $B = 50\ \mu$T. Hastigheten bildar vinkeln $\alpha = 30°$ mot tråden; se figuren.
En mätning av den ström av joner som går mellan satelliterna, i den omgivande rymden, ger vid handen att den inducerade emk:n i kretsen är $\mathcal{E} = 7,9$ kV.

Bestäm beloppet av hastigheten $\boldsymbol{v}$!



- -

4.

I ett fixt koordinatsystem S(xyz) är $\boldsymbol{B} = B_0\hat{\boldsymbol{z}}$ och $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}$.
En cirkulär, tunn metallskiva med radien a och tjockleken d ($d \ll a$) "befinner sig" i yz-planet.
Skivan rör sig med den konstanta hastigheten $\boldsymbol{v} = v\hat{\boldsymbol{y}}$ ($v \ll c_0$).

(a) Bestäm elektriska fältet i plattan sett från xyz-systemet!

(b) Hur stor ytladdning finns på skivans plana ytor?

(c) Bestäm elektriska fältstyrkan i punkten $b\hat{\boldsymbol{x}}$ ($b \gg a$), då skivans centrum passerar origo!

- -

Vänd!

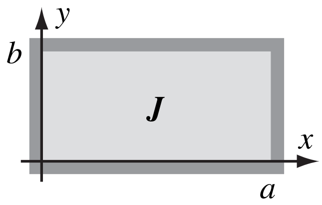
5.

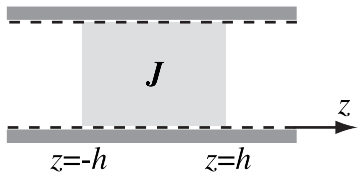
En luftfylld rektangulär vågledare av metall har innermåtten $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$. I området $-h \le z \le h$ finns det en källa i form av en volymströmtäthet $\boldsymbol{J}$.
Inuti källområdet är det elektriska fältet

$$\boldsymbol{E}(x,y,z,t) = E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)[\sin(\omega t) - \cos(kz)\sin(\omega t - kh)]\,\hat{\boldsymbol{y}},$$

där $k = \sqrt{\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}$ (frekvensen är så pass hög att k är reell).

Bestäm det magnetiska fältet $\boldsymbol{B}$ och strömtätheten $\boldsymbol{J}$ i källområdet!





Förslag till lösning.

1.

Den plana vågen avtar (i t.ex. z-led) som $\mathrm{e}^{-\alpha z}$ där dämpfaktorn α är realdelen av utbredningsfaktorn $\gamma = \alpha + \mathrm{j}\beta = \sqrt{\mathrm{j}\omega\mu_0\left(\sigma + \mathrm{j}\omega\varepsilon_{\mathrm{r}}\varepsilon_0\right)}$ (vatten har $\mu_{\mathrm{r}} = 1$). Inträngningsdjupet $\delta = 1/\alpha$.

Får en andragradsekvation för α^2: $\left(\alpha^2\right)^2 + \omega^2\varepsilon_{\mathrm{r}}\varepsilon_0\mu_0\alpha^2 - \dfrac{\omega^2\sigma^2\mu_0^2}{4}$, med den positiva roten

$$\alpha^2 = \frac{1}{\delta^2} = \frac{\omega^2\varepsilon_{\mathrm{r}}\varepsilon_0\mu_0}{2}\left(-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_{\mathrm{r}}\varepsilon_0}\right)^2}\right) \Rightarrow -1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_{\mathrm{r}}\varepsilon_0}\right)^2} = \frac{2}{\delta^2\omega^2\varepsilon_{\mathrm{r}}\varepsilon_0\mu_0} = \frac{10^4}{18\pi^2},$$

med insatta värden för frekvensen 1 MHz.

$$\frac{10^4}{18\pi^2} \gg 1 \Rightarrow -1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_{\mathrm{r}}\varepsilon_0}\right)^2} \approx \frac{\sigma}{\omega\varepsilon_{\mathrm{r}}\varepsilon_0} \Rightarrow \delta \approx \sqrt{\frac{2}{\omega\sigma\mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{\pi f\sigma\mu_0}}.$$

Approximationen blir bättre med minskande frekvens.

Med $f_1 = 1$ MHz, $\delta_1 = 1$ m och $f_2 = 10$ kHz, fås att $\delta_2 = \delta_1\sqrt{f_1/f_2} = 10$ m = **Svar**

- -

2.

De komplexa dipolmomenten blir $\tilde{\boldsymbol{p}}_1 = p_0\hat{\boldsymbol{z}}$, $\tilde{\boldsymbol{p}}_2 = p_0\exp\left(-\mathrm{j}\pi/2\right)\hat{\boldsymbol{z}}$.

Avståndet till fältpunkten i fjärrzonen: $R_1 = r$, $R_2 = r - \lambda/6\sin 30^\circ = r - \lambda/12$.

Dipolerna har samma orientering och därmed samma faktor $\sin\theta$ i sina respektive strålfunktioner.

Fall 1: $E_1 \propto \left|\exp\left(-\mathrm{j}kr\right) + \exp\left(-\mathrm{j}\pi/2 - \mathrm{j}k\left(r - \lambda/12\right)\right)\right| = \{k = 2\pi/\lambda\}$

$= \left|\exp\left(-\mathrm{j}kr\right)\right| \cdot \left|1 + \exp\left(-\mathrm{j}\pi/2 + \mathrm{j}\pi/6\right)\right| = \left|1 + \exp\left(-\mathrm{j}\pi/3\right)\right| = \left|\exp\left(\mathrm{j}\pi/6\right) + \exp\left(-\mathrm{j}\pi/6\right)\right| = 2\cos\left(\pi/6\right)$

Fall 2: $E_2 \propto \left|\exp\left(-\mathrm{j}\pi/2 - \mathrm{j}kr\right) + \exp\left(-\mathrm{j}k\left(r - \lambda/12\right)\right)\right| = \{k = 2\pi/\lambda\}$

$= \left|\exp\left(-\mathrm{j}kr\right)\right| \cdot \left|\exp\left(-\mathrm{j}\pi/2\right) + \exp\left(\mathrm{j}\pi/6\right)\right| = \left|\exp\left(-\mathrm{j}\pi/3\right) + \exp\left(\mathrm{j}\pi/3\right)\right| = 2\cos\left(\pi/3\right)$

Svar: $\dfrac{E_2}{E_1} = \dfrac{\cos\left(\pi/3\right)}{\cos\left(\pi/6\right)} = \cos\left(\pi/3\right)\sqrt{\dfrac{2}{1 + \cos\left(\pi/3\right)}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{2}{1 + 1/2}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{4}{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

- -

3.

Hastigheten: $\boldsymbol{v} = v\left(\hat{\boldsymbol{x}}\cos\alpha + \hat{\boldsymbol{y}}\sin\alpha\right)$.

Emken: $\mathcal{E} = \int\left(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}\right) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \left[v\left(\hat{\boldsymbol{x}}\cos\alpha + \hat{\boldsymbol{y}}\sin\alpha\right) \times \left(B\hat{\boldsymbol{z}}\right)\right] \cdot \hat{\boldsymbol{x}}l = vBl\sin\alpha$.

Svar: $|v| = \left|\dfrac{\mathcal{E}}{Bl\sin\alpha}\right| = \dfrac{7900}{50 \cdot 10^{-6} \cdot 20 \cdot 10^3 \cdot (1/2)} = 15800$ m/s.

- -

4.

Se lösningen i studiehäftet Elektromagnetism, sidan 133, uppgift 11.

- -

5.

(a) Beräkna $\boldsymbol{B}$ från $\boldsymbol{E}$ medelst Faradays lag: $\nabla \times \boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$

$\boldsymbol{E}(x,y,z,t) = E_0 \sin\left(\dfrac{\pi x}{a}\right)\left[\sin(\omega t) - \cos(kz)\sin(\omega t - kh)\right]\hat{\boldsymbol{y}}$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\hat{\boldsymbol{x}}\frac{\partial E_y}{\partial z} + \hat{\boldsymbol{z}}\frac{\partial E_y}{\partial x}$$
$$= -\hat{\boldsymbol{x}}E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) k \sin(kz)\sin(\omega t - kh) + \hat{\boldsymbol{z}}E_0\frac{\pi}{a}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\left[\sin(\omega t) - \cos(kz)\sin(\omega t - kh)\right]$$

Integrering map tiden och utelämnandet av den statiska integrationskonstanten ger, **Delsvar:**

$$\boldsymbol{B}(x,y,z,t) = -E_0\frac{k}{\omega}\sin(kz)\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos(\omega t - kh)\,\hat{\boldsymbol{x}} + E_0\frac{\pi}{a\omega}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\left[\cos(\omega t) - \cos(kz)\cos(\omega t - kh)\right]\hat{\boldsymbol{z}}$$

(b) Beräkna $\boldsymbol{J}$ från $\boldsymbol{E}$ och $\boldsymbol{B}$ medelst den av Maxwell generaliserade Ampères lag: $\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J} + \mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$

Delsvar: $\boldsymbol{J}(x,y,z,t) = \dfrac{1}{\mu_0}\left(\dfrac{\partial B_x}{\partial z} - \dfrac{\partial B_z}{\partial x} - \mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial E_y}{\partial t}\right)\hat{\boldsymbol{y}}$

$$= \frac{E_0}{\omega\mu_0}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\left\{-k^2\cos(kz)\cos(\omega t - kh) + \underbrace{\left(\frac{\pi^2}{a^2} - \mu_0\varepsilon_0\omega^2\right)}_{=-k^2}\left[\cos(\omega t) - \cos(kz)\cos(\omega t - kh)\right]\right\}\hat{\boldsymbol{y}}$$
$$= -\frac{E_0 k^2}{\omega\mu_0}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos(\omega t)\,\hat{\boldsymbol{y}}$$

Examinator: Martin Norgren, tel. 790 7410
Hjälpmedel: Betas handbok i matematik, TETs "isskrapa" med vektorformler, samt ett A4-blad med godtyckliga anteckningar, på båda sidorna. Miniräknare ej tillåten.

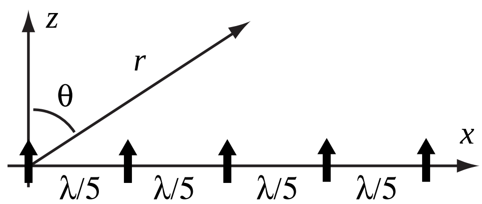
Varje uppgift ger maximalt 5p. Godkänt garanteras på 10p.

Namn och personnummer på varje blad. **Endast en uppgift per blad.**

Uppställda samband skall motiveras!
Ofullständiga motiveringar ger poängavdrag!

1.

Fem korta ($l \ll \lambda$) vertikala antenner är placerade på det inbördes avståndet $\lambda/5$ längs x-axeln. De matas med strömmar av samma amplitud men med sådan fas att fälten på stort avstånd i positiva x-axelns riktning samverkar maximalt från samtliga antenner. I punkten $R\hat{\boldsymbol{x}}$ ($R \gg \lambda$) har $\boldsymbol{E}$-fältet amplituden E_0.



a) Bestäm de fem antennströmmarnas inbördes fasläge!
b) Bestäm $\boldsymbol{E}$-fältets amplitud i punkten $R\hat{\boldsymbol{x}} + R\hat{\boldsymbol{z}}$!

- -

2.

I en monokromatisk plan våg som utbreder sig i vakuum är tidmedelvärdet av effekttätheten

$$\langle \boldsymbol{S} \rangle = 18850\hat{\boldsymbol{z}} \text{ W/m}^2 \approx 6000\pi\hat{\boldsymbol{z}} \text{ W/m}^2$$

(storleksordningsmässigt ungefär detsamma som i en mikrovågsugn).

Bestäm amplituden på det elektriska fältet, med två siffrors noggrannhet! (antag $c \approx 3 \cdot 10^8$ m/s)

- -

3.

En rätblocksformad resonanskavitet av metall har innermåtten $0 \le x \le a, 0 \le y \le b, 0 \le z \le d$.
Inuti kaviteten är det elektriska fältet

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{d}\right) \cos(\omega t)\, \hat{\boldsymbol{y}}$$

a) Bestäm det magnetiska fältet $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t)$ inuti kaviteten! (3 poäng)

b) Använd resultatet från a) för att bestämma $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)$, jämför med det givna uttrycket och bestäm vinkelfrekvensen ω (resonansvinkelfrekvensen)! (2 poäng)

- -

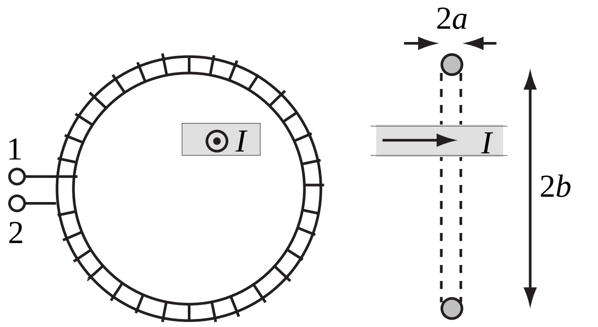
Vänd!

4.

En rak ledare med rektangulärt tvärsnitt för strömmen

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t) .$$

Kring ledaren finns en toroidformad tunn plastring med medelradien b och ett cirkulärt tvärsnitt med radien a ($a \ll b$). På plastringen har det lindats en spole med N varv. Det antas att varven är jämnt fördelade och tätt lindade över spolen.



Bestäm spänningen $U = V_1 - V_2$ mellan spolens anslutningstrådar!

Ledning: Fältet antas ej variera över tvärsnittet, eftersom $a \ll b$, men får ej förutsättas symmetriskt i spolen.

5.

En homogen ytströmtäthet, riktad i x-led och belägen över hela xy-planet, slås på vid tiden $t = 0$ och ökar linjärt med tiden, dvs

$$\boldsymbol{K}(\boldsymbol{r}, t) = kt\hat{\boldsymbol{x}}, \quad t \geq 0$$
$$\boldsymbol{K}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{0}, \quad t < 0$$

där k är en konstant.

Bestäm vektorpotentialen $\boldsymbol{A}$ och de elektromagnetiska fälten $\boldsymbol{E}$ och $\boldsymbol{B}$!

Ledning: Problemet är translationsinvariant i x- och y-led, varvid det räcker med att beräkna de sökta storheterna på z-axeln.

GOD JUL & GOTT NYTT ÅR

önskar

KURSENS LÄRARE

Förslag till lösning.

1.

Se lösningen i studiehäftet Elektromagnetism, sidan 188, uppgift Ö10.

2.

Antag att $\boldsymbol{E}$-fältet är i x-led: $\boldsymbol{E} = E_0 \cos(kz - \omega t)\,\hat{\boldsymbol{x}}$, vilket ger $\boldsymbol{B} = \frac{1}{c}\hat{\boldsymbol{z}} \times \boldsymbol{E} = \frac{E_0}{c}\cos(kz - \omega t)\,\hat{\boldsymbol{y}}$.

Poyntings vektor: $\boldsymbol{S} = \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c}\cos^2(kz - \omega t)\,\hat{\boldsymbol{z}}$, vilket ger $\langle \boldsymbol{S} \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}\hat{\boldsymbol{z}}$

Svar: $E_0 = \sqrt{2\mu_0 c \hat{\boldsymbol{z}} \cdot \langle \boldsymbol{S} \rangle} \approx \sqrt{2 \cdot (4\pi \cdot 10^{-7}) \cdot (3 \cdot 10^8) \cdot 6000\pi} = \sqrt{144\pi^2 \cdot 10^4} = 1200\pi \approx 3800$ V/m.

3.

a) Bortser från ett eventuellt statiskt magnetfält; statiska $\boldsymbol{E}$-fält kan ej existera i kaviteten (TET del 1).
Faradays lag, $\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$, ger att

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) = -\int \nabla \times (E_y \hat{\boldsymbol{y}})\,\mathrm{d}t = -E_0 \int \cos(\omega t)\,\mathrm{d}t \left(-\hat{\boldsymbol{x}}\frac{\partial}{\partial z} + \hat{\boldsymbol{z}}\frac{\partial}{\partial x}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi z}{d}\right)$$

$$= \frac{\pi E_0}{\omega}\sin(\omega t)\left[\frac{1}{d}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi z}{d}\right)\hat{\boldsymbol{x}} - \frac{1}{a}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi z}{d}\right)\hat{\boldsymbol{z}}\right] = \textbf{Svar a}$$

b) Ampères lag, $\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$, ger att

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = c^2 \int \nabla \times (B_x \hat{\boldsymbol{x}} + B_z \hat{\boldsymbol{z}})\,\mathrm{d}t = c^2 \int \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}\right)\hat{\boldsymbol{y}}\mathrm{d}t$$

$$= c^2 \frac{\pi E_0}{\omega}\int \sin(\omega t)\,\mathrm{d}t\left[-\frac{\pi}{d^2}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi z}{d}\right) - \frac{\pi}{a^2}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi z}{d}\right)\right]\hat{\boldsymbol{y}}$$

$$= c^2 \frac{\pi^2 E_0}{\omega^2}\cos(\omega t)\left[\frac{1}{d^2} + \frac{1}{a^2}\right]\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi z}{d}\right)\hat{\boldsymbol{y}}$$

En jämförelse med det givna $\boldsymbol{E}$ ger då att resonansvinkelfrekvensen blir: $\omega = \pi c\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{d^2}} = \textbf{Svar b}$

4.

Slingtråden antas vara perfekt ledande, varvid $\boldsymbol{E}_{\text{tråd}} = -\nabla V - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = \boldsymbol{0}$

Spänningen: $U = V_1 - V_2 = \int_2^1 \nabla V \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}_{\text{tråd}} = -\int_2^1 \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}_{\text{tråd}} \approx -\frac{\mathrm{d}\Phi_{\text{tot}}}{\mathrm{d}t}$, då kretsen är nästan sluten.

Flödet genom ett varv: $\Phi_{\text{varv}} \approx \pi a^2 \hat{\boldsymbol{\phi}} \cdot \boldsymbol{B}$, där $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ pekar längs med plastringen i positiv omloppsriktning kring strömmen i den rektangulära ledaren.

Flödet genom $\mathrm{d}N = \frac{N}{2\pi}\mathrm{d}\phi$ varv: $\mathrm{d}\Phi \approx \frac{N}{2\pi}\pi a^2 \hat{\boldsymbol{\phi}} \cdot \boldsymbol{B}\mathrm{d}\phi = \frac{Na^2}{2b}\boldsymbol{B} \cdot \left(b\hat{\boldsymbol{\phi}}\mathrm{d}\phi\right) = \frac{Na^2}{2b}\boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}_{\text{ring}}$

Totala flödet: $\Phi_{\text{tot}} = \int \mathrm{d}\Phi = \frac{Na^2}{2b}\oint \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}_{\text{ring}} = \frac{Na^2}{2b}\mu_0 I(t)$

Svar: $U(t) \approx -\frac{\mathrm{d}\Phi_{\text{tot}}}{\mathrm{d}t} \approx -\frac{\mu_0 N a^2}{2b}\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\omega \mu_0 I_0 N a^2}{2b}\sin(\omega t)$

5.

Den retarderade vektorpotentialen ges som

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\boldsymbol{K}(\boldsymbol{r}',t_{\mathrm{r}})}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}a'$$

där den retarderade tiden $t_{\mathrm{r}}=t-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|/c$. Vi har att $\boldsymbol{r}=z\hat{\boldsymbol{z}},\boldsymbol{r}'=s'\hat{\boldsymbol{s}}',\mathrm{d}a'=s'\mathrm{d}s'\mathrm{d}\phi'$.
Den retarderade strömtätheten är $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{r}',t_{\mathrm{r}})=kt_{\mathrm{r}}\hat{\boldsymbol{x}}\cdot\mathrm{H}(t_{\mathrm{r}})$, där vi infört Heavisides stegfunktion: $\mathrm{H}(t)=1,t>0;\mathrm{H}(t)=0,t<0$. Vektorpotentialen blir

$$\boldsymbol{A}(z,t)=\frac{\mu_0}{4\pi}k\hat{\boldsymbol{x}}2\pi\int_0^\infty\frac{\mathrm{H}\left(t-\frac{1}{c}\sqrt{z^2+(s')^2}\right)\left(t-\frac{1}{c}\sqrt{z^2+(s')^2}\right)}{\sqrt{z^2+(s')^2}}s'\mathrm{d}s'$$

Det första bidraget, från origo, kommer fram till $z\hat{\boldsymbol{z}}$ vid tiden $|z|/c$, och för efterföljande tider har bidragen från området $s'>\sqrt{c^2t^2-z^2}$ inte hunnit fram. Vi får att

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}(z,t)&=\frac{\mu_0k}{2c}\hat{\boldsymbol{x}}\,\mathrm{H}\left(t-\frac{|z|}{c}\right)\int_0^{\sqrt{c^2t^2-z^2}}\left(\frac{cts'}{\sqrt{z^2+(s')^2}}-s'\right)\mathrm{d}s'\\&=\frac{\mu_0k}{2c}\hat{\boldsymbol{x}}\,\mathrm{H}\left(t-\frac{|z|}{c}\right)\left[ct\sqrt{z^2+(s')^2}-\frac{(s')^2}{2}\right]_0^{\sqrt{c^2t^2-z^2}}\\&=\frac{\mu_0k}{2c}\hat{\boldsymbol{x}}\,\mathrm{H}\left(t-\frac{|z|}{c}\right)\left(c^2t^2-ct|z|-\frac{c^2t^2-z^2}{2}\right)=\frac{\mu_0k}{4c}\hat{\boldsymbol{x}}\,\mathrm{H}\left(t-\frac{|z|}{c}\right)(ct-|z|)^2\end{aligned}$$

Svar:

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{A}(z,t)=\frac{\mu_0k}{4c}(ct-|z|)^2\,\hat{\boldsymbol{x}},\quad t>|z|/c\\&\boldsymbol{E}(z,t)=-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}=-\frac{\partial A_x}{\partial t}\hat{\boldsymbol{x}}=-\frac{\mu_0k}{2}(ct-|z|)\,\hat{\boldsymbol{x}},\quad t>|z|/c\\&\boldsymbol{B}(z,t)=\nabla\times\boldsymbol{A}=\frac{\partial A_x}{\partial z}\hat{\boldsymbol{y}}=-\frac{\mu_0k}{2c}(ct-|z|)\,\frac{z}{|z|}\hat{\boldsymbol{y}},\quad t>|z|/c\\&\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}=\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0},\quad t<|z|/c\end{aligned}$$

Examinator: Martin Norgren, tel. 790 7410
Hjälpmedel: Betas handbok i matematik, TETs "isskrapa" med vektorformler, samt ett A4-blad med godtyckliga anteckningar, på båda sidorna. Miniräknare ej tillåten.

Varje uppgift ger maximalt 5p. Godkänt garanteras på 10p.

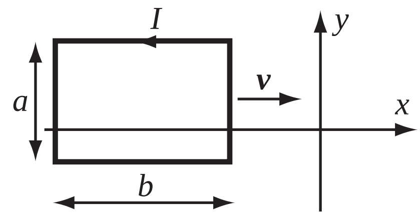
Namn och personnummer på varje blad. **Endast en uppgift per blad.**

Uppställda samband skall motiveras!
Ofullständiga motiveringar ger poängavdrag!

1.

Ett statiskt magnetfält är i xy-planet

$$\boldsymbol{B} = B_0\hat{\boldsymbol{z}}, \text{ för } 0 < x < 2b$$
$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}, \text{ för } x < 0 \text{ och } x > 2b$$



En plan slinga, enligt figuren, rör sig med den konstanta hastigheten $\boldsymbol{v} = v_0\hat{\boldsymbol{x}}$ i xy-planet. Slingan har resistansen R och försumbar egeninduktans.

Bestäm den inducerade strömmen i slingan som funktion av tiden!

Sätt $t = 0$ då slingans främre del når fram till $x = 0$!

- -

2.

På en rak mittpunktsmatad antenn med längden $l = \lambda/3$ längs z-axeln är strömfördelningen $I(z,t) = I_0(1 - 2|z|/l)\cos\omega t$, där $|z| < l/2$.
Beräkna effektivvärdet av elektriska fältstyrkan som funktion av r, θ på det stora avståndet r från antennen; θ är polvinkeln räknat från den positiva z-axeln.

- -

3.

En plan linjärt polariserad våg i vakuum med frekvensen 1 MHz faller vinkelrätt in mot ett område $z > 0$ med ledningsförmågan $\sigma = 1,6 \cdot 10^6$ S/m, relativa permittiviteten $\varepsilon_\mathrm{r} = 1$ och relativa permeabiliteten $\mu_\mathrm{r} = 1$.

Beräkna tidmedelvärdet av effektförlusten per kvadratmeter in i området $z > 0$ då totala $\boldsymbol{E}$-fältet i planet $z = 0$ har amplituden 30 μV/m!

- -

4.

I en luftfylld koaxialkabel har innerledaren radien a och ytterledaren radien b.
I kabeln (området $a < s < b$) utbreder sig en elektromagnetisk puls med fälten

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = E_0\frac{a}{s}\cos^2\left(\frac{\pi(z-ct)}{2l}\right)\hat{\boldsymbol{s}}, \quad \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = \frac{E_0}{c}\frac{a}{s}\cos^2\left(\frac{\pi(z-ct)}{2l}\right)\hat{\boldsymbol{\phi}}, \quad |z-ct| < l$$

För $|z - ct| > l$ är fälten noll.

a) Bestäm effekttransporten, som funktion av tiden, genom ett tvärsnitt $z = z_0$ i koaxialkabeln!

b) Bestäm den totala energi som pulsen transporterar förbi z_0!

- -

Vänd!

5.

De retarderade potentialerna ges som

$$V(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\boldsymbol{r}',t_\mathrm{r})}{R}\mathrm{d}\tau', \qquad \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}',t_\mathrm{r})}{R}\mathrm{d}\tau',$$

där den retarderade tiden $t_\mathrm{r} = t - \dfrac{R}{c}$.

Visa att de retarderade potentialerna uppfyller Lorentzvillkoret: $\nabla \cdot \boldsymbol{A} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial V}{\partial t} = 0$!

Ledningar: Antag att ρ och $\boldsymbol{J}$ finns inom ett område med begränsad utsträckning. För en godtycklig funktion $f(R)$ gäller att $\nabla f(R) = -\nabla' f(R)$.

Förslag till lösning.

1.

Med $+\hat{\boldsymbol{z}}$ som ytnormal blir flödet genom slingan

$$\Phi(t) = \begin{cases} B_0 a v_0 t, & 0 < t < b/v_0 \\ B_0 ab, & b/v_0 < t < 2b/v_0 \\ B_0 a(3b - v_0 t), & 2b/v_0 < t < 3b/v_0 \\ 0, & \text{övriga } t \end{cases}$$

Med emk och ström definierade i positiv cirkulationsriktning kring $\hat{\boldsymbol{z}}$ fås att $I = \dfrac{\mathcal{E}}{R} = -\dfrac{1}{R}\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$, vilket ger
Svar:

$$I(t) = \begin{cases} -\dfrac{B_0 a v_0}{R}, & 0 < t < b/v_0 \\ \dfrac{B_0 a v_0}{R}, & 2b/v_0 < t < 3b/v_0 \\ 0, & \text{övriga } t \end{cases}$$

- -

2.

Se lösningen i studiehäftet Elektromagnetism, sidan 191, uppgift Ö16, *men* byt överallt λ mot $\lambda/2$. Detta innebär att svaret blir

$$E_{\text{eff}} = \frac{|\boldsymbol{E}|}{\sqrt{2}} = \frac{3\eta_0 \hat{A}}{2\sqrt{2}\pi^2 r}|\sin\theta|\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{3}\cos\theta\right)\right)\frac{1}{\cos^2\theta}$$

- -

3.

Låt $E_0 = 30\ \mu\text{V/m}$ vara amplituden vid gränsytan ($\boldsymbol{E}$ är tangentiell och därmed kontinuerlig). Vid $z = 0^+$ ges effekttransporten som $\langle \boldsymbol{S} \rangle = \dfrac{1}{2}\text{Re}\{\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}^*\} = \dfrac{E_0^2}{2}\text{Re}\left\{\dfrac{1}{\eta^*}\right\}\hat{\boldsymbol{z}}$, där vågimpedansen $\eta = \sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon + i\sigma/\omega}}$

Numeriska värden ger att $\sigma/\omega \gg \varepsilon$ varvid $\eta = \sqrt{\dfrac{\omega\mu}{i\sigma}}$.

$$\frac{1}{\eta^*} = \sqrt{\frac{-i\sigma}{\omega\mu}} = (1 - i)\sqrt{\frac{\sigma}{2\omega\mu}}$$

Svar: $\langle \boldsymbol{S} \rangle = \dfrac{E_0^2}{2}\sqrt{\dfrac{\sigma}{2\omega\mu}}\hat{\boldsymbol{z}} = \dfrac{900 \cdot 10^{-12}}{2}\sqrt{\dfrac{1,6 \cdot 10^6}{2 \cdot 2\pi \cdot 10^6 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}}\hat{\boldsymbol{z}} = \dfrac{9 \cdot 10^{-10} \cdot 1000}{2\pi}\hat{\boldsymbol{z}} \approx 0,14\hat{\boldsymbol{z}}\ \mu\text{W/m}^2$

- -

4.

Poyntings vektor, vid $z = z_0$: $\boldsymbol{S} = \dfrac{1}{\mu_0}\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B} = \dfrac{E_0^2 a^2}{\mu_0 c s^2} \cos^4\left(\dfrac{\pi\left(z_0 - ct\right)}{2l}\right)\hat{\boldsymbol{z}}$

Effekttransporten: $P\left(t\right) = \displaystyle\int \boldsymbol{S} \cdot \hat{\boldsymbol{z}} \mathrm{d}a = \dfrac{2\pi E_0^2 a^2}{\mu_0 c} \cos^4\left(\dfrac{\pi\left(z_0 - ct\right)}{2l}\right) \int_a^b \dfrac{1}{s^2} s \mathrm{d}s \Rightarrow$

Svar a: $P\left(t\right) = \dfrac{2\pi E_0^2 a^2}{\mu_0 c} \ln\dfrac{b}{a} \cos^4\left(\dfrac{\pi\left(z_0 - ct\right)}{2l}\right)$ för $|z_0 - ct| < l$; $P\left(t\right) = 0$ för $|z_0 - ct| > l$.

Energin: $W = \displaystyle\int P\left(t\right) \mathrm{d}t = \left\{u = \dfrac{\pi\left(z_0 - ct\right)}{2l}\right\} = \dfrac{2\pi E_0^2 a^2}{\mu_0 c} \ln\dfrac{b}{a} \dfrac{2l}{\pi c} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4\left(u\right) \mathrm{d}u$

$\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4\left(u\right) \mathrm{d}u = 2\int_0^{\pi/2} \dfrac{1}{4}\left(1 + \cos\left(2u\right)\right)^2 \mathrm{d}u = 2\int_0^{\pi/2} \dfrac{1}{4}\left(1 + 2\cos\left(2u\right) + \dfrac{1 + \cos\left(4u\right)}{2}\right) \mathrm{d}u = \dfrac{3\pi}{8}$

Svar b: $W = \dfrac{3\pi\varepsilon_0 E_0^2 l a^2}{2} \ln\dfrac{b}{a}$

5.

$$\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{r}, t\right) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{r}', t_{\mathrm{r}}\right)}{R} \mathrm{d}\tau'$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{r}, t\right) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\left[\nabla\left(\frac{1}{R}\right) \cdot \boldsymbol{J} + \frac{1}{R}\frac{\partial \boldsymbol{J}}{\partial t_{\mathrm{r}}} \cdot \nabla t_{\mathrm{r}}\right] \mathrm{d}\tau' = -\frac{\mu_0}{4\pi}\int\left[\nabla'\left(\frac{1}{R}\right) \cdot \boldsymbol{J} + \frac{1}{R}\frac{\partial \boldsymbol{J}}{\partial t_{\mathrm{r}}} \cdot \nabla' t_{\mathrm{r}}\right] \mathrm{d}\tau'$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi}\int\left[\nabla' \cdot \left(\frac{\boldsymbol{J}}{R}\right) - \frac{1}{R}\nabla' \cdot \boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{r}', t_{\mathrm{r}}\right) + \frac{1}{R}\frac{\partial \boldsymbol{J}}{\partial t_{\mathrm{r}}} \cdot \nabla' t_{\mathrm{r}}\right] \mathrm{d}\tau'$$

Termen innehållande den fullständiga divergensen görs om till en ytintegral som måste innesluta volymen innehållande $\boldsymbol{J}$. Därmed blir $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{0}$ på ytan och inget bidrag erhålles.

Det explicita $\boldsymbol{r}'$-beroendet och kontinuitetsekvationen ger att $-\nabla' \cdot \boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{r}', t_{\mathrm{r}}\right) = \dfrac{\partial \rho\left(\boldsymbol{r}', t_{\mathrm{r}}\right)}{\partial t_{\mathrm{r}}} - \dfrac{\partial \boldsymbol{J}}{\partial t_{\mathrm{r}}} \cdot \nabla' t_{\mathrm{r}}$

Sammantaget:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{1}{R}\frac{\partial \rho\left(\boldsymbol{r}', t_{\mathrm{r}}\right)}{\partial t_{\mathrm{r}}} \mathrm{d}\tau' = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\int \frac{1}{R}\frac{\partial \rho\left(\boldsymbol{r}', t_{\mathrm{r}}\right)}{\partial t} \mathrm{d}\tau'$$

$$= -\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho\left(\boldsymbol{r}', t_{\mathrm{r}}\right)}{R} \mathrm{d}\tau'\right\} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t} \quad \textbf{V.S.V.}$$

TEORETISK ELEKTROTEKNIK del 2 (2A1840/2) för F **2003–08–25,** **kl 08-13**

Examinator: Martin Norgren, tel. 790 7410
Hjälpmedel: Betas handbok i matematik, TETs "isskrapa" med vektorformler, samt ett A4-blad med godtyckliga anteckningar, på båda sidorna. Miniräknare ej tillåten.

Varje uppgift ger maximalt 5p. Godkänt garanteras på 10p.

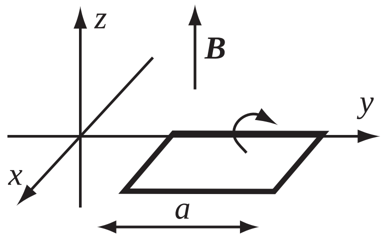
Namn och personnummer på varje blad. **Endast en uppgift per blad.**

Uppställda samband skall motiveras!
Ofullständiga motiveringar ger poängavdrag!

1.

En kvadratisk slinga med sidan a roterar kring ena sidan, som sammanfaller med y-axeln, i ett homogent magnetfält $\boldsymbol{B} = B_0\hat{\boldsymbol{z}}$.

Beräkna effektutvecklingen i slingan (tidmedelvärdet), om rotationshastigheten är n varv/sekund och slingans resistans är R (från självinduktansen bortses)!



- -

2.

En plan våg, med amplituden 0,9 V/m på den elektriska fältstyrkan, utbreder sig i vakuum. Vågen faller in vinkelrätt mot en halvrymd bestående av ett förlustfritt dielektriskt material ($\mu_\mathrm{r} = 1, \sigma = 0$).
I den transmitterade vågen har den magnetiska fältstyrkan amplituden 5 nT.

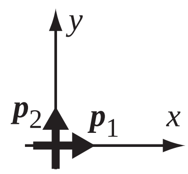
Bestäm materialets relativa permittivitet ε_r!

- -

3.

Två elementardipoler,
$\boldsymbol{p}_1 = |C_1| \sin \omega t \hat{\boldsymbol{x}}$ och $\boldsymbol{p}_2 = |C_2| \sin(\omega t + \alpha) \hat{\boldsymbol{y}}$, är placerade i origo.
Genom lämpligt val av $|C_1/C_2|$ och α blir strålningsdiagrammet för $\boldsymbol{E}$-fältet en cirkel i xy-planet.

Bestäm $|C_1/C_2|$ och α!



- -

4.

I koordinatsystemet $S(x, y, z)$ finns det centrerat runt z-axeln ett långsträckt stavformat område, med radien a, inom vilket rymdladdningstätheten är $\rho(s) = \rho_0 \left(\frac{a}{s} - 2\right)$.

Det elektriska fältet blir då $\boldsymbol{E}(s, \phi) = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}(a - s)\hat{\boldsymbol{s}}$ för $s < a$ och $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}$ för $s > a$.

Ett annat koordinatsystem $S'(x', y', z')$ rör sig med hastigheten $\boldsymbol{v} = v\hat{\boldsymbol{z}}$ relativt systemet S. Systemen är orienterade så att deras z-axlar sammanfaller.

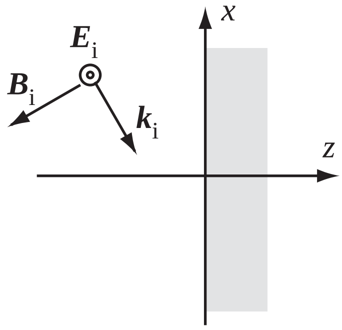
a) Bestäm fälten $\boldsymbol{E}'$ och $\boldsymbol{B}'$, i systemet S' (3 poäng)!

b) Bestäm rymdladdningstätheten ρ' och volymströmtätheten $\boldsymbol{J}'$, i systemet S' (2 poäng)!

- -

Vänd!

5.



En plan våg med det elektriska fältet

$$\boldsymbol{E}_\mathrm{i} = E_0 \cos\left(\omega t - k\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}z\right)\right)\hat{\boldsymbol{y}}$$

infaller från vakuum mot ett metallplan i xy-planet.

Bestäm ytströmtätheten i metallplanet!

Förslag till lösning.

1.

Flödet genom slingan blir $\Phi(t) = B_0 a^2 \cos(2\pi n t + \alpha)$, där α är en godtycklig faskonstant.
Strömmen blir $I(t) = \dfrac{\mathcal{E}}{R} = -\dfrac{1}{R}\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \dfrac{2\pi n B_0 a^2}{R}\sin(2\pi n t + \alpha)$
Effekten $P = R\left\langle I^2\right\rangle = R\dfrac{\left(2\pi n B_0 a^2\right)^2}{2} = \dfrac{2\pi^2 n^2 B_0^2 a^4}{R} =$ **Svar**

- -

2.

Sambandet mellan amplituderna hos det transmitterade och det infallande elektriska fältet är
$E_\mathrm{t} = \dfrac{2\eta}{\eta + \eta_0}E_\mathrm{i}$, där $\eta_0 = \sqrt{\dfrac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$ och $\eta = \sqrt{\dfrac{\mu_0}{\varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r}}} = \dfrac{\eta_0}{\sqrt{\varepsilon_\mathrm{r}}}$.
Amplituden hos det transmitterade magnetfältet är
$B_\mathrm{t} = \dfrac{E_\mathrm{t}}{v} = \sqrt{\varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r}\mu_0}E_\mathrm{t} = \dfrac{\sqrt{\varepsilon_\mathrm{r}}E_\mathrm{t}}{c} = \dfrac{\sqrt{\varepsilon_\mathrm{r}}}{c}\dfrac{2}{1+\eta_0/\eta}E_\mathrm{i} = \dfrac{2\sqrt{\varepsilon_\mathrm{r}}}{c\left(1+\sqrt{\varepsilon_\mathrm{r}}\right)}E_\mathrm{i}$
Vi får att $\sqrt{\varepsilon_\mathrm{r}} = \dfrac{cB_\mathrm{t}}{2E_\mathrm{i} - cB_\mathrm{t}} = \dfrac{3\cdot 10^8\cdot 5\cdot 10^{-9}}{1,8 - 3\cdot 10^8\cdot 5\cdot 10^{-9}} = \dfrac{1,5}{0,3} = 5 \Rightarrow$ **Svar:** $\varepsilon_\mathrm{r} = 25$.

- -

3.

Se lösningen i studiehäftet Elektromagnetism, sidan 184, uppgift Ö4.

- -

4.

Vi noterar först att $\hat{\boldsymbol{s}}$ är transversell mot $\boldsymbol{v}$, varvid $s' = s$, $\hat{\boldsymbol{s}}' = \hat{\boldsymbol{s}}$ och området har samma radie a i systemet S'.
Svar a: Fälten transformeras enligt

$$\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E}_\parallel + \gamma\left(\boldsymbol{E}_\perp + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}\right) = \left\{\boldsymbol{E}_\parallel = \boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}\right\} = \gamma\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}(a-s)\,\hat{\boldsymbol{s}} = \gamma\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}(a-s')\,\hat{\boldsymbol{s}}',$$
$$\boldsymbol{B}' = \boldsymbol{B}_\parallel + \gamma\left(\boldsymbol{B}_\perp - \frac{\boldsymbol{v}}{c^2}\times\boldsymbol{E}\right) = -\gamma\frac{v}{c^2}\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}(a-s')\,\hat{\boldsymbol{z}}\times\hat{\boldsymbol{s}}' = -\gamma\frac{v}{c^2}\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}(a-s')\,\hat{\boldsymbol{\phi}}'.$$

Svar b: För $s' < a$ fås att:
Rymdladdningen: $\rho' = \varepsilon_0\nabla'\cdot\boldsymbol{E}' = \varepsilon_0\dfrac{1}{s'}\dfrac{\partial}{\partial s'}\left(s'E_{s'}\right) = \gamma\rho_0\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s'}\left(as' - (s')^2\right) = \gamma\rho_0\left(\dfrac{a}{s'} - 2\right)$
Volymströmtätheten: $\boldsymbol{J}' = \dfrac{1}{\mu_0}\nabla'\times\boldsymbol{B}' = c^2\varepsilon_0\hat{\boldsymbol{z}}\dfrac{1}{s'}\dfrac{\partial}{\partial s'}\left(s'B_{\phi'}\right) = -\gamma\rho_0\left(\dfrac{a}{s'} - 2\right)\boldsymbol{v}$
Kontroll:
Stämmer med transformationsuttrycken $\rho' = \gamma\left(\rho - \dfrac{v}{c^2}J_\parallel\right)$, $\quad J'_\parallel = \gamma\left(J_\parallel - v\rho\right)$, $\quad \boldsymbol{J}'_\perp = \boldsymbol{J}_\perp$.

- -

5.

Infallande enhetsvågvektorn är $\hat{\boldsymbol{k}}_\mathrm{i} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{1}{2}\hat{\boldsymbol{z}}$.

Infallande $\boldsymbol{H}$-fältet: $\boldsymbol{H}_\mathrm{i} = \frac{1}{\eta_0}\hat{\boldsymbol{k}}_\mathrm{i} \times \boldsymbol{E}_\mathrm{i} = \frac{E_0}{\eta_0}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{\boldsymbol{z}} - \frac{1}{2}\hat{\boldsymbol{x}}\right)\cos\left(\omega t - k\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}z\right)\right)$,

där $\eta_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$.

Reflekterade $\boldsymbol{E}$-fältet:

$$\boldsymbol{E}_\mathrm{r} = -E_0\cos\left(\omega t - k\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}z\right)\right)\hat{\boldsymbol{y}}$$

Reflekterade enhetsvågvektorn: $\hat{\boldsymbol{k}}_\mathrm{r} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{\boldsymbol{x}} - \frac{1}{2}\hat{\boldsymbol{z}}$.

Reflekterade $\boldsymbol{H}$-fältet: $\boldsymbol{H}_\mathrm{r} = \frac{1}{\eta_0}\hat{\boldsymbol{k}}_\mathrm{r} \times \boldsymbol{E}_\mathrm{r} = \frac{E_0}{\eta_0}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{\boldsymbol{z}} - \frac{1}{2}\hat{\boldsymbol{x}}\right)\cos\left(\omega t - k\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}z\right)\right)$

Totala $\boldsymbol{H}$-fältet i ytan $z = 0$: $\boldsymbol{H} = -\frac{E_0}{\eta_0}\cos\left(\omega t + k\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\hat{\boldsymbol{x}}$

Randvillkoret för $\boldsymbol{H}$ vid metallytan ger att $\boldsymbol{K} = -\hat{\boldsymbol{z}} \times \boldsymbol{H} = \frac{E_0}{\eta_0}\cos\left(\omega t + k\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\hat{\boldsymbol{y}} =$ **Svar**

TEORETISK ELEKTROTEKNIK F del 2 (2A1840/2)

TEORETISK ELEKTROTEKNIK ME del 2 (2A1850/2) **2003–12–19, kl 14-19**

Examinator: Martin Norgren, tel. 790 7410

Hjälpmedel: TETs formelsamling, TETs "isskrapa" med vektorformler och βetas handbok i matematik.

Miniräknare **ej** tillåten.

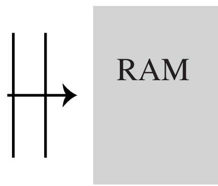
Varje uppgift ger maximalt 5p. Godkänt garanteras på 10p.

Namn och personnummer på varje blad. **Endast en uppgift per blad.**

Uppställda samband skall motiveras!
Ofullständiga motiveringar ger poängavdrag!

1.

Ett radarabsorberande material (RAM) har permittiviteten $\varepsilon = 3\varepsilon_0$, permeabiliteten $\mu = 3\mu_0$ och ledningsförmågan $\sigma = 0,01$ S/m. En plan våg med frekvensen 1 GHz faller från luft in vinkelrätt mot en halvrymd med ett RAM.



Bestäm beloppet hos reflexionsfaktorn!

Ledning: Använd $\varepsilon_0 \approx \dfrac{10^{-9}}{36\pi}$ F/m samt eventuella ytterligare approximationer.

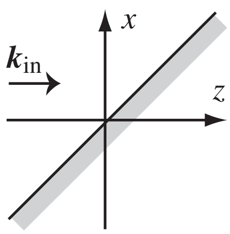
- -

2.

En elliptiskt polariserad plan våg med det komplexa elektriska fältet

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = E_0 (\hat{\boldsymbol{x}} + \mathrm{i}2\hat{\boldsymbol{y}}) \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz - \omega t)}$$

faller in mot en metallyta belägen i planet $x = z$.



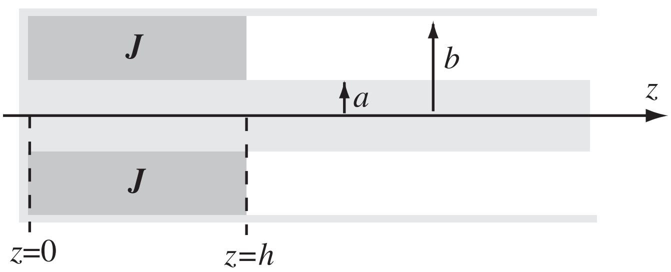
Bestäm den reflekterade vågens komplexa magnetfält!

- -

3.

I en luftfylld koaxialkabel har innerledaren radien a och ytterledaren radien b. I änden $z = 0$ är kabeln avslutad med en kortslutningsplatta. Den andra änden, som är på stort avstånd, är reflexionsfritt avslutad.

I avsnittet $0 < z < h$ mellan ledarna finns en strömtäthet $\boldsymbol{J}$, som ger upphov till ett elektromagnetiskt fält inuti kabeln.



I källområdet $a < s < b, 0 \leq \varphi < 2\pi, 0 < z < h$ är det elektriska fältet (i cylinderkoordinater)

$$\boldsymbol{E}(s, \varphi, z) = \frac{I}{2\pi\omega\varepsilon_0 h} \left[\sin\left(\omega t - \frac{\omega z}{c}\right) - \sin(\omega t) + \sin\left(\frac{\omega z}{c}\right) \cos\left(\omega t - \frac{\omega h}{c}\right) \right] \frac{\hat{\boldsymbol{s}}}{s}$$

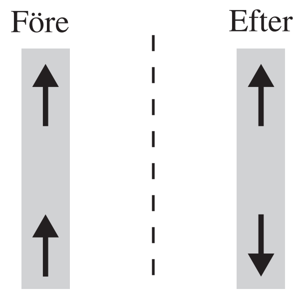
Bestäm i källområdet uttrycken för det magnetiska fältet $\boldsymbol{B}$ och strömtätheten $\boldsymbol{J}$!

- -

Vänd!

4.

Två elektriska dipolantenner har monterats på en mast.
Avståndet mellan dipolerna är $\lambda/2$ (en halv våglängd).
Dipolerna, vilkas matningsström har samma amplitud och fas, är från början riktade åt samma håll längs med masten.
Pga slarvigt montage gör blåsten att den undre dipolen vrider sig ett halvt varv, och får därmed motsatt riktning längs med masten.



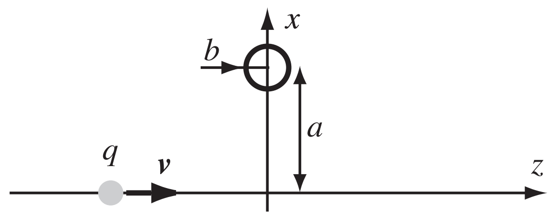
Bestäm kvoten mellan den utstrålade effekten efteråt och den utstrålade effekten före!
Ange också svaret numeriskt med en siffras noggrannhet!

Till hjälp: Lägg dipolerna i punkterna $\lambda/4\hat{\boldsymbol{z}}$ och $-\lambda/4\hat{\boldsymbol{z}}$.

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)\cos^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)\mathrm{d}x=\frac{2}{3}+\frac{2}{\pi^2},\qquad \int_{-1}^{1}(1-x^2)\sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)\mathrm{d}x=\frac{2}{3}-\frac{2}{\pi^2}$$

5.

En liten laddning q rör sig med den konstanta hastigheten $\boldsymbol{v}=v\hat{\boldsymbol{z}}(v>0)$ utefter z-axeln. Hastigheten är måttlig, dvs $v \ll c$. Kring punkten $a\hat{\boldsymbol{x}}$ ligger det i xz-planet en cirkulär slinga med radien b, resistansen R och försumbar egeninduktans. Slingan är liten, dvs $b \ll a$.



Bestäm den i slingan utvecklade värmeenergin!

Ledningar:

Om $v \ll c$ och laddningen passerar origo vid tiden $t=0$ blir magnetfältet $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)=\dfrac{\mu_0 q}{4\pi}\cdot\dfrac{\boldsymbol{v}\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{v}t)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{v}t|^3}$

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{(p^2+x^2)^5}\mathrm{d}x=\frac{5\pi}{256p^7}$$

GOD JUL & GOTT NYTT ÅR
önskar
KURSERNAS LÄRARE

Förslag till lösning.

1.

Vågimpedansen i RAM:et är $\eta = \sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon + \mathrm{i}\sigma/\omega}} = \sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}}\left(1+\dfrac{\mathrm{i}\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^{-1/2} = \sqrt{\dfrac{3\mu_0}{3\varepsilon_0}}\left(1+\dfrac{\mathrm{i}\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^{-1/2} = \eta_0\left(1+\dfrac{\mathrm{i}\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^{-1/2}$,
där $\eta_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$ är vågimpedansen i luften.

Numeriska värden ger att $\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon} = \dfrac{0,01\cdot 36\pi}{2\pi 10^9\cdot 3\cdot 10^{-9}} = 0,06$, vilket ger att $\eta \approx \eta_0\left(1-\dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{i}\sigma}{\omega\varepsilon}\right)$

Reflexionsfaktorn: $r = \dfrac{\eta-\eta_0}{\eta+\eta_0} = \dfrac{-\dfrac{\mathrm{i}\sigma}{2\omega\varepsilon}}{2-\dfrac{\mathrm{i}\sigma}{2\omega\varepsilon}} \approx -\dfrac{\mathrm{i}\sigma}{4\omega\varepsilon} = -\mathrm{i}0,015$. **Svar:** $|r| = 0,015$

2.

Infallande elektriska fältet: $\boldsymbol{E}_{\text{in}}(\boldsymbol{r},t) = E_0(\hat{\boldsymbol{x}} + \mathrm{i}2\hat{\boldsymbol{y}})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)}$ har vågvektorn $\boldsymbol{k}_{\text{in}} = k\hat{\boldsymbol{z}}$

Metallplanet har en ytnormal $\hat{\boldsymbol{n}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\boldsymbol{x}} - \hat{\boldsymbol{z}})$

Spegling av $\boldsymbol{k}_{\text{in}}$ i metallplanet ger att reflekterade vågvektorn blir

$\boldsymbol{k}_{\text{refl}} = \boldsymbol{k}_{\text{in}} - 2\hat{\boldsymbol{n}}(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{k}_{\text{in}}) = k\left(\hat{\boldsymbol{z}} - 2\frac{\hat{\boldsymbol{x}}-\hat{\boldsymbol{z}}}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) = k\hat{\boldsymbol{x}}$

Med planvågsvillkoret $\boldsymbol{k}_{\text{refl}}\cdot\boldsymbol{E}_{\text{refl}} = 0$ görs ansatsen $\boldsymbol{E}_{\text{refl}} = (a\hat{\boldsymbol{y}} + b\hat{\boldsymbol{z}})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}$

I planet $x = z$ fås att det totala fältet blir $\boldsymbol{E}_{\text{tot}} = \boldsymbol{E}_{\text{in}} + \boldsymbol{E}_{\text{refl}} = (E_0\hat{\boldsymbol{x}} + (\mathrm{i}2E_0 + a)\,\hat{\boldsymbol{y}} + b\hat{\boldsymbol{z}})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)}$

Randvillkoret $\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E}_{\text{tot}} = \boldsymbol{0}$ ger att $-\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\boldsymbol{y}}(E_0 + b) + \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\boldsymbol{x}} + \hat{\boldsymbol{z}})(\mathrm{i}2E_0 + a) = \boldsymbol{0}$, varur $a = -\mathrm{i}2E_0, b = -E_0$

$\boldsymbol{E}_{\text{refl}}(\boldsymbol{r},t) = -E_0(\mathrm{i}2\hat{\boldsymbol{y}} + \hat{\boldsymbol{z}})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}$

$\boldsymbol{B}_{\text{refl}}(\boldsymbol{r},t) = \dfrac{1}{c}\hat{\boldsymbol{k}}_{\text{refl}}\times\boldsymbol{E}_{\text{refl}} = \dfrac{1}{c}\hat{\boldsymbol{x}}\times\boldsymbol{E}_{\text{refl}} = \dfrac{E_0}{c}(\hat{\boldsymbol{y}} - \mathrm{i}2\hat{\boldsymbol{z}})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}$=**Svar**

3.

$$\boldsymbol{E}(s,\varphi,z) = \frac{I}{2\pi\omega\varepsilon_0 h}\left[\sin\left(\omega t - \frac{\omega z}{c}\right) - \sin(\omega t) + \sin\left(\frac{\omega z}{c}\right)\cos\left(\omega t - \frac{\omega h}{c}\right)\right]\frac{\hat{\boldsymbol{s}}}{s}$$

Faradays lag: $\nabla\times\boldsymbol{E} = \hat{\boldsymbol{\varphi}}\dfrac{\partial E_s}{\partial z} = \dfrac{I}{2\pi\omega\varepsilon_0 h}\dfrac{\omega}{c}\left[-\cos\left(\omega t - \dfrac{\omega z}{c}\right) + \cos\left(\dfrac{\omega z}{c}\right)\cos\left(\omega t - \dfrac{\omega h}{c}\right)\right]\dfrac{\hat{\boldsymbol{\varphi}}}{s} = -\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$

Tidsintegrering och utelämnande av eventuell statisk del av magnetfältet ger

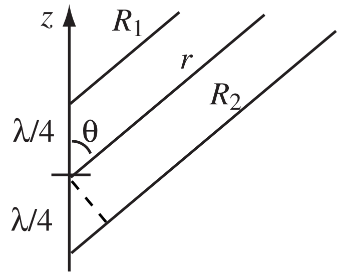
$$\boldsymbol{B} = \frac{I}{2\pi\omega\varepsilon_0 hc}\left[\sin\left(\omega t - \frac{\omega z}{c}\right) - \cos\left(\frac{\omega z}{c}\right)\sin\left(\omega t - \frac{\omega h}{c}\right)\right]\frac{\hat{\boldsymbol{\varphi}}}{s} = \textbf{ Delsvar}$$

Ampères generaliserade lag $\nabla\times\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{J} + \mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}$ och $\varepsilon_0\mu_0 = c^{-2}$ ger att

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{J} &= \varepsilon_0\left(c^2\nabla\times\boldsymbol{B} - \frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\right) = -\varepsilon_0\left(c^2\frac{\partial B_\varphi}{\partial z} + \frac{\partial E_s}{\partial t}\right)\hat{\boldsymbol{s}} \\
&= -\frac{Ic}{2\pi\omega h}\frac{\omega}{c}\left[-\cos\left(\omega t - \frac{\omega z}{c}\right) + \sin\left(\frac{\omega z}{c}\right)\sin\left(\omega t - \frac{\omega h}{c}\right)\right]\frac{\hat{\boldsymbol{s}}}{s} \\
&\quad -\frac{I}{2\pi\omega h}\omega\left[\cos\left(\omega t - \frac{\omega z}{c}\right) - \cos(\omega t) - \sin\left(\frac{\omega z}{c}\right)\sin\left(\omega t - \frac{\omega h}{c}\right)\right]\frac{\hat{\boldsymbol{s}}}{s} = \frac{I}{2\pi hs}\cos(\omega t)\,\hat{\boldsymbol{s}} = \textbf{ Delsvar}
\end{aligned}$$

4.

Antennernas avstånd till en punkt $\boldsymbol{r}$ i fjärrzonen blir
$R_1 \approx r - \lambda/4\cos\theta, \quad R_2 \approx r + \lambda/4\cos\theta$.
Vågtalet $k = 2\pi/\lambda$. Elektriska fjärrfältet före blir



$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_{\text{före}} &= \frac{K}{r}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR_1} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR_2}\right)\sin\theta\hat{\boldsymbol{\theta}} \\ &= K\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}}{r}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\pi/2)\cos\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\pi/2)\cos\theta}\right)\sin\theta\hat{\boldsymbol{\theta}} \\ &= 2K\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}}{r}\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)\sin\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}\end{aligned}$$

Elektriska fjärrfältet efteråt blir

$$\boldsymbol{E}_{\text{efter}} = K\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}}{r}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\pi/2)\cos\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\pi/2)\cos\theta}\right)\sin\theta\hat{\boldsymbol{\theta}} = 2\mathrm{j}K\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}}{r}\sin\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)\sin\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

Tidmedelvärdet av strålningsvektorn: $\langle\boldsymbol{S}\rangle = \frac{1}{2\mu_0}\mathrm{Re}\left\{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}^*\right\} = \frac{1}{2\mu_0 c}\mathrm{Re}\left\{\boldsymbol{E}\times(\hat{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{E}^*)\right\} = \frac{|E_\theta|^2}{2\mu_0 c}\hat{\boldsymbol{r}}$
Flödesintegralen av $\langle\boldsymbol{S}\rangle$ över en sfär med radien r ger att

$$\begin{aligned}P_{\text{före}} &\propto \int_0^\pi \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)\sin^2\theta\cdot\sin\theta\mathrm{d}\theta = \int_{-1}^1 \cos^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)\left(1-x^2\right)\mathrm{d}x = \frac{2}{3} + \frac{2}{\pi^2} \\ P_{\text{efter}} &\propto \int_0^\pi \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)\sin^2\theta\cdot\sin\theta\mathrm{d}\theta = \int_{-1}^1 \sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)\left(1-x^2\right)\mathrm{d}x = \frac{2}{3} - \frac{2}{\pi^2}\end{aligned}$$

Svar: $\frac{P_{\text{efter}}}{P_{\text{före}}} = \frac{\pi^2-3}{\pi^2+3} \approx 0,5$

- -

5.

$\boldsymbol{v} = v\hat{\boldsymbol{z}}$ och $\boldsymbol{r} = a\hat{\boldsymbol{x}}$ ger att magnetfältet i slingans mittpunkt blir $\boldsymbol{B}(a\hat{\boldsymbol{x}}, t) = \frac{\mu_0 q}{4\pi}\cdot\frac{va\hat{\boldsymbol{y}}}{\left(a^2+v^2t^2\right)^{3/2}}$

$b \ll a$ ger att magnetiska flödet i positiv y-led genom slingan blir

$$\Phi(t) \approx \pi b^2\hat{\boldsymbol{y}}\cdot\boldsymbol{B}(a\hat{\boldsymbol{x}}, t) = \frac{\mu_0 q b^2 va}{4}\cdot\frac{1}{\left(a^2+v^2t^2\right)^{3/2}} = \frac{\mu_0 q b^2 a}{4v^2}\cdot\frac{1}{\left((a/v)^2+t^2\right)^{3/2}}$$

Inducerade emkn: $\mathcal{E}(t) = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \frac{\mu_0 q b^2 a}{4v^2}\cdot\frac{3t}{\left((a/v)^2+t^2\right)^{5/2}}$

Effekten: $P(t) = \mathcal{E}I = \frac{\mathcal{E}^2}{R} = \frac{9}{16R}\left(\frac{\mu_0 q b^2 a}{v^2}\right)^2\frac{t^2}{\left((a/v)^2+t^2\right)^5}$

$$\begin{aligned}\text{Värmeenergin: } W &= \int_{-\infty}^{\infty} P(t)\,\mathrm{d}t = \frac{9}{16R}\left(\frac{\mu_0 q b^2 a}{v^2}\right)^2\cdot 2\int_0^\infty \frac{t^2}{\left((a/v)^2+t^2\right)^5}\mathrm{d}t \\ &= \frac{9}{8R}\left(\frac{\mu_0 q b^2 a}{v^2}\right)^2\cdot\frac{5\pi}{256\,(a/v)^7} = \frac{45\pi}{2048}\cdot\frac{\mu_0^2 q^2 b^4 v^3}{Ra^5} = \textbf{Svar}\end{aligned}$$

TEORETISK ELEKTROTEKNIK F del 2 (2A1840/2)

TEORETISK ELEKTROTEKNIK ME del 2 (2A1850/2) **2004–04–19, kl 8-13**

Examinator: Martin Norgren, tel. 790 7410

Hjälpmedel: TETs formelsamling, TETs “isskrapa” med vektorformler och βetas handbok i matematik.

Miniräknare **ej** tillåten.

Varje uppgift ger maximalt 5p. Godkänt garanteras på 10p.

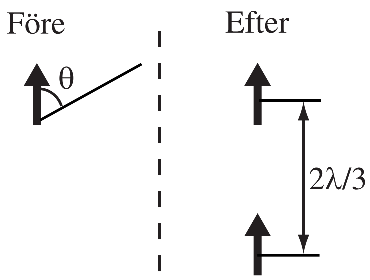
Namn och personnummer på varje blad. **Endast en uppgift per blad.**

Uppställda samband skall motiveras!
Ofullständiga motiveringar ger poängavdrag!

1.

Betrakta fjärrfältet i riktningen $\theta = 60°$ från en elektrisk dipolantenn.

Hur mycket ändras beloppet av fjärrfältet då en likadan dipolantenn placeras på avståndet $2\lambda/3$ enligt figuren?
(antennströmmarna har samma amplitud och fasläge)

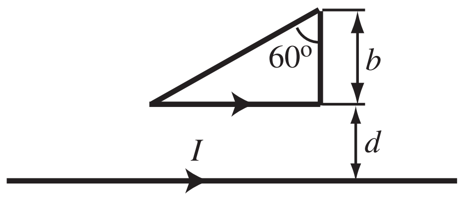


- -

2.

En lång rak tråd förande strömmen $I\,(t) = I_0 \sin(\omega t)$ befinner sig i samma plan som en slinga i form av en rätvinklig triangel, enligt figuren. Slingan har resistansen R.

Bestäm strömmen i slingan!

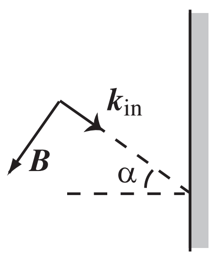


- -

3.

En plan våg faller in snett mot ett perfekt ledande metallplan.
Vågen är linjärt polariserad med magnetfältet i infallsplanet (se figuren).
Vid 500 MHz är det totala elektriska fältet noll 60 cm framför metallplanet och det finns inte några närmare nollställen framför planet.

Bestäm infallsvinkeln α!



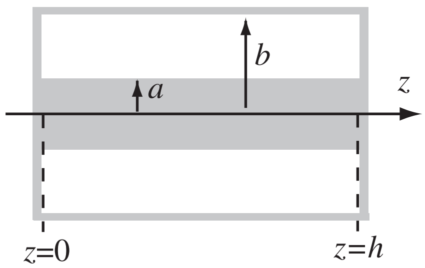
- -

Vänd!

4.

Inuti en luftfylld koaxialresonator, $a < s < b, 0 \leq \varphi < 2\pi, 0 < z < h$, är det elektriska fältet (i cylinderkoordinater)

$$\boldsymbol{E}(s, \varphi, z, t) = E_0 \frac{a}{s} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \sin(\omega_0 t)\, \hat{\boldsymbol{s}}$$



a) Bestäm $\boldsymbol{B}$-fältet!

b) Bestäm resonansvinkelfrekvensen ω_0!

5.

I ett källfritt område kan $x-$komponenten av det elektriska fältet skrivas

$$E_x(x, y, z, t) = E_0 \exp\left(-\frac{\omega z}{c\sqrt{2}}\right) \cos\left(\omega t - \frac{\omega x}{c\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}\omega z}{c}\right),$$

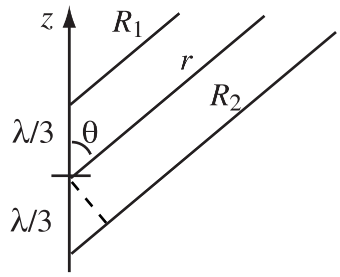
där $c = (\varepsilon_0 \mu_0)^{-1/2}$.

Bestäm relativa permittiviteten ε_r och ledningsförmågan σ i detta område, då $\mu_r = 1$!

Förslag till lösning.

1.

Lägg in antennerna enligt figuren, varvid avståndet till en punkt $\boldsymbol{r}$ i fjärrzonen blir
$R_1 \approx r - \lambda/3 \cos\theta, \quad R_2 \approx r + \lambda/3 \cos\theta$.
Vågtalet $k = 2\pi/\lambda$. Elektriska fjärrfältet före blir



$$\boldsymbol{E}_{\text{före}} = \frac{K}{r} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR_1} \sin\theta \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

varvid $|E_\theta|_{\text{före}} = |K| \dfrac{\sin\theta}{r}$, där K är en konstant.
Elektriska fjärrfältet efteråt blir

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_{\text{före}} &= \frac{K}{r}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR_1} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR_2}\right)\sin\theta\hat{\boldsymbol{\theta}} \\
&= K\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}}{r}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}(2\pi/3)\cos\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(2\pi/3)\cos\theta}\right)\sin\theta\hat{\boldsymbol{\theta}} = 2K\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}}{r}\cos\left(\frac{2\pi}{3}\cos\theta\right)\sin\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}
\end{aligned}$$

varvid $|E_\theta|_{\text{efter}} = |K| \dfrac{\sin\theta}{r} \left| 2\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\cos\theta\right)\right|$.

$\theta = 60^\circ = \pi/3 \Rightarrow 2\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\cos\theta\right) = 1 \Rightarrow$**Svar:** Beloppet ändras inte.

2.

Flödet (ut från papperet) genom en remsa av slingan med bredd $\mathrm{d}x$ på vinkelräta avståndet x från tråden blir

$$\mathrm{d}\Phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}(d+b-x)\tan 60^\circ \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{3}\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{d+b}{x} - 1\right)\mathrm{d}x$$

varvid totala flödet blir

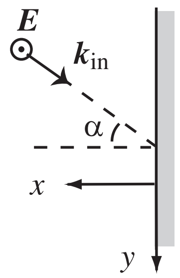
$$\Phi(t) = \frac{\sqrt{3}\mu_0 I_0}{2\pi}\left[(d+b)\ln\left(1+\frac{b}{d}\right) - b\right]\sin(\omega t)$$

Med de givna definitionsriktningarna fås då att strömmen genom slingan blir

$$I_{\mathrm{s}} = -\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{\sqrt{3}\mu_0\omega I_0}{2\pi R}\left[(d+b)\ln\left(1+\frac{b}{d}\right) - b\right]\cos(\omega t) = \textbf{ Svar}$$

3.

Infallande elektriska fältet skrives $\boldsymbol{E}_{\text{in}} = E_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k(-x\cos\alpha + y\sin\alpha)}\hat{\boldsymbol{z}}$.
Reflekterade elektriska fältet blir $\boldsymbol{E}_{\text{refl}} = -E_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k(x\cos\alpha + y\sin\alpha)}\hat{\boldsymbol{z}}$
Totala elektriska fältet:



$$\boldsymbol{E}_{\text{tot}} = E_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}ky\sin\alpha}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}kx\cos\alpha} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kx\cos\alpha}\right)\hat{\boldsymbol{z}} = 2\mathrm{j}E_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}ky\sin\alpha}\sin(kx\cos\alpha)\hat{\boldsymbol{z}}$$

vilket blir noll då $x = 0$, vid planet.
Första noden blir då $kx\cos\alpha = \pi$.
$k = 2\pi/\lambda \Rightarrow x\cos\alpha = \lambda/2$. $x = 60$ cm och $\lambda = \dfrac{3\cdot 10^8}{500\cdot 10^6}$ m =60 cm.
$\Rightarrow$ **Svar** $\alpha = \arccos\dfrac{1}{2} = 60^\circ$

4.

$$\boldsymbol{E} = E_0 \frac{a}{s} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \sin(\omega_0 t)\, \hat{\boldsymbol{s}}$$

Faradays lag: $\nabla \times \boldsymbol{E} = \hat{\boldsymbol{\varphi}} \dfrac{\partial E_s}{\partial z} = E_0 \dfrac{a}{s} \cdot \dfrac{\pi}{h} \cos\left(\dfrac{\pi z}{h}\right) \sin(\omega_0 t)\, \hat{\boldsymbol{\varphi}} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$
Tidsintegrering och utelämnande av eventuell statisk del av magnetfältet ger

$$\boldsymbol{B} = E_0 \frac{a}{s} \cdot \frac{\pi}{h\omega_0} \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \cos(\omega_0 t)\, \hat{\boldsymbol{\varphi}} = \textbf{ Svar a}$$

Ampères generaliserade lag $\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$ och $\varepsilon_0 \mu_0 = c^{-2}$ (med $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{0}$) ger att

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = -\frac{\partial B_\varphi}{\partial z} \hat{\boldsymbol{s}} = E_0 \frac{a}{s} \cdot \frac{\pi^2}{h^2 \omega_0} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \cos(\omega_0 t)\, \hat{\boldsymbol{s}} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = E_0 \frac{a}{s} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \frac{\omega_0}{c^2} \cos(\omega_0 t)\, \hat{\boldsymbol{s}}$$

Detta kräver att $\omega_0 = \dfrac{c\pi}{h} =$ **Svar b**

- -

5.
I komplex beskrivning fås

$$E_x(x, y, z, t) = E_0 \mathrm{e}^{-\alpha_z z} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_x x} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_z z}$$

där $\alpha_z = \dfrac{\omega}{c\sqrt{2}}, \beta_x = \dfrac{\omega}{c\sqrt{2}}, \beta_z = \dfrac{\sqrt{2}\omega}{c}$
Maxwells ekvationer $\nabla \times \boldsymbol{E} = -\mathrm{j}\omega \boldsymbol{B}, \nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 (\sigma + \mathrm{j}\omega\varepsilon_\mathrm{r}\varepsilon_0) \boldsymbol{E}, \nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$ ger att $\nabla^2 \boldsymbol{E} = \mathrm{j}\omega\mu_0 (\sigma + \mathrm{j}\omega\varepsilon_\mathrm{r}\varepsilon_0) \boldsymbol{E}$, vilket också gäller varje kartesisk komponent. Insättning av E_x ger att

$$\alpha_z^2 - \beta_x^2 - \beta_z^2 + \mathrm{j}2\alpha_z\beta_z = -\omega^2 \mu_0 \varepsilon_\mathrm{r} \varepsilon_0 + \mathrm{j}\omega\mu_0\sigma$$

vilket ger **Svar:** $\varepsilon_\mathrm{r} = 2, \sigma = 2\omega\varepsilon_0$.

TEORETISK ELEKTROTEKNIK F del 2 (2A1840/2)

TEORETISK ELEKTROTEKNIK ME del 2 (2A1850/2) 2004–08–23, kl 8-13

Examinator: Martin Norgren, tel. 790 7410

Hjälpmedel: TETs formelsamling, TETs "isskrapa" med vektorformler och βetas handbok i matematik.

Miniräknare **ej** tillåten.

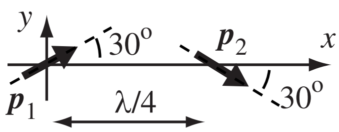
Varje uppgift ger maximalt 5p. Godkänt garanteras på 10p.

Namn och personnummer på varje blad. **Endast en uppgift per blad.**

Uppställda samband skall motiveras!
Ofullständiga motiveringar ger poängavdrag!

1.

Två dipoler $p_1(t) = p_2(t) = p_0 \cos(\omega t)$ har sina riktningar och placeringar i xy-planet enligt figuren.

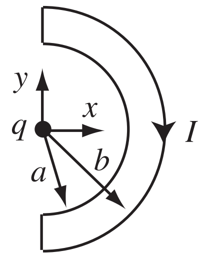


Bestäm effektivvärdet av $\boldsymbol{B}$-fältet i den avlägsna punkten $R\hat{\boldsymbol{x}}$!

- -

2.

En strömslinga, förande likströmmen I, och en punktladdning q är belägna i xy-planet enligt figuren.



Bestäm den impuls som fås på punktladdningen när strömmen i slingan stängs av!

Ledningar: Strömmen antas avta långsamt, så att retardationen kan försummas. Ett användbart samband för statiska elektriska och magnetiska fält är

$$\int_{\mathbb{R}^3} \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B} \mathrm{d}\tau = \mu_0 \int_{\mathbb{R}^3} V \boldsymbol{J} \mathrm{d}\tau$$

- -

3.

I ett material med $\mu_\mathrm{r} = 1$ propagerar en plan våg med det elektriska fältet

$$\boldsymbol{E} = 3\hat{\boldsymbol{y}} \sin\left(2\pi \cdot 10^7 t - 0,4\pi x\right) + 4\hat{\boldsymbol{z}} \cos\left(2\pi \cdot 10^7 t - 0,4\pi x\right) \ \mathrm{V/m}$$

Bestäm
a) Vilken typ av polarisation vågen har.
b) Våglängden.
c) ε_r.
d) Vågens $\boldsymbol{B}$-fält.

- -

Vänd!

4.

Inuti ett luftfyllt och källfritt område är

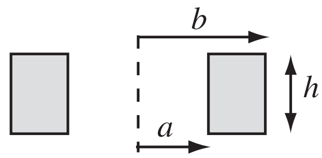
$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = U\frac{x}{x^2+y^2}\cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}z\right)\hat{\boldsymbol{x}} + E_y(\boldsymbol{r},t)\,\hat{\boldsymbol{y}}$$
$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = B_x(\boldsymbol{r},t)\,\hat{\boldsymbol{x}} + B_y(\boldsymbol{r},t)\,\hat{\boldsymbol{y}}$$

Bestäm $E_y(\boldsymbol{r},t)\,, B_x(\boldsymbol{r},t)$ och $B_y(\boldsymbol{r},t)$!
Bortse från homogena samt statiska fält.

5.

En toroidspole med rektangulärt tvärsnitt (se figuren) har innerradien a, ytterradien b och höjden h. Spolen har N jämnt fördelade och tätt lindade varv.

Bestäm spolens induktans!



- -

Förslag till lösning.

- -

1.

Ur formelsamlingen, använd $\boldsymbol{B} = \dfrac{-\omega^2\mu_0}{4\pi c}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0 R}\dfrac{\boldsymbol{p}\times\hat{\boldsymbol{R}}}{R}$

Har att $\hat{\boldsymbol{R}}_1 = \hat{\boldsymbol{R}}_2 = \hat{\boldsymbol{x}}$, varvid endast y-komponenterna av dipolerna bidrar: $\boldsymbol{p}_{1y} = \frac{1}{2}p_0\hat{\boldsymbol{y}}, \boldsymbol{p}_{2y} = -\frac{1}{2}p_0\hat{\boldsymbol{y}}$

Får att

$$\boldsymbol{B} = \frac{-\omega^2\mu_0 p_0}{4\pi c R}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0 R}\cdot\frac{1}{2}\left(-1+\mathrm{e}^{\mathrm{j}(2\pi/\lambda)(\lambda/4)}\right)\hat{\boldsymbol{z}}$$

$$B_{\mathrm{eff}} = \frac{|\boldsymbol{B}|}{\sqrt{2}} = \frac{\omega^2\mu_0\,|p_0|}{8\pi c R\sqrt{2}}\left|-1+\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/2}\right| = \frac{\omega^2\mu_0\,|p_0|}{8\pi c R\sqrt{2}}\,|-1+\mathrm{j}| = \frac{\omega^2\mu_0\,|p_0|}{8\pi c R} = \textbf{Svar}$$

- -

2.

Från rörelsemängdens bevarande fås att impulsen på punktladdningen är den rörelsemängd $\boldsymbol{p}_{\mathrm{em}}$ som finns i fälten innan strömmen stängs av.

Har att $\boldsymbol{p}_{\mathrm{em}} = \varepsilon_0\int\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}\mathrm{d}\tau = \varepsilon_0\mu_0\int V\boldsymbol{J}\mathrm{d}\tau = \varepsilon_0\mu_0 I\oint V\mathrm{d}\boldsymbol{l}$, där potentialen $V = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$.

Cirkelbågarna ger motriktade bidrag, där båglängderna precis kompenserar avtagandet i potentialen varvid inget resulterande bidrag erhålles.

De raka bitarna ger samverkande och lika stora bidrag i y-led, varvid

$\boldsymbol{p}_{\mathrm{em}} = 2\cdot\varepsilon_0\mu_0 I\hat{\boldsymbol{y}}\displaystyle\int_a^b\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\mathrm{d}r = \frac{\mu_0 I q}{2\pi}\ln\frac{b}{a}\hat{\boldsymbol{y}}$=**Svar**

Alternativt: Vektorpotentialen vid q blir $\boldsymbol{A} = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi}\displaystyle\oint\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}'}{R} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{b}{a}\hat{\boldsymbol{y}}$

Impulsen: $\boldsymbol{p}_{\mathrm{mek}} = \displaystyle\int\boldsymbol{F}\mathrm{d}t = q\int\boldsymbol{E}\mathrm{d}t = -q\int\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\mathrm{d}t = -q\left(\boldsymbol{A}_{\mathrm{efter}}-\boldsymbol{A}_{\mathrm{före}}\right) = \frac{\mu_0 I q}{2\pi}\ln\frac{b}{a}\hat{\boldsymbol{y}}$ (dvs lika med $\boldsymbol{p}_{\mathrm{em}}$)

- -

3.

a) Vågen är elliptiskt polariserad (två ortogonala linjärpol. med 90° fasskillnad och olika amplituder)

b) Vågtalet $k = \dfrac{2\pi}{\lambda} = 0,4\pi$ rad/m $\Rightarrow$ våglängden $\lambda = 2/0,4$ m $= 5$ m.

c) Frekvensen $f = 10^7$ Hz. Fashastigheten $v = f\cdot\lambda = 5\cdot 10^7$ m/s $= \dfrac{c}{\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{r}}\mu_{\mathrm{r}}}} = \dfrac{3\cdot 10^8}{\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{r}}}} \Rightarrow \varepsilon_{\mathrm{r}} = 36$

d) Utbredning i riktningen $+\hat{\boldsymbol{x}}$.

$\boldsymbol{B} = \dfrac{1}{v}\hat{\boldsymbol{x}}\times\boldsymbol{E} = -80\hat{\boldsymbol{y}}\cos\left(2\pi\cdot 10^7 t - 0,4\pi x\right) + 60\hat{\boldsymbol{z}}\sin\left(2\pi\cdot 10^7 t - 0,4\pi x\right)$ nT

- -

4. Luft och källfritt $\Rightarrow \nabla\cdot\boldsymbol{E} = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial E_y}{\partial y} = -\dfrac{\partial E_x}{\partial x}$

Har att $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{x}{x^2+y^2}\right) = \dfrac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} = -\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{y}{x^2+y^2}\right) \Rightarrow E_y = U\dfrac{y}{x^2+y^2}\cos\left(\omega t - \dfrac{\omega}{c}z\right)$=**Delsvar**

$$\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} = -\nabla\times\boldsymbol{E} = \frac{\partial E_y}{\partial z}\hat{\boldsymbol{x}} - \frac{\partial E_x}{\partial z}\hat{\boldsymbol{y}} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x}\right)\hat{\boldsymbol{z}} = \frac{\omega}{c}U\sin\left(\omega t - \frac{\omega}{c}z\right)\frac{y\hat{\boldsymbol{x}} - x\hat{\boldsymbol{y}}}{x^2+y^2}$$

$\Rightarrow$ **Delsvar:** $B_x = \dfrac{U}{c}\cdot\dfrac{-y}{x^2+y^2}\cos\left(\omega t - \dfrac{\omega}{c}z\right), B_y = \dfrac{U}{c}\cdot\dfrac{x}{x^2+y^2}\cos\left(\omega t - \dfrac{\omega}{c}z\right)$

- -

5.

Svar: $L = \dfrac{\mu_0 N^2 h}{2\pi}\ln\dfrac{b}{a}$

Se Griffiths Exempel 7.11 eller Cheng Exempel 6-14

Tentamen i del 2 av **2004–12–13, kl 14:00-19:00**
2A1840 TEORETISK ELEKTROTEKNIK F
2A1850 TEORETISK ELEKTROTEKNIK ME
2A1865 TEORETISK ELEKTROTEKNIK CL påbyggnadskurs

Examinator: Martin Norgren, tel. 790 7410

Hjälpmedel: TETs formelsamling, βetas handbok i matematik, miniräknare samt TETs ”isskrapa” med vektorformler.

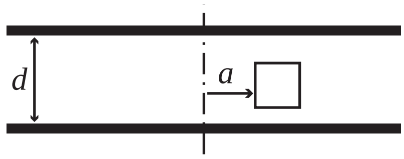
Varje uppgift ger maximalt 5p. Godkänt garanteras på 10p.

Namn och personnummer på varje blad. Endast en uppgift per blad; skriv ej på baksidan.
Uppställda samband skall motiveras! Ofullständiga motiveringar ger poängavdrag!

Tentamensbladet skall lämnas in!

1.

En stor cirkulär plattkondensator med plattavståndet $d = 40$ cm ansluts till en växelspänningskälla med toppvärdet 500 kV och frekvensen 21 kHz. I ett radialplan finns på avståndet $a = 20$ cm från symmetriaxeln en kvadratisk slinga med sidan a; se figuren.



Vy från sidan

Bestäm effektivvärdet på den i slingan inducerade emk:n!

Ledning: Försumma kanteffekter, varvid det elektriska fältet i kondensatorn blir homogent.

- -

2.

En laserstråle transporterar UV-ljus med högercirkulär polarisation. De komplexa elektriska och magnetiska fälten är approximativt (i cylinderkoordinater)

$$\boldsymbol{E}(s,\phi,z,t) = E_0\left[\frac{\left(\hat{\boldsymbol{s}} + \mathrm{i}\hat{\boldsymbol{\phi}}\right)a^2}{a^2+s^2} - \frac{\mathrm{i}2ca^2s}{\omega\left(a^2+s^2\right)^2}\hat{\boldsymbol{z}}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega z/c-\omega t+\phi)}$$

$$\boldsymbol{B}(s,\phi,z,t) = -\frac{\mathrm{i}}{c}\boldsymbol{E}(s,\phi,z,t) = \frac{E_0}{c}\left[\frac{\left(-\mathrm{i}\hat{\boldsymbol{s}} + \hat{\boldsymbol{\phi}}\right)a^2}{a^2+s^2} - \frac{2ca^2s}{\omega\left(a^2+s^2\right)^2}\hat{\boldsymbol{z}}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega z/c-\omega t+\phi)}$$

Numeriska värden är $E_0 = 60$ TV/m, $a = 5\mu$m.

a) Bestäm uttrycket för tidmedelvärdet av Poyntings vektor: $\langle\boldsymbol{S}\rangle = \dfrac{1}{2\mu_0}\mathrm{Re}\{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}^*\}$!

b) Bestäm uttrycket för och det numeriska värdet på P, strålens effekttransport i $+z$-led!

- -

3.

Från ett luftfyllt område faller en plan våg in vinkelrätt mot en halvrymd med ett förlustfritt men för övrigt okänt material. En mätning ger vid handen att reflexionsfaktorn för det elektriska fältet är $-1/3$. Vidare konstateras att fashastigheten för den transmitterade vågen i det okända materialet är fyra gånger lägre än i luften.

Bestäm det okända materialets relativa permittivitet ε_r och relativa permeabilitet μ_r!

- -

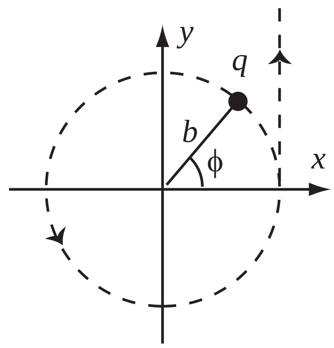
Vänd!

4.

En punktladdning q befinner sig fram till tiden $t = 0$ i vila i punkten $b\hat{\boldsymbol{x}}$. Under tiden $0 < t < T$ är laddningens läge som funktion av tiden $\boldsymbol{w}(t) = b\hat{\boldsymbol{s}}(\phi(t))$, där $\phi(t) = 2\pi\left(\dfrac{t}{T}\right)^2$.

Vid tiden $T = \dfrac{8\pi b}{c}$ passerar laddningen på nytt startpunkten och fortsätter sedan därifrån med hastigheten $\dfrac{c}{2}\hat{\boldsymbol{y}}$.

Bestäm det elektriska accelerationsfältet i origo, som funktion av tiden!



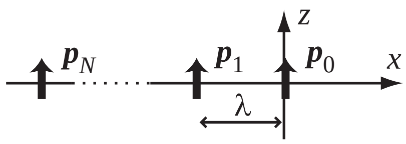
Ledningar: $\dfrac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{s}}}{\mathrm{d}\phi} = \hat{\boldsymbol{\phi}}$, $\dfrac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{\phi}}}{\mathrm{d}\phi} = -\hat{\boldsymbol{s}}$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\left(1-\hat{\boldsymbol{R}}\cdot\boldsymbol{\beta}\right)^3}\left[\frac{1-\beta^2}{R^2}\left(\hat{\boldsymbol{R}}-\boldsymbol{\beta}\right) + \frac{\hat{\boldsymbol{R}}\times\left(\left(\hat{\boldsymbol{R}}-\boldsymbol{\beta}\right)\times\boldsymbol{a}\right)}{c^2R}\right]$$

$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{w}(t_{\mathrm{r}})$, $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{v}(t_{\mathrm{r}})/c$, $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(t_{\mathrm{r}})$, $R = c(t - t_{\mathrm{r}})$

5.

Ett stort antal (N) elektriska dipolantenner är uppställda längs med den negativa x-axeln på det inbördes avståndet λ (våglängden) från varandra; se figuren. Dipolmomenten som funktion av index n är $\boldsymbol{p}_n = \dfrac{p}{2^n}\cos(\omega t)\,\hat{\boldsymbol{z}}$, $n = 0, 1, \ldots, N$.



Bestäm de riktningar i xy-planet för vilka beloppet av det elektriska fjärrfältet är som störst och som minst! Bestäm också kvoten mellan dessa belopp!

Ledning: Approximera $N = \infty$ och använd geometrisk serie.

GOD JUL & GOTT NYTT ÅR

önskar

KURSERNAS LÄRARE

Tentamen i del 2 av **2004–12–13, kl 14:00-19:00**
2A1840 TEORETISK ELEKTROTEKNIK F
2A1850 TEORETISK ELEKTROTEKNIK ME
2A1865 TEORETISK ELEKTROTEKNIK CL påbyggnadskurs

Förslag till lösning.

1.

Beteckningar: spänningens toppvärde $U_0 = 500$ kV; vinkelfrekvensen $\omega = 2\pi \cdot 21 \cdot 10^3$ rad/s; plattavståndet $d = 40$ cm; slingsidan $a = 20$ cm.

Elektriska fältet inuti kondensatorn blir approximativt $\boldsymbol{E} = \dfrac{U_0}{d} \sin(\omega t)\, \hat{\boldsymbol{z}}$.

Ampères generaliserade lag $\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$ integrerad över en koncentrisk cirkelyta med radien s och Stokes sats ger att $2\pi s B_\phi = \underbrace{\mu_0 \varepsilon_0}_{1/c^2} \pi s^2 \dfrac{U_0}{d} \omega \cos(\omega t) \Rightarrow B_\phi = \dfrac{U_0 \omega s}{2c^2 d} \cos(\omega t)$.

Magnetiska flödet genom slingan: $\Phi = \displaystyle\int B_\phi \mathrm{d}a = \frac{U_0 \omega}{2c^2 d} \cos(\omega t) \int_0^a \mathrm{d}z \int_a^{2a} s \, \mathrm{d}s = \frac{3 U_0 \omega a^3}{4c^2 d} \cos(\omega t)$

Emk:n $\mathcal{E} = -\dfrac{\partial \Phi}{\partial t} = \dfrac{3 U_0 \omega^2 a^3}{4c^2 d} \sin(\omega t)$.

Svar: Effektivvärdet på emk:n blir $\dfrac{3 U_0 \omega^2 a^3}{4\sqrt{2} c^2 d} \approx 1$ mV.

- -

2.

a) $\langle \boldsymbol{S} \rangle = \dfrac{1}{2\mu_0} \mathrm{Re}\{\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}^*\} = \dfrac{E_0^2}{\mu_0 c} \left[\left(\dfrac{a^2}{a^2 + s^2} \right)^2 \hat{\boldsymbol{z}} + \dfrac{2ca^4 s}{\omega (a^2 + s^2)^3} \hat{\boldsymbol{\phi}} \right] =$ **Delsvar**

b) Effekten: $P = \displaystyle\int_{\text{tvärsnitt}} \langle \boldsymbol{S} \rangle \cdot \hat{\boldsymbol{z}} \mathrm{d}a = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} 2\pi a^4 \int_0^\infty \frac{s \, \mathrm{d}s}{(a^2 + s^2)^2} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \pi a^2 \approx 750$ TW $=$ **Delsvar**

- -

3.

Reflexionsfaktorn: $r = \dfrac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = \dfrac{\sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}} - \sqrt{\dfrac{\mu_0}{\varepsilon_0}}}{\sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}} + \sqrt{\dfrac{\mu_0}{\varepsilon_0}}} = \dfrac{\sqrt{\dfrac{\mu_\mathrm{r}\mu_0}{\varepsilon_\mathrm{r}\varepsilon_0}} - \sqrt{\dfrac{\mu_0}{\varepsilon_0}}}{\sqrt{\dfrac{\mu_\mathrm{r}\mu_0}{\varepsilon_\mathrm{r}\varepsilon_0}} + \sqrt{\dfrac{\mu_0}{\varepsilon_0}}} = \dfrac{\sqrt{\dfrac{\mu_\mathrm{r}}{\varepsilon_\mathrm{r}}} - 1}{\sqrt{\dfrac{\mu_\mathrm{r}}{\varepsilon_\mathrm{r}}} + 1} = -\dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{\mu_\mathrm{r}}{\varepsilon_\mathrm{r}} = \dfrac{1}{4}$

Fashastigheten: $v = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_\mathrm{r}\mu_0\varepsilon_\mathrm{r}\varepsilon_0}} = \dfrac{c}{\sqrt{\mu_\mathrm{r}\varepsilon_\mathrm{r}}} = \dfrac{c}{4} \Rightarrow \mu_\mathrm{r}\varepsilon_\mathrm{r} = 16.$ **Svar a:** $\varepsilon_\mathrm{r} = 8,\ \mu_\mathrm{r} = 2$

4.

Endast accelerationsdelen av $\boldsymbol{E}$-fältet sökes: $\boldsymbol{E}_a(\boldsymbol{r},t) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 c^2} \cdot \dfrac{\hat{\boldsymbol{R}} \times \left(\left(\hat{\boldsymbol{R}} - \boldsymbol{\beta}\right) \times \boldsymbol{a}\right)}{R\left(1 - \hat{\boldsymbol{R}} \cdot \boldsymbol{\beta}\right)^3}$

Laddningen accelereras endast under tidintervallet $0 < t < T$.

Hastigheten: $\boldsymbol{v} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{w}}{\mathrm{d}t} = b\dfrac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{s}}}{\mathrm{d}\phi}\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = b\hat{\boldsymbol{\phi}}\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = \dfrac{4\pi bt}{T^2}\hat{\boldsymbol{\phi}} = \dfrac{c^2 t}{16\pi b}\hat{\boldsymbol{\phi}}$

Accelerationen: $\boldsymbol{a}(t) = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = b\left[\dfrac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{\phi}}}{\mathrm{d}\phi}\left(\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \hat{\boldsymbol{\phi}}\dfrac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}t^2}\right] = b\left[-\hat{\boldsymbol{s}}\left(\dfrac{4\pi t}{T^2}\right)^2 + \hat{\boldsymbol{\phi}}\dfrac{4\pi}{T^2}\right] = \dfrac{c^2}{16\pi b}\left[\hat{\boldsymbol{\phi}} - \dfrac{c^2 t^2}{16\pi b^2}\hat{\boldsymbol{s}}\right]$

Ingående storheter: $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{w}(t_\mathrm{r}) = -\boldsymbol{w}(t_\mathrm{r})$, $R = |\boldsymbol{R}| = |\boldsymbol{w}| = b$, $t_\mathrm{r} = t - \dfrac{R}{c} = t - \dfrac{b}{c}$

$\hat{\boldsymbol{R}} = -\hat{\boldsymbol{s}}$, $\boldsymbol{\beta} = \dfrac{\boldsymbol{v}}{c} = \dfrac{ct_\mathrm{r}}{16\pi b}\hat{\boldsymbol{\phi}}$ (för origo fås samma retarderade tid runtom cirkelbanan).

$\hat{\boldsymbol{R}} \cdot \boldsymbol{\beta} = 0, R = b, \hat{\boldsymbol{R}} = -\hat{\boldsymbol{s}} \Rightarrow \boldsymbol{E}_a = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 c^2 b}\hat{\boldsymbol{s}} \times ((\hat{\boldsymbol{s}} + \boldsymbol{\beta}) \times \boldsymbol{a})$

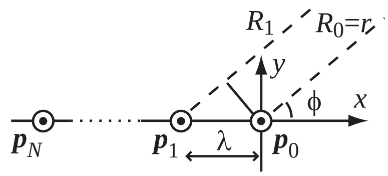
$$\hat{\boldsymbol{s}} \times ((\hat{\boldsymbol{s}} + \boldsymbol{\beta}) \times \boldsymbol{a}) = (\hat{\boldsymbol{s}} + \boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{a} \cdot \hat{\boldsymbol{s}}) - \boldsymbol{a}(\hat{\boldsymbol{s}} \cdot (\hat{\boldsymbol{s}} + \boldsymbol{\beta})) = \hat{\boldsymbol{s}}(\hat{\boldsymbol{s}} \cdot \boldsymbol{a}) - \boldsymbol{a} + \boldsymbol{\beta}(\hat{\boldsymbol{s}} \cdot \boldsymbol{a}) = -a_\phi\hat{\boldsymbol{\phi}} + a_s\boldsymbol{\beta}$$

$$\boldsymbol{E}_a = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c^2 b}\left(-a_\phi\hat{\boldsymbol{\phi}} + a_s\boldsymbol{\beta}\right) = \frac{q}{64\pi^2\varepsilon_0 b^2}\left(-\hat{\boldsymbol{\phi}} - \frac{c^2 t_\mathrm{r}^2}{16\pi b^2} \cdot \frac{ct_\mathrm{r}}{16\pi b}\hat{\boldsymbol{\phi}}\right) = -\frac{q}{64\pi^2\varepsilon_0 b^2}\left(1 + \frac{1}{256\pi^2}\left(\frac{ct_\mathrm{r}}{b}\right)^3\right)\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

Svar: I intervallet $\dfrac{b}{c} < t < \dfrac{b}{c} + \dfrac{8\pi b}{c}$ blir $\boldsymbol{E}_a(\boldsymbol{0},t) = -\dfrac{q}{64\pi^2\varepsilon_0 b^2}\left(1 + \dfrac{1}{256\pi^2}\left(\dfrac{ct}{b} - 1\right)^3\right)\hat{\boldsymbol{\phi}}\,(\phi\,(t - b/c))$,

noll för övriga tider.

5.



Antennerna matas i fas och varje antenn strålar maximalt i xy-planet. Avståndet till fjärrzonen blir $R_n = r + n \cdot \lambda\cos\phi$.

Komplexa fjärrfältet blir således proportionellt mot

$$\sum_{n=0}^{N}\frac{p}{2^n}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR_n} = \{k = 2\pi/\lambda\} = p\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\cos\phi}}{2}\right)^n$$

Med kännedom om bonden och schackbrädet inses att den geometriska serien konvergerar snabbt, så ett stort antal antenner kan approximeras med $N = \infty$,

varvid fjärrfältet $\propto \displaystyle\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\cos\phi}}{2}\right)^n \approx \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\cos\phi}}{2}\right)^n = \frac{1}{1 - \dfrac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\cos\phi}}{2}} = \frac{2}{2 - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\cos\phi}}$

Faktorn får som störst beloppet 2 när $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\cos\phi} = 1 \Rightarrow 2\pi\cos\phi = m \cdot 2\pi$ (m =heltal)

$\Rightarrow \cos\phi = \{-1, 0, 1\} \Rightarrow \phi = \{\pi, \pm\pi/2, 0\}$

Faktorn får som minst beloppet 2/3 när $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\cos\phi} = -1 \Rightarrow 2\pi\cos\phi = (2m+1) \cdot \pi$ (m =heltal)

$\Rightarrow \cos\phi = \{-1/2, 1/2\} \Rightarrow \phi = \{\pm 2\pi/3, \pm\pi/3\}$

Svar: Maximalt i riktningarna $\phi = \{0°, \pm 90°, 180°\}$ och minimalt i rikningarna $\phi = \{\pm 60°, \pm 120°\}$. Kvoten max/min = 3.

Tentamen i del 2 av **2005–03–31, kl 08:00-13:00**
2A1840 TEORETISK ELEKTROTEKNIK F
2A1850 TEORETISK ELEKTROTEKNIK ME
2A1865 TEORETISK ELEKTROTEKNIK CL påbyggnadskurs

Examinator: Martin Norgren, tel. 790 7410

Hjälpmedel: TETs formelsamling, βetas handbok i matematik, miniräknare samt TETs ”isskrapa” med vektorformler.

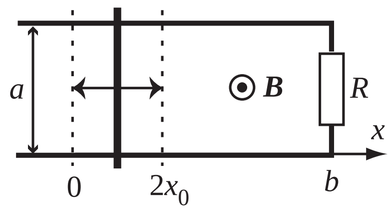
Varje uppgift ger maximalt 5p. Godkänt garanteras på 10p.

Namn och personnummer på varje blad. Endast en uppgift per blad; skriv ej på baksidan. Uppställda samband skall motiveras! Ofullständiga motiveringar ger poängavdrag!

Tentamensbladet skall lämnas in!

1.

En metallstång oscillerar utan friktion på två långa, horisontella, parallella, perfekt ledande skenor med inbördes avstånd a. Mellan skenorna finns ett tidberoende magnetiskt fält $\boldsymbol{B}(t) = \hat{B}\cos(\omega t)\,\hat{\boldsymbol{z}}$; se figuren. Skenorna är avslutade med en resistans R vid $x = b$ och metallstångens position ges av $x = x_0(1 - \cos(\omega t))$.



Bestäm den inducerade strömmen genom resistansen!

Självinduktansen i slingan kan försummas.

- -

2.

En laserstråle transporterar UV-ljus med vänstercirkulär polarisation. De komplexa elektriska och magnetiska fälten är approximativt (i cylinderkoordinater)

$$\boldsymbol{E}(s,\phi,z,t) = E_0\left[\frac{\left(\hat{\boldsymbol{s}} - \mathrm{i}\hat{\boldsymbol{\phi}}\right)a^2}{a^2+s^2} - \frac{\mathrm{i}2ca^2s}{\omega\left(a^2+s^2\right)^2}\hat{\boldsymbol{z}}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega z/c - \omega t - \phi)}$$

$$\boldsymbol{B}(s,\phi,z,t) = \frac{\mathrm{i}}{c}\boldsymbol{E}(s,\phi,z,t) = \frac{E_0}{c}\left[\frac{\left(\mathrm{i}\hat{\boldsymbol{s}} + \hat{\boldsymbol{\phi}}\right)a^2}{a^2+s^2} + \frac{2ca^2s}{\omega\left(a^2+s^2\right)^2}\hat{\boldsymbol{z}}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega z/c - \omega t - \phi)}$$

a) Bestäm uttrycket för tidmedelvärdet av Poyntings vektor: $\langle\boldsymbol{S}\rangle = \dfrac{1}{2\mu_0}\mathrm{Re}\{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}^*\}$!

b) Bestäm z-komponenten av strålens rörelsemängdsmoment per längd: $\dfrac{\Delta L_z}{\Delta z} = \displaystyle\int_{\text{tvärsnitt}} \ell_z \mathrm{d}a$,

där $\ell_z = \hat{\boldsymbol{z}}\cdot\boldsymbol{\ell}_{\mathrm{em}} = \hat{\boldsymbol{z}}\cdot(\boldsymbol{r}\times\wp_{\mathrm{em}}) = \dfrac{1}{c^2}\hat{\boldsymbol{z}}\cdot(\boldsymbol{r}\times\langle\boldsymbol{S}\rangle) = \dfrac{1}{c^2}\langle\boldsymbol{S}\rangle\cdot(\hat{\boldsymbol{z}}\times\boldsymbol{r}) = \dfrac{1}{c^2}\langle\boldsymbol{S}\rangle\cdot\left(s\hat{\boldsymbol{\phi}}\right)$

c) Strålens energi per längd blir $\dfrac{\Delta W}{\Delta z} = \dfrac{E_0^2\pi a^2}{\mu_0 c^2}$ (behöver ej visas).

Jämför $\dfrac{\Delta W}{\Delta L_z}$, förhållandet energi/rörelsemängdsmoment, med motsvarande för en vänsterpolariserad foton för vilken energin $W = \hbar\omega$ och rörelsemängdsmomentet $L = -\hbar$!

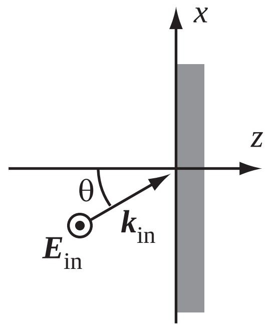
- -

Vänd!

3. I en isolator ($\sigma = 0, \mu_\mathrm{r} = 1$) utbreder sig en elektromagnetisk våg med magnetiska fältet $\boldsymbol{B} = -0{,}1\cos(kz - \omega t)\,\hat{\boldsymbol{x}} + 0{,}5\sin(kz - \omega t)\,\hat{\boldsymbol{y}}\ \mu\mathrm{T}$. Vågimpedansen $\eta = 60\pi\ \Omega$ och vågtalet $k = 1$ rad/m.

Bestäm permittivitetstalet ε_r för isolatorn, vinkelfrekvensen ω samt elektriska fältstyrkan hos den elektromagnetiska vågen!

4.



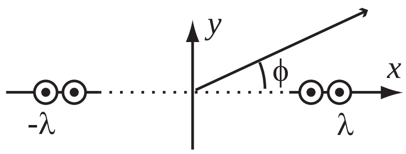
En plan våg med det elektriska fältet

$$\boldsymbol{E}(x, z, t) = E_0 \cos\Big(\frac{\omega}{c}\,(x \sin\theta + z\cos\theta) - \omega t\Big)\,\hat{\boldsymbol{y}}$$

faller in mot ett metallplan vid $z = 0$.

Bestäm samtliga avstånd, uttryckta i våglängden och infallsvinkeln θ, från metallplanet där det totala elektriska fältet är noll!

5.



Ett mycket stort antal (N) dipolantenner är ekvidistant placerade utmed x-axeln i intervallet $-\lambda \le x \le \lambda$, där λ är våglängden. Dipolmomentet för en antenn vid ett visst läge x_k ges som $\boldsymbol{p}_k\,(t) = p_0 \cos\left(\omega t + \pi\dfrac{x_k}{\lambda}\right)\hat{\boldsymbol{z}}$

Bestäm nollriktningarna för fjärrfältet i xy-planet!

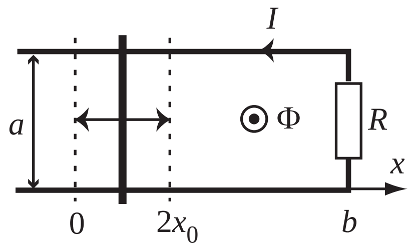
Ledning: Betrakta antennerna som en kontinuerlig fördelning av dipolmoment, där dipolmomentet från sträckan dx kring punkten $x\hat{\boldsymbol{x}}$ ges som $\mathrm{d}\boldsymbol{p}\,(t) = \dfrac{Np_0}{2\lambda}\hat{\boldsymbol{z}}\cos\left(\omega t + \pi\dfrac{x}{\lambda}\right)\mathrm{d}x$

Tentamen i del 2 av **2005–03–31, kl 08:00-13:00**
2A1840 TEORETISK ELEKTROTEKNIK F
2A1850 TEORETISK ELEKTROTEKNIK ME
2A1865 TEORETISK ELEKTROTEKNIK CL påbyggnadskurs

Förslag till lösning.

1.

Med definitionsriktningar enligt figuren blir flödet genom slingan



$$\begin{aligned}\Phi(t) &= \hat{B}\cos(\omega t)\, a\, [b - x_0\,(1-\cos(\omega t))] \\ &= \hat{B}a\left[(b-x_0)\cos(\omega t) + x_0\cos^2(\omega t)\right]\end{aligned}$$

Strömmen blir

$$\begin{aligned}I &= -\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{\hat{B}a}{R}\left[(b-x_0)\,(-\omega)\sin(\omega t) + x_0\,(-\omega)\,2\cos(\omega t)\sin(\omega t)\right] \\ &= \frac{\omega\hat{B}a}{R}\sin(\omega t)\,[b - x_0 + 2x_0\cos(\omega t)] = \textbf{Svar}\end{aligned}$$

- -

2.

a) $\langle \boldsymbol{S}\rangle = \dfrac{1}{2\mu_0}\mathrm{Re}\{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}^*\} = \dfrac{E_0^2}{\mu_0 c}\left[\left(\dfrac{a^2}{a^2+s^2}\right)^2\hat{\boldsymbol{z}} - \dfrac{2ca^4 s}{\omega\,(a^2+s^2)^3}\hat{\boldsymbol{\phi}}\right] = \textbf{Svar a}$

b) $\ell_z = \dfrac{1}{c^2}\left(s\hat{\boldsymbol{\phi}}\right)\cdot\langle\boldsymbol{S}\rangle = -\dfrac{2a^4E_0^2}{\omega\mu_0 c^2}\dfrac{s^2}{(a^2+s^2)^3} \Rightarrow$

$$\frac{\Delta L_z}{\Delta z} = -\frac{2a^4E_0^2}{\omega\mu_0c^2}2\pi\int_0^\infty \frac{s^3\,\mathrm{d}s}{(a^2+s^2)^3} = -\frac{2a^4E_0^2}{\omega\mu_0c^2}2\pi\int_0^\infty\left[\frac{s}{(s^2+a^2)^2} - \frac{a^2 s}{(s^2+a^2)^3}\right]\mathrm{d}s = -\frac{E_0^2}{\mu_0c^2\omega}\pi a^2 = \textbf{Svar b}$$

c) $\dfrac{\Delta L_z}{\Delta z} = -\dfrac{1}{\omega}\dfrac{\Delta W}{\Delta z} \Rightarrow \dfrac{\Delta W}{\Delta L_z} = -\omega$, vilket också gäller de enskilda fotonerna: $\dfrac{W}{L} = \dfrac{\hbar\omega}{-\hbar} = -\omega$

- -

3.

Vågimpedansen $\eta = \sqrt{\dfrac{\mu_0}{\varepsilon_{\mathrm{r}}\varepsilon_0}} = \eta_0\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{r}}}}$, där $\eta_0 \approx 120\pi\ \Omega$. Således, $\varepsilon_{\mathrm{r}} = \left(\dfrac{\eta_0}{\eta}\right)^2 = 4 = $ **Delsvar**

Vågtalet $k = \omega\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{r}}\varepsilon_0\mu_0} = \dfrac{2\omega}{c} \Rightarrow \omega = \dfrac{kc}{2} \approx 1,5\cdot 10^8$ rad/s $=$ **Delsvar**

Vågen propagerar i $+\hat{\boldsymbol{z}}$-led.

Enligt högersystemregeln fås att $\boldsymbol{E} = v\boldsymbol{B}\times\hat{\boldsymbol{z}}$, där hastigheten $v = 1/\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{r}}\varepsilon_0\mu_0} = c/2$.

Således: $\boldsymbol{E} = 75\sin(kz-\omega t)\,\hat{\boldsymbol{x}} + 15\cos(kz-\omega t)\,\hat{\boldsymbol{y}}$ V/m $=$ **Delsvar**

- -

4.

Vågvektorn för den infallande vågen blir $\boldsymbol{k}_{\text{in}} = \dfrac{2\pi}{\lambda}\left(\hat{\boldsymbol{x}}\sin\theta + \hat{\boldsymbol{z}}\cos\theta\right)$.
Vågvektorn för den reflekterade vågen blir $\boldsymbol{k}_{\text{refl}} = \dfrac{2\pi}{\lambda}\left(\hat{\boldsymbol{x}}\sin\theta - \hat{\boldsymbol{z}}\cos\theta\right)$.
Med hänsyn till totalreflexionen vid $z = 0$ blir det totala komplexa elektriska fältet:

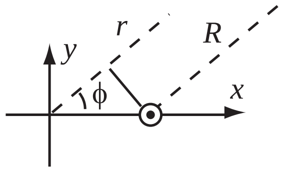
$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}(x,z) &= E_0\left[\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{k}_{\text{in}}\cdot\boldsymbol{r}) - \exp(\mathrm{i}\boldsymbol{k}_{\text{refl}}\cdot\boldsymbol{r})\right]\hat{\boldsymbol{y}} \\
&= E_0\exp\left(\frac{\mathrm{i}2\pi}{\lambda}x\sin\theta\right)\left[\exp\left(\frac{\mathrm{i}2\pi}{\lambda}z\cos\theta\right) - \exp\left(-\frac{\mathrm{i}2\pi}{\lambda}z\cos\theta\right)\right]\hat{\boldsymbol{y}} \\
&= 2\mathrm{i}\; E_0\exp\left(\frac{\mathrm{i}2\pi}{\lambda}x\sin\theta\right)\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}z\cos\theta\right)
\end{aligned}$$

Nollställena fås då $\dfrac{2\pi}{\lambda}z\cos\theta = n\pi$ där $n = -1, -2, \ldots \Rightarrow z_0 = \dfrac{n\lambda}{2\cos\theta}$ = **Svar**

- -

5.

Det komplexa differentiella dipolmomentet blir $\mathrm{d}\boldsymbol{p} = \dfrac{Np_0}{2\lambda}\hat{\boldsymbol{z}}\exp\left(\mathrm{j}\pi\dfrac{x}{\lambda}\right)\mathrm{d}x$
Avståndet till fjärrzonen blir $R(x) = r - x\cos\phi$.
I xy-planet är $\sin\theta = 1, \hat{\boldsymbol{\theta}} = -\hat{\boldsymbol{z}}$, varvid bidraget till det komplexa elektriska fjärrfältet blir ($k = 2\pi/\lambda$)



$$\mathrm{d}\boldsymbol{E} = \frac{\omega^2\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{Np_0}{2\lambda}\hat{\boldsymbol{z}}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}}{r}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi x/\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi x\cos\phi/\lambda}\mathrm{d}x$$

Totala komplexa elektriska fjärrfältet:

$$\boldsymbol{E} = \frac{\omega^2\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{Np_0}{2\lambda}\hat{\boldsymbol{z}}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}}{r}\int_{-\lambda}^{\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi(2\cos\phi+1)x/\lambda}\mathrm{d}x = \frac{\omega^2\mu_0 Np_0}{4\pi}\cdot\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}}{r}\cdot\frac{\sin\left(\pi\left(2\cos\phi+1\right)\right)}{\pi\left(2\cos\phi+1\right)}\hat{\boldsymbol{z}}$$

Nollriktningarna är där $\dfrac{\sin\left(\pi\left(2\cos\phi+1\right)\right)}{\pi\left(2\cos\phi+1\right)} = 0$.
Täljaren blir noll då $2\cos\phi + 1 = n$ (heltal) $\Rightarrow \cos\phi = \{-1, -1/2, 0, 1/2, 1\}$. För $\cos\phi = -1/2$ är också nämnaren noll och gränsvärdet $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$, varvid $\cos\phi = -1/2$ inte ger några nollriktningar (i själva verket maxriktningarna).
Således fås nollrikningarna för $\cos\phi = \{-1, 0, 1/2, 1\} \Rightarrow \phi = \{0°, \pm 60°, \pm 90°, 180°\}$ =**Svar**

Tentamen i del 2 av **2005–08–26, kl 8:00-13:00**
2A1840 TEORETISK ELEKTROTEKNIK F
2A1850 TEORETISK ELEKTROTEKNIK ME
2A1865 TEORETISK ELEKTROTEKNIK CL påbyggnadskurs

Examinator: Martin Norgren, tel. 790 7410

Hjälpmedel: TETs formelsamling, βetas handbok i matematik, miniräknare samt TETs "isskrapa" med vektorformler.

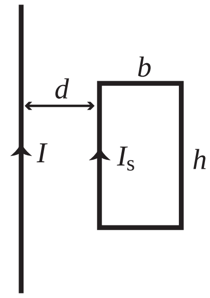
Varje uppgift ger maximalt 5p. Godkänt garanteras på 10p.

Namn och personnummer på varje blad. Endast en uppgift per blad; skriv ej på baksidan.
Uppställda samband skall motiveras! Ofullständiga motiveringar ger poängavdrag!

Tentamensbladet skall lämnas in!

1.

En rektangulär slinga med höjden h och bredden b befinner sig i samma plan som och på avståndet d från en lång rak tråd vilken för strömmen $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$, se figur. Slingan har resistansen R och en försumbar egeninduktans.



Bestäm strömmen I_s i den rektangulära slingan!

Obs! Inga approximationer tillåtna vad gäller förhållandet mellan b och d.

- -

2.

I luft utbreder sig en cirkulärt polariserad plan i $+\hat{\boldsymbol{z}}$-riktningen och en annan cirkulärt polariserad plan våg utbreder sig i $-\hat{\boldsymbol{z}}$-riktningen. I planet $z = 0$ är de totala fälten

$$\boldsymbol{E}(z=0,t) = E\left[\cos(\omega t)\,\hat{\boldsymbol{x}} + \sin(\omega t)\,\hat{\boldsymbol{y}}\right]$$
$$\boldsymbol{B}(z=0,t) = B\left[\sin(\omega t)\,\hat{\boldsymbol{x}} - \cos(\omega t)\,\hat{\boldsymbol{y}}\right]$$

Bestäm uttrycken för de två vågornas elektriska fält!

- -

3.

Professor Hallén definierade *utsläckningsdjupet* som den sträcka under vilken amplituden för en plan våg avtar med faktorn $\mathrm{e}^{-2\pi}$.

Bestäm utsläckningsdjupet i vatten från Östersjön vid mikrovågsfrekvensen 2,45 GHz!
Parametervärden: $\varepsilon_r = 80, \mu_r = 1, \sigma = 1$ S/m.

- -

4.

I ett koordinatsystem $S(xyz)$ gäller att $\boldsymbol{E} = E_0\hat{\boldsymbol{x}}$ och $\boldsymbol{B} = B_0\hat{\boldsymbol{z}}$.

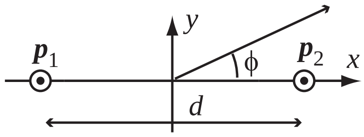
Finn ett koordinatsystem $S'(x'y'z')$ där $\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{0}$ och ange $\boldsymbol{B}'$ i det systemet!

- -

Vänd!

5.

Två elementardipoler $\boldsymbol{p}_1(t) = p\cos(\omega t)\,\hat{\boldsymbol{z}}$ och $\boldsymbol{p}_2(t) = p\cos(\omega t + \alpha)\,\hat{\boldsymbol{z}}$ befinner sig på x-axeln enligt figuren.



a) Bestäm fasskillnaden α uttryckt i d/λ så att strålningsdiagrammet får ett nollställe för riktningen $\phi = 0°$!

b) Utifrån resultatet i a-uppgiften, bestäm det maximalt tillåtna avståndet d för att strålningsdiagrammet skall få en och endast en max-riktning för $\phi = 180°$!

Tentamen i del 2 av **2005–08–26, kl 8:00-13:00**
2A1840 TEORETISK ELEKTROTEKNIK F
2A1850 TEORETISK ELEKTROTEKNIK ME
2A1865 TEORETISK ELEKTROTEKNIK CL påbyggnadskurs

Förslag till lösning.

1.

Det kvasistatiska magnetfältet blir $B = \dfrac{\mu_0 I_0}{2\pi s}\cos(\omega t)$, med definitionsriktning inåt papperet för punkter till höger om den raka tråden. Flödet genom slingan blir då (med definitionsriktning inåt papperet)

$$\Phi = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi}\cos(\omega t)\cdot h\int_d^{d+b}\frac{\mathrm{d}s}{s} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi}\cos(\omega t)\cdot h\ln\left(1+\frac{b}{d}\right)$$

Med definitionsriktningen given i figuren fås då att strömmen i slingan blir

$$I_\mathrm{s} = -\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \frac{\omega\mu_0 I_0 h}{2\pi R}\ln\left(1+\frac{b}{d}\right)\sin(\omega t) = \textbf{Svar}$$

- -

2.

Högersystemregeln $\boldsymbol{B}_1 = \dfrac{1}{c}\hat{\boldsymbol{z}}\times\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{B}_2 = \dfrac{1}{c}(-\hat{\boldsymbol{z}})\times\boldsymbol{E}_2$ ger att fälten kan ansättas som

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_1 &= A_1\left[\cos(\omega t - kz + \varphi_1)\,\hat{\boldsymbol{x}} \pm \sin(\omega t - kz + \varphi_1)\,\hat{\boldsymbol{y}}\right]\\
\boldsymbol{B}_1 &= \frac{A_1}{c}\left[\mp\sin(\omega t - kz + \varphi_1)\,\hat{\boldsymbol{x}} + \cos(\omega t - kz + \varphi_1)\,\hat{\boldsymbol{y}}\right]\\
\boldsymbol{E}_2 &= A_2\left[\cos(\omega t + kz + \varphi_2)\,\hat{\boldsymbol{x}} \pm \sin(\omega t + kz + \varphi_2)\,\hat{\boldsymbol{y}}\right]\\
\boldsymbol{B}_2 &= \frac{A_2}{c}\left[\pm\sin(\omega t + kz + \varphi_2)\,\hat{\boldsymbol{x}} - \cos(\omega t + kz + \varphi_2)\,\hat{\boldsymbol{y}}\right]
\end{aligned}$$

Vid $z = 0$ fås då att

$$A_1\cos(\omega t + \varphi_1) + A_2\cos(\omega t + \varphi_2) = E\cos(\omega t) \tag{1}$$
$$\pm\left[A_1\sin(\omega t + \varphi_1) + A_2\sin(\omega t + \varphi_2)\right] = E\sin(\omega t) \tag{2}$$
$$\pm\left[-A_1\sin(\omega t + \varphi_1) + A_2\sin(\omega t + \varphi_2)\right] = cB\sin(\omega t) \tag{3}$$
$$A_1\cos(\omega t + \varphi_1) - A_2\cos(\omega t + \varphi_2) = -cB\cos(\omega t) \tag{4}$$

Linjärkombinationer av (1) och (4) respektive (2) och (3) ger att

$$\begin{aligned}
2A_1\cos(\omega t + \varphi_1) &= (E - cB)\cos(\omega t)\\
2A_2\cos(\omega t + \varphi_2) &= (E + cB)\cos(\omega t)\\
\pm 2A_1\sin(\omega t + \varphi_1) &= (E - cB)\sin(\omega t)\\
\pm 2A_2\sin(\omega t + \varphi_2) &= (E + cB)\sin(\omega t)
\end{aligned}$$

Övre tecknet gäller således. A_1, A_2 oberoende av t ger att $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ (eller π om man så vill). Med $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ fås att $A_1 = \dfrac{E - cB}{2}, A_2 = \dfrac{E + cB}{2}$. **Svar:**

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_1 &= \frac{E - cB}{2}\left[\cos(\omega t - kz)\,\hat{\boldsymbol{x}} + \sin(\omega t - kz)\,\hat{\boldsymbol{y}}\right]\\
\boldsymbol{E}_2 &= \frac{E + cB}{2}\left[\cos(\omega t + kz)\,\hat{\boldsymbol{x}} + \sin(\omega t + kz)\,\hat{\boldsymbol{y}}\right]
\end{aligned}$$

där $k = \omega/c$.

- -

3.

Komplexa vågtalet:

$$k=\omega\sqrt{\left(\varepsilon_{\mathrm{r}}\varepsilon_0+\mathrm{i}\frac{\sigma}{\omega}\right)\mu_0}=\omega\sqrt{\frac{\varepsilon_{\mathrm{r}}\varepsilon_0\mu_0}{2}}\left(\left(\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_{\mathrm{r}}\varepsilon_0}\right)^2}+1\right)^{1/2}+\mathrm{i}\left(\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_{\mathrm{r}}\varepsilon_0}\right)^2}-1\right)^{1/2}\right)\equiv\beta+\mathrm{i}\alpha$$

Numeriska värden ger att $\beta\approx 460$ rad/m, $\alpha\approx 21$ Np/m.
Utsläckningsdjupet x fås av att $\mathrm{e}^{-\alpha x}=\mathrm{e}^{-2\pi}$. **Svar:** $x=\dfrac{2\pi}{\alpha}\approx 30$ cm

- -

4.

Se studiehäftet ”Elektromagnetism”, sidan 134, lösningen till kapitel 12, Ö12.

- -

5.

I xy-planet strålar båda dipolerna maximalt och med samma amplitud.
Avstånden till fjärrzonen blir $R_1=r+\dfrac{d}{2}\cos\phi$ och $R_2=r-\dfrac{d}{2}\cos\phi$.
Får då att strålningsfunktionen

$$f(\phi)\propto\left|\exp\left(-\mathrm{j}\frac{2\pi}{\lambda}\frac{d}{2}\cos\phi\right)+\exp\left(\mathrm{j}\frac{2\pi}{\lambda}\frac{d}{2}\cos\phi+\mathrm{j}\alpha\right)\right|=2\left|\cos\left(\frac{\pi d}{\lambda}\cos\phi+\frac{\alpha}{2}\right)\right|$$

a) För nollställe då $\phi=0$ fås att $\dfrac{\pi d}{\lambda}+\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\pi}{2}+n\pi, n=$heltal, vilket ger $\alpha=\pi\left(1+2n-2\dfrac{d}{\lambda}\right)$ =**Svar a**
b) Med α enligt a) insatt fås att strålningsfunktionen

$$f(\phi)\propto\left|\cos\left(\frac{\pi d}{\lambda}(\cos\phi-1)+\frac{\pi}{2}+n\pi\right)\right|=\left|\cos\left(\frac{\pi d}{\lambda}(\cos\phi-1)+\frac{\pi}{2}\right)\right|$$

Villkoret för att cosinusfunktion innanför beloppet blir extremal är

$$\frac{\pi d}{\lambda}\sin\phi\sin\left(\frac{\pi d}{\lambda}(\cos\phi-1)+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi d}{\lambda}\sin\phi\cos\left(\frac{\pi d}{\lambda}(\cos\phi-1)\right)=0$$

vilket uppfylls av $\sin\phi$ för $\phi=180°$. För att ej få fler extrempunkter måste $\cos\left(\dfrac{\pi d}{\lambda}(\cos\phi-1)\right)=0$.
Argumentet genomgår intervallet $\left[-\dfrac{2\pi d}{\lambda},0\right]$, vilket ej får innesluta $-\pi/2$. Således fås att

$$-\frac{\pi}{2}\le-\frac{2\pi d}{\lambda}\Rightarrow d\le\frac{\lambda}{4}=\ \textbf{Svar b}$$

Tentamen i del 2 av **2005–12–14, kl 14:00-19:00**
2A1840 TEORETISK ELEKTROTEKNIK F
2A1850 TEORETISK ELEKTROTEKNIK ME

Examinator: Martin Norgren, tel. 790 7410

Hjälpmedel: TETs formelsamling, βetas handbok i matematik, miniräknare samt TETs ”isskrapa” med vektorformler.

Varje uppgift ger maximalt 5p. Godkänt garanteras på 10p.

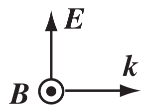
Namn och personnummer på varje blad. Endast en uppgift per blad; skriv ej på baksidan. Uppställda samband skall motiveras! Ofullständiga motiveringar ger poängavdrag!

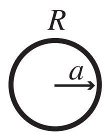
Tentamensbladet skall lämnas in!

1.

En bit ifrån en FM-sändare är det elektromagnetiska fältet en plan våg, med fälten

$$\boldsymbol{E}(z,t) = E_0 \cos\left(\frac{\omega}{c}z - \omega t\right)\hat{\boldsymbol{x}}, \qquad \boldsymbol{B}(z,t) = \frac{E_0}{c}\cos\left(\frac{\omega}{c}z - \omega t\right)\hat{\boldsymbol{y}}$$





där amplituden $E_0 = 2,0$ V/m. Som närmevärde på frekvensen används bärvågsfrekvensen, vilken är 106,70 MHz.

Examinator vill ta emot vågen mha en ”loopantenn” och har till ett första försök tillverkat en cirkulär trådslinga med radien $a = 5,0$ cm och resistansen $R = 50\ \Omega$. Slingan är centrerad kring origo med ytnormalen i $\hat{\boldsymbol{y}}-$led; se figuren.

a) Bestäm tidmedelvärdet av effekten/yta i den plana vågen!

b) Bestäm tidmedelvärdet av effekten som utvecklas i slingan!

c) Dividera b)-resultatet med a)-resultatet och bestäm den ”effektiva” ytan för den från planvågen upptagna effekten!

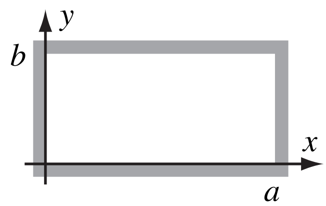
Ledningar: Man får anse att $a \ll \lambda$, våglängden hos den plana vågen. Slingans induktans försummas.

- -

2.

Inuti en luftfylld rektangulär vågledare av metall, med tvärsnittet $a \times b$ enligt figuren, utbreder sig en TE_{20}-mod med magnetfältet

$$\boldsymbol{B} = B_0\left[-\frac{a\beta}{2\pi}\sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right)\sin(\omega t - \beta z)\,\hat{\boldsymbol{x}} + \cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right)\cos(\omega t - \beta z)\,\hat{\boldsymbol{z}}\right],$$



där $\beta = \sqrt{\omega^2\mu_0\varepsilon_0 - \left(\frac{2\pi}{a}\right)^2}$ $(\beta > 0)$.

(a) Bestäm uttrycket för modens elektriska fält $\boldsymbol{E}(x,y,z,t)$!

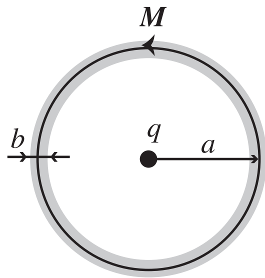
(b) För en vågledare med $a = 15$ cm och $b = 7,5$ cm, bestäm tidmedelvärdet av effekttransporten genom vågledarens tvärsnitt vid frekvensen 2,5 GHz då $B_0 = 2,0$ mT!

- -

Vänd!

3.

En magnetiserad ring har medelradien a och ett kvadratiskt tvärsnitt med sidan b, där $b \ll a$. Magnetiseringen är $\boldsymbol{M} = M_0 \hat{\boldsymbol{\phi}}$. I ringens centrum finns en punktladdning q.



När temperaturen höjs över Curie-temperaturen försvinner magnetiseringen. Bestäm den impuls $\boldsymbol{p}_{\text{mek}} = \int \boldsymbol{F}\, \mathrm{d}t$ som då fås på punktladdningen!

Ledningar: Punktladdningen antas vara så pass tung att den inte hinner förflyttas nämnvärt under den tid som magnetiseringen avtar till noll.

Det magnetostatiska fältet är $\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{M}$ inuti magneten och noll utanför.

- -

4.

I ett område finns ett homogent elektriskt fält $\boldsymbol{E} = E\hat{\boldsymbol{x}}$ och ett homogent magnetiskt fält $\boldsymbol{B} = B\hat{\boldsymbol{y}}$, där $E = 480$ kV/m och $B = 2,0$ mT.
En punktladdning rör sig genom fälten med den konstanta hastigheten $\boldsymbol{v} = v\hat{\boldsymbol{z}}$.

Bestäm först v så att den resulterande kraften på laddningen blir noll.

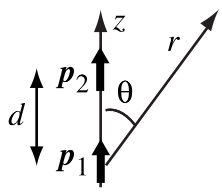
Bestäm därefter de elektriska och magnetiska fälten i det koordinatsystem där laddningen är i vila.

- -

5.

Ett rundstrålande (rotationssymmetriskt) antennsystem består av två elektriska elementardipoler placerade på z-axeln och på det inbördes avståndet d; se figuren. Dipolmomenten som funktioner av tiden äro

$$\boldsymbol{p}_1(t) = p_0 \cos(\omega t)\, \hat{\boldsymbol{z}}, \quad \boldsymbol{p}_2(t) = p_0 \cos(\omega t + \alpha)\, \hat{\boldsymbol{z}}$$



Bestäm faskonstanten α och det kortaste möjliga avståndet d (uttryckt i våglängder) så att arrayfaktorn blir noll för $\theta = 90°$ och får ett lokalt maximum för $\theta = 60°$!

GOD JUL & GOTT NYTT ÅR
önskar
KURSERNAS LÄRARE

Komplettering till formelsamlingen

Rörelsemängdstäthet: $\wp_{\text{em}} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}$

Lorentztransformation av fälten $\boldsymbol{E}$ och $\boldsymbol{B}$. Inertialramen $\bar{\mathcal{S}}$ rör sig med hastigheten $\boldsymbol{v}$ i förhållande till inertialramen $\mathcal{S}$.

$$\begin{cases} \bar{\boldsymbol{E}}_{\parallel} = \boldsymbol{E}_{\parallel} \\ \bar{\boldsymbol{E}}_{\perp} = \gamma\,(\boldsymbol{E}_{\perp} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \\ \bar{\boldsymbol{B}}_{\parallel} = \boldsymbol{B}_{\parallel} \\ \bar{\boldsymbol{B}}_{\perp} = \gamma \left(\boldsymbol{B}_{\perp} - \dfrac{1}{c^2} \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{E} \right) \end{cases} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$$

Tentamen i del 2 av **2005–12–14, kl 14:00-19:00**
2A1840 TEORETISK ELEKTROTEKNIK F
2A1850 TEORETISK ELEKTROTEKNIK ME

Förslag till lösning.

1.

a) Poyntings vektor blir $\boldsymbol{S} = \dfrac{1}{\mu_0}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B} = \dfrac{E_0^2}{\mu_0 c}\cos^2\left(\dfrac{\omega}{c}z - \omega t\right)\hat{\boldsymbol{z}}$

Delsvar: Tidmedelvärdet $\langle S_z\rangle = \dfrac{E_0^2}{2\mu_0 c} = \dfrac{E_0^2}{2\eta_0} \approx 5,3\ \mathrm{mW/m^2}$.

b) Med $a \ll \lambda$ blir $\boldsymbol{B}$ approximativt konstant över slingan, belägen kring $z = 0$, varvid emk:n blir $\mathcal{E} = -\pi a^2 \dfrac{\partial B_y(0,t)}{\partial t} = -\pi a^2 \dfrac{E_0}{c}\omega\sin(\omega t)$. Effekten $P = \dfrac{\mathcal{E}^2}{R} = \left(\pi a^2\right)^2 \dfrac{\omega^2 E_0^2}{Rc^2}\sin^2(\omega t)$

Delsvar: Tidmedelvärdet $\langle P\rangle = \left(\pi a^2\right)^2 \dfrac{\omega^2 E_0^2}{2Rc^2} = \left(\dfrac{\omega a}{c}\right)^2 \dfrac{\pi E_0^2}{2R}\pi a^2 \approx 12\ \mu\mathrm{W}$.

c) **Delsvar:** $A_{\mathrm{eff}} = \dfrac{\langle P\rangle}{\langle S_z\rangle} = \left(\dfrac{\omega a}{c}\right)^2 \dfrac{\pi\eta_0}{R}\pi a^2 \approx 23\ \mathrm{cm^2}$.

- -

2.

(a) Använd Ampères generaliserade lag, vilken med $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{0}$ lyder $\nabla\times\boldsymbol{B} = \mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}$

$$\begin{aligned}
\nabla\times\boldsymbol{B} &= \hat{\boldsymbol{y}}\left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}\right) = B_0\left(\frac{a\beta^2}{2\pi} + \frac{2\pi}{a}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right)\cos(\omega t - \beta z)\,\hat{\boldsymbol{y}} \\
&= B_0\frac{a}{2\pi}\omega^2\mu_0\varepsilon_0\sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right)\cos(\omega t - \beta z)\,\hat{\boldsymbol{y}} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}
\end{aligned}$$

Integrering map tiden och utelämnande av den statiska integrationskonstanten ger

Svar a: $\boldsymbol{E}(x,y,z,t) = B_0\dfrac{a\omega}{2\pi}\sin\left(\dfrac{2\pi}{a}x\right)\sin(\omega t - \beta z)\,\hat{\boldsymbol{y}}$

(b) Den momentana effekten som transporteras genom ett tvärsnitt z fås mha Poyntings vektor som

$$P(z,t) = \int \boldsymbol{S}\cdot\hat{\boldsymbol{z}}\mathrm{d}a = \frac{1}{\mu_0}\int_0^a \mathrm{d}x\int_0^b \mathrm{d}y\,(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})\cdot\hat{\boldsymbol{z}} = \frac{1}{\mu_0}\int_0^a \mathrm{d}x\int_0^b \mathrm{d}y\,\underbrace{(\boldsymbol{B}\times\hat{\boldsymbol{z}})}_{=-B_x\hat{\boldsymbol{y}}}\cdot\boldsymbol{E}$$

$$= -\frac{1}{\mu_0}\int_0^a \mathrm{d}x\int_0^b \mathrm{d}y E_y B_x = B_0^2\frac{1}{\mu_0}\frac{a\omega}{2\pi}\frac{a\beta}{2\pi}\sin^2(\omega t - \beta z)\underbrace{\int_0^a \sin^2\left(\frac{2\pi}{a}x\right)\mathrm{d}x\int_0^b \mathrm{d}y}_{=ab/2} = \frac{B_0^2\omega\beta a^3 b}{8\pi^2\mu_0}\sin^2(\omega t - \beta z)$$

Medelvärdet över en periodtid $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$: $\left\langle\sin^2(\omega t - \beta z)\right\rangle = \dfrac{1}{2}$ $\Rightarrow$**Svar b:** $\langle P\rangle = \dfrac{B_0^2\omega\beta a^3 b}{16\pi^2\mu_0} \approx 2,5\ \mathrm{MW}$

- -

3.

Inuti ringen blir det elektriska fältet från punktladdningen approximativt $\boldsymbol{E} \approx \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\hat{\boldsymbol{s}}$.

Rörelsemängdstätheten blir $\wp_{\mathrm{em}} = \varepsilon_0\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B} = \dfrac{q\mu_0 M_0}{4\pi a^2}\hat{\boldsymbol{s}}\times\hat{\boldsymbol{\phi}} = \dfrac{q\mu_0 M_0}{4\pi a^2}\hat{\boldsymbol{z}}$ inuti ringen och noll utanför.
Ringens volym är approximativt $2\pi ab^2$, varvid den totala elektromagnetiska rörelsemängden blir

$$\boldsymbol{p}_{\mathrm{em}} \approx \wp_{\mathrm{em}} 2\pi ab^2 = \frac{\mu_0 M_0 q b^2}{2a}\hat{\boldsymbol{z}}$$

När magnetiseringen försvinner blir $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{p}_{\mathrm{em}} = \boldsymbol{0}$ och enligt rörelsemängdens bevarande blir då impulsen på punktladdningen

$$\boldsymbol{p}_{\mathrm{mek}} = \frac{\mu_0 M_0 q b^2}{2a}\hat{\boldsymbol{z}} = \textbf{Svar}$$

3 - Alternativ lösning: Om $\boldsymbol{M}$ byts ut mot en strömtäthet $\boldsymbol{J} = J_0\hat{\boldsymbol{\phi}}$ blir strömmen $I = J_0 b^2$ och magnetfältet i centrum blir $\boldsymbol{B} = \dfrac{\mu_0 I}{2a}\hat{\boldsymbol{z}} = \dfrac{\mu_0 J_0 b^2}{2a}\hat{\boldsymbol{z}}$. Betrakta de magnetostatiska ekvationerna för fältet respektive vektorpotentialen: $\begin{cases}\nabla\times\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{J}\\ \nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0\end{cases}$ $\begin{cases}\nabla\times\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}\\ \nabla\cdot\boldsymbol{A} = 0\end{cases}$ En analogibetraktelse ger då att vid punktladdningen blir vektorpotentialen $\boldsymbol{A} = \dfrac{Bb^2}{2a}\hat{\boldsymbol{z}} = \dfrac{\mu_0 M_0 b^2}{2a}\hat{\boldsymbol{z}}$.

När magnetiseringen avtar avtar också $\boldsymbol{A}$ och ett elektriskt fält $\boldsymbol{E}_M = -\dfrac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$ uppstår.
Impulsen på punkladdningen blir då

$$\boldsymbol{p}_{\text{mek}} = \int_{\text{före}}^{\text{efter}} \boldsymbol{F}\,\mathrm{d}t = q\int_{\text{före}}^{\text{efter}} \boldsymbol{E}_M\,\mathrm{d}t = q\int_{\text{efter}}^{\text{före}} \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\mathrm{d}t = q\left(\boldsymbol{A}_{\text{före}} - \boldsymbol{A}_{\text{efter}}\right) = \frac{\mu_0 M_0 q b^2}{2a}\hat{\boldsymbol{z}} = \textbf{Svar}$$

- -

4.

Lorentz-kraften: $\boldsymbol{F} = q\left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}\right) = q\left(E\hat{\boldsymbol{x}} + vB\hat{\boldsymbol{z}}\times\hat{\boldsymbol{y}}\right) = q\left(E - vB\right)\hat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{0} \Rightarrow v = \dfrac{E}{B}$
Delsvar: $\boldsymbol{v} = v\hat{\boldsymbol{x}}$, där $v = 2{,}40\cdot 10^8$ m/s $\approx 0{,}8c$.
Bägge fälten saknar med hastigheten parallella komponenter $\Rightarrow \bar{\boldsymbol{E}}_\parallel = \bar{\boldsymbol{B}}_\parallel = \boldsymbol{0}$
$\bar{\boldsymbol{E}}_\perp = \gamma\left(\boldsymbol{E}_\perp + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}\right) = \gamma\left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}\right) = \boldsymbol{0}$, utifrån villkoret på $\boldsymbol{v}$.

$$\bar{\boldsymbol{B}}_\perp = \gamma\left(\boldsymbol{B}_\perp - \frac{1}{c^2}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{E}\right) = \gamma\left(B\hat{\boldsymbol{y}} - \frac{1}{c^2}vE\hat{\boldsymbol{z}}\times\hat{\boldsymbol{x}}\right) = \gamma\left(B - \frac{vE}{c^2}\right)\hat{\boldsymbol{y}} = \gamma\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)B\hat{\boldsymbol{y}} = \frac{\boldsymbol{B}}{\gamma}$$

Numeriska värden ger att $\gamma \approx 5/3 \Rightarrow$ **Delsvar:** $\bar{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{0}$, $\bar{\boldsymbol{B}} \approx 3/5\boldsymbol{B} = 1{,}2\hat{\boldsymbol{y}}$ mT.

- -

5.

Avståndet till fjärrzonen blir $r_1 = r$, $r_2 = r - d\cos\theta$.
Med samma amplitud på dipolerna blir det komplexa fjärrfältet proportionellt mot

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr_1} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr_2 + \mathrm{j}\alpha} &= \left\{k = \frac{2\pi}{\lambda}\right\} = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}\left(1 + \mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(2\pi d\lambda^{-1}\cos\theta + \alpha\right)}\right)\\ &= \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\pi d\lambda^{-1}\cos\theta + \alpha/2\right)}2\cos\left(\frac{\pi d}{\lambda}\cos\theta + \frac{\alpha}{2}\right)\end{aligned}$$

Arrayfaktorn blir således $f(\theta) = \cos\left(\dfrac{\pi d}{\lambda}\cos\theta + \dfrac{\alpha}{2}\right)$
$f\left(\theta = \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = 0 \Rightarrow \dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\pi}{2} + n\cdot\pi \Rightarrow \alpha = \pi + n\cdot 2\pi$
$\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\theta}\left(\theta = \dfrac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\dfrac{\pi d}{2\lambda} + \dfrac{\pi}{2} + n\cdot\pi\right)\dfrac{\pi d}{\lambda}\sin\dfrac{\pi}{3} = 0 \Rightarrow \dfrac{\pi d}{2\lambda} + \dfrac{\pi}{2} + n\cdot\pi = m\cdot\pi$
$\Rightarrow \{m - n = p\} \Rightarrow d = \lambda\left(2p - 1\right) \Rightarrow d = \lambda$
Fasskillnaden mellan dipolerna blir då $kd\cos\dfrac{\pi}{3} + \alpha = \dfrac{2\pi\lambda}{\lambda}\dfrac{1}{2} + \pi\left(n+1\right) = 2\pi\left(2 + n\right)$, så dipolerna samverkar maximalt vilket innebär att arrayfaktorn har ett maximum.
Svar: $\alpha = \pi$ (motfas) och $d = \lambda$.

Tentamen i del 2 av **2006–06–05, kl 14:00-19:00**
2A1840 TEORETISK ELEKTROTEKNIK F
2A1850 TEORETISK ELEKTROTEKNIK ME

Examinator: Martin Norgren, tel. 790 7410

Hjälpmedel: TETs formelsamling, βetas handbok i matematik, miniräknare samt TETs ”isskrapa” med vektorformler.

Varje uppgift ger maximalt 5p. Godkänt garanteras på 10p.

Namn och personnummer på varje blad. Endast en uppgift per blad; skriv ej på baksidan. Uppställda samband skall motiveras! Ofullständiga motiveringar ger poängavdrag!

Tentamensbladet skall lämnas in!

1.

En tätt lindad tunn skivspole har N praktiskt taget cirkulära varv. Det innersta varvet har radien b och det yttersta varvet har radien a ($b < a$). Spolen, vars mittpunktsnormal sammanfaller med z-axeln, befinner sig i ett homogent magnetfält $\boldsymbol{B}(t) = B_0 \sin(\omega t)\,\hat{\boldsymbol{z}}$.

Bestäm den i spolen inducerade emk:n!

- -

2.

Utgående från Maxwells ekvationer

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \qquad \nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J} + \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}, \qquad \nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \qquad \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0,$$

härled vågekvationerna för de elektromagnetiska fälten $\boldsymbol{E}$ och $\boldsymbol{B}$!

- -

3.

En cirkulärt polariserad plan elektromagnetisk våg utbreder sig i en förlustfri isolator.
Elektriska fältstyrkan hos vågen är

$$\boldsymbol{E}(z,t) = 1,5\left[\cos\!\big(0,5z - 10^8 t\big)\,\hat{\boldsymbol{x}} + \sin\!\big(0,5z - 10^8 t\big)\,\hat{\boldsymbol{y}}\right] \ \text{V/m}$$

a) Bestäm permittivitetstalet för isolatorn!

b) Bestäm tidmedelvärdet av strålningsvektorn (Poyntings vektor)!

- -

4.

Vid en kortslutning i ett flygplan sänds det ut en elektromagnetisk puls med fjärrfälten

$$\boldsymbol{E} = E_0 \frac{\sin\theta}{r}\,(r - ct)\,\mathrm{e}^{-\left(\frac{r-ct}{a}\right)^2}\hat{\boldsymbol{\theta}}, \qquad \boldsymbol{B} = E_0 \frac{\sin\theta}{cr}\,(r - ct)\,\mathrm{e}^{-\left(\frac{r-ct}{a}\right)^2}\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

Bestäm den bortstrålade energin!

Ledning: Antag att tiden $-\infty < t < \infty$.

- -

5.

Fyra elementardipoler med dipolmomenten $\boldsymbol{p}_n(t) = p_0 \cos(\omega t + n\alpha)\,\hat{\boldsymbol{z}}$ ($n = \{0, 1, 2, 3\}$) är placerade längs x-axeln i punkterna $n \cdot d\hat{\boldsymbol{x}}$.

Föreslå en design där du bestämmer avståndet d ($d > 0$ och skall anges i våglängder) och fasskillnaden α sådana att dipolernas fjärrfält samverkar maximalt längs med den negativa x-axeln och sådana att fjärrfältet blir noll längs med den positiva x-axeln!

Ledning: Geometrisk serie.

Tentamen i del 2 av **2006–06–05, kl 14:00-19:00**
2A1840 TEORETISK ELEKTROTEKNIK F
2A1850 TEORETISK ELEKTROTEKNIK ME

Förslag till lösning.

1.

Mellan radierna s och $s + \mathrm{d}s$ finns $\mathrm{d}N = \dfrac{N}{a-b}\mathrm{d}s$ varv vilka passeras av det sammanlänkade flödet $\mathrm{d}\Phi = B_0 \sin(\omega t) \cdot \pi s^2 \cdot \mathrm{d}N = \dfrac{\pi N B_0}{a-b} \sin(\omega t)\, s^2 \mathrm{d}s$.

Totala flödet: $\Phi = \dfrac{\pi N B_0}{a-b} \sin(\omega t) \displaystyle\int_b^a s^2 \mathrm{d}s = \dfrac{\pi N B_0}{a-b} \sin(\omega t) \dfrac{a^3-b^3}{3} = \dfrac{\pi N B_0}{3} \sin(\omega t) \left(a^2+ab+b^2\right)$

Svar: Emk:n $\mathcal{E} = -\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{\omega \pi N B_0}{3} \left(a^2+ab+b^2\right) \cos(\omega t)$

- -

2.

Bilda

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E} = -\nabla \times \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \boldsymbol{B} = -\mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{J}}{\partial t} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$
$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \nabla \times \boldsymbol{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \nabla \times \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \mu_0 \nabla \times \boldsymbol{J} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2}$$

därefter

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E} = \nabla \left(\nabla \cdot \boldsymbol{E}\right) - \nabla^2 \boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \nabla \rho - \nabla^2 \boldsymbol{E}, \qquad \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{B} = \nabla \left(\nabla \cdot \boldsymbol{B}\right) - \nabla^2 \boldsymbol{B} = 0 - \nabla^2 \boldsymbol{B}$$

varigenom (med $\mu_0 \varepsilon_0 = 1/c^2$) vi erhåller vågekvationerna

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \boldsymbol{E} = \frac{\nabla \rho}{\varepsilon_0} + \mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{J}}{\partial t}, \qquad \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \boldsymbol{B} = -\mu_0 \nabla \times \boldsymbol{J}$$

- -

3.

Vågen går i $+z$-led, med vågtalet $k = 0,5$ m^{-1} och vinkelfrekvensen $\omega = 10^8$ s^{-1}.

I ett material utan magnetiska egenskaper är $k = \omega \sqrt{\varepsilon_\mathrm{r} \varepsilon_0 \mu_0} = \dfrac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_\mathrm{r}} \Rightarrow \varepsilon_\mathrm{r} = \left(\dfrac{kc}{\omega}\right)^2 \approx 2,25 =$ **Svar a**.

Den komplexa amplituden för det elektriska fältet blir $\boldsymbol{E}_0 = 1,5\,(\hat{\boldsymbol{x}} - \mathrm{i}\hat{\boldsymbol{y}})$ V/m

$\boldsymbol{H}$-fältets komplexa amplitud blir $\boldsymbol{H}_0 = \dfrac{1}{\eta} \hat{\boldsymbol{z}} \times \boldsymbol{E}_0$, där vågimpedansen $\eta = \sqrt{\dfrac{\mu_0}{\varepsilon_0 \varepsilon_\mathrm{r}}} \approx \dfrac{120\pi}{1,5}$ Ω, varigenom $\boldsymbol{H}_0 \approx \dfrac{2,25}{120\pi} (\mathrm{i}\hat{\boldsymbol{x}} + \hat{\boldsymbol{y}})$ A/m.

Slutligen, $\langle \boldsymbol{S} \rangle = \dfrac{1}{2} \mathrm{Re}\left\{\boldsymbol{E}_0 \times \boldsymbol{H}_0^*\right\} \approx \dfrac{1}{2} \dfrac{2,25 \cdot 1,5}{120\pi} 2\hat{\boldsymbol{z}}$ W/m^2 ≈ 9 mW/m^2 $=$ **Svar b**.

4.

Poyntings vektor blir

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B} = E_0^2\frac{(r-ct)^2}{\mu_0 c r^2}\mathrm{e}^{-2\left(\frac{r-ct}{a}\right)^2}\sin^2\theta\hat{\boldsymbol{r}}$$

Effekten som passerar ut genom en sfärisk yta med radie r blir då

$$P = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\boldsymbol{S}\cdot\hat{\boldsymbol{r}}r^2\sin\theta = 2\pi\int_0^{\pi}\sin^3\theta\mathrm{d}\theta\, E_0^2\frac{(r-ct)^2}{\mu_0 c}\mathrm{e}^{-2\left(\frac{r-ct}{a}\right)^2} = \frac{8\pi}{3}E_0^2\frac{(r-ct)^2}{\mu_0 c}\mathrm{e}^{-2\left(\frac{r-ct}{a}\right)^2}$$

Energin: $W = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}P\mathrm{d}t$. Variabelbytet $u = \dfrac{\sqrt{2}\,(ct-r)}{a}$ ger att

$$W = \frac{8\pi}{3}E_0^2\frac{a^3}{\mu_0 c^2 2\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{\infty}u^2\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u = \left\{\text{Beta: avsnitt 7.5, nr42 \& } c^2 = \frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}\right\} = \frac{2\sqrt{2}\pi}{3}\varepsilon_0 E_0^2 a^3\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{4}$$

Svar: $W = \dfrac{\pi^{3/2}\sqrt{2}}{3}\varepsilon_0 E_0^2 a^3$

5.

På stora avstånd längs med positiva x-axeln blir avstånden till fältpunkten $R_n^+ = x - nd$, och längs med negativa fås $R_n^- = -x + nd$. Alla dipoler har samma amplitud. Med hänsyn till faslägena och retardationerna blir då fjärrfältens belopp

$$\left|\boldsymbol{E}^+\right| \propto \left|\sum_{n=0}^{3}\mathrm{e}^{j\left(n\alpha - kR_n^+\right)}\right| = \left|\sum_{n=0}^{3}\mathrm{e}^{jn(\alpha+kd)}\right|, \qquad \left|\boldsymbol{E}^-\right| \propto \left|\sum_{n=0}^{3}\mathrm{e}^{j\left(n\alpha - kR_n^-\right)}\right| = \left|\sum_{n=0}^{3}\mathrm{e}^{jn(\alpha-kd)}\right|$$

0:te termerna är ettor. För maximal samverkan måste då samtliga komplexa termer (med beloppet ett) vara ettor. På $-x$-axeln blir detta uppfyllt om $\alpha - kd = m_1\cdot 2\pi$ (m_1=heltal)
På $+x$-axeln ger summan av en geometrisk serie att

$$\sum_{n=0}^{3}\mathrm{e}^{jn(\alpha+kd)} = \frac{1-\mathrm{e}^{j4(\alpha+kd)}}{1-\mathrm{e}^{j(\alpha+kd)}}$$

Täljaren blir noll då $4\,(\alpha+kd) = m_2\cdot 2\pi$. För att inte nämnaren skall bli noll samtidigt måste heltalet $m_2 \neq 0, \pm 4, \pm 8\ldots$ $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ och rättframma räkningar ger att

$$d = \frac{\lambda}{8}\left(m_2 - 4m_1\right), \qquad \alpha = \frac{\pi}{4}\left(m_2 + 4m_1\right) = \frac{\pi}{4}\left(m_2 - 4m_1\right) + m_1\cdot 2\pi$$

Välj t.ex. $m_2 = 1, m_1 = 0$ (kortaste möjliga separationsavstånd) $\Rightarrow$ **Svar:** $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ och $d = \dfrac{\lambda}{8}$.

Tentamen i del 2 av **2006–12–13, kl 8:00-13:00**

2A1840 TEORETISK ELEKTROTEKNIK F

2A1850 TEORETISK ELEKTROTEKNIK ME

Examinator: Martin Norgren, tel. 790 7410

Hjälpmedel:

TETs formelsamling, βetas handbok i matematik, miniräknare samt TETs "isskrapa" med vektorformler.

Varje uppgift ger maximalt 5p. Godkänt garanteras på 10p.

Namn och personnummer på varje blad.

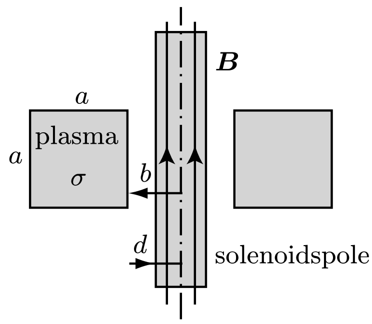
Endast en uppgift per blad; skriv ej på baksidan!

Uppställda samband skall motiveras! Ofullständiga motiveringar ger poängavdrag!

Tentamensbladet skall lämnas in!

Uppgift 1

En tokamakreaktor för framställning av fusionsenergi är uppbyggd enligt följande. Inuti en solenoidspole, med radien $d = 0,5$ m, finns ett approximativt homogent magnetfält $\boldsymbol{B}$ (utanför solenoidspolen antas magnetfältet vara försumbart).
Runtom solenoidspolen finns ett ringformat område innehållande ett plasma, med ledningsförmågan $\sigma = 3,5 \cdot 10^8$ S/m. Det ringformade området har innerradien $b = 1,0$ m och ett kvadratisk tvärsnitt med sidan $a = 2,0$ m.



Magnetfältet ändras enligt $\boldsymbol{B}(t) = \begin{cases} B_0\hat{\boldsymbol{z}} & t < 0 \\ B_0\,(1 - t/\tau)\,\hat{\boldsymbol{z}} & 0 < t < \tau \\ \boldsymbol{0} & t > \tau \end{cases}$, där $B_0 = 1$ T och $\tau = 4$ s.

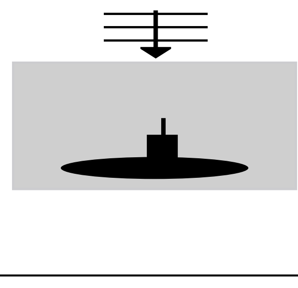
Bestäm den i plasmat utvecklade resistiva effekten!

Uppgift 2

Härled Poyntings teorem, $\nabla \cdot \boldsymbol{S} + \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{J} + \dfrac{\partial u_{\mathrm{em}}}{\partial t} = 0$, och beskriv dess fysikaliska innebörd!

Uppgift 3

Vid kommunikation med en ubåt sänds radiovågen via jonosfären och kan därför i första approximationen antagas infalla vinkelrätt mot vattenytan. För att ubåten skall kunna uppfatta signalen måste elektriska fältets amplitud överstiga $1,0$ µV/m. Infallande vågens frekvens är 15 kHz och tidmedelvärdet av dess effekttäthet är 2,0 kW/m^2. Vattnets permittivitetstal $\varepsilon_{\mathrm{r}} = 80$ och dess ledningsförmåga $\sigma = 1,0$ S/m.



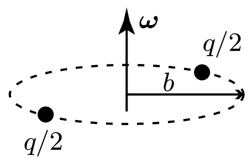
Vilket är det största djup på vilket ubåten kan ta emot en signal?

Ledning: Gör rimliga approximationer utifrån de givna värdena.

Vänd!

Uppgift 4

Två diametralt motsatt placerade punktladdningar, vardera med laddningen $q/2$, cirkulerar med vinkelhastigheten ω i en bana med radien b; se figuren.



Bestäm fälten $\boldsymbol{E}$ och $\boldsymbol{B}$ på symmetriaxeln!

Ledningar: Använd allmänna uttrycken för fälten från en punktladdning:

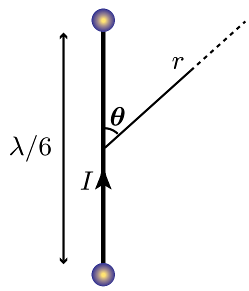
$$\boldsymbol{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\left(1-\hat{\boldsymbol{R}}\cdot\boldsymbol{\beta}\right)^3}\left(\frac{1-\beta^2}{R^2}\left(\hat{\boldsymbol{R}}-\boldsymbol{\beta}\right)+\frac{\hat{\boldsymbol{R}}\times\left[\left(\hat{\boldsymbol{R}}-\boldsymbol{\beta}\right)\times\boldsymbol{a}\right]}{c^2R}\right), \qquad \boldsymbol{B}=\frac{1}{c}\hat{\boldsymbol{R}}\times\boldsymbol{E}$$

där $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{w}(t_\mathrm{r})$, $\quad t_\mathrm{r}=t-R/c$, $\quad \boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{v}(t_\mathrm{r})/c$, $\quad \boldsymbol{a}=c\dot{\boldsymbol{\beta}}(t_\mathrm{r})$

Om den azimutala koordinaten för en av laddningarna ges som $\phi=\phi_0+\omega t_\mathrm{r}$, blir dess läge, hastighet och acceleration uttryckta i cylinderkoordinater $\boldsymbol{w}(t_\mathrm{r})=b\hat{\boldsymbol{s}}(\phi)$, $\boldsymbol{v}(t_\mathrm{r})=\omega b\hat{\boldsymbol{\phi}}(\phi)$, $\boldsymbol{a}(t_\mathrm{r})=-\omega^2 b\hat{\boldsymbol{s}}(\phi)$.

Uppgift 5

En mittpunktsmatad rak trådantenn matas från en tidsharmonisk strömkälla med vinkelfrekvensen ω. Antennen har längden $\lambda/6$ (λ =våglängden). För att erhålla en approximativt konstant amplitud på strömmen avslutas antennen med två metallkulor (s.k. kapacitansantenn), varvid strömmen längs med hela antenntråden approximativt blir $I(z,t)=I_0\cos(\omega t)$, dvs oberoende av z som är koordinaten längs med antenntråden.



Bestäm de elektriska och magnetiska fälten i fjärrzonen!

Kanske till hjälp: $\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2\sin\alpha\sin\beta$

GOD JUL & GOTT NYTT ÅR

önskar

KURSERNAS LÄRARE

Tentamen i del 2 av **2006–12–13, kl 8:00-13:00**
2A1840 TEORETISK ELEKTROTEKNIK F
2A1850 TEORETISK ELEKTROTEKNIK ME

Förslag till lösning.

Uppgift 1

Faradays lag, tillämpad på en koaxiell cirkelyta med radien s, ger att

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 2\pi s E_\phi = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int \boldsymbol{B} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \mathrm{d}a = -\pi c^2 B_0 \begin{cases} 0 & t < 0 \\ -1/\tau & 0 < t < \tau \\ 0 & t > \tau \end{cases},$$

varvid det under intervallet $0 < t < \tau$ finns ett elektrisk fält $\boldsymbol{E} = \dfrac{d^2 B_0}{2\tau s}\hat{\boldsymbol{\phi}}$.

Fältet driver strömtätheten $\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E}$ genom plasmat vilket ger en effekttäthet $p = \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{J} = \sigma E^2 = \dfrac{\sigma d^4 B_0^2}{4\tau^2 s^2}$

Totala effekten: $P = \displaystyle\int p \, \mathrm{d}\tau = \frac{\sigma d^4 B_0^2}{4\tau^2} a 2\pi \int_b^{a+b} \frac{1}{s^2} s \mathrm{d}s = \frac{\sigma \pi a d^4 B_0^2}{2\tau^2} \ln\left(1 + \frac{a}{b}\right)$.

Insatta värden ger $P = \dfrac{3,5 \cdot 10^8 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 0,5^4 \cdot 1^2}{2 \cdot 4^2} \ln 3 \text{ W} \approx 4,7 \cdot 10^6 \text{ W}$.

Svar: 4,7 MW (konstant värmeeffekt under intervallet $0 < t < 4$ s)

Uppgift 2

Se Griffiths, avsnitt 8.1.2

Uppgift 3

Sambandet mellan infallande medeleffekttäthet och infallande elektriska fältets amplitud blir $S_{\text{in}} = \dfrac{E_{\text{in}}^2}{2\eta_0}$.

I vattnet, med $\sigma \gg \omega \varepsilon_{\text{r}} \varepsilon_0$, blir vågtalets real- och imaginärdelar $\beta \approx \alpha \approx \sqrt{\dfrac{\omega \mu_0 \sigma}{2}}$.

Vattnets vågimpedans $\eta \approx \sqrt{\dfrac{\mu_0}{\varepsilon}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{\mathrm{i}\sigma}{\omega\varepsilon}}} = \sqrt{\dfrac{-\mathrm{i}\omega\mu_0}{\sigma}}$.

Har att $|\eta| \ll \eta_0$ varigenom transmitterade amplituden vid gränsytan blir

$E_{\text{tr}} \approx \dfrac{2\,|\eta|}{\eta_0} E_{\text{in}} = \dfrac{2}{\eta_0}\sqrt{\dfrac{\omega\mu_0}{\sigma}}\sqrt{2\eta_0 S_{\text{in}}} = 2\sqrt{\dfrac{2\omega\mu_0 S_{\text{in}}}{\sigma\eta_0}} = 2\sqrt{\dfrac{2\omega S_{\text{in}}}{\sigma c}}$ ($c = \eta_0/\mu_0$=ljushastigheten).

Vid djupet h blir transmitterade amplituden $E_{\min} = E_{\text{tr}} \mathrm{e}^{-\alpha h}$, ur vilket

$h = \dfrac{1}{\alpha} \ln \dfrac{E_{\text{tr}}}{E_{\min}} = \sqrt{\dfrac{2}{\omega\mu_0\sigma}} \ln\left(\dfrac{2}{E_{\min}}\sqrt{\dfrac{2\omega S_{\text{in}}}{\sigma c}}\right)$

Med $E_{\min} = 1,0$ µV/m och övriga värden insatta fås $h_{\max} \approx 60$ m = **Svar**.

Uppgift 4

$\boldsymbol{E}$-fältet från en laddning $q/2$: $\boldsymbol{E} = \dfrac{q/2}{4\pi\varepsilon_0\left(1-\hat{\boldsymbol{R}}\cdot\boldsymbol{\beta}\right)^3}\left(\dfrac{1-\beta^2}{R^2}\left(\hat{\boldsymbol{R}}-\boldsymbol{\beta}\right)+\dfrac{\hat{\boldsymbol{R}}\times\left[\left(\hat{\boldsymbol{R}}-\boldsymbol{\beta}\right)\times\boldsymbol{a}\right]}{c^2R}\right)$

Har att $\boldsymbol{r} = z\hat{\boldsymbol{z}}, \quad \boldsymbol{w}(t_\mathrm{r}) = b\hat{\boldsymbol{s}}(t_\mathrm{r}) = b\left(\hat{\boldsymbol{x}}\cos(\omega t_\mathrm{r}+\phi_0)+\hat{\boldsymbol{y}}\sin(\omega t_\mathrm{r}+\phi_0)\right)$.

Hastigheten $\boldsymbol{v}(t_\mathrm{r}) = \omega b\hat{\boldsymbol{\phi}}(t_\mathrm{r})$. Accelerationen $\boldsymbol{a}(t_\mathrm{r}) = -\omega^2 b\hat{\boldsymbol{s}}(t_\mathrm{r})$.

Alla punkter på z-axeln har samma retarderade tid $t_\mathrm{r} = t - R/c$ där $R = \sqrt{z^2+b^2}$.

Har att $\hat{\boldsymbol{R}} = \dfrac{z\hat{\boldsymbol{z}}-b\hat{\boldsymbol{s}}}{R}$, $\boldsymbol{\beta} = \dfrac{\omega b}{c}\hat{\boldsymbol{\phi}}$, varvid $\hat{\boldsymbol{R}}\cdot\boldsymbol{\beta} = 0$.

Fortsättning: $\hat{\boldsymbol{R}}-\boldsymbol{\beta} = \dfrac{1}{R}\left(-b\hat{\boldsymbol{s}}-\dfrac{\omega bR}{c}\hat{\boldsymbol{\phi}}+z\hat{\boldsymbol{z}}\right) \Rightarrow \left(\hat{\boldsymbol{R}}-\boldsymbol{\beta}\right)\times\boldsymbol{a} = -\dfrac{\omega^2 b}{R}\left(\dfrac{\omega bR}{c}\hat{\boldsymbol{z}}+z\hat{\boldsymbol{\phi}}\right)$

$\Rightarrow \hat{\boldsymbol{R}}\times\left(\left(\hat{\boldsymbol{R}}-\boldsymbol{\beta}\right)\times\boldsymbol{a}\right) = -\dfrac{\omega^2 b}{R^2}\left(-z^2\hat{\boldsymbol{s}}+\dfrac{\omega b^2 R}{c}\hat{\boldsymbol{\phi}}-bz\hat{\boldsymbol{z}}\right)$

$\Rightarrow \dfrac{\hat{\boldsymbol{R}}\times\left(\left(\hat{\boldsymbol{R}}-\boldsymbol{\beta}\right)\times\boldsymbol{a}\right)}{c^2R} = \dfrac{\omega^2 b}{c^2R^3}\left(z^2\hat{\boldsymbol{s}}-\dfrac{\omega b^2 R}{c}\hat{\boldsymbol{\phi}}+bz\hat{\boldsymbol{z}}\right)$

$\dfrac{1-\beta^2}{R^2}\left(\hat{\boldsymbol{R}}-\boldsymbol{\beta}\right) = \dfrac{1-\omega^2b^2/c^2}{R^3}\left(-b\hat{\boldsymbol{s}}-\dfrac{\omega bR}{c}\hat{\boldsymbol{\phi}}+z\hat{\boldsymbol{z}}\right)$.

Lägg ihop och förenkla, varvid bidraget från den ena $q/2$ blir $\boldsymbol{E}_1 = \dfrac{q/2}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\left[\left(\dfrac{\omega^2R^2}{c^2}-1\right)b\hat{\boldsymbol{s}}-\dfrac{\omega R}{c}b\hat{\boldsymbol{\phi}}+z\hat{\boldsymbol{z}}\right]$

Magnetfältet: $\boldsymbol{B}_1 = \dfrac{1}{c}\hat{\boldsymbol{R}}\times\boldsymbol{E}_1 = \dfrac{q/2\, b}{4\pi\varepsilon_0 cR^3}\left[\dfrac{\omega z}{c}\hat{\boldsymbol{s}}+\dfrac{\omega^2Rz}{c^2}\hat{\boldsymbol{\phi}}+\dfrac{\omega b}{c}\hat{\boldsymbol{z}}\right]$

Den andra $q/2$ ger motriktade $\hat{\boldsymbol{s}}$- och $\hat{\boldsymbol{\phi}}$-bidrag, varigenom de totala fälten på z-axeln blir

$$\textbf{Svar: } \boldsymbol{E} = \frac{qz}{4\pi\varepsilon_0\left(z^2+b^2\right)^{3/2}}\hat{\boldsymbol{z}}, \qquad \boldsymbol{B} = \frac{q\omega b^2}{4\pi\varepsilon_0 c^2\left(z^2+b^2\right)^{3/2}}\hat{\boldsymbol{z}} = \frac{\mu_0 I b^2}{2\left(z^2+b^2\right)^{3/2}}\hat{\boldsymbol{z}} \text{ där } I = \frac{\omega q}{2\pi}$$

$\boldsymbol{E}$ är samma som från en homogent laddad ring eller om laddningarna ligger stilla.
$\boldsymbol{B}$ är samma som från en cirkulär slinga förande likströmmen I.

Uppgift 5

Från lämpligt uttryck i formelsamlingen fås att magnetiska fjärrfältet blir

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi cr}\hat{\boldsymbol{z}}\times\hat{\boldsymbol{r}}\int_{-\lambda/12}^{\lambda/12}\frac{\partial}{\partial t}I_0\cos\left[\omega\left(t-r/c+z'\hat{\boldsymbol{z}}\cdot\hat{\boldsymbol{r}}/c\right)\right]\mathrm{d}z' = \frac{\mu_0 I_0\sin\theta\hat{\boldsymbol{\phi}}}{4\pi cr}\int_{-\lambda/12}^{\lambda/12}\frac{\partial}{\partial t}\cos\left[\omega\left(t-r/c+z'\cos\theta/c\right)\right]\mathrm{d}z'$$

I det här fallet är $\dfrac{\partial}{\partial t} = \dfrac{c}{\cos\theta}\dfrac{\partial}{\partial z'} \Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{B}(r,\theta,\phi,t) &= \frac{\mu_0 I_0\sin\theta\hat{\boldsymbol{\phi}}}{4\pi cr}\cdot\frac{c}{\cos\theta}\int_{-\lambda/12}^{\lambda/12}\frac{\partial}{\partial z'}\cos\left[\omega\left(t-r/c+z'\cos\theta/c\right)\right]\mathrm{d}z' = \{\omega/c = 2\pi/\lambda\} \\
&= \frac{\mu_0 I_0\sin\theta\hat{\boldsymbol{\phi}}}{4\pi r\cos\theta}\left\{\cos\left(\omega\left[t-\frac{r}{c}\right]+\frac{\pi}{6}\cos\theta\right)-\cos\left(\omega\left[t-\frac{r}{c}\right]-\frac{\pi}{6}\cos\theta\right)\right\} \\
&= -\frac{\mu_0 I_0}{2\pi r}\tan\theta\sin\left(\frac{\pi}{6}\cos\theta\right)\sin\left(\omega\left[t-\frac{r}{c}\right]\right)\hat{\boldsymbol{\phi}} = \textbf{Delsvar}
\end{aligned}$$

Elektriska fjärrfältet

$$\boldsymbol{E}(r,\theta,\phi,t) = c\boldsymbol{B}(r,\theta,\phi,t)\times\hat{\boldsymbol{r}} = -\frac{\mu_0 cI_0}{2\pi r}\tan\theta\sin\left(\frac{\pi}{6}\cos\theta\right)\sin\left(\omega\left[t-\frac{r}{c}\right]\right)\hat{\boldsymbol{\theta}} = \textbf{Delsvar}$$

Tentamen i del 2 av **2007–06–04, kl 14:00-19:00**
2A1840 TEORETISK ELEKTROTEKNIK F
2A1850 TEORETISK ELEKTROTEKNIK ME

Examinator: Martin Norgren, tel. 790 7410

Hjälpmedel:
TETs formelsamling, βetas handbok i matematik, miniräknare samt TETs "isskrapa" med vektorformler.

Varje uppgift ger maximalt 5p. Godkänt garanteras på 10p.

Namn och personnummer på varje blad.

Endast en uppgift per blad; skriv ej på baksidan!

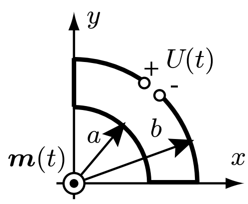
Uppställda samband skall motiveras! Ofullständiga motiveringar ger poängavdrag!

Tentamensbladet skall lämnas in!

Uppgift 1

En magnetisk dipol $\boldsymbol{m}(t) = m_0 \cos(\omega t)\, \hat{\boldsymbol{z}}$ befinner sig i origo.
En nästan sluten slinga av metall ligger i xy-planet enligt figuren.

Bestäm spänningen $U(t)$, under förutsättningen att frekvensen är måttligt hög (retardationen försummas)!



Uppgift 2

Inuti ett interstellärt skikt med tjockleken a finns en oscillerande strömtäthet $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}, t) = \omega\varepsilon_0 E_0 \cos(\omega t)\, \hat{\boldsymbol{x}}$.
Skiktet, vilket betraktas som plant, befinner sig i området $|z| < a/2$.

Inuti skiktet är magnetfältet $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) = -\dfrac{E_0}{c} \sin\!\left(\dfrac{\omega z}{c}\right) \cos\!\left(\omega t - \dfrac{\omega a}{2c}\right) \hat{\boldsymbol{y}}$

Bestäm det (dynamiska) elektriska fältet $\boldsymbol{E}$ inuti skiktet!

Uppgift 3

För att minimera förlusterna skall insidan av en resonanskavitet beläggas med ett skikt av silver.

Resonatorn skall arbeta vid frekvensen 21,3 GHz.

Bestäm tjockleken h hos skiktet utifrån att amplituden hos en plan våg som utbreder sig motsvarande sträcka skall minska till 10%!

Data för silver: $\varepsilon_\mathrm{r} \approx \mu_\mathrm{r} \approx 1$, ledningsförmågan $\sigma \approx 6,3 \cdot 10^7$ S/m.

Vänd!

Uppgift 4

Hur stor del av den totalt utstrålade effekten från en elektrisk elementardipol strålar ut inom $\pm 45^\circ$ från ekvatorialplanet?

Uppgift 5

Lorentztransformationen av det elektromagnetiska fältet lyder

$$\bar{\boldsymbol{E}}_\parallel = \boldsymbol{E}_\parallel, \qquad \bar{\boldsymbol{E}}_\perp = \gamma\,(\boldsymbol{E}_\perp + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}_\perp)\,, \qquad\qquad \bar{\boldsymbol{B}}_\parallel = \boldsymbol{B}_\parallel, \qquad \bar{\boldsymbol{B}}_\perp = \gamma\left(\boldsymbol{B}_\perp - \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{E}_\perp/c^2\right),$$

där $\gamma = \left(1 - v^2/c^2\right)^{-1/2}$ och $\parallel$ respektive $\perp$ avser de gentemot hastigheten $\boldsymbol{v}$ parallella respektive vinkelräta fältkomponenterna.

Visa att $\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{B}$ är en Lorentz-invariant, dvs att $\bar{\boldsymbol{E}} \cdot \bar{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{B}$!

Tentamen i del 2 av **2007–06–04, kl 14:00-19:00**
2A1840 TEORETISK ELEKTROTEKNIK F
2A1850 TEORETISK ELEKTROTEKNIK ME

Förslag till lösning.

Uppgift 1

Inuti metalltråden gäller att $\boldsymbol{E} = -\nabla V - \dfrac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = 0$. Integration längs tråden, från pluspolen till minuspolen, ger då att $0 = \int_{(+)}^{(-)} \left(\nabla V + \dfrac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = V_{(-)} - V_{(+)} + \int_{(+)}^{(-)} \dfrac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$ Spänningen: $U(t) = V_{(+)} - V_{(-)} =$ $\{\text{slingan stilla}\} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \displaystyle\int_{(+)}^{(-)} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \approx \{\text{nästan sluten}\} \approx \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \oint \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$

I xy-planet, där $\boldsymbol{r} = s\hat{\boldsymbol{s}}$, fås från Griffiths (5.83) att vektorpotentialen blir $\boldsymbol{A} = \dfrac{\mu_0 m_0 \cos(\omega t)}{4\pi} \dfrac{\hat{\boldsymbol{\phi}}}{s^2} \Rightarrow$ endast de bågformade delarna av slingan, där $\mathrm{d}\boldsymbol{l} = s\hat{\boldsymbol{\phi}}\mathrm{d}\phi$, bidrar till linjeintegralen.

Vi får att $\oint \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \dfrac{\mu_0 m_0 \cos(\omega t)}{4\pi} \left\{ \displaystyle\int_0^{\pi/2} \dfrac{\mathrm{d}\phi}{b} + \int_{\pi/2}^{0} \dfrac{\mathrm{d}\phi}{a} \right\} = \dfrac{\mu_0 m_0 \cos(\omega t)}{8} \left(\dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{a}\right)$

Sluligen, $U(t) = -\dfrac{\mu_0 m_0}{8} \left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}\right) \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \cos(\omega t) = \dfrac{\mu_0 m_0 \omega}{8} \left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}\right) \sin(\omega t) =$ **Svar**

Uppgift 2

Använd Ampères generaliserade lag: $\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$.

$$\begin{aligned}
\nabla \times \boldsymbol{B} - \mu_0 \boldsymbol{J} &= -\frac{\partial B_y}{\partial z}\hat{\boldsymbol{x}} - \mu_0 \boldsymbol{J} = \frac{\omega}{c^2} E_0 \cos\!\left(\frac{\omega z}{c}\right) \cos\!\left(\omega t - \frac{\omega a}{2c}\right) \hat{\boldsymbol{x}} - \omega \mu_0 \varepsilon_0 E_0 \cos(\omega t)\, \hat{\boldsymbol{x}} \\
&= \omega \mu_0 \varepsilon_0 E_0 \left[\cos\!\left(\frac{\omega z}{c}\right) \cos\!\left(\omega t - \frac{\omega a}{2c}\right) - \cos(\omega t)\right] \hat{\boldsymbol{x}} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}
\end{aligned}$$

Integrering map tiden och utelämnandet av den mot ett statiskt fält svarande integrationskonstanten ger
Svar: $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = E_0 \left[\cos\!\left(\dfrac{\omega z}{c}\right) \sin\!\left(\omega t - \dfrac{\omega a}{2c}\right) - \sin(\omega t)\right] \hat{\boldsymbol{x}}$

Uppgift 3

Det gäller att $\omega \varepsilon_0 \approx 1,18$ S/m $\ll \sigma$, dvs silver är en mycket god ledare, vilket ger att inträngningsdjupet blir

$$d = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_0 \sigma}} \approx 4,345 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

Amplituden som funktion av ett avstånd z blir $E_0 \propto \mathrm{e}^{-z/d}$. Avståndet för avtagande till 10% blir

$$z_0 = -d \ln(0,1) \approx 1,000 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

Svar: 1µm.

Uppgift 4

Se sidorna 183-184 i studiehäftet Elektromagnetism, räkneuppgift Ö3.

Uppgift 5

$\bar{\boldsymbol{E}} \cdot \bar{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{B} \Rightarrow \bar{\boldsymbol{E}}_\parallel \cdot \bar{\boldsymbol{B}}_\parallel + \bar{\boldsymbol{E}}_\perp \cdot \bar{\boldsymbol{B}}_\perp = \boldsymbol{E}_\parallel \cdot \boldsymbol{B}_\parallel + \boldsymbol{E}_\perp \cdot \boldsymbol{B}_\perp$, där $\bar{\boldsymbol{E}}_\parallel = \boldsymbol{E}_\parallel, \bar{\boldsymbol{B}}_\parallel = \boldsymbol{B}_\parallel$ ger att de parallella bidragen blir lika. Återstår då att visa att $\bar{\boldsymbol{E}}_\perp \cdot \bar{\boldsymbol{B}}_\perp = \boldsymbol{E}_\perp \cdot \boldsymbol{B}_\perp$

$$\bar{\boldsymbol{E}}_\perp \cdot \bar{\boldsymbol{B}}_\perp = \gamma^2 \left(\boldsymbol{E}_\perp + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}_\perp\right) \cdot \left(\boldsymbol{B}_\perp - \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{E}_\perp / c^2\right) = \gamma^2 \left[\boldsymbol{E}_\perp \cdot \boldsymbol{B}_\perp - \left(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}_\perp\right) \cdot \left(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{E}_\perp\right) / c^2\right]$$

Permutation av trippelprodukt samt BAC-CAB ger att:

$$\left(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}_\perp\right) \cdot \left(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{E}_\perp\right) = \boldsymbol{v} \cdot \left[\boldsymbol{E}_\perp \times \left(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}_\perp\right)\right] = \boldsymbol{v} \cdot \left[\boldsymbol{v}\left(\boldsymbol{E}_\perp \cdot \boldsymbol{B}_\perp\right) - \boldsymbol{B}_\perp \left(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{E}_\perp\right)\right] = v^2 \left(\boldsymbol{E}_\perp \cdot \boldsymbol{B}_\perp\right)$$

Således fås att $\bar{\boldsymbol{E}}_\perp \cdot \bar{\boldsymbol{B}}_\perp = \gamma^2 \left(1 - v^2/c^2\right) \boldsymbol{E}_\perp \cdot \boldsymbol{B}_\perp = \boldsymbol{E}_\perp \cdot \boldsymbol{B}_\perp$ **V.S.V.**

Tentamen TENB **2007–12–18, kl 14:00-19:00**

EI1240 TEORETISK ELEKTROTEKNIK F

2A1840 TEORETISK ELEKTROTEKNIK F (äldre kurs)

2A1850 TEORETISK ELEKTROTEKNIK ME (äldre kurs)

Examinator: Martin Norgren, tel. 790 7410

Hjälpmedel:

TETs formelsamling, βetas handbok i matematik, miniräknare samt TETs ”isskrapa” med vektorformler.

Varje uppgift ger maximalt 10p. Godkänt garanteras på 20p.

Namn och personnummer på varje blad.

Endast en uppgift per blad; skriv ej på baksidan!

Uppställda samband skall motiveras! Ofullständiga motiveringar ger poängavdrag!

Tentamensbladet skall lämnas in!

Uppgift 1

(specialfall av beviset i Griffiths, sidorna 296-297, för flödeslagen)

Givet ett rotationssymmetriskt statiskt magnetfält, vilket uttryckt i cirkelkoordinater blir:

$$\boldsymbol{B}(s,\phi,z) = B_s(s,z)\,\hat{\boldsymbol{s}}(\phi) + B_z(s,z)\,\hat{\boldsymbol{z}}$$

Koaxiellt med z-axeln finns en cirkulär slinga, med radien a, vilken rör sig med hastigheten $\boldsymbol{v} = v\hat{\boldsymbol{z}}$.

För ett kort tidintervall Δt skriver vi $B_z(s, z + v\Delta t) = B_z(s,z) + v\Delta t \dfrac{\partial B_z}{\partial z}(s,z) + \mathcal{O}\Big((v\Delta t/a)^2\Big)$

Visa att för det magnetiska flödet, Φ, genom den plana ytan till slingan fås att

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Phi(z + v\Delta t) - \Phi(z)}{\Delta t} = -2\pi v a B_s(a,z) \equiv -\oint (\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

Uppgift 2

I en luftfylld koaxialkabel har innerledaren radien a och ytterledaren har innerradien $2a$. Inuti koaxialkabeln utbreder sig en ”Gaussisk” puls med det elektriska fältet

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \frac{E_0}{\sqrt{p}}\frac{a}{s}\mathrm{e}^{-\left(\frac{z-ct}{pa}\right)^2}\hat{\boldsymbol{s}}$$

(den dimensionslösa parametern p är ett mått på pulsens utsträckning längs med kabeln)

(a) Bestäm pulsens magnetiska fält (4 poäng)!

(b) Bestäm pulsens energi (3 poäng)!

(c) Bestäm pulsens rörelsemängd (3 poäng)!

Ledningar: En välkänd integral är $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-kx^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{k}}$. Bortse ifrån statiska fält.

Var god vänd!

Uppgift 3

En plan våg med det elektriska fältet

$$\boldsymbol{E}_{\text{in}}(\boldsymbol{r},t) = E_0\,(-\hat{\boldsymbol{x}}\cos\theta + \hat{\boldsymbol{z}}\sin\theta)\cos\Big(\frac{\omega}{c}\,(x\sin\theta + z\cos\theta) - \omega t\Big)$$

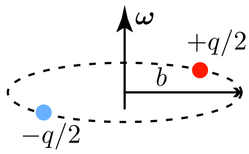
faller från det luftfyllda området $z < 0$ in mot ett mycket stort metallplan i ytan $z = 0$.

(a) Bestäm den reflekterade vågens elektriska fält, på reell form som funktion av $\boldsymbol{r}$ & t (5 poäng)!

(b) För ett visst värde på infallsvinkeln θ blir tidmedelvärdet av den elektriska fältenergitätheten, $\langle u_{\text{e}}\rangle$, oberoende av avståndet från metallplanet. Bestäm denna vinkel samt $\langle u_{\text{e}}\rangle$ (5 poäng)!

Uppgift 4

Två diametralt motsatt placerade punktladdningar med laddningarna $\pm q/2$ cirkulerar med vinkelhastigheten ω i en bana med radien b; se figuren.



På symmetriaxeln (z-axeln) blir de elektriska och magnetiska fälten från laddningen $+q/2$

$$\boldsymbol{E}_1 = \frac{q/2}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\left[\left(\frac{\omega^2 R^2}{c^2} - 1\right) b\hat{\boldsymbol{s}} - \frac{\omega R}{c} b\hat{\boldsymbol{\phi}} + z\hat{\boldsymbol{z}}\right], \qquad \boldsymbol{B}_1 = \frac{(q/2)\ b}{4\pi\varepsilon_0 c R^3}\left[\frac{\omega z}{c}\hat{\boldsymbol{s}} + \frac{\omega^2 R z}{c^2}\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{\omega b}{c}\hat{\boldsymbol{z}}\right]$$

där $\hat{\boldsymbol{s}} = \hat{\boldsymbol{s}}(\phi)\,, \hat{\boldsymbol{\phi}} = \hat{\boldsymbol{\phi}}(\phi)$. Retarderade azimutalläget: $\phi = \omega t_{\text{r}}$, där $t_{\text{r}} = t - R/c$ och där $R = \sqrt{z^2 + b^2}$

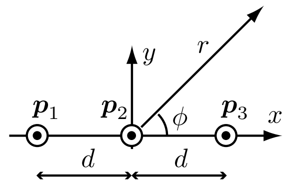
(a) Lägg till bidragen från laddningen $-q/2$ och bestäm de totala elektriska och magnetiska fälten på z-axeln (4 poäng)!

(b) Antag att $|z| \gg b$ och att z är i fjärrzonen, vilket innebär att $\dfrac{\omega\,|z|}{c} \gg 1$. Bestäm fjärrfälten, på z-axeln, som explicita funktioner av z och t (5 poäng)!

(c) Ange typen av polarisation hos fjärrfältet (1 poäng)!

Uppgift 5

I en så kallad binomial gruppantenn bestående av tre elementardipoler ges dipolmomenten som $\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{p}_3 = p_0\cos(\omega t)\,\hat{\boldsymbol{z}}, \boldsymbol{p}_2 = 2p_0\cos(\omega t)\,\hat{\boldsymbol{z}}$. Dipolerna är placerade utefter x-axeln på det inbördes avståndet d.



(a) Bestäm i xy-planet det elektriska fjärrfältet, som funktion av r, ϕ och t (9 poäng)!

(b) Om avståndet d är kortare än en viss längd fås inga nollriktningar för fjärrfältet. Bestäm denna längd (1 poäng)!

GOD JUL & GOTT NYTT ÅR
ÖNSKAR
KURSERNAS LÄRARE

Tentamen TENB **2007–12–18, kl 14:00-19:00**
EI1240 TEORETISK ELEKTROTEKNIK F
2A1840 TEORETISK ELEKTROTEKNIK F (äldre kurs)
2A1850 TEORETISK ELEKTROTEKNIK ME (äldre kurs)

Förslag till lösning.

Uppgift 1

$$\frac{\Phi(z+v\Delta t)-\Phi(z)}{\Delta t} = 2\pi\int_0^a \frac{B_z(s,z+v\Delta t)-B_z(s,z)}{\Delta t}s\mathrm{d}s = 2\pi v\int_0^a \frac{\partial B_z}{\partial z}s\mathrm{d}s + \mathcal{O}(v\Delta t/a)$$

varigenom $\Delta t \to 0 \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = 2\pi v\displaystyle\int_0^a \frac{\partial B_z}{\partial z}s\mathrm{d}s$. I cylinderkoordinater: $\nabla\cdot\boldsymbol{B} = \dfrac{1}{s}\dfrac{\partial(sB_s)}{\partial s} + \dfrac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow$

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -2\pi v\int_0^a \frac{1}{s}\frac{\partial(sB_s)}{\partial s}s\mathrm{d}s = -2\pi v a B_s(a,z) = -\int_0^{2\pi}(v\hat{\boldsymbol{z}}\times\boldsymbol{B})\cdot\hat{\boldsymbol{\phi}}\,a\,\mathrm{d}\phi = -\oint(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}\ \textbf{V.S.V.}$$

Uppgift 2

(a) Använd Faradays lag, $\nabla\times\boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$.

Med $\boldsymbol{E} = E_s(s,z,t)\,\hat{\boldsymbol{s}}(\phi)$ och z,t-beroendet på formen $z-ct$ fås att

$$\nabla\times\boldsymbol{E} = \hat{\boldsymbol{\phi}}\frac{\partial E_s}{\partial z} = -\hat{\boldsymbol{\phi}}\frac{1}{c}\frac{\partial E_s}{\partial t} = -\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \Rightarrow \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = \frac{E_s}{c}\hat{\boldsymbol{\phi}} = \frac{E_0}{\sqrt{p}c}\frac{a}{s}\mathrm{e}^{-\left(\frac{z-ct}{pa}\right)^2}\hat{\boldsymbol{\phi}} = \textbf{Svar a}$$

(b) Energin kan beräknas genom att volymsintegrera energitätheterna eller tidsintegrera effekttransporten. Här väljs det senare.

Effekten som transporteras genom ett tvärsnitt z fås mha Poyntings vektor som

$$P(z,t) \quad = \int\boldsymbol{S}\cdot\hat{\boldsymbol{z}}\mathrm{d}a = \frac{1}{\mu_0}\int_a^{2a} s\mathrm{d}s\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\,(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})\cdot\hat{\boldsymbol{z}} = \frac{E_0^2a^2}{p\mu_0 c}2\pi\ln 2\,\mathrm{e}^{-2\left(\frac{z-ct}{pa}\right)^2}$$

Svar b: $U_{\mathrm{em}} = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}P\mathrm{d}t = \{\text{Ledn.}\} = \frac{E_0^2a^2}{p\mu_0 c}2\pi\ln 2\sqrt{\frac{\pi p^2a^2}{2c^2}} = \left\{\mu_0 c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\right\} = \pi\sqrt{2\pi}\ln 2\,\varepsilon_0 E_0^2 a^3$

(c) Rörelsemängdstätheten: $\wp_{\mathrm{em}} = \varepsilon_0\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B} = \dfrac{\varepsilon_0 E_0^2 a^2}{pcs^2}\mathrm{e}^{-2\left(\frac{z-ct}{pa}\right)^2}\hat{\boldsymbol{z}}$.

Integrera $\wp_{\mathrm{em}}$ över hela volymen mellan ledarna och utnyttja ledningen för integralen i z-led, så fås att

$$\boldsymbol{p}_{\mathrm{em}} = \frac{\varepsilon_0 E_0^2 a^2}{pc}2\pi\ln 2\sqrt{\frac{\pi p^2 a^2}{2}}\hat{\boldsymbol{z}} = \frac{1}{c}\pi\sqrt{2\pi}\ln 2\,\varepsilon_0 E_0^2 a^3\hat{\boldsymbol{z}} = \textbf{Svar c}\ \text{(som väntat är } \frac{U_{\mathrm{em}}}{|\boldsymbol{p}_{\mathrm{em}}|} = c\text{)}$$

Uppgift 3

Infallande vågens komplexa elektriska fält blir

$$\tilde{\boldsymbol{E}}_{\mathrm{in}}(\boldsymbol{r},t) = E_0\left(-\hat{\boldsymbol{x}}\cos\theta + \hat{\boldsymbol{z}}\sin\theta\right)\exp\left(\mathrm{i}\frac{\omega}{c}\left(x\sin\theta + z\cos\theta\right) - \mathrm{i}\omega t\right) = \boldsymbol{E}_{0\mathrm{in}}\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{k}_{\mathrm{in}}\cdot\boldsymbol{r} - \mathrm{i}\omega t)$$

Infallande vågvektorn är $\boldsymbol{k}_{\mathrm{in}} = \dfrac{\omega}{c}\left(\hat{\boldsymbol{x}}\sin\theta + \hat{\boldsymbol{z}}\cos\theta\right)$ och infallande amplitudvektorn är $\boldsymbol{E}_{\mathrm{oin}} = E_0\left(-\hat{\boldsymbol{x}}\cos\theta + \hat{\boldsymbol{z}}\sin\theta\right)$.

Ytnormalen till planet är $\hat{\boldsymbol{n}} = \hat{\boldsymbol{z}}$ varvid planets ekvation blir $\hat{\boldsymbol{z}}\cdot\boldsymbol{r} = a = 0$.

Enligt uttrycken i formelsamlingen blir vågvektorn och amplitudvektorn för den reflekterade vågen

$$\boldsymbol{k}_{\mathrm{refl}} = \boldsymbol{k}_{\mathrm{in}} - 2\left(\hat{\boldsymbol{z}}\cdot\boldsymbol{k}_{\mathrm{in}}\right)\hat{\boldsymbol{z}} = \frac{\omega}{c}\left(\hat{\boldsymbol{x}}\sin\theta - \hat{\boldsymbol{z}}\cos\theta\right)$$
$$\boldsymbol{E}_{0\mathrm{refl}} = -\boldsymbol{E}_{0\mathrm{in}} + 2\left(\hat{\boldsymbol{z}}\cdot\boldsymbol{E}_{0\mathrm{in}}\right)\hat{\boldsymbol{z}} = E_0\left(\hat{\boldsymbol{x}}\cos\theta + \hat{\boldsymbol{z}}\sin\theta\right)$$

varigenom $\tilde{\boldsymbol{E}}_{\text{refl}}(\boldsymbol{r},t) = E_0\,(\hat{\boldsymbol{x}}\cos\theta + \hat{\boldsymbol{z}}\sin\theta)\exp\Big(\mathrm{i}\frac{\omega}{c}\,(x\sin\theta - z\cos\theta) - \mathrm{i}\omega t\Big)$ och på reell form blir detta

$$\boldsymbol{E}_{\text{refl}}(\boldsymbol{r},t) = E_0\,(\hat{\boldsymbol{x}}\cos\theta + \hat{\boldsymbol{z}}\sin\theta)\cos\Big(\frac{\omega}{c}\,(x\sin\theta - z\cos\theta) - \omega t\Big) = \textbf{Svar a}$$

Medelst Euler-formlerna fås att totala komplexa fältet blir

$$\tilde{\boldsymbol{E}} = 2E_0\exp\Big(\mathrm{i}\frac{\omega}{c}x\sin\theta - \mathrm{i}\omega t\Big)\,\Big[-\mathrm{i}\hat{\boldsymbol{x}}\cos\theta\sin\Big(\frac{\omega}{c}z\cos\theta\Big) + \hat{\boldsymbol{z}}\sin\theta\cos\Big(\frac{\omega}{c}z\cos\theta\Big)\Big]$$

Enligt Griffiths Problem 9.11 blir tidmedelvärdet av elektriska fältenergitätheten

$$\begin{aligned}
\langle u_{\mathrm{e}}\rangle &= \frac{\varepsilon_0}{4}\mathrm{Re}\left\{\tilde{\boldsymbol{E}}\cdot\tilde{\boldsymbol{E}}^*\right\} = \varepsilon_0 E_0^2\left[\cos^2\theta\sin^2\Big(\frac{\omega}{c}z\cos\theta\Big) + \sin^2\theta\cos^2\Big(\frac{\omega}{c}z\cos\theta\Big)\right]\\
&= \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2}\left[\cos^2\theta\left(1-\cos\Big(2\frac{\omega}{c}z\cos\theta\Big)\right) + \sin^2\theta\left(1+\cos\Big(2\frac{\omega}{c}z\cos\theta\Big)\right)\right]\\
&= \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2}\left[1 + \left(\sin^2\theta - \cos^2\theta\right)\cos\Big(2\frac{\omega}{c}z\cos\theta\Big)\right]
\end{aligned}$$

Svar b: $\theta = 45^\circ \Rightarrow \langle u_{\mathrm{e}}\rangle = \dfrac{\varepsilon_0 E_0^2}{2}$, oberoende av z.

Uppgift 4

(a) För $-q/2$ fås de planpolära enhetsvektorerna $\hat{\boldsymbol{s}}(\phi+\pi) = -\hat{\boldsymbol{s}}(\phi)\,,\hat{\boldsymbol{\phi}}(\phi+\pi) = -\hat{\boldsymbol{\phi}}(\phi)$, varigenom teckenskillnaden mellan laddningarna gör att bidragen i $\hat{\boldsymbol{s}}$- och $\hat{\boldsymbol{\phi}}$-led fördubblas medan $\hat{\boldsymbol{z}}$-bidragen tar ut varandra

Svar a: $\boldsymbol{E} = \dfrac{qb}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\left[\left(\dfrac{\omega^2R^2}{c^2} - 1\right)\hat{\boldsymbol{s}}(\phi) - \dfrac{\omega R}{c}\hat{\boldsymbol{\phi}}(\phi)\right],\qquad \boldsymbol{B} = \dfrac{qb}{4\pi\varepsilon_0 cR^3}\left[\dfrac{\omega z}{c}\hat{\boldsymbol{s}}(\phi) + \dfrac{\omega^2Rz}{c^2}\hat{\boldsymbol{\phi}}(\phi)\right]$

(b) $|z| \gg b \Rightarrow R \approx |z|\,, t_{\mathrm{r}} \approx t - |z|/c.\ \dfrac{\omega R}{c} \approx \dfrac{\omega\,|z|}{c} \gg 1 \Rightarrow$ **Svar b:**

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_{\text{fjärr}} &= \frac{qb}{4\pi\varepsilon_0\,|z|^3}\frac{\omega^2\,|z|^2}{c^2}\hat{\boldsymbol{s}}(\omega t_{\mathrm{r}}) = \frac{\mu_0\omega^2 qb}{4\pi\,|z|}\left[\cos\left(\omega\left[t-\frac{|z|}{c}\right]\right)\hat{\boldsymbol{x}} + \sin\left(\omega\left[t-\frac{|z|}{c}\right]\right)\hat{\boldsymbol{y}}\right]\\
\boldsymbol{B}_{\text{fjärr}} &= \frac{qb}{4\pi\varepsilon_0 c\,|z|^3}\frac{\omega^2\,|z|\,z}{c^2}\hat{\boldsymbol{\phi}}(\omega t_{\mathrm{r}}) = \frac{\mu_0\omega^2 qb}{4\pi c\,|z|}\cdot\frac{z}{|z|}\left[-\sin\left(\omega\left[t-\frac{|z|}{c}\right]\right)\hat{\boldsymbol{x}} + \cos\left(\omega\left[t-\frac{|z|}{c}\right]\right)\hat{\boldsymbol{y}}\right]
\end{aligned}$$

Svar c: Fjärrfältet är cirkulärpolariserat. RCP för $z > 0$ och LCP för $z < 0$ (enligt IEEE:s definition)

Anmärkning: Fjärrfältet är detsamma som i Griffths Problem 11.4 (dipolmomentet $p_0 = qb$).

Uppgift 5

Från respektive dipol blir avståndet till fältpunkten: $R_1 = r + d\cos\phi, R_2 = r, R_3 = r - d\cos\phi$.
I xy-planet är $\boldsymbol{r} = r\hat{\boldsymbol{s}}$ varigenom det komplexa elektriska fältet blir

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E} &= -\frac{\mu_0\omega^2 p_0}{4\pi r}\hat{\boldsymbol{s}}\times(\hat{\boldsymbol{s}}\times\hat{\boldsymbol{z}})\exp\Big(-\mathrm{j}\frac{\omega}{c}r\Big)\left[\exp\Big(-\mathrm{j}\frac{\omega}{c}d\cos\phi\Big) + 2 + \exp\Big(\mathrm{j}\frac{\omega}{c}d\cos\phi\Big)\right] = \left\{\frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}\right\}\\
&= \frac{\mu_0\omega^2 p_0}{4\pi r}\hat{\boldsymbol{z}}\exp\Big(-\mathrm{j}\frac{\omega}{c}r\Big)\left[2 + 2\cos\left(\frac{2\pi d}{\lambda}\cos\phi\right)\right] = \frac{\mu_0\omega^2 p_0}{\pi r}\hat{\boldsymbol{z}}\exp\Big(-\mathrm{j}\frac{\omega}{c}r\Big)\cos^2\left(\frac{\pi d}{\lambda}\cos\phi\right)
\end{aligned}$$

Svar a: $\boldsymbol{E}(r,\phi,t) = \dfrac{\mu_0\omega^2 p_0}{\pi r}\cos^2\left(\dfrac{\pi d}{\lambda}\cos\phi\right)\cos(\omega\,[t - r/c])\,\hat{\boldsymbol{z}}$

Svar b: Argumentet till $\cos^2$-funktionen blir aldrig $\pm\dfrac{\pi}{2}$ om $d < \lambda/2$ (λ=våglängden)

Tentamen TENB **2008–06–02, kl 8:00-13:00**
EI1240 TEORETISK ELEKTROTEKNIK F
2A1840 TEORETISK ELEKTROTEKNIK F (äldre kurs)
2A1850 TEORETISK ELEKTROTEKNIK ME (äldre kurs)

Examinator: Martin Norgren, tel. 790 7410

Hjälpmedel:
TETs formelsamling, βetas handbok i matematik, miniräknare samt TETs "isskrapa" med vektorformler.

Varje uppgift ger maximalt 10p. Godkänt garanteras på 20p.

Namn och personnummer på varje blad.

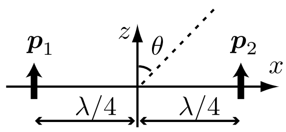
Endast en uppgift per blad; skriv ej på baksidan!

Uppställda samband skall motiveras! Ofullständiga motiveringar ger poängavdrag!

Tentamensbladet skall lämnas in!

Uppgift 1

En kort dipolantenn $\boldsymbol{p}_1 = p\cos(\omega t)\,\hat{\boldsymbol{z}}$ befinner sig i punkten $-\dfrac{\lambda}{4}\hat{\boldsymbol{x}}$ och en annan kort dipolantenn $\boldsymbol{p}_2 = p\cos(\omega t + \pi/4)\,\hat{\boldsymbol{z}}$ befinner sig i punkten $\dfrac{\lambda}{4}\hat{\boldsymbol{x}}$.



Bestäm de riktningar i xz-planet för vilka fjärrfältet blir noll!

Uppgift 2

En luftfylld cirkulär plattkondensator har radien a och plattavståndet d ($d \ll a$). Kondensatorn matas med en tidsharmonisk ström med vinkelfrekvensen ω. Om $d \ll \lambda$ (våglängden) blir det elektriska fältet inuti kondensatorn (med god approximation) $\boldsymbol{E} = E_z(s)\cos(\omega t)\,\hat{\boldsymbol{z}}$.

a) Om dessutom $a \ll \lambda$ kan $\boldsymbol{E}$-fältet i första approximationen också anses vara s-oberoende: $\boldsymbol{E} = E_0\cos(\omega t)\,\hat{\boldsymbol{z}}$. Beräkna utifrån denna approximation magnetfältet $\boldsymbol{B}$ inuti kondensatorn (7 poäng)!

b) Om villkoret $a \ll \lambda$ inte är väl uppfyllt kan resultatet behöva korrigeras. Beräkna utifrån $\boldsymbol{B}$-fältet den första korrektionstermen till $\boldsymbol{E}$-fältet (3 poäng)!

Ledningar: Bortse ifrån randeffekter vid plattornas kanter. Situationen är rotationssymmetrisk. Alla korrektionstermer är noll på symmetriaxeln.

Var god vänd!

Uppgift 3

Från ett luftfyllt område faller en plan våg in vinkelrätt mot en halvrymd bestående av ett förlustfritt material. Det förlustfria materialet skall utformas så att följande specifikationer uppfylls:

- 10/11 av den infallande effekttätheten skall transmitteras in i halvrymden.
- I halvrymden skall fashastigheten vara hälften av vad den är i luften.
- I halvrymden skall den relativa permittiviteten vara större än den relativa permeabiliteten.

Bestäm halvrymdens relativa permittivitet, ε_{r}, samt dess relativa permeabilitet, μ_{r}!

Uppgift 4

Två punktladdningar, bägge med laddningen q, rör sig parallellt och jämsides med varandra med den konstanta hastigheten $\boldsymbol{v} = v\hat{\boldsymbol{z}}$. Den ena laddningen rör sig på z-axeln medan den andra laddningen rör sig på avståndet s från z-axeln.

Bestäm kraften verkande på laddningen bredvid z-axeln!

Uppgift 5

För kvasistationära strömmar i slutna banor uppfyller de elektriska och magnetiska fälten ekvationerna

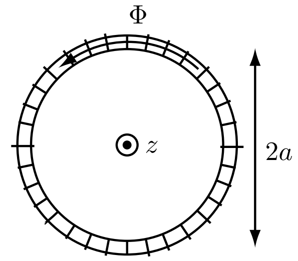
$$\begin{cases} \oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \oint \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mu_0 I \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \end{cases}$$

där Φ är det omkretsade magnetiska flödet och I är den omkretsade strömmen. I bägge fallen gäller att fälten avtar mot noll med ökande avstånd från källorna.

Lägg särskilt märke till likheterna mellan ekvationerna!

Betrakta en tätt lindad smal toroidspole med medelradien a. Spolen är orienterad koaxiellt med z-axeln och centrerad till origo. Inuti spolen cirkulerar ett tidsvariabelt magnetiskt flöde $\Phi(t)$ och utanför spolen är flödet försumbart. Jämför med den magnetiska dipolen och visa att utanför spolen, men inte alltför nära, blir det kvasistationära elektriska fältet

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = -\frac{\mathrm{d}\Phi(t)}{\mathrm{d}t} \frac{a^2}{4r^3} \left(2\cos\theta\hat{\boldsymbol{r}} + \sin\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)$$



Tentamen TENB **2008–06–02, kl 8:00-13:00**

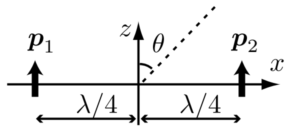
EI1240 TEORETISK ELEKTROTEKNIK F

2A1840 TEORETISK ELEKTROTEKNIK F (äldre kurs)

2A1850 TEORETISK ELEKTROTEKNIK ME (äldre kurs)

Förslag till lösning.

Uppgift 1



De komplexa dipolmomenten blir $\boldsymbol{p}_1 = p\hat{\boldsymbol{z}}, \boldsymbol{p}_2 = p\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/4}\hat{\boldsymbol{z}}$.
Avståndet till fältpunkten blir $R_1 = r + \dfrac{\lambda}{4}\sin\theta, R_2 = r - \dfrac{\lambda}{4}\sin\theta$.
Enhetsriktningen till fältpunkten blir $\hat{\boldsymbol{r}} = \hat{\boldsymbol{z}}\cos\theta + \hat{\boldsymbol{x}}\sin\theta$.
Det komplexa magnetiska fjärrfältet blir

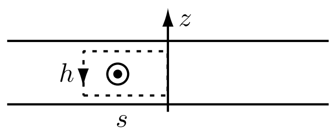
$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{B} &= -\frac{\mu_0}{4\pi r}\hat{\boldsymbol{r}} \times \left[-\omega^2 p\hat{\boldsymbol{z}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k(r+(\lambda/4)\sin\theta)} - \omega^2 p\hat{\boldsymbol{z}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/4}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k(r-(\lambda/4)\sin\theta)}\right] = \{k = 2\pi/\lambda\} \\
&= \frac{-\omega^2\mu_0 p\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}}{4\pi r}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\pi/2)\sin\theta} + \mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/4}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\pi/2)\sin\theta}\right]\sin\theta\hat{\boldsymbol{y}} \\
&= \frac{-\omega^2\mu_0 p\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/8}}{4\pi r}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/8}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\pi/2)\sin\theta} + \mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/8}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\pi/2)\sin\theta}\right]\sin\theta\hat{\boldsymbol{y}} \\
&= \frac{-\omega^2\mu_0 p\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/8}}{2\pi r}\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta + \frac{\pi}{8}\right)\sin\theta\hat{\boldsymbol{y}}
\end{aligned}
$$

$\sin\theta = 0 \Rightarrow$ nollriktningar vid $0°$ och $180°$ (för de enskilda antennerna).
$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\sin\theta + \dfrac{\pi}{8}\right) = 0 \Rightarrow \dfrac{\pi}{2}\sin\theta + \dfrac{\pi}{8} = \dfrac{\pi}{2} + n\cdot\pi \Rightarrow \sin\theta = \dfrac{3}{4} + 2n = \{\text{endast } n = 0 \text{ ger reell lösning}\} = \dfrac{3}{4}$
$\Rightarrow \theta = \left\{\arcsin\dfrac{3}{4}, \pi - \arcsin\dfrac{3}{4}\right\}$.
Svar: Fjärrfältets nollriktningar blir $\theta \in \{0°; 48,6°; 131,4°; 180°\}$

Uppgift 2

a) Använd $\nabla \times \boldsymbol{B} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$ på integralform, $\displaystyle\oint \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \frac{1}{c^2}\int \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a}$, över en med z-axeln koaxiell cirkelyta med radien s:

$$
B_\phi 2\pi s = \frac{1}{c^2}(-\omega)E_0\sin(\omega t)\,\pi s^2 \Rightarrow \boldsymbol{B} = -\frac{\omega E_0 s}{2c^2}\sin(\omega t)\,\hat{\boldsymbol{\phi}} = \textbf{ Svar a}
$$



b) Använd $\nabla \times \boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$ på integralform, $\displaystyle\oint \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\int \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a}$,
över en rektangular yta med sidorna s och h, placerad enligt figuren.

$\boldsymbol{E}$-fältets korrektion är noll på z-axeln och vinkelrät mot de vågräta delarna av randkurvan, vilket ger

$$
\begin{aligned}
-E_{\mathrm{korr}}h &= \frac{\omega^2 E_0}{2c^2}\cos(\omega t)\,h\int_0^s s'\mathrm{d}s' = \frac{\omega^2 E_0 s^2}{4c^2}\cos(\omega t)\,h \Rightarrow \\
\boldsymbol{E}_{\mathrm{korr}} &= -\frac{\omega^2 E_0 s^2}{4c^2}\cos(\omega t)\,\hat{\boldsymbol{z}} = -E_0\left(\frac{\pi s}{\lambda}\right)^2\cos(\omega t)\,\hat{\boldsymbol{z}} = \textbf{ Svar b}
\end{aligned}
$$

Uppgift 3

Låt $\eta_0 = \sqrt{\dfrac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$ vara vågimpedansen i luften och $\eta = \eta_0\sqrt{\dfrac{\mu_\mathrm{r}}{\varepsilon_\mathrm{r}}}$ vågimpedansen i halvrymden.

Infallande effekttäthet: $S_\mathrm{in} = \dfrac{E_\mathrm{in}^2}{2\eta_0}$.

Transmitterad effekttäthet: $S_\mathrm{tr} = \dfrac{E_\mathrm{tr}^2}{2\eta} = \dfrac{1}{2\eta}\left(\dfrac{2\eta E_\mathrm{in}}{\eta+\eta_0}\right)^2 \Rightarrow \dfrac{S_\mathrm{tr}}{S_\mathrm{in}} = \dfrac{4\eta\eta_0}{(\eta+\eta_0)^2} = \dfrac{10}{11}$

Inför $z = \dfrac{\eta}{\eta_0} = \sqrt{\dfrac{\mu_\mathrm{r}}{\varepsilon_\mathrm{r}}}$, vilken då uppfyller $z^2 - \dfrac{12}{5}z + 1 = 0 \Rightarrow z = \dfrac{6 \pm \sqrt{11}}{5}$.

Fashastigheten $\dfrac{c}{\sqrt{\varepsilon_\mathrm{r}\mu_\mathrm{r}}} = \dfrac{c}{2} \Rightarrow \varepsilon_\mathrm{r} = \dfrac{2}{z}$, $\mu_\mathrm{r} = 2z$.

Roten som ger $\varepsilon_\mathrm{r} > \mu_\mathrm{r} \Rightarrow \varepsilon_\mathrm{r} = \dfrac{12+2\sqrt{11}}{5}$, $\mu_\mathrm{r} = \dfrac{12-2\sqrt{11}}{5}$

Svar: $\varepsilon_\mathrm{r} \approx 3,7$ och $\mu_\mathrm{r} \approx 1,1$.

Uppgift 4

Beräkna fälten från laddningen på z-axeln, vid laddningen utanför z-axeln.

Som funktion av tiden t har laddningen utanför z-axeln positionen $\boldsymbol{r}(t) = s\hat{\boldsymbol{s}} + vt\hat{\boldsymbol{z}}$. Som funktion av den retarderade tiden t_r har laddningen på z-axeln den retarderade positionen $\boldsymbol{w}(t_\mathrm{r}) = vt_\mathrm{r}\hat{\boldsymbol{z}}$.

Skillnadsvektorn: $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{w}(t_\mathrm{r}) = s\hat{\boldsymbol{s}} + v\,(t-t_\mathrm{r})\,\hat{\boldsymbol{z}} \Rightarrow R = \sqrt{s^2 + v^2\,(t-t_\mathrm{r})^2}$.

Retarderade tiden fås ur $R = c\,(t-t_\mathrm{r}) \Rightarrow t - t_\mathrm{r} = \dfrac{s}{\sqrt{c^2-v^2}} \Rightarrow v\,(t-t_\mathrm{r}) = s\dfrac{v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$.

Inför $\boldsymbol{\beta} = \dfrac{\boldsymbol{v}}{c} = \dfrac{v}{c}\hat{\boldsymbol{z}} = \beta\hat{\boldsymbol{z}}$ och $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$, varigenom $R = \gamma s$ och $\hat{\boldsymbol{R}} = \dfrac{\boldsymbol{R}}{R} = \dfrac{\hat{\boldsymbol{s}}}{\gamma} + \boldsymbol{\beta}$.

Utan acceleration fås från det allmänna fältuttrycket att det elektriska fältet blir

$$\boldsymbol{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\left(1-\hat{\boldsymbol{R}}\cdot\boldsymbol{\beta}\right)^3}\frac{1-\beta^2}{R^2}\left(\hat{\boldsymbol{R}}-\boldsymbol{\beta}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\,(1-\beta^2)^3}\frac{1-\beta^2}{\gamma^2 s^2}\frac{\hat{\boldsymbol{s}}}{\gamma} = \frac{\gamma q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{\boldsymbol{s}}}{s^2}$$

Magnetfältet blir $\boldsymbol{B} = \dfrac{1}{c}\hat{\boldsymbol{R}}\times\boldsymbol{E} = \dfrac{1}{c}\left(\dfrac{\hat{\boldsymbol{s}}}{\gamma} + \beta\hat{\boldsymbol{z}}\right)\times\boldsymbol{E} = \dfrac{\gamma q\beta}{4\pi\varepsilon_0 c}\dfrac{\hat{\boldsymbol{\phi}}}{s^2} = \dfrac{\gamma q v}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\dfrac{\hat{\boldsymbol{\phi}}}{s^2}$

Svar: Kraften $\boldsymbol{F} = q\,(\boldsymbol{E} + v\hat{\boldsymbol{z}}\times\boldsymbol{B}) = \dfrac{\gamma q^2}{4\pi\varepsilon_0 s^2}\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)\hat{\boldsymbol{s}} = \dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 s^2}\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}\hat{\boldsymbol{s}}$

Uppgift 5

Betrakta en cirkulär strömslinga med radien a och förande strömmen I. Från stort avstånd betraktas slingan som en magnetisk dipol, $\boldsymbol{m} = \pi a^2 I\hat{\boldsymbol{z}}$, med fältet

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I a^2}{4r^3}\left(2\cos\theta\hat{\boldsymbol{r}} + \sin\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)$$

För toriodspolen har vi istället för strömmen I det magnetiska flödet Φ. Utifrån likheterna mellan ekvationerna, byt $\mu_0 I \to -\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$ och $\boldsymbol{B} \to \boldsymbol{E}$, vilket ger att

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = -\frac{\mathrm{d}\Phi(t)}{\mathrm{d}t}\frac{a^2}{4r^3}\left(2\cos\theta\hat{\boldsymbol{r}} + \sin\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) \quad \textbf{V.S.V.}$$

Tentamen TENB **2008–12–19, kl 8:00-13:00**

EI1240 TEORETISK ELEKTROTEKNIK F

2A1840 TEORETISK ELEKTROTEKNIK F (äldre kurs)

2A1850 TEORETISK ELEKTROTEKNIK ME (äldre kurs)

Examinator: Martin Norgren, tel. 790 7410

Hjälpmedel:

TETs formelsamling, βetas handbok i matematik, miniräknare samt TETs ”isskrapa” med vektorformler.

Varje uppgift ger maximalt 10p. Godkänt garanteras på 20p.

Namn och personnummer på varje blad.

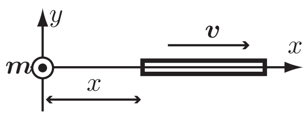
Endast en uppgift per blad; skriv ej på baksidan!

Uppställda samband skall motiveras! Ofullständiga motiveringar ger poängavdrag!

Tentamensbladet skall lämnas in!

Uppgift 1

En statisk magnetisk dipol $\boldsymbol{m} = m\hat{\boldsymbol{z}}$ är belägen i origo. I xy-planet längs med x-axeln befinner sig en långsmal rektangulär slinga med dimensionerna $a \times b$, där $a \gg b$. Slingan har resistansen R.



Bestäm den kraft, som funktion av avståndet x, som erfordras för att med den konstanta hastigheten $\boldsymbol{v} = v\hat{\boldsymbol{x}}$ dra slingan bort från dipolen längs med x-axeln!

Ledning: Situationen är kvasistatisk och slingans induktans försummas. Det förutsätts också att $x \gg b$.

Uppgift 2

En plan elektromagnetisk våg utbreder sig i vakuum. Tidberoendet är harmoniskt med vinkelfrekvensen ω. De komplexa elektriska och magnetiska fälten är $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}, \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}$, där amplitudvektorerna

$$\boldsymbol{E}_0 = E_0\hat{\boldsymbol{y}}, \qquad \boldsymbol{B}_0 = \frac{E_0}{c}\frac{\hat{\boldsymbol{x}}+\hat{\boldsymbol{z}}}{\sqrt{2}}$$

(a) Bestäm vågvektorn $\boldsymbol{k}$, till storlek och riktning (4 poäng)!

Vågen faller in mot ett oändligt stort metallplan i ytan $x = 0$.

(b) Bestäm den reflekterade vågens vågvektor, till storlek och riktning (2 poäng)!

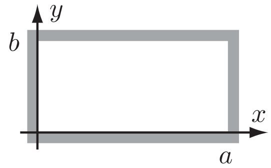
(c) Bestäm amplitudvektorn för det reflekterade elektriska fältet (2 poäng)!

(d) Bestäm amplitudvektorn för det reflekterade magnetiska fältet (2 poäng)!

Var god vänd!

Uppgift 3

Inuti en luftfylld rektangulär vågledare av metall, med tvärsnittet $a \times b$ enligt figuren, utbreder sig en TM_{11}-mod med det elektriska fältet



$$\boldsymbol{E} = E_0 \left\{ \frac{k_z}{k_x^2 + k_y^2} \left[k_x \cos(k_x x) \sin(k_y y)\, \hat{\boldsymbol{x}} + k_y \sin(k_x x) \cos(k_y y)\, \hat{\boldsymbol{y}} \right] \sin(\omega t - k_z z) + \sin(k_x x) \sin(k_y y) \cos(\omega t - k_z z)\, \hat{\boldsymbol{z}} \right\}$$

där $k_z = \sqrt{(\omega/c)^2 - k_x^2 - k_y^2}$ och $k_x = \pi/a, k_y = \pi/b$.

(a) Bestäm uttrycket för TM_{11}-modens magnetiska fält, $\boldsymbol{B}(x, y, z, t)$ (5 poäng)! (bortse ifrån statiska fält)

(b) För en vågledare med $a = 15$ cm, $b = a/2 = 7,5$ cm, bestäm tidmedelvärdet av effekttransporten genom vågledarens tvärsnitt vid frekvensen $f = \dfrac{3c}{2a} \approx 3$ GHz då $E_0 = 500$ kV/m (5 poäng)!

Uppgift 4

En punktladdning q har som funktion av tiden läget $vt\hat{\boldsymbol{x}}$, där v är laddningens konstanta hastighet.

Den skalära potentialen blir $V(\boldsymbol{r}, t) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{\gamma}{\sqrt{[\gamma\,(x - vt)]^2 + y^2 + z^2}}$ där $\gamma = \left(1 - v^2/c^2\right)^{-1/2}$.

Visa att det elektriska fältet kan uttryckas som $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = -\dfrac{1}{\gamma^2}\dfrac{\partial V}{\partial x}\hat{\boldsymbol{x}} - \dfrac{\partial V}{\partial y}\hat{\boldsymbol{y}} - \dfrac{\partial V}{\partial z}\hat{\boldsymbol{z}}$!

Uppgift 5

En halvvågs elektrisk dipolantenn är förlagd till z-axeln mellan $-\dfrac{\lambda}{4} < z < \dfrac{\lambda}{4}$, där λ är våglängden vid den aktuella frekvensen.

Strömmen på antennen är $I(z, t) = I_0 \cos\left(\dfrac{2\pi z}{\lambda}\right) \sin(\omega t)$, definierad i positiv z-led.

Bestäm de elektriska och magnetiska fälten, $\boldsymbol{E}(r, \theta, \phi, t)$ och $\boldsymbol{B}(r, \theta, \phi, t)$, i fjärrzonen!

Tentamen TENB **2008–12–19, kl 8:00-13:00**

EI1240 TEORETISK ELEKTROTEKNIK F

2A1840 TEORETISK ELEKTROTEKNIK F (äldre kurs)

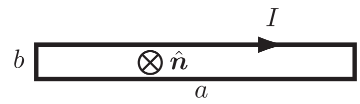
2A1850 TEORETISK ELEKTROTEKNIK ME (äldre kurs)

Förslag till lösning.

Uppgift 1

Med kunskaper från TET del 1 fås att dipolen ger ett magnetfält $\boldsymbol{B}(x') = -\dfrac{\mu_0 m}{4\pi (x')^3}\hat{\boldsymbol{z}}$ längs med den positiva x-axeln. Med definitionsriktningar enligt figuren och $b \ll a, x$ blir flödet genom slingan

$$\Phi(x) \approx b \int_x^{x+a} (-\hat{\boldsymbol{z}}) \cdot \boldsymbol{B}(x')\,\mathrm{d}x'$$



Med $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v$ fås att strömmen blir

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\frac{vb}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_x^{x+a} (-\hat{\boldsymbol{z}}) \cdot \boldsymbol{B}(x')\,\mathrm{d}x' = \frac{vb}{R}\left[B_z(x+a) - B_z(x)\right]$$

På långsidorna ger den magnetiska kraften/längd lika stora och motriktade bidrag i $\pm\hat{\boldsymbol{y}}$-led. Kortsidornas bidrag:

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{mag}} \approx bI\hat{\boldsymbol{y}} \times \boldsymbol{B}(x) + bI(-\hat{\boldsymbol{y}}) \times \boldsymbol{B}(x+a) = bI\left[B_z(x) - B_z(x+a)\right]\hat{\boldsymbol{x}} = -\frac{vb^2}{R}\left[B_z(x) - B_z(x+a)\right]^2\hat{\boldsymbol{x}}$$

Svar: Den erforderliga kraften blir $\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{F}_{\mathrm{mag}} = \dfrac{v}{2R}\left(\dfrac{\mu_0 m b}{2\pi}\right)^2 \left[\dfrac{1}{x^3} - \dfrac{1}{(x+a)^3}\right]^2 \hat{\boldsymbol{x}}$

Uppgift 2

Svar a: Med fältens enhetsriktningar $\hat{\boldsymbol{e}} = \hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{b}} = \dfrac{\hat{\boldsymbol{x}} + \hat{\boldsymbol{z}}}{\sqrt{2}}$ blir vågvektorn $\boldsymbol{k} = \dfrac{\omega}{c}\hat{\boldsymbol{e}} \times \hat{\boldsymbol{b}} = \dfrac{\omega}{c}\dfrac{\hat{\boldsymbol{x}} - \hat{\boldsymbol{z}}}{\sqrt{2}}$

Planets ekvation $\hat{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{r} = a = 0$.

Svar b: FS (89) $\Rightarrow \boldsymbol{k}_{\mathrm{refl}} = \boldsymbol{k} - 2(\hat{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{k})\hat{\boldsymbol{x}} = \dfrac{\omega}{c}\dfrac{-\hat{\boldsymbol{x}} - \hat{\boldsymbol{z}}}{\sqrt{2}}$

Svar c: FS (90) $\Rightarrow \boldsymbol{E}_{0,\mathrm{refl}} = -\boldsymbol{E}_0 + 2(\hat{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{E}_0)\hat{\boldsymbol{x}} = -E_0\hat{\boldsymbol{y}}$

Svar d: FS (91) $\Rightarrow \boldsymbol{B}_{0,\mathrm{refl}} = \boldsymbol{B}_0 - 2(\hat{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{B}_0)\hat{\boldsymbol{x}} = \dfrac{-\hat{\boldsymbol{x}} + \hat{\boldsymbol{z}}}{\sqrt{2}}\dfrac{E_0}{c}$

Uppgift 3

a) Använd Faradays lag, $\nabla \times \boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$. Sätt in uttrycket för $\boldsymbol{E}$ och förenkla medelst sambandet $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = (\omega/c)^2$, varigenom

$$\nabla \times \boldsymbol{E} \quad = E_0 \frac{\omega^2}{c^2\left(k_x^2 + k_y^2\right)}\left[k_y \sin(k_x x)\cos(k_y y)\,\hat{\boldsymbol{x}} - k_x \cos(k_x x)\sin(k_y y)\,\hat{\boldsymbol{y}}\right]\cos(\omega t - k_z z) = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

Integrering map tiden och utelämnande av den statiska integrationskonstanten ger

Svar a: $\boldsymbol{B}(x,y,z,t) = E_0 \dfrac{\omega}{c^2\left(k_x^2 + k_y^2\right)}\left[-k_y \sin(k_x x)\cos(k_y y)\,\hat{\boldsymbol{x}} + k_x \cos(k_x x)\sin(k_y y)\,\hat{\boldsymbol{y}}\right]\sin(\omega t - k_z z)$

b) Den momentana effekten som transporteras genom ett tvärsnitt z fås mha Poyntings vektor som

$$\begin{aligned}P(z,t) &= \int \boldsymbol{S}\cdot\hat{\boldsymbol{z}}\mathrm{d}a = \frac{1}{\mu_0}\int_0^a \mathrm{d}x\int_0^b \mathrm{d}y\,(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})\cdot\hat{\boldsymbol{z}} = \frac{1}{\mu_0}\int_0^a \mathrm{d}x\int_0^b \mathrm{d}y\,(E_xB_y - E_yB_x)\\ &= E_0^2\frac{\omega k_z}{\mu_0 c^2\left(k_x^2+k_y^2\right)^2}\int_0^a \mathrm{d}x\int_0^b \mathrm{d}y\left[k_x^2\cos^2(k_xx)\sin^2(k_yy)+k_y^2\sin^2(k_xx)\cos^2(k_yy)\right]\sin^2(\omega t-k_zz)\end{aligned}$$

$k_x = \dfrac{\pi}{a} \Rightarrow \displaystyle\int_0^a \cos^2(k_xx)\,\mathrm{d}x = \int_0^a \sin^2(k_xx)\,\mathrm{d}x = \frac{a}{2}$, $k_y = \dfrac{\pi}{b} \Rightarrow \displaystyle\int_0^b \cos^2(k_yy)\,\mathrm{d}y = \int_0^b \sin^2(k_yy)\,\mathrm{d}y = \frac{b}{2}$

samt $\dfrac{\omega}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi/\omega}\sin^2(\omega t-k_zz)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$, varvid tidmedelvärdet av effekten blir $\langle P\rangle = \varepsilon_0E_0^2\dfrac{\omega k_z ab}{8\left(k_x^2+k_y^2\right)}$

$k_x = \dfrac{\pi}{a}$, $b = a/2$ ger $k_y = \dfrac{2\pi}{a}$ samt $\omega = 2\pi f = 2\pi\dfrac{3c}{2a}$ ger att $k_z = \dfrac{2\pi}{a}$,

Resultatet förenklas då till $\langle P\rangle = \varepsilon_0E_0^2\dfrac{3\pi c2\pi a^4}{16a^25\pi^2} = \dfrac{3c\varepsilon_0E_0^2a^2}{40}$.

Insatta värden ger $\langle P\rangle \approx 1,12$ MW = **Svar b**

Uppgift 4

Vektorpotentialen blir $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) = \dfrac{\boldsymbol{v}}{c^2}V(\boldsymbol{r},t) = \dfrac{v\hat{\boldsymbol{x}}}{c^2}V(\boldsymbol{r},t)$. Med hastigheten $\boldsymbol{v}$ oberoende av tiden fås att

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V - \frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t} = -\nabla V - \frac{v\hat{\boldsymbol{x}}}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t}$$

Eftersom V beror av x och t på formen $(x-vt)$ fås att $\dfrac{\partial V}{\partial t} = -v\dfrac{\partial V}{\partial x}$, varvid

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V + \frac{v^2}{c^2}\frac{\partial V}{\partial x}\hat{\boldsymbol{x}} = -\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{\partial V}{\partial x}\hat{\boldsymbol{x}} - \frac{\partial V}{\partial y}\hat{\boldsymbol{y}} - \frac{\partial V}{\partial z}\hat{\boldsymbol{z}} = -\frac{1}{\gamma^2}\frac{\partial V}{\partial x}\hat{\boldsymbol{x}} - \frac{\partial V}{\partial y}\hat{\boldsymbol{y}} - \frac{\partial V}{\partial z}\hat{\boldsymbol{z}}\ \textbf{V.S.V.}$$

Uppgift 5

Uttryck (102) i FS ger att

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}(r,\theta,\phi,t) &= \frac{\mu_0}{4\pi cr}\underbrace{\left(\hat{\boldsymbol{r}}\cos\theta - \hat{\boldsymbol{\theta}}\sin\theta\right)}_{=\hat{\boldsymbol{z}}}\times\hat{\boldsymbol{r}}\int_{-\lambda/4}^{\lambda/4} I_0\cos\left(\frac{2\pi z'}{\lambda}\right)\omega\cos\left(\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)+\frac{\omega}{c}\hat{\boldsymbol{z}}\cdot\hat{\boldsymbol{r}}\right)\mathrm{d}z'\\ &= \left\{\frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} = k\right\} = \frac{\mu_0 kI_0}{4\pi r}\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\phi}}\,\mathrm{Re}\left\{\exp\left(\mathrm{j}\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right)\int_{-\lambda/4}^{\lambda/4}\cos(kz')\exp(\mathrm{j}kz'\cos\theta)\,\mathrm{d}z'\right\}\\ &= \frac{\mu_0 kI_0}{4\pi r}\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\phi}}\,\mathrm{Re}\left\{\exp\left(\mathrm{j}\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right)\frac{1}{2}\int_{-\pi/(2k)}^{\pi/(2k)}\left[\exp(\mathrm{j}kz'(\cos\theta+1))+\exp(\mathrm{j}kz'(\cos\theta-1))\right]\mathrm{d}z'\right\}\\ &= \frac{\mu_0 kI_0}{4\pi r}\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\phi}}\,\mathrm{Re}\left\{\exp\left(\mathrm{j}\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right)\frac{1}{2}\left[\frac{\exp(\mathrm{j}kz'(\cos\theta+1))}{\mathrm{j}k(\cos\theta+1)}+\frac{\exp(\mathrm{j}kz'(\cos\theta-1))}{\mathrm{j}k(\cos\theta-1)}\right]_{-\pi/(2k)}^{\pi/(2k)}\right\}\\ &= \{\exp(\mathrm{j}\pi/2) = \mathrm{j}, \exp(-\mathrm{j}\pi/2) = -\mathrm{j}\}\\ &= \frac{\mu_0 I_0}{4\pi r}\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\phi}}\,\mathrm{Re}\left\{\exp\left(\mathrm{j}\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right)\frac{1}{2}\left[\exp\left(\mathrm{j}\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)+\exp\left(-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)\right]\left(\frac{1}{1+\cos\theta}+\frac{1}{1-\cos\theta}\right)\right\}\\ &= \frac{\mu_0 I_0}{4\pi r}\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\phi}}\,\mathrm{Re}\left\{\exp\left(\mathrm{j}\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)\frac{2}{1-\cos^2\theta}\right\}\\ &= \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}\cos\left(\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right)\hat{\boldsymbol{\phi}}(\phi) = \textbf{ Delsvar 1}\end{aligned}$$

Delsvar 2: $\boldsymbol{E}(r,\theta,\phi,t) = c\boldsymbol{B}(r,\theta,\phi,t)\times\hat{\boldsymbol{r}} = \dfrac{\mu_0 cI_0}{2\pi r}\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}\cos\left(\omega\left(t-\dfrac{r}{c}\right)\right)\hat{\boldsymbol{\theta}}(\theta,\phi)$

Tentamen TENB **2009–06–04, kl 8:00-13:00**
EI1240 TEORETISK ELEKTROTEKNIK F
2A1840 TEORETISK ELEKTROTEKNIK F (äldre kurs)
2A1850 TEORETISK ELEKTROTEKNIK ME (äldre kurs)

Examinator: Martin Norgren, tel. 790 7410

Hjälpmedel:
TETs formelsamling, βetas handbok i matematik, miniräknare samt TETs ”isskrapa” med vektorformler.

Varje uppgift ger maximalt 10p. Godkänt garanteras på 20p.

Namn och personnummer på varje blad.

Endast en uppgift per blad; skriv ej på baksidan!

Uppställda samband skall motiveras! Ofullständiga motiveringar ger poängavdrag!

Tentamensbladet skall lämnas in!

Uppgift 1

Härled Neumanns formel för den ömsesidiga induktansen mellan två strömslingor $\mathcal{C}_1$ och $\mathcal{C}_2$:

$$M_{21} = M_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\mathcal{C}_1} \oint_{\mathcal{C}_2} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}_2}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|}$$

Uppgift 2

En luftfylld koaxiell resonator har innerradien a, ytterradien $2a$ och höjden h.
Alla resonatorns ytor är perfekt ledande.
Inuti resonatorn är det elektriska fältet

$$\boldsymbol{E}(s, \phi, z, t) = E_0 a \cos\left(\frac{\pi c}{h} t\right) \sin\left(\frac{\pi}{h} z\right) \frac{\hat{\boldsymbol{s}}}{s}$$

där c är ljushastigheten.
(a) Bestäm magnetfältet $\boldsymbol{B}$ inuti resonatorn (5 poäng)!
(b) Bestäm de elektriska och magnetiska energierna inuti resonatorn, som funktioner av tiden. (4 poäng)!
(c) Lägg ihop de elektriska och magnetiska energierna och kommentera resultatet. (1 poäng)!

Uppgift 3

För en cirkulärt polariserad plan våg i luft är det elektriska fältets x-komponent

$$E_x(\boldsymbol{r}, t) = E_0 \cos\left(\frac{\omega}{c}(0,6y - 0,8z) - \omega t\right)$$

(a) Bestäm det totala $\boldsymbol{E}$-fältet (5 poäng)!

(b) Bestäm $\boldsymbol{B}$-fältet (2 poäng)!

(c) Bestäm Poynting-vektorn (3 poäng)!

Var god vänd!

Uppgift 4

Två likadana elektriska elementardipoler har vardera komplexa dipolmomentet $\boldsymbol{p} = p\hat{\boldsymbol{z}}$. Den ena dipolen befinner sig i punkten $\frac{3\lambda}{4}\hat{\boldsymbol{x}}$, den andra i $-\frac{3\lambda}{4}\hat{\boldsymbol{x}}$.

Bestäm det *komplexa* uttrycket för fältet $\boldsymbol{B}$ i punkten $\frac{\lambda}{4}\hat{\boldsymbol{x}}$!

Uppgift 5

I inertialramen S finns en plan elektromagnetisk våg med fälten

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t) = E_0 \cos(kx - \omega t)\,\hat{\boldsymbol{y}}, \qquad \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t) = \frac{E_0}{c}\cos(kx - \omega t)\,\hat{\boldsymbol{z}}$$

En annan inertialram $\bar{S}$ rör sig med den konstanta hastigheten $v\hat{\boldsymbol{x}}$ relativt S.

(a) I ramen $\bar{S}$, bestäm de elektriska och magnetiska fälten, $\bar{\boldsymbol{E}}$ och $\bar{\boldsymbol{B}}$, som funktioner av tid- och rumkoordinaterna $\bar{t}$ och $\bar{\boldsymbol{r}}$ (6 poäng).

(b) I ramen $\bar{S}$, identifiera vinkelfrekvensen $\bar{\omega}$ och vågtalet $\bar{k}$ (3 poäng).

(c) I S-ramen är $\frac{\omega}{k} = c$.
Beräkna den motsvarande kvoten i $\bar{S}$-ramen och kommentera resultatet (1 poäng).

Tentamen TENB **2009–06–04, kl 8:00-13:00**

EI1240 TEORETISK ELEKTROTEKNIK F

2A1840 TEORETISK ELEKTROTEKNIK F (äldre kurs)

2A1850 TEORETISK ELEKTROTEKNIK ME (äldre kurs)

Förslag till lösning.

Uppgift 1

Se kursboken, avsnitt 7.2.3.

Uppgift 2

(a) $\nabla \times \boldsymbol{E} = E_0 a \cos\left(\frac{\pi c}{h} t\right) \frac{\pi}{h} \cos\left(\frac{\pi}{h} z\right) \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}}{s} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \Rightarrow \boldsymbol{B} = -\frac{E_0 a}{c} \sin\left(\frac{\pi c}{h} t\right) \cos\left(\frac{\pi}{h} z\right) \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}}{s}$

(b) $W_{\mathrm{e}} = \frac{\varepsilon_0}{2} \int E^2 \mathrm{d}\tau = \frac{\varepsilon_0 E_0^2 a^2}{2} \cos^2\left(\frac{\pi c}{h} t\right) \frac{h}{2} 2\pi \ln 2 = \frac{\pi \varepsilon_0 E_0^2 a^2 h}{2} \ln 2 \cos^2\left(\frac{\pi c}{h} t\right)$

$W_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2\mu_0} \int B^2 \mathrm{d}\tau = \frac{E_0^2 a^2}{2\mu_0 c^2} \sin^2\left(\frac{\pi c}{h} t\right) \frac{h}{2} 2\pi \ln 2 = \frac{\pi \varepsilon_0 E_0^2 a^2 h}{2} \ln 2 \sin^2\left(\frac{\pi c}{h} t\right)$

(c) $W_{\mathrm{e}} + W_{\mathrm{m}} = \frac{\pi \varepsilon_0 E_0^2 a^2 h}{2} \ln 2$, oberoende av tiden eftersom resonatorn inte läcker ut någon energi eller har några ledningsförluster.

Uppgift 3

(a) Vågvektorns enhetsriktning är $\hat{\boldsymbol{k}} = 0,6\hat{\boldsymbol{y}} - 0,8\hat{\boldsymbol{z}}$, vilken skall vara vinkelrät mot det totala $\boldsymbol{E}$-fältet. x-komponenten är redan vinkelrät mot $\hat{\boldsymbol{k}}$. Den resterande delen skall vara vinkelrät mot $\hat{\boldsymbol{k}}$, ha samma belopp som x-komponenten men fasförskjuten $\pm 90°$. Resultatet blir (två möjliga fall)

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = E_0 \left[\cos\left(\frac{\omega}{c}(0,6y - 0,8z) - \omega t\right) \hat{\boldsymbol{x}} \pm \sin\left(\frac{\omega}{c}(0,6y - 0,8z) - \omega t\right)(0,8\hat{\boldsymbol{y}} + 0,6\hat{\boldsymbol{z}})\right]$$

(b)

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{c}\hat{\boldsymbol{k}} \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{E_0}{c}\left[\pm \sin\left(\frac{\omega}{c}(0,6y - 0,8z) - \omega t\right) \hat{\boldsymbol{x}} \ - \cos\left(\frac{\omega}{c}(0,6y - 0,8z) - \omega t\right)(0,8\hat{\boldsymbol{y}} + 0,6\hat{\boldsymbol{z}})\right]$$

(c) $\boldsymbol{S} = \frac{1}{\mu_0} \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c}(0,6\hat{\boldsymbol{y}} - 0,8\hat{\boldsymbol{z}})$ (oberoende av $\boldsymbol{r}$ och t då vågen är cirkulärpolariserad)

Uppgift 4

Svar: $\boldsymbol{B} = \frac{\mathrm{j}\omega\mu_0 p}{4\pi\lambda^2}[5 + \mathrm{j}6\pi]\,\hat{\boldsymbol{y}}$

Se sidorna 188-189 i studiehäftet Elektromagnetism, räkneuppgift Ö11.

Uppgift 5

(a),(b)

Formelsamlingen (107) ger attt

$$\bar{E}_y = \gamma\left(E_y - vB_z\right) = \gamma E_0\left(1-\frac{v}{c}\right)\cos(kx-\omega t) = E_0\sqrt{\frac{1-v/c}{1+v/c}}\cos(kx-\omega t)$$

$$\bar{B}_z = \gamma\left(B_z - \frac{v}{c^2}E_y\right) = \gamma\frac{E_0}{c}\left(1-\frac{v}{c}\right)\cos(kx-\omega t) = \frac{E_0}{c}\sqrt{\frac{1-v/c}{1+v/c}}\cos(kx-\omega t)$$

Inversen av formelsamlingen (104) $\Rightarrow t = \gamma\left(\bar{t} + \frac{v}{c^2}\bar{x}\right), \quad x = \gamma\left(\bar{x} + v\bar{t}\right) \Rightarrow kx - \omega t = \gamma\left(k - \frac{v}{c^2}\omega\right)\bar{x} - \gamma\left(\omega - vk\right)\bar{t}$

Således: $\bar{E} = E_0\sqrt{\frac{1-v/c}{1+v/c}}\cos\left(\bar{k}\bar{x} - \bar{\omega}\bar{t}\right)\hat{\boldsymbol{y}}, \quad \bar{B} = \frac{E_0}{c}\sqrt{\frac{1-v/c}{1+v/c}}\cos\left(\bar{k}\bar{x} - \bar{\omega}\bar{t}\right)\hat{\boldsymbol{z}}$

där $\bar{\omega} = \gamma\left(\omega - vk\right), \quad \bar{k} = \gamma\left(k - \frac{v}{c^2}\omega\right)$.

(c)

Med $\frac{\omega}{k} = c$ fås att också $\frac{\bar{\omega}}{\bar{k}} = c$, dvs fashastigheten är densamma i bägge inertialramarna.

Tentamen TENB **2009–12–17, kl 14:00-19:00**

EI1240 TEORETISK ELEKTROTEKNIK F

2A1840 TEORETISK ELEKTROTEKNIK F (äldre kurs)

2A1850 TEORETISK ELEKTROTEKNIK ME (äldre kurs)

Examinator: Martin Norgren, tel. 790 7410

Hjälpmedel: Endast följande hjälpmedel är tillåtna på tentamen

- ”Formelsamling teoretisk elektroteknik” (från institutionen)
- ”BETA Mathematics Handbook” (Råde & Westergren)
- Miniräknare
- TETs ”isskrapa” med vektorformler (från institutionen)

Varje uppgift ger maximalt 10p. Godkänt garanteras på 20p.

Namn och personnummer på varje blad.

Endast en uppgift per blad; skriv ej på baksidan!

Uppställda samband skall motiveras! Ofullständiga motiveringar ger poängavdrag!

Används formler hämtade ur kursboken, skall giltigheten diskuteras!

Tentamensbladet skall lämnas in!

Uppgift 1

I en luftfylld koaxialkabel har innerledaren radien $a = 1$ cm och ytterledaren har innerradien $b = 3$ cm. Inuti koaxialkabeln utbreder sig en puls med det magnetiska fältet

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = \frac{U_0}{c\ln(b/a)} \cdot \frac{z_0^2}{z_0^2 + (z-ct)^2} \cdot \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}}{s}$$

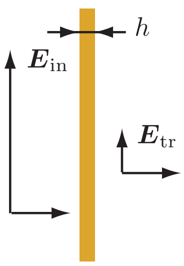
där spänningens toppvärde $U_0 = 10$ kV. $z_0 = 1$ cm, där $2z_0$ är pulsens halvvärdeslängd.

Det förutsätts att för $t \to -\infty$ finns inga fält inuti kabeln.

Beräkna den totala energin som pulsen transporterar genom kabeln!

Uppgift 2

En långvågsstation sänder på frekvensen 227 kHz. I närheten av stationen skall en känslig apparat skyddas mot elektromagnetiska störningar genom att kläs in i kopparplåt. Vid apparaten har det infallande elektriska fältet från sändaren styrkan 20 V/m, men apparaten får endast utsättas för en maximal elektrisk fältstyrka på 1 µV/m.
Antag att sändarens fält är en plan våg som faller in vinkelrätt mot kopparplåten. Koppar har ledningsförmågan $\sigma = 5,9 \cdot 10^7$ S/m och det antas att överallt är permittiviteten ε_0 och permeabiliteten μ_0.



Bestäm den erforderliga tjockleken, h, på kopparplåten!

Ledning: Pga den förväntat starka dämpningen kan multipla reflexioner inuti kopparplåten försummas.

Var god vänd!

Uppgift 3

Från en tidsberoende strömtäthet $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}, t)$ fås den retarderade vektorpotentialen

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}', t_\mathrm{r})}{R} \mathrm{d}\tau'$$

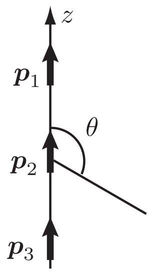
där $t_\mathrm{r} = t - \dfrac{R}{c}$ och $R = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|$.

Utifrån vektorpotentialen, härled uttrycket för magnetfältet:

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left[\frac{1}{R^2} \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}', t_\mathrm{r}) + \frac{1}{cR} \frac{\partial \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}', t_\mathrm{r})}{\partial t_\mathrm{r}} \right] \times \hat{\boldsymbol{R}} \, \mathrm{d}\tau'$$

Uppgift 4

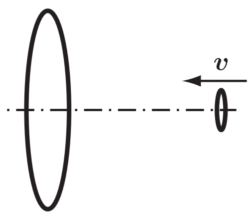
Tre lodräta dipoler $\boldsymbol{p}_1(t) = p_0 \cos(\omega t + \alpha)\, \hat{\boldsymbol{z}}, \boldsymbol{p}_2(t) = 2p_0 \cos(\omega t)\, \hat{\boldsymbol{z}}, \boldsymbol{p}_3(t) = p_0 \cos(\omega t - \alpha)\, \hat{\boldsymbol{z}}$ är placerade koaxiellt på det inbördes avståndet $\lambda/2$ ($\lambda =$ våglängden).
Om dipolerna matas i fas, dvs om $\alpha = 0$, får det rotationssymmetriska strålningsdiagrammet sitt huvudmaxima i horisontalriktningen $\theta = \pi/2$.
Nu har emellertid dipolerna monterats väldigt högt ovanför marken och då vill man förbättra kommunikationen med närområdet genom att förlägga ett strålningsmaxima snett nedåt i riktningen $\theta = 2\pi/3$.



Bestäm faskonstanten α så att ett strålningsmaxima erhålles för $\theta = 2\pi/3$ (120°)!

Uppgift 5

Två cirkulära slingor befinner sig hela tiden koaxiellt med varandra. Den stora slingan, som har radien a är belägen i planet $z = 0$. Den lilla slingan rör sig med den konstanta hastigheten $\boldsymbol{v} = v\hat{\boldsymbol{z}}$ där det INTE får förutsättas att $|v| \ll c$. Vid tiden $t = 0$ sammanfaller slingornas mittpunkter. I sitt vilosystem är den lilla slingan belägen vid origo och för en konstant ström vars inverkan kan approximeras med en magnetisk dipol $\boldsymbol{m} = m\hat{\boldsymbol{z}}$. I sitt vilosystem ger den lilla slingan då upphov till potentialerna



$$\bar{V}(\bar{\boldsymbol{r}}, \bar{t}) = 0, \qquad \bar{\boldsymbol{A}}(\bar{\boldsymbol{r}}, \bar{t}) = \frac{\mu_0 m}{4\pi} \frac{\bar{s}}{(\bar{s}^2 + \bar{z}^2)^{3/2}} \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

Bestäm den av den lilla slingan i den stora slingan inducerade elektromotoriska kraften!

Tentamen TENB **2009–12–17, kl 14:00-19:00**

EI1240 TEORETISK ELEKTROTEKNIK F

2A1840 TEORETISK ELEKTROTEKNIK F (äldre kurs)

2A1850 TEORETISK ELEKTROTEKNIK ME (äldre kurs)

Förslag till lösning.

Uppgift 1

Använd den Maxwellska ekvationen $\nabla \times \boldsymbol{B} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$ (ingen strömtäthet inuti kabeln).

Med $\boldsymbol{B} = B_\phi(s,z,t)\,\hat{\boldsymbol{\phi}}(\phi)$ och z, t-beroendet på formen $z - ct$ fås att

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = -\frac{\partial B_\phi}{\partial z}\hat{\boldsymbol{s}} = \frac{1}{c}\frac{\partial B_\phi}{\partial t}\hat{\boldsymbol{s}} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \Rightarrow \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \frac{U_0}{\ln(b/a)} \cdot \frac{z_0^2}{z_0^2 + (z-ct)^2} \cdot \frac{\hat{\boldsymbol{s}}}{s}$$

Poyntings vektor: $\boldsymbol{S} = \dfrac{1}{\mu_0}\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B} = \dfrac{U_0^2}{\mu_0 c\,(\ln(b/a))^2} \cdot \dfrac{z_0^4}{\left[z_0^2 + (z-ct)^2\right]^2} \cdot \dfrac{\hat{\boldsymbol{z}}}{s^2}$

Beräkna effektflödet genom, t.ex., ytan $z = 0$: $P(t) = \displaystyle\int_a^b s\,\mathrm{d}s \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi\, \boldsymbol{S}\cdot\hat{\boldsymbol{z}} = \dfrac{2\pi U_0^2}{\mu_0 c \ln(b/a)} \cdot \dfrac{z_0^4}{[z_0^2 + c^2t^2]^2}$

Energin:

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} P(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2\pi U_0^2}{\mu_0 c\ln(b/a)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z_0^4}{[z_0^2 + c^2t^2]^2}\mathrm{d}t = \{\text{Beta (1998), avsnitt 7.4, formel 63}\}$$

$$= \frac{\pi U_0^2}{\mu_0 c \ln(b/a)}\left[\frac{z_0^2 t}{z_0^2 + c^2t^2} + \frac{z_0}{c}\arctan\frac{ct}{z_0}\right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi^2 \varepsilon_0 U_0^2 z_0}{\ln(b/a)} \approx 80\ \mu\text{J} = \textbf{Svar}$$

Uppgift 2

I luften är vågimpedansen $\eta_1 = \sqrt{\dfrac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \approx 377\ \Omega$.

I kopparn gäller att $\sigma \gg \omega\varepsilon_0 \Rightarrow$ vågimpedansen $\eta_2 = \sqrt{\dfrac{-\mathrm{i}\omega\mu_0}{\sigma}} \approx 1{,}23 \cdot 10^{-4}\,(1-\mathrm{i})\ \Omega$.

I kopparn blir inträngningsdjupet: $\delta \approx \sqrt{\dfrac{2}{\omega\mu_0\sigma}} \approx 0{,}14$ mm.

Vid övergången från luft till koppar blir transmissionsfaktorn $\dfrac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} \approx \dfrac{2\eta_2}{\eta_1}$

Vid utbredningen genom kopparplåten blir dämpningen $\mathrm{e}^{-h/\delta}$, där h är plåtens tjocklek.

Vid övergången från koppar till luft blir transmissionsfaktorn $\dfrac{2\eta_1}{\eta_1 + \eta_2} \approx 2$.

Således blir den totala transmissionen genom kopparplåten $\tau = \dfrac{4\,|\eta_2|}{\eta_1}\mathrm{e}^{-h/\delta} = 5 \cdot 10^{-8}$.

Svar: Kopparplåten måste ha tjockleken $h = -\delta \ln \dfrac{\tau\eta_1}{4\,|\eta_2|} \approx 0{,}5$ mm.

Kommentar: för konsistens med antagandet att multipla reflektioner kan försummas måste den erhållna tjockleken någorlunda överstiga inträngningsdjupet, i det här fallet med en faktor på drygt tre vilket är tillräckligt.

Uppgift 3

Se kursboken, sidorna 427-428.

Uppgift 4

Dipolerna i samma riktning ger att var och en av dipolerna har strålningsfunktionen $\sin\theta$. I komplexa storheter blir dipolernas gruppfaktor ($k = 2\pi/\lambda$)

$$e^{j(\alpha+k(\lambda/2)\cos\theta)} + 2 + e^{-j(\alpha+k(\lambda/2)\cos\theta)} = e^{j(\alpha+\pi\cos\theta)} + 2 + e^{-j(\alpha+\pi\cos\theta)} = 2\left[1+\cos(\alpha+\pi\cos\theta)\right]$$

vilker ger att fältstyrkan blir proportionell mot $f(\theta) = [1+\cos(\alpha+\pi\cos\theta)]\sin\theta \geq 0$

Vi deriverar m.a.p. θ: $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\theta} = [1+\cos(\alpha+\pi\cos\theta)]\cos\theta + \sin(\alpha+\pi\cos\theta)\,\pi\sin^2\theta$, och sätter in $\theta = 2\pi/3 \Rightarrow$

$$-\frac{1}{2}\left[1+\cos\left(\alpha-\pi/2\right)\right] + \frac{3\pi}{4}\sin\left(\alpha-\pi/2\right) = -\frac{1}{2}\left[1+\sin\alpha+\frac{3\pi}{2}\cos\alpha\right] = 0$$

Med $1+\sin\alpha \geq 0$ följer att $\cos\alpha \leq 0 \Rightarrow 1+\sin\alpha = \dfrac{3\pi}{2}\sqrt{1-\sin^2\alpha} \Rightarrow 1+2\sin\alpha+\sin^2\alpha = \dfrac{9\pi^2}{4}\left(1-\sin^2\alpha\right)$

$$\sin\alpha = \left\{-1, \quad \frac{9\pi^2-4}{9\pi^2+4}\right\}$$

$\sin\alpha = -1 \Rightarrow \alpha = -\pi/2 \Rightarrow f(2\pi/3) = 0$, dvs nollriktning (minima).

Med $\cos\alpha < 0$ fås då att den andra roten ger **Svar:** $\alpha = \pi - \arcsin\dfrac{9\pi^2-4}{9\pi^2+4} \approx 1{,}99 \approx 114°$.

Kontroll medelst andraderivatan: $\dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}\theta^2}(2\pi/3) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left[\dfrac{3\pi^2}{4}\sin\alpha - \dfrac{3\pi}{2}\cos\alpha + 1 + \sin\alpha\right] < 0$, maxima!

Uppgift 5

Den stora slingan är stillastående varvid emk:n $\mathcal{E} = \oint \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \oint\left(-\nabla V - \dfrac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\right)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\oint\dfrac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$

Vi transformerar över vektorpotentialen till stora slingans vilosystem. Eftersom $\bar{\boldsymbol{A}}$ är vinkelrät mot hastigheten får vi att $\boldsymbol{A} = \bar{\boldsymbol{A}} = \dfrac{\mu_0 m}{4\pi}\dfrac{\bar{s}}{(\bar{s}^2+\bar{z}^2)^{3/2}}\hat{\boldsymbol{\phi}}$ men måste uttryckas med koordinaterna i stora slingans vilosystem. Med hastigheten i z-led får vi att $\bar{s} = s, \bar{z} = \gamma\,(z-vt)$, där $\gamma = \left(1-v^2/c^2\right)^{-1/2}$, varigenom

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) = \frac{\mu_0 m}{4\pi}\frac{s}{\left(s^2+\gamma^2\,(z-vt)^2\right)^{3/2}}\hat{\boldsymbol{\phi}} \Rightarrow \frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t} = \frac{\mu_0 m}{4\pi}\frac{3s\gamma^2\,(z-vt)\,v}{\left(s^2+\gamma^2\,(z-vt)^2\right)^{5/2}}\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

Svar Emk:n i stora slingan blir $\mathcal{E} = -2\pi a\dfrac{\partial A_\phi}{\partial t}(s=a, z=0, t) = \dfrac{3\mu_0 m}{2}\dfrac{\gamma^2 a^2 v^2 t}{[a^2+\gamma^2 v^2 t^2]^{5/2}}$

Tentamen TENB **2010–06–03, kl 8:00-13:00**

EI1240 TEORETISK ELEKTROTEKNIK F

2A1840 TEORETISK ELEKTROTEKNIK F (äldre kurs)

2A1850 TEORETISK ELEKTROTEKNIK ME (äldre kurs)

Examinator: Martin Norgren, tel. 790 7410

Hjälpmedel: Endast följande hjälpmedel är tillåtna på tentamen

- ”Formelsamling teoretisk elektroteknik” (från institutionen)
- ”BETA Mathematics Handbook” (Råde & Westergren)
- Miniräknare
- TETs ”isskrapa” med vektorformler (från institutionen)

Varje uppgift ger maximalt 10p. Godkänt garanteras på 20p.

Namn och personnummer på varje blad.

Endast en uppgift per blad; skriv ej på baksidan!

Uppställda samband skall motiveras! Ofullständiga motiveringar ger poängavdrag!

Används formler hämtade ur kursboken, skall giltigheten diskuteras!

Tentamensbladet skall lämnas in!

Uppgift 1

En tunn ring med radien a och resistansen R är belägen i xy-planet och centrerad runt origo.

I punkten $b\hat{\boldsymbol{z}}$, där $b \gg a$, finns en statisk magnetisk dipol $\boldsymbol{m} = m\hat{\boldsymbol{z}}$.

Dipolen flyttas långsamt och med bibehållen riktning till punkten $b\hat{\boldsymbol{x}}$.

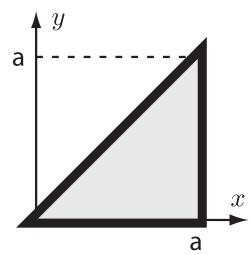
Under denna process passerar en viss laddningsmängd Q förbi en godtyckligt vald punkt på ringen.

Bestäm Q!

Uppgift 2

En luftfylld vågledare har tvärsnittet i form av en rät likbent triangel med sidan a; se figuren.
Inuti vågledaren utbreder sig en mod med magnetfältet

$$\boldsymbol{B}(x,y,z,t) = B_0\left\{\frac{ak_z}{\pi}\left[\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\hat{\boldsymbol{x}} + \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)\hat{\boldsymbol{y}}\right]\cos(k_z z - \omega t) - \left(\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) + \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)\right)\sin(k_z z - \omega t)\,\hat{\boldsymbol{z}}\right\}$$



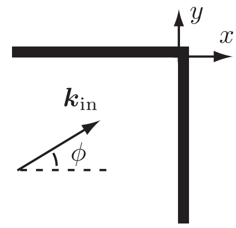
där $k_z = \sqrt{\dfrac{\omega^2}{c^2} - \dfrac{\pi^2}{a^2}}$.

Bestäm det elektriska fältet, $\boldsymbol{E}(x,y,z,t)$, inuti vågledaren!

Var god vänd!

Uppgift 3

En effektiv radarreflektor kan realiseras genom att sammanfoga plana metallplåtar vinkelräta mot varandra. Ett exempel är hörnreflektorn; se figuren.



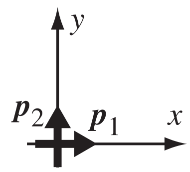
Här idealiseras situationen sådan att plåtarna antas vara oändligt stora.
En plan våg med elektriska fältet $\boldsymbol{E}_{\text{in}} = E_1 \cos\left(\frac{\omega}{c}\left[x\cos\phi + y\sin\phi\right] - \omega t\right)\hat{\boldsymbol{z}}$ faller in mot hörnreflektorn.

Bestäm det totala elektriska fältet!
Ledning: Ansätt tre plana vågor, utöver den infallande.

Uppgift 4

Två elementardipoler,
$\boldsymbol{p}_1 = |C_1|\sin(\omega t)\,\hat{\boldsymbol{x}}$ och $\boldsymbol{p}_2 = |C_2|\sin(\omega t + \alpha)\,\hat{\boldsymbol{y}}$, är placerade i origo.
Genom lämpligt val av $|C_1/C_2|$ och α blir strålningsdiagrammet för $\boldsymbol{E}$-fältet en cirkel i xy-planet.

Bestäm $|C_1/C_2|$ och α!



Uppgift 5

Lorentztransformationen av det elektromagnetiska fältet lyder

$$\boldsymbol{E}'_{\parallel} = \boldsymbol{E}_{\parallel}, \qquad \boldsymbol{E}'_{\perp} = \gamma\left(\boldsymbol{E}_{\perp} + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}_{\perp}\right), \qquad \boldsymbol{B}'_{\parallel} = \boldsymbol{B}_{\parallel}, \qquad \boldsymbol{B}'_{\perp} = \gamma\left(\boldsymbol{B}_{\perp} - \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{E}_{\perp}/c^2\right),$$

där $\gamma = \left(1 - v^2/c^2\right)^{-1/2}$ och $\parallel$ respektive $\perp$ avser de gentemot hastigheten $\boldsymbol{v}$ parallella respektive vinkelräta fältkomponenterna.

Visa att $E^2 - c^2B^2$ är en Lorentz-invariant, dvs att $(E')^2 - c^2(B')^2 = E^2 - c^2B^2$!

Tentamen TENB **2010–06–03, kl 8:00-13:00**

EI1240 TEORETISK ELEKTROTEKNIK F

2A1840 TEORETISK ELEKTROTEKNIK F (äldre kurs)

2A1850 TEORETISK ELEKTROTEKNIK ME (äldre kurs)

Förslag till lösning.

Uppgift 1

Strömmen i ringen: $I = \dfrac{\mathcal{E}}{R}$. Elektromotoriska kraften: $\mathcal{E} = -\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$

Laddningen: $Q = \displaystyle\int_{\text{före}}^{\text{efter}} I\mathrm{d}t = -\frac{1}{R}\int_{\text{före}}^{\text{efter}} \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \frac{1}{R}\left(\Phi_{\text{före}} - \Phi_{\text{efter}}\right) \approx \frac{\pi a^2}{R}\hat{\boldsymbol{z}}\cdot\left(\boldsymbol{B}_{\text{före}} - \boldsymbol{B}_{\text{efter}}\right)$

Statiska dipolfältuttrycket ger att $\boldsymbol{B}_{\text{före}} = \dfrac{\mu_0 m}{2\pi b^3}\hat{\boldsymbol{z}}$, $\boldsymbol{B}_{\text{efter}} = -\dfrac{\mu_0 m}{4\pi b^3}\hat{\boldsymbol{z}}$, varur, **Svar:** $Q = \dfrac{3\mu_0 m a^2}{4b^3 R}$

Uppgift 2

Använd Maxwellekvationen $\nabla\times\boldsymbol{B} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}$ (ingen strömtäthet inuti vågledaren). Således

$$\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{B} &= B_0\left(\frac{\pi}{a} + \frac{a}{\pi}k_z^2\right)\sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)\sin(k_z z - \omega t)\,\hat{\boldsymbol{x}} - B_0\left(\frac{\pi}{a} + \frac{a}{\pi}k_z^2\right)\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin(k_z z - \omega t)\,\hat{\boldsymbol{y}} \\ &= \left\{\frac{\pi}{a} + \frac{a}{\pi}k_z^2 = \frac{a}{\pi}\frac{\omega^2}{c^2}\right\} = B_0\frac{a}{\pi}\frac{\omega^2}{c^2}\left[\sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)\hat{\boldsymbol{x}} - \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\hat{\boldsymbol{y}}\right]\sin(k_z z - \omega t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

Vi bortser ifrån den statiska integrationskonstanten och får

$$\textbf{Svar: } \boldsymbol{E}(x,y,z,t) = B_0\frac{a\omega}{\pi}\left[\sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)\hat{\boldsymbol{x}} - \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\hat{\boldsymbol{y}}\right]\cos(k_z z - \omega t)$$

Uppgift 3

$\boldsymbol{E}_{\text{in}}$ är tangentiell med plåtarna och denna polarisation bibehålles vid reflexionerna.

Ansätt det totala komplexa fältet som

$$\begin{aligned}E_z = {} & E_1\exp\left(\mathrm{i}\frac{\omega}{c}\left[x\cos\phi + y\sin\phi\right]\right) + E_2\exp\left(\mathrm{i}\frac{\omega}{c}\left[-x\cos\phi + y\sin\phi\right]\right) \\ & + E_3\exp\left(\mathrm{i}\frac{\omega}{c}\left[x\cos\phi - y\sin\phi\right]\right) + E_4\exp\left(\mathrm{i}\frac{\omega}{c}\left[-x\cos\phi - y\sin\phi\right]\right)\end{aligned}$$

där den sista termen är ”radarekot”, som utbreder sig i riktningen rakt motsatt den infallande vågen.

$E_z = 0$ på metallytorna, $(x = 0, y < 0)$ och $(y = 0, x < 0)$, ger att

$$\left[E_1 + E_2\right]\exp\left(\mathrm{i}\frac{\omega}{c}y\sin\phi\right) + \left[E_3 + E_4\right]\exp\left(-\mathrm{i}\frac{\omega}{c}y\sin\phi\right) = 0, \text{ för alla } y < 0$$

$$\left[E_1 + E_3\right]\exp\left(\mathrm{i}\frac{\omega}{c}x\cos\phi\right) + \left[E_2 + E_4\right]\exp\left(-\mathrm{i}\frac{\omega}{c}x\cos\phi\right) = 0, \text{ för alla } x < 0$$

från vilka det följer att $E_2 = E_3 = -E_1$ och att $E_4 = -E_3 = -E_2 = E_1$

Euler-formlerna ger nu att det totala komplexa fältet blir $E_z = -4E_1\sin\left(\dfrac{\omega}{c}x\cos\phi\right)\sin\left(\dfrac{\omega}{c}y\sin\phi\right)$.

Svar: $\boldsymbol{E} = -4E_1\sin\left(\dfrac{\omega}{c}x\cos\phi\right)\sin\left(\dfrac{\omega}{c}y\sin\phi\right)\cos(\omega t)\,\hat{\boldsymbol{z}}$

Uppgift 4

Se studiehäftet Elektromagnetism, sidan 184, uppgift Ö4.

Uppgift 5

Vi använder transformationsuttrycken och får att

$$\begin{aligned}(E')^2 - c^2 (B')^2 = {} & E_\parallel^2 + \gamma^2 \left(E_\perp^2 + |\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}_\perp|^2\right) + 2\gamma^2 \boldsymbol{E}_\perp \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}_\perp) \\ & - c^2 B_\parallel^2 - \gamma^2 \left(c^2 B_\perp^2 + \frac{1}{c^2} |\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{E}_\perp|^2\right) + 2\gamma^2 \boldsymbol{B}_\perp \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{E}_\perp)\end{aligned}$$

Cykliska permutationsregeln för trippelprodukter samt att kryssprodukten är antikommutativ ger att

$\boldsymbol{E}_\perp \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}_\perp) + \boldsymbol{B}_\perp \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{E}_\perp) = 0$

Vidare fås att

$\boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{B}_\perp \Rightarrow |\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}_\perp|^2 = v^2 B_\perp^2$ och $\boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{E}_\perp \Rightarrow |\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{E}_\perp|^2 = v^2 E_\perp^2$

Således,

$$\begin{aligned}(E')^2 - c^2 (B')^2 &= E_\parallel^2 - c^2 B_\parallel^2 + \underbrace{\gamma^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}_{\gamma^{-2}} \left(E_\perp^2 - c^2 B_\perp^2\right) \\ &= E_\parallel^2 - c^2 B_\parallel^2 + E_\perp^2 - c^2 B_\perp^2 = E^2 - c^2 B^2 \quad \textbf{V.S.V.}\end{aligned}$$

Namn:.. **Personnr:**.................................

Tentamen TEN2 — 2010−12−16, kl 14:00-19:00

EI1240 TEORETISK ELEKTROTEKNIK F

Examinator: Martin Norgren, tel. 790 7410

Hjälpmedel: Endast följande hjälpmedel är tillåtna på tentamen

- ”Formelsamling teoretisk elektroteknik” (från institutionen)
- ”BETA Mathematics Handbook” (Råde & Westergren)
- Miniräknare
- TETs ”isskrapa” med vektorformler (från institutionen)

Varje uppgift ger maximalt 10p. Godkänt garanteras på 30p.

Läs följande noggrant:

Namn och personnummer på varje blad.
Endast en uppgift per blad - flera uppgifter på samma blad ogiltigförklaras.
Skriv endast på framsidan - skrift på baksidan beaktas ej.
På uppgifterna 2-6 skall uppställda samband motiveras.
Ofullständiga motiveringar ger poängavdrag.
Används formler hämtade ur kursboken, skall giltigheten diskuteras!

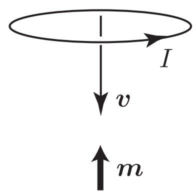
Uppgift 1

Denna uppgift löses på tentamensbladet, som skall lämnas in!

Varje delfråga ger 0 eller 1 poäng.
Kryssa i ett svarsalternativ (på denna uppgift efterfrågas inga motiveringar).

- -

1.1
En cirkulär slinga med resistansen R rör sig nedåt med den konstanta hastigheten $\boldsymbol{v}$ koaxiellt med en stationär magnetisk dipol med dipolmomentet $\boldsymbol{m}$ riktat enligt figuren.
När slingan befinner sig över dipolen blir strömmen I, med definitionsriktning enligt figuren,



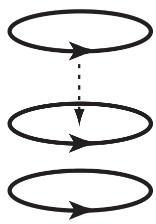
a ☐ > 0

b ☐ < 0

c ☐ $= 0$

- -

1.2
I två parallella strömslingor upprätthålls konstanta strömmar med sammanfallande riktningar (se figuren). Efter att den ena slingan har flyttats enligt pilen gäller att den magnetiska energin



a ☐ har ökat.

b ☐ har minskat.

c ☐ är oförändrad.

- -

1.3

Genom en spole gäller för $t > 0$ att strömmen $I(t) = I_0 \left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)$. För en yta $\mathcal{S}$ (med utåtriktade normalen $\hat{\boldsymbol{n}}$) inneslutande enbart spolen gäller för $t > 0$ att $\oint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{S} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \mathrm{d}a$

a ☐ $= 0$
b ☐ < 0
c ☐ > 0

1.4

I en plan våg med vågvektorn $\boldsymbol{k} = \dfrac{\omega}{c\sqrt{5}}(\hat{\boldsymbol{x}}+2\hat{\boldsymbol{y}})$ har $\boldsymbol{B}$-fältet den komplexa amplituden $B_0(-2\hat{\boldsymbol{x}}+\hat{\boldsymbol{y}}+2\mathrm{i}\hat{\boldsymbol{z}})$. $\boldsymbol{E}$-fältet får då den komplexa amplituden

a ☐ $\dfrac{cB_0}{\sqrt{5}}(-4\mathrm{i}\hat{\boldsymbol{x}} + 2\mathrm{i}\hat{\boldsymbol{y}} + 5\hat{\boldsymbol{z}})$
b ☐ $\dfrac{cB_0}{\sqrt{5}}(4\mathrm{i}\hat{\boldsymbol{x}} + 2\mathrm{i}\hat{\boldsymbol{y}} + 5\hat{\boldsymbol{z}})$
c ☐ $\dfrac{cB_0}{\sqrt{5}}(4\mathrm{i}\hat{\boldsymbol{x}} + 2\mathrm{i}\hat{\boldsymbol{y}} - 5\hat{\boldsymbol{z}})$
d ☐ $\dfrac{cB_0}{\sqrt{5}}(-4\mathrm{i}\hat{\boldsymbol{x}} + 2\mathrm{i}\hat{\boldsymbol{y}} - 5\hat{\boldsymbol{z}})$

1.5

En plan våg utbreder sig i ett material med relativa materialparametrarna $\varepsilon_{\mathrm{r}1} = 14/9,\ \mu_{\mathrm{r}1} = 2$.

Vågen faller in snett med infallsvinkeln θ_{I} mot en plan gränsyta till ett annat material med relativa materialparametrarna $\varepsilon_{\mathrm{r}2} = 5/4,\ \mu_{\mathrm{r}2} = 7/3$.

För den transmitterade vågen gäller att brytningsvinkeln θ_{T}

a ☐ $= \theta_{\mathrm{I}}$
b ☐ $> \theta_{\mathrm{I}}$
c ☐ $< \theta_{\mathrm{I}}$

1.6

Om en vågledares tvärsnittsdimensioner skalas ner gäller att antalet propagerande moder ökar.

a ☐ Sant.
b ☐ Falskt.

1.7

Om vår information om potentialerna är att $\nabla \cdot \boldsymbol{A} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial V}{\partial t} = 0,\ \dfrac{\partial V}{\partial t} = 0$ kan vi säga att de

a ☐ är i vare sig Lorenzgaugen eller Coulombgaugen.
b ☐ är ej i Lorenzgaugen men kan vara i Coulombgaugen.
c ☐ är i Coulombgaugen men ej Lorenzgaugen.
d ☐ är ej i Coulombgaugen men kan vara i Lorenzgaugen.
e ☐ är i både Lorenzgaugen och Coulombgaugen.
f ☐ är i Lorenzgaugen men ej Coulombgaugen.

1.8

I fjärrzonen till två varandra näraliggande men momentant motriktade magnetiska dipolantenner gäller att

a ☐ $\boldsymbol{E} \propto \frac{1}{r^2}, \boldsymbol{B} \propto \frac{1}{r^2}$

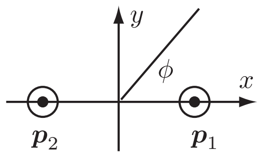
b ☐ $\boldsymbol{E} \propto \frac{1}{r^3}, \boldsymbol{B} \propto \frac{1}{r^4}$

c ☐ $\boldsymbol{E} \propto \frac{1}{r^2}, \boldsymbol{B} \propto \frac{1}{r^3}$

d ☐ $\boldsymbol{E} \propto \frac{1}{r}, \boldsymbol{B} \propto \frac{1}{r}$

1.9

Två dipolantenner: $\boldsymbol{p}_1 = p_0 \cos(\omega t + \alpha)\,\hat{\boldsymbol{z}}$, $\boldsymbol{p}_2 = p_0 \cos(\omega t - \alpha)\,\hat{\boldsymbol{z}}$ är placerade symmetrisk enligt figuren.
Om avståndet mellan dipolerna är $3\lambda/4$ (λ =våglängden) får strålningen en nollriktning för $\phi = 60°$, i xy-planet, om faskonstanten



a ☐ $\alpha = 0$

b ☐ $\alpha = \pi/3$

c ☐ $\alpha = \pi/6$

d ☐ $\alpha = \pi/8$

e ☐ $\alpha = 3\pi/8$

f ☐ $\alpha = \pi/4$

1.10

Om $\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{B} = 0$ och $E^2 < c^2 B^2$ kan vi Lorentztransformera till ett system där $\boldsymbol{B}' = \boldsymbol{0}$.

a ☐ Sant.

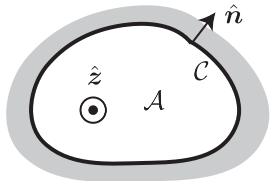
b ☐ Falskt.

Uppgift 2

En metallisk vågledare i z-riktningen har ett allmänt tvärsnitt $\mathcal{A}$ som begränsas av randkurvan $\mathcal{C}$. Vinkelrätt mot $\mathcal{C}$ och $\hat{\boldsymbol{z}}$ har vi den utåtriktade normalvektorn $\hat{\boldsymbol{n}}$ (som pekar in i den omgivande metallen).
För TE-moderna fås B_z-komponenten från egenvärdesproblemet

$$\left(\nabla_{\mathrm{t}}^2 + k_{\mathrm{t}}^2\right) B_z(x, y) = 0, \quad x, y \in \mathcal{A} \tag{1}$$

$$\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \nabla_{\mathrm{t}} B_z(x, y) = 0, \quad x, y \in \mathcal{C} \tag{2}$$



där egenvärdet k_{t}^2 alltid är reellt och B_z utan inskränkning kan antas vara reell.
Ur B_z fås de transversella fälten som

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{t}} = -\frac{\mathrm{i}\omega}{k_{\mathrm{t}}^2} \hat{\boldsymbol{z}} \times \nabla_{\mathrm{t}} B_z \qquad \boldsymbol{B}_{\mathrm{t}} = \frac{\mathrm{i}k_z}{k_{\mathrm{t}}^2} \nabla_{\mathrm{t}} B_z \qquad \left(k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k_{\mathrm{t}}^2\right)$$

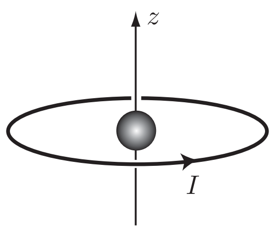
Visa att $\displaystyle\int_{\mathcal{A}} (\boldsymbol{E}_{\mathrm{t}} \times \boldsymbol{B}_{\mathrm{t}}^*) \cdot \hat{\boldsymbol{z}} \mathrm{d}a = \frac{\omega k_z^*}{k_{\mathrm{t}}^2} \int_{\mathcal{A}} B_z^2 \mathrm{d}a$!
(resultatet kan användas vid t.ex. beräkningen av effekttransporten i vågledaren)
Ledning: Gauss sats i planet på den sammansatta vektorvärda funktionen $U \nabla_{\mathrm{t}} W$ ger att

$$\oint_{\mathcal{C}} (U \nabla_{\mathrm{t}} W) \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \mathrm{d}l = \int_{\mathcal{A}} \nabla_{\mathrm{t}} \cdot (U \nabla_{\mathrm{t}} W) \, \mathrm{d}a = \int_{\mathcal{A}} \left[\nabla_{\mathrm{t}} U \cdot \nabla_{\mathrm{t}} W + U \nabla_{\mathrm{t}}^2 W\right] \mathrm{d}a$$

(Greens första formel, i planet)

Uppgift 3

En sfär med radien a har den sfäriskt symmetriska rymdladdningstätheten $\rho = \rho_0\left(3 - 4\dfrac{r}{a}\right)$. Sfärens totala laddning är noll varigenom symmetrin medför att $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}$ utanför. Inuti sfären är $\boldsymbol{E} = \dfrac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(r - \dfrac{r^2}{a}\right)\hat{\boldsymbol{r}}$.
Sfären har en homogent fördelad massa m, varvid tröghetsmomentet m.a.p. på en axel genom centrum blir $J = \dfrac{2ma^2}{5}$.



Sfären är placerad koncentriskt med en cirkulär slinga som har radien b och för likströmmen I, där $b \gg a$.

När strömmen i slingan långsamt dras ner till noll sätts sfären i rotation.

Bestäm sfärens slutliga vinkelhastighet $\boldsymbol{\omega}$!
Ledningar: $\boldsymbol{L}_{\text{mek}} = J\boldsymbol{\omega}$. Bortse ifrån det magnetfält som den roterande sfären ger upphov till.

Uppgift 4

En plan våg faller från luft in vinkelrätt mot den plana gränsytan till ett förlustbehäftat material, för vilket det är känt att relativa permeabiliteten $\mu_{\mathrm{r}} = 1$.

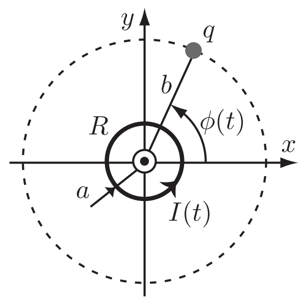
Vid frekvensen 1 GHz uppmäts reflexionsfaktorn för det elektriska fältet till $-0,25 - 0,17\mathrm{i}$.

Bestäm materialets relativa permittivitet ε_{r} och ledningsförmåga σ!

Uppgift 5

En punktladdning q rör sig i en cirkelbana med radien b. Rörelsen är för övrigt godtycklig och beskrivs entydigt av den tidsberoende vinkeln $\phi(t)$. Koncentriskt och koaxiellt med cirkelbanan finns en liten cirkulär slinga med radien a och resistansen R. Det förutsätts att $a \ll \lambda_{\min}$, där $\lambda_{\min}$ är den kortaste signifikanta våglängden ur spektrat för punktladdningens fält. I slingans mittpunkt (origo) är punktladdningens elektriska fält

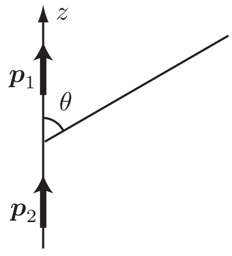
$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{0}, t) = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\left(\frac{1}{b^2} - \frac{\left(\dot{\phi}(t_{\mathrm{r}})\right)^2}{c^2}\right)\hat{\boldsymbol{s}}(\phi(t_{\mathrm{r}})) + \left(\frac{\dot{\phi}(t_{\mathrm{r}})}{bc} + \frac{\ddot{\phi}(t_{\mathrm{r}})}{c^2}\right)\hat{\boldsymbol{\phi}}(\phi(t_{\mathrm{r}}))\right]$$



Bestäm strömmen $I(t)$ genom slingan!
Liksom det givna $\boldsymbol{E}$-fältet får svaret innehålla tidsderivator av ϕ.

Uppgift 6

Betrakta två lodräta elementardipoler, $\boldsymbol{p}_1(t) = p_0\cos(\omega t + \alpha)\,\hat{\boldsymbol{z}}$ i punkten $\dfrac{\lambda}{4}\hat{\boldsymbol{z}}$ samt $\boldsymbol{p}_2(t) = p_0\cos(\omega t - \alpha)\,\hat{\boldsymbol{z}}$ i punkten $-\dfrac{\lambda}{4}\hat{\boldsymbol{z}}$ (λ =våglängden).
Dipolernas gemensamma amplitud $p_0 = 2,0$ pCm och frekvensen $f = 2,0$ GHz.



Bestäm fasvinkeln α så att den utstrålade effekttätheten blir noll för $\theta = 60°$, och därefter tidsmedelvärdet av den totalt utstrålade effekten!

Ledning: $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(1 - x^2\right)\cos^2(ax + b)\,\mathrm{d}x = \frac{8a^3 + 3\cos(2b)\left[\sin(2a) - 2a\cos(2a)\right]}{12a^3}$

Tentamen TEN2 **2010–12–16, kl 14:00-19:00**
EI1240 TEORETISK ELEKTROTEKNIK F

Förslag till lösning.

Uppgift 1

b a b d b b e d d b

Uppgift 2

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{A}} (\boldsymbol{E}_\mathrm{t} \times \boldsymbol{B}_\mathrm{t}^*) \cdot \hat{\boldsymbol{z}} \mathrm{d}a &= -\frac{\omega k_z^*}{k_\mathrm{t}^4} \int_{\mathcal{A}} [(\hat{\boldsymbol{z}} \times \nabla_\mathrm{t} B_z) \times \nabla_\mathrm{t} B_z] \cdot \hat{\boldsymbol{z}} \mathrm{d}a \\
&= \frac{\omega k_z^*}{k_\mathrm{t}^4} \int_{\mathcal{A}} \left[\hat{\boldsymbol{z}} \left(\nabla_\mathrm{t} B_z \cdot \nabla_\mathrm{t} B_z \right) - \nabla_\mathrm{t} B_z \left(\underbrace{\hat{\boldsymbol{z}} \cdot \nabla_\mathrm{t} B_z}_{=0} \right) \right] \cdot \hat{\boldsymbol{z}} \mathrm{d}a \\
&= \frac{\omega k_z^*}{k_\mathrm{t}^4} \int_{\mathcal{A}} \nabla_\mathrm{t} B_z \cdot \nabla_\mathrm{t} B_z \mathrm{d}a = \{ U = W = B_z \text{ i ledningen} \} \\
&= \frac{\omega k_z^*}{k_\mathrm{t}^4} \left\{ \oint_{\mathcal{C}} B_z \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \nabla_\mathrm{t} B_z \mathrm{d}l - \int_{\mathcal{A}} B_z \nabla_\mathrm{t}^2 B_z \mathrm{d}a \right\} = \{ \text{ Ekv. (2) \& (1) } \} \\
&= 0 - \frac{\omega k_z^*}{k_\mathrm{t}^4} \int_{\mathcal{A}} B_z \left(-k_\mathrm{t}^2 B_z \right) \mathrm{d}a = \frac{\omega k_z^*}{k_\mathrm{t}^2} \int_{\mathcal{A}} B_z^2 \mathrm{d}a \quad \textbf{V.S.V.}
\end{aligned} \tag{3}$$

Uppgift 3

Metod 1 - rörelsemängdsmomentets bevarande.

Före: $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_\mathrm{em}, \boldsymbol{L}_\mathrm{mek} = \boldsymbol{0}$. Efter: $I = 0 \Rightarrow \boldsymbol{B} = \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{L}_\mathrm{em} = \boldsymbol{0}, \boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_\mathrm{mek} = J\boldsymbol{\omega}$. Således, $\boldsymbol{\omega} = J^{-1}\boldsymbol{L}_\mathrm{em}$.

Med $b \gg a$ och långsamt varierande ström approximerar vi ringens magnetfält med dess kvasistatiska värde i origo: $\boldsymbol{B} = \dfrac{\mu_0 I}{2b}\hat{\boldsymbol{z}}$. Rörelsemängdsmomenttätheten blir då

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\ell}_\mathrm{em} &= \varepsilon_0 \boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}) = \varepsilon_0 r \hat{\boldsymbol{r}} \times (E_r \hat{\boldsymbol{r}} \times B_z \hat{\boldsymbol{z}}) = \varepsilon_0 r E_r B_z \left[\hat{\boldsymbol{r}} \left(\hat{\boldsymbol{r}} \cdot \hat{\boldsymbol{z}} \right) - \hat{\boldsymbol{z}} \right] \\
&= \varepsilon_0 r E_r B_z \left[\hat{\boldsymbol{r}} \cos\theta - \left(\hat{\boldsymbol{r}} \cos\theta - \hat{\boldsymbol{\theta}} \sin\theta \right) \right] = \rho_0 \left[r^2 - \frac{r^3}{a} \right] \frac{\mu_0 I}{2b} \hat{\boldsymbol{\theta}} \sin\theta \\
&= \frac{\rho_0 \mu_0 I}{2b} \left[r^2 - \frac{r^3}{a} \right] \left[\hat{\boldsymbol{s}}(\phi) \cos\theta - \hat{\boldsymbol{z}} \sin\theta \right] \sin\theta
\end{aligned} \tag{4}$$

Vid integreringen över sfären försvinner s-komponenten och vi får, med $\mathrm{d}\tau = r^2 \mathrm{d}r \, \sin\theta \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\phi$, att

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{L}_\mathrm{em} &= -\hat{\boldsymbol{z}} \frac{\rho_0 \mu_0 I}{2b} \cdot 2\pi \int_0^a \left[r^2 - \frac{r^3}{a} \right] r^2 \mathrm{d}r \int_0^\pi \sin^3\theta \mathrm{d}\theta = -\hat{\boldsymbol{z}} \frac{\pi \rho_0 \mu_0 I}{b} \cdot \frac{a^5}{30} \cdot \frac{4}{3} \\
&= -\frac{2\pi \mu_0 \rho_0 I a^5}{45b} \hat{\boldsymbol{z}} = J\boldsymbol{\omega} = \frac{2ma^2}{5}\boldsymbol{\omega} \Rightarrow \textbf{Svar: } \boldsymbol{\omega} = -\frac{\pi \mu_0 \rho_0 I a^3}{9bm} \hat{\boldsymbol{z}}
\end{aligned} \tag{5}$$

Metod 2 - vridmomentet från inducerade elektriska fältet.

För en med slingan koaxiell cirkel med radien $r\sin\theta$ ger $\oint \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\int \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot \hat{\boldsymbol{n}}\mathrm{d}a$ att

$$E_\phi^{\mathrm{ind}} 2\pi r\sin\theta = -\pi r^2 \sin^2\theta \frac{\partial B_z}{\partial t} = -\frac{\mu_0}{2b}\frac{\partial I}{\partial t}\pi r^2\sin^2\theta \Rightarrow \boldsymbol{E}^{\mathrm{ind}} = -\frac{\mu_0}{4b}\frac{\partial I}{\partial t} r\sin\theta\hat{\boldsymbol{\phi}} \tag{6}$$

Inför krafttätheten $\boldsymbol{f}$ och vridmomenttätheten $\boldsymbol{n}$, på sfären, varvid

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\boldsymbol{n} = \boldsymbol{r}\times \mathrm{d}\boldsymbol{f} = \boldsymbol{r}\times\left(\rho\boldsymbol{E}^{\mathrm{ind}}\right) &= -\frac{\mu_0}{4b}\frac{\partial I}{\partial t} r^2\sin\theta\rho_0\left[3-4\frac{r}{a}\right]\hat{\boldsymbol{r}}\times\hat{\boldsymbol{\phi}} = \frac{\mu_0\rho_0}{4b}\frac{\partial I}{\partial t}\left[3r^2-4\frac{r^3}{a}\right]\hat{\boldsymbol{\theta}}\sin\theta \\ &= \frac{\mu_0\rho_0}{4b}\frac{\partial I}{\partial t}\left[3r^2-4\frac{r^3}{a}\right][\hat{\boldsymbol{s}}(\phi)\cos\theta - \hat{\boldsymbol{z}}\sin\theta]\sin\theta \end{aligned} \tag{7}$$

Vridmomentet:

$$\boldsymbol{N} = -\hat{\boldsymbol{z}}\frac{\mu_0\rho_0}{4b}\frac{\partial I}{\partial t}\cdot 2\pi\int_0^a\left[3r^2-4\frac{r^3}{a}\right]r^2\mathrm{d}r\int_0^\pi \sin^3\theta\mathrm{d}\theta = -\hat{\boldsymbol{z}}\frac{\pi\mu_0\rho_0}{2b}\frac{\partial I}{\partial t}\cdot\left(-\frac{a^5}{15}\right)\cdot\frac{4}{3} = \frac{2\pi\mu_0\rho_0 a^5}{45b}\frac{\partial I}{\partial t} \tag{8}$$

Slutligen, $\int \frac{\partial I}{\partial t}\mathrm{d}t = \int_I^0 \mathrm{d}I = -I \Rightarrow \boldsymbol{L}_{\mathrm{mek}} = \int \boldsymbol{N}\mathrm{d}t = \boldsymbol{L}_{\mathrm{em}}$, varur svaret följer igen.

Uppgift 4

Reflexionsfaktorn, r, fås ur vågimpedanserna: $r = \frac{\eta_2-\eta_1}{\eta_2+\eta_1} \Rightarrow \eta_2 = \eta_1\frac{1+r}{1-r}$

$\eta_1 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$, $\eta_2 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_{\mathrm{c}}}} \Rightarrow \frac{\varepsilon_{\mathrm{c}}}{\varepsilon_0} = \varepsilon_{\mathrm{r}} + \mathrm{i}\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0} = \left(\frac{1-r}{1+r}\right)^2 \Rightarrow$

Svar: $\varepsilon_{\mathrm{r}} = \mathrm{Re}\left\{\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^2\right\} = 2,0 \quad \sigma = \omega\varepsilon_0\mathrm{Im}\left\{\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^2\right\} = 98$ mS/m.

Uppgift 5

Använd formlerna (62) och (63) i formelsamlingen.

Laddningens retarderade läge: $\boldsymbol{w}(t_{\mathrm{r}}) = b\hat{\boldsymbol{s}}(\phi(t_{\mathrm{r}})) \Rightarrow \boldsymbol{R} = \boldsymbol{0} - \boldsymbol{w}(t_{\mathrm{r}}) = -b\hat{\boldsymbol{s}}(\phi(t_{\mathrm{r}})) \Rightarrow \hat{\boldsymbol{R}} = -\hat{\boldsymbol{s}}(\phi(t_{\mathrm{r}}))$ samt att $R = b \Rightarrow t_{\mathrm{r}} = t - \frac{b}{c}$.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{0},t) &= \frac{1}{c}\hat{\boldsymbol{R}}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{0},t) \\ &= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c}\left(-\hat{\boldsymbol{s}}(\phi(t_{\mathrm{r}}))\right)\times\left[\left(\frac{1}{b^2}-\frac{\left(\dot{\phi}(t_{\mathrm{r}})\right)^2}{c^2}\right)\hat{\boldsymbol{s}}(\phi(t_{\mathrm{r}})) + \left(\frac{\dot{\phi}(t_{\mathrm{r}})}{bc}+\frac{\ddot{\phi}(t_{\mathrm{r}})}{c^2}\right)\hat{\boldsymbol{\phi}}(\phi(t_{\mathrm{r}}))\right] \\ &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c}\left(\frac{\dot{\phi}(t_{\mathrm{r}})}{bc}+\frac{\ddot{\phi}(t_{\mathrm{r}})}{c^2}\right)\hat{\boldsymbol{z}} = \left\{\frac{1}{\varepsilon_0 c^2} = \mu_0\right\} = \frac{\mu_0 q}{4\pi}\left(\frac{\dot{\phi}(t_{\mathrm{r}})}{b}+\frac{\ddot{\phi}(t_{\mathrm{r}})}{c}\right)\hat{\boldsymbol{z}} \end{aligned} \tag{9}$$

$$\Rightarrow \text{ Flödet genom den lilla slingan: } \Phi = \pi a^2\boldsymbol{B}(\boldsymbol{0},t) = \frac{\mu_0 q a^2}{4}\left(\frac{\dot{\phi}(t_{\mathrm{r}})}{b}+\frac{\ddot{\phi}(t_{\mathrm{r}})}{c}\right) \tag{10}$$

$$\Rightarrow \mathcal{E}(t) = -\frac{\mathrm{d}\Phi(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mu_0 q a^2}{4}\left(\frac{\ddot{\phi}(t_{\mathrm{r}})}{b}+\frac{\dddot{\phi}(t_{\mathrm{r}})}{c}\right) \tag{11}$$

$$\Rightarrow \textbf{Svar: } I(t) = \frac{\mathcal{E}(t)}{R} = -\frac{\mu_0 q a^2}{4R}\left(\frac{\ddot{\phi}(t-b/c)}{b}+\frac{\dddot{\phi}(t-b/c)}{c}\right) \tag{12}$$

Uppgift 6

Med hänsyn till placeringarna och faslägena blir de komplexa fjärrfälten ($\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ utelämnat)

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E} &= -\frac{\mu_0\omega^2 p_0}{4\pi}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega r/c}}{r}\sin\theta\left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}((\omega/c)(\lambda/4)\cos\theta+\alpha)}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}((\omega/c)(\lambda/4)\cos\theta+\alpha)}\right]\hat{\boldsymbol{\theta}} \\
&= -\frac{\mu_0\omega^2 p_0}{2\pi}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega r/c}}{r}\sin\theta\cos\!\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta+\alpha\right)\hat{\boldsymbol{\theta}} \qquad (13)\\
\boldsymbol{B} &= -\frac{\mu_0\omega^2 p_0}{2\pi c}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega r/c}}{r}\sin\theta\cos\!\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta+\alpha\right)\hat{\boldsymbol{\phi}} \qquad (14)
\end{aligned}$$

där vi utnyttjat att $\omega/c = 2\pi/\lambda$.

$\cos 60^\circ = \dfrac{1}{2} \Rightarrow$ nollfält då $\dfrac{\pi}{4}+\alpha = \pm\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \left\{\dfrac{\pi}{4}, -\dfrac{3\pi}{4}\right\}$.

Räcker med att studera $\pi/4$, ty $-3\pi/4$ motsvarar bara 180° fasskift i bägge fälten.

Tidsmedelvärdet av Poyntings vektor:

$$\langle\boldsymbol{S}\rangle = \frac{1}{2\mu_0}\mathrm{Re}\{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}^*\} = \frac{\mu_0\omega^4 p_0^2}{8\pi^2 c}\frac{1}{r^2}\sin^2\theta\cos^2\!\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta+\alpha\right)\hat{\boldsymbol{r}} \qquad (15)$$

Tidsmedelvärdet av effekten ut genom en sfär med radien r:

$$\begin{aligned}
\langle P\rangle &= \int_0^\pi r\,\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi} r\sin\theta\,\mathrm{d}\phi\,\langle\boldsymbol{S}\rangle\cdot\hat{\boldsymbol{r}} = \frac{\mu_0\omega^4 p_0^2}{8\pi^2 c}\cdot 2\pi\int_0^\pi \sin^2\theta\cos^2\!\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta+\alpha\right)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{\mu_0\omega^4 p_0^2}{8\pi^2 c}\cdot 2\pi\int_0^\pi \left(1-\cos^2\theta\right)\cos^2\!\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta+\alpha\right)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{\mu_0\omega^4 p_0^2}{8\pi^2 c}\cdot 2\pi\int_{-1}^1 \left(1-x^2\right)\cos^2\!\left(\frac{\pi}{2}x+\alpha\right)\mathrm{d}x \\
&= \{\text{ Ledning }\} = \frac{\mu_0\omega^4 p_0^2}{4\pi c}\cdot\frac{2}{3} = \frac{\mu_0\omega^4 p_0^2}{6\pi c} \approx 22\ \mathrm{W} = \textbf{Svar} \qquad (16)
\end{aligned}$$

Anmärkning: Effekten är densamma som för en ensam dipol med amplituden p_0, men då fås en annan fördelning över riktningarna (strålningsdiagram).

Namn:.. **Personnr:**.................................

Tentamen TEN2 2011–06–01, kl 8:00-13:00

EI1240 TEORETISK ELEKTROTEKNIK F

Examinator: Martin Norgren, tel. 790 7410

Hjälpmedel: Endast följande hjälpmedel är tillåtna på tentamen

- ”Formelsamling teoretisk elektroteknik” (från institutionen)
- ”BETA Mathematics Handbook” (Råde & Westergren)
- Miniräknare
- TETs ”isskrapa” med vektorformler (från institutionen)

Varje uppgift ger maximalt 10 poäng. Godkänt garanteras på 30 poäng.

Läs följande noggrant:

Namn och personnummer på varje blad.
Endast en uppgift per blad - flera uppgifter på samma blad ogiltigförklaras.
Skriv endast på framsidan - skrift på baksidan beaktas ej.
På uppgifterna 2-6 skall uppställda samband motiveras.
Används formler hämtade ur kursboken skall giltigheten diskuteras!

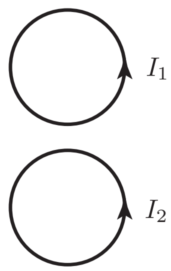
Uppgift 1

Denna uppgift löses på tentamensbladet, som skall lämnas in!

Varje delfråga ger 0 eller 1 poäng.
Kryssa i ett svarsalternativ (på denna uppgift efterfrågas inte några motiveringar).

- -

1.1
Två likadana strömslingor, vardera med resistansen R, är placerade i samma plan med strömriktningarna definierade enligt pilarna.
Om första slingan drivs med strömmen $I_1(t) = -k_1 t^2 \ (k_1 > 0)$ gäller i andra slingan att strömmen $I_2(t) =$



a ☐ $-k_1 k_2 \, (k_2 > 0)$

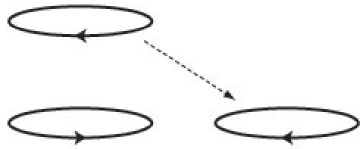
b ☐ $-k_1 k_2 t \, (k_2 > 0)$

c ☐ $k_1 k_2 t \, (k_2 > 0)$

d ☐ $k_1 k_2 \, (k_2 > 0)$

- -

1.2
I två parallella strömslingor upprätthålls konstanta strömmar med motsatta riktningar (se figuren). Efter att den ena slingan har flyttats enligt pilen gäller att den magnetiska energin



a ☐ har minskat.

b ☐ är oförändrad.

c ☐ har ökat.

- -

1.3

Över en kondensator gäller för $t > 0$ att spänningen $U(t) = U_0 e^{-t/\tau}$. För en yta $\mathcal{S}$ (med utåtriktade ytnormalen $\hat{\boldsymbol{n}}$) inneslutande enbart kondensatorn gäller för $t > 0$ att $\oint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{S} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \mathrm{d}a$

a ☐ > 0
b ☐ < 0
c ☐ $= 0$

1.4

Två halvrymder med materialparametrarna ε_1, μ_1 respektive ε_2, μ_2 är åtskilda med en plan gränsyta. Från område 1 faller en plan våg in vinkelrätt mot gränsytan varvid det fås en transmitterad plan våg i område 2.

Om $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ och $\mu_1 < \mu_2$ gäller för det infallande magnetiska fältets amplitud B_{in} och det transmitterade magnetiska fältets amplitud B_{tr} att

a ☐ $B_{\mathrm{tr}} < B_{\mathrm{in}}$
b ☐ $B_{\mathrm{tr}} > B_{\mathrm{in}}$
c ☐ $B_{\mathrm{tr}} = B_{\mathrm{in}}$
d ☐ förhållandet dem emellan ej kan avgöras.

1.5

En plan våg med vänster-elliptisk polarisation faller in snett mot ett perfekt ledande metallplan.

Hos den reflekterade vågen blir polarisationen

a ☐ vänster-elliptisk.
b ☐ vänster-cirkulär.
c ☐ höger-elliptisk.
d ☐ linjär.
e ☐ höger-cirkulär.

1.6

Om materialet inuti en vågledare ersätts med ett material som har ett lägre brytningsindex kommer modernas gränsfrekvenser att minska.

a ☐ Sant.
b ☐ Falskt.

1.7

En sfärisk symmetrisk tidberoende rymdladdning ges som $\rho(\boldsymbol{r}, t) = \rho_0 \exp(-\frac{r}{a} \sin^2(\frac{t}{T}))$

Om vi söker fälten i origo gäller i generaliserade Coulombs lag för $\boldsymbol{E}$-fältet att

$$\frac{\partial \rho(\boldsymbol{r}', t_{\mathrm{r}})}{\partial t_{\mathrm{r}}} = -\rho_0 \frac{r'}{aT} \sin(\frac{2}{T}(t - r'/c)) \exp(-\frac{r'}{a} \sin^2(\frac{t - r'/c}{T}))$$

a ☐ Sant.
b ☐ Falskt.

1.8

I närzonen till två varandra närliggande men momentant motriktade elektriska dipolantenner gäller att

a ☐ $\boldsymbol{E} \propto \frac{1}{r^2}, \boldsymbol{B} \propto \frac{1}{r^2}$

b ☐ $\boldsymbol{E} \propto \frac{1}{r^3}, \boldsymbol{B} \propto \frac{1}{r^2}$

c ☐ $\boldsymbol{E} \propto \frac{1}{r}, \boldsymbol{B} \propto \frac{1}{r}$

d ☐ $\boldsymbol{E} \propto \frac{1}{r^4}, \boldsymbol{B} \propto \frac{1}{r^3}$

1.9

För en vandringsvågantenn är strömmen på antenntråden $I(z,t) = I_0 \cos(\omega t + \omega z/c)$

Linjeladdningstätheten på antenntråden blir då

a ☐ $\lambda(z,t) = \frac{I_0}{c} \cos(\omega t + \omega z/c)$

b ☐ $\lambda(z,t) = \frac{I_0}{c} \sin(\omega t + \omega z/c)$

c ☐ $\lambda(z,t) = -\frac{I_0}{c} \sin(\omega t + \omega z/c)$

d ☐ $\lambda(z,t) = -\frac{I_0}{c} \cos(\omega t + \omega z/c)$

1.10

Med potentialerna i Lorenzgaugen, vilket av följande uttryck är alltid invariant under Lorentztransformationen?

a ☐ $V^2 + c^2 A^2$

b ☐ $V^2 - c^2 A^2$

c ☐ A^2

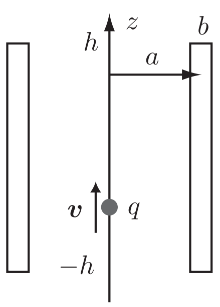
d ☐ V^2

Uppgift 2

En toroidspole med höjden $2h$ har N varv. I radiell led är spolen tunn och har medelradien a och tjockleken b ($b \ll a$). Spolen är placerad koaxiellt med z-axeln och med centrum i origo.
Längs med z-axeln rör sig en punktladdning q med den konstanta hastigheten $\boldsymbol{v} = v\hat{\boldsymbol{z}}$. Det gäller att $|v| \ll c$ varvid punktladdningens magnetfält blir

$$\boldsymbol{B}(s, \phi, z, t) = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \cdot \frac{vs}{\left[s^2 + (z - vt)^2\right]^{3/2}} \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

Bestäm den i toroidspolen inducerade emk:n!



Uppgift 3

I ett magnetostatiskt fält $\boldsymbol{B}$ skapat av den i rummet begränsade strömtätheten $\boldsymbol{J}$ är upplagrade energin

$$W_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2\mu_0} \int_{\mathbb{R}^3} B^2 \mathrm{d}\tau \tag{1}$$

Visa utifrån (1) att energin också kan beräknas som

$$W_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2} \int \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{A} \, \mathrm{d}\tau \tag{2}$$

där $\boldsymbol{A}$ är magnetfältets vektorpotential.

Uppgift 4

En luftfylld rektangulär vågledare har tvärsnittsdimensionerna $(0 < x < a) \cap (0 < y < b)$, där $a = 15$ cm och $b = 7,5$ cm. I vågledaren finns $\mathrm{TE}_{1,0}$-moden, med det komplexa magnetfältet

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) = B_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z - \omega t)} \left[-\mathrm{i} \frac{k_z a}{\pi} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \hat{\boldsymbol{x}} + \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \hat{\boldsymbol{z}} \right], \qquad k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{a^2},$$

där amplitudkonstanten (här reell) $B_0 = 0,95$ mT.

Bestäm tidmedelvärdet av effekten som transporteras genom ett tvärsnitt av vågledaren, när frekvensen är 500 MHz samt när frekvensen är 1,50 GHz!

Ledning: för komplexa fält ges tidmedelvärdet av Poyntings vektor som $\langle \boldsymbol{S} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \mathrm{Re}\left\{ \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}^* \right\}$

Uppgift 5

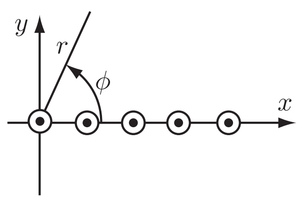
En plan våg faller från luft in snett mot den plana gränsytan till ett förlustfritt material med relativa permittiviteten $\varepsilon_\mathrm{r} = 4$ och relativa permeabiliteten $\mu_\mathrm{r} = 1$.

Den infallande vågen är elliptiskt polariserad och kan därmed delas upp i två planpolarisade delvågor. Den ena delvågen har magnetfältet parallellt med gränsytan och för den delvågen gäller att elektriska fältet har amplituden 300 V/m. Den andra delvågen har elektriska fältet parallellt med gränsytan och för den delvågen gäller att elektriska fältet har amplituden 400 V/m. Fasskillnaden mellan delvågorna är $\pi/2$.

Bestäm infallsvinkeln så att den (totala) transmitterade vågen blir cirkulärt polariserad!

Uppgift 6

I en gruppantenn är antennelementen ett stort antal elektriska elementardipoler placerade ekvidistant utefter den positiva x-axeln. Avståndet mellan två närliggande dipoler är $3\lambda/4$, där λ betecknar våglängden. Räknat från origo ges dipolmomenten som $\boldsymbol{p}_n(t) = p_0 \mathrm{e}^{-n} \cos(\omega t)\, \hat{\boldsymbol{z}}, n = 0, 1, 2, \ldots$.



Bestäm de riktningar ϕ i xy-planet för vilka den utstrålade effekttätheten är minimal!

Tentamen TEN2 **2011–06–01, kl 8:00-13:00**
EI1240 TEORETISK ELEKTROTEKNIK F

Förslag till lösning.

Uppgift 1

b c a b c b a d d b

Uppgift 2

Vi har att $\boldsymbol{B} = B_\phi \hat{\boldsymbol{\phi}}$ där $B_\phi(s, z - vt) = \dfrac{\mu_0 q v}{4\pi} \cdot \dfrac{s}{\left[s^2 + (z - vt)^2\right]^{3/2}}$, lägg märke till z, t-beroendet!

Med $b \ll a$ fås att flödet $\Phi = Nb \int_{-h}^{h} B_\phi(a, z - vt)\,\mathrm{d}z$.

Svar: Emk:n

$$\mathcal{E} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -Nb \int_{-h}^{h} \frac{\partial B_\phi(a, z - vt)}{\partial t}\mathrm{d}z = Nbv \int_{-h}^{h} \frac{\partial B_\phi(a, z - vt)}{\partial z}\mathrm{d}z$$

$$= Nbv\left[B_\phi(a, h - vt) - B_\phi(a, -h - vt)\right] = \frac{\mu_0 N q a b v^2}{4\pi}\left[\frac{1}{\left[a^2 + (h - vt)^2\right]^{3/2}} - \frac{1}{\left[a^2 + (h + vt)^2\right]^{3/2}}\right]$$

Uppgift 3

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} \Rightarrow W_\mathrm{m} = \frac{1}{2\mu_0}\int_{\mathbb{R}^3} \boldsymbol{B} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A})\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2\mu_0}\int_{\mathbb{R}^3} \left[\nabla \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{A} \cdot \nabla \times \boldsymbol{B}\right]\mathrm{d}\tau \tag{3}$$

Medelst Gauss lag blir första termen en ytintegral i ∞, men eftersom fältet är statiskt och $\boldsymbol{J}$ har begränsad utsträckning gäller på stora avstånd att $\boldsymbol{A} \propto r^{-2}, \boldsymbol{B} \propto r^{-3}$ varigenom ytintegralen försvinner. I den sista termen är $\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J}$ vilket ger att

$$W_\mathrm{m} = \frac{1}{2}\int \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{A}\,\mathrm{d}\tau \;\; \textbf{V.S.V.} \tag{4}$$

Uppgift 4

Tidharmoniska Maxwellekvationen $\nabla \times \boldsymbol{B} = \dfrac{-\mathrm{i}\omega}{c^2}\boldsymbol{E}$ $(\boldsymbol{J} = \boldsymbol{0})$ ger att det komplexa elektriska fältet blir

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mathrm{i}c^2}{\omega}\nabla \times \boldsymbol{B} = \frac{\mathrm{i}c^2}{\omega}\left[\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}\right]\hat{\boldsymbol{y}} = \frac{\mathrm{i}c^2}{\omega}B_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z - \omega t)}\left[\frac{k_z^2 a}{\pi}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) + \frac{\pi}{a}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\right]\hat{\boldsymbol{y}}$$

$$= \frac{\mathrm{i}c^2 a}{\omega\pi}B_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z - \omega t)}\left[k_z^2 + \frac{\pi^2}{a^2}\right]\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\hat{\boldsymbol{y}} = \left\{k_z^2 + \frac{\pi^2}{a^2} = \frac{\omega^2}{c^2}\right\} = \frac{\mathrm{i}\omega a}{\pi}B_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z - \omega t)}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\hat{\boldsymbol{y}} \tag{5}$$

Tidmedelvärdet av effekten genom ett tvärsnittsplan:

$$\langle P \rangle = \int_0^a \mathrm{d}x \int_0^b \mathrm{d}y\,\langle \boldsymbol{S} \rangle \cdot \hat{\boldsymbol{z}} = \frac{1}{2\mu_0}\int_0^a \mathrm{d}x \int_0^b \mathrm{d}y\,\mathrm{Re}\left\{\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}^*\right\} \cdot \hat{\boldsymbol{z}} = -\frac{1}{2\mu_0}\int_0^a \mathrm{d}x \int_0^b \mathrm{d}y\,\mathrm{Re}\left\{E_y B_x^*\right\}$$

$$= -\frac{B_0^2}{2\mu_0}\mathrm{Re}\left\{\frac{\mathrm{i}\omega a}{\pi}\frac{\mathrm{i}k_z^* a}{\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z - k_z^*)z}\right\}\int_0^a \mathrm{d}x \int_0^b \mathrm{d}y \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) = \frac{\omega a^2 B_0^2}{2\mu_0 \pi^2}\mathrm{e}^{-2\mathrm{Im}\{k_z\}z}\mathrm{Re}\left\{k_z^*\right\}\frac{ab}{2}$$

$$= \frac{\omega a^3 b B_0^2}{4\mu_0 \pi^2}\mathrm{e}^{-2\mathrm{Im}\{k_z\}z}\mathrm{Re}\left\{k_z^*\right\} \tag{6}$$

Vid 500 MHz fås att $k_z^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2} - \dfrac{\pi^2}{a^2} < 0$, varvid k_z blir imaginär och $\text{Re}\left\{k_z^*\right\} = 0 \Rightarrow \langle P \rangle = 0 =$ **Delsvar**

Vid 1,50 GHz fås att k_z blir reell varvid $\text{Re}\left\{k_z^*\right\} = k_z \Rightarrow \langle P \rangle = \dfrac{\omega k_z a^3 b B_0^2}{4\mu_0 \pi^2} \approx 1,0$ MW $=$ **Delsvar**

Uppgift 5

Vi använder uttrycken (96)-(98) i formelsamlingen (årgång 2010). Enligt (98) fås att

$$\alpha = \frac{\sqrt{1 - \dfrac{\sin^2\theta_{\text{in}}}{4}}}{\cos\theta_{\text{in}}}, \qquad \beta = 2$$

där i det här fallet $\alpha > 0$ är reell.

Enligt transmissionsuttrycken bibehålls fasskillnaden när delvågorna transmitteras. Villkoret för cirkulär polarisation blir då att de transmitterade delvågorna har samma amplitud:

$$\frac{2}{\alpha+\beta}\cdot 300 = \frac{2}{1+\alpha\beta}\cdot 400 \Rightarrow \frac{\alpha+\beta}{1+\alpha\beta} = \frac{\alpha+2}{1+2\alpha} = \frac{3}{4} \Rightarrow \alpha = \frac{5}{2}$$

Således

$$\alpha^2 = \frac{25}{4} = \frac{1 - \dfrac{\sin^2\theta_{\text{in}}}{4}}{\cos^2\theta_{\text{in}}} \Rightarrow \cos^2\theta_{\text{in}} = \frac{1}{8} \Rightarrow \theta_{\text{in}} = \arccos\left(1/\sqrt{8}\right) \approx 1,21 \Rightarrow \textbf{Svar: } \theta_{\text{in}} = 69^\circ$$

Uppgift 6

Samtliga antennelement strålar maximalt i xy-planet,
och deras avstånd till fjärrzonen blir $R_n = r - n\dfrac{3\lambda}{4}\cos\phi,\ n = 0, 1, 2, \ldots$.

Eftersom amplituderna avtar snabbt med index n är det lämpligt att approximera med oändligt antal antennelement. Med vågtalet $k = 2\pi/\lambda$ fås att fälten blir proportionella mot

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-n}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR_n} \propto \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-n(1-\mathrm{j}(3\pi/2)\cos\phi)} = \frac{1}{1 - \mathrm{e}^{(-1+\mathrm{j}(3\pi/2)\cos\phi)}}$$

För minimal fältstyrka, och effekttäthet, gäller att $\left|1 - \mathrm{e}^{-1}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(3\pi/2)\cos\phi}\right|$ är maximal, dvs det maximala beloppet om man i det komplexa talplanet rör sig runtom en cirkel som har radien e^{-1} och centrum i punkten $1 + \mathrm{j}0$.

Medelst en omskrivande cirkel centrerad i origo inses att beloppet blir maximalt då
$\mathrm{e}^{\mathrm{j}(3\pi/2)\cos\phi} = -1 = \mathrm{e}^{\pi(1+2m)},\ m \in \mathbb{Z}$.

$\cos\phi = \dfrac{2}{3}(1 + 2m) \Rightarrow$ reella vinklar då $m = 0, -1 \Rightarrow \cos\phi = \pm\dfrac{2}{3}$.

Svar: Minimal effekttäthet fås i riktningarna $\phi = \in \{\pm 48^\circ, \pm 132^\circ\}$
