Aufgabe 2: Spießgesellen

Teilnahme-ID: 59116

Bearbeiter/-in dieser Aufgabe:

Jim Maar

27. März 2021

Inhaltsverzeichnis

Aufgabe a 1
Lösungsidee 3
Umsetzung 4
Beispiele 5
Quellcode 6

Aufgabe a

Donald will sich aus den Schüsseln nehmen, in denen die Obstsorten Apfel, Brombeere und Weintraube zu finden sind. Zu jeder Person werden auf der linken Seite die Wunschsorten, die sie auf ihrem Spieß hat, und die Schüssel, aus denen sie sich genommen hat, stehen. Auf der rechten Seite stehen die Wunschsorten, die die Person nicht auf ihrem Spieß hat und die Schüsseln, aus denen sie sich nicht genommen hat. Die Schüsseln, in denen sich das Wunschobst befinden kann, werden mit Pfeilen gekennzeichnet.

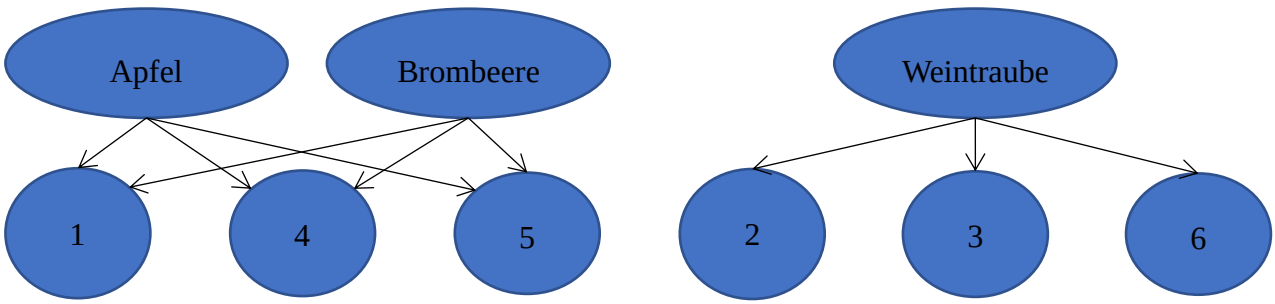

Abb. 1: Mickys Obstspieß

Die Wunschsorten, die auf Mickys Spieß sind, können nur aus den Schüsseln stammen, aus denen er sich genommen hat und die, die nicht auf seinen Spieß sind, können nur aus den Schüsseln stammen, aus denen er sich nicht genommen hat.

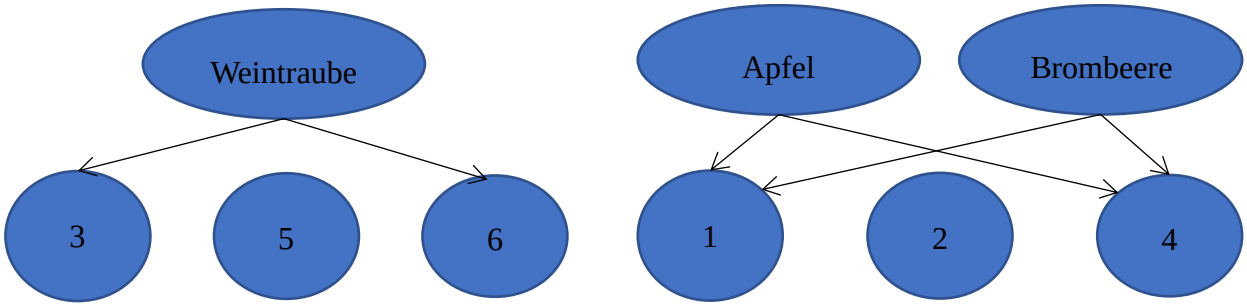

Abb. 2 Minnies Obstspieß

Die Weintraube von Minnies Obstspieß kann nicht aus der Schüssel 5 kommen, da sie (siehe Mickys Obstspieß) aus den Schüsseln 2, 3 oder 6 kommen muss. Apfel und Brombeere können aus demselben Grund auch nicht aus der Schüssel 2 kommen. Donald muss sich also aus den Schüsseln 1 und 4 nehmen, um die Wunschsorten Apfel und Brombeere zu erhalten.

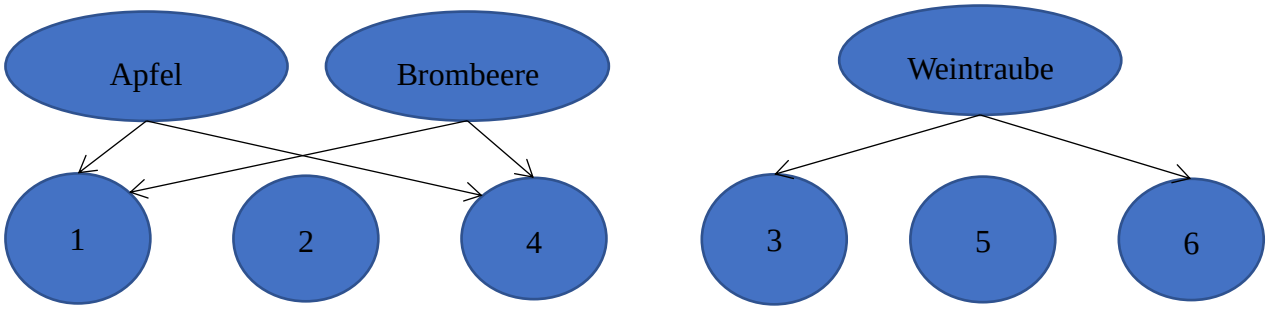

Abb. 3 Gustavs Obstspieß

Durch Gustav erfahren wir nichts Neues.

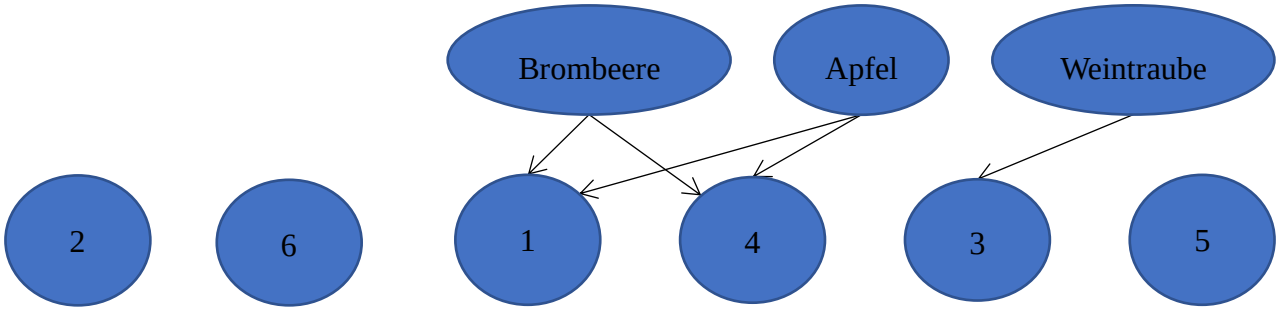

Abb. 4 Daisys Obstspieß

Daisy nimmt aus der sechsten Schüssel eine Erdbeere oder Pflaume. Deshalb kann die Weintraube nur noch aus Schüssel 3 stammen. Gustav muss sich aus den Schüsseln 1, 3 und 4 bedienen, um seine Wunschsorten zu erhalten.

Lösungsidee

Wenn Donald sieht, wie eine Person eine Menge an Obstsorten aus einer Menge an Schüsseln bekommen hat, wissen wir, dass jede dieser Obstsorten aus einer der Schüsseln gekommen sein muss. Wenn das der Fall ist, werden wir nun sagen, dass die Menge der Obstsorten zur Menge der Schüsseln gehört. Wir wissen auch, dass jede Obstsorte, die die Person nicht genommen hat, aus einer der Schüsseln, aus denen er nichts genommen hat, kommen muss. Die Komplementärmenge der Obstsorten gehört also zur Komplementärmenge der Schüsseln. Wir nennen die Obstmenge der ersten Person O1 und die Schüsselmenge der ersten Person S1. Es gilt bei einer Person also: $O1\ gehört\ zu\ S1$ und $O1^C\ gehört\ zu\ S1^C$. $O1^{\mathrm{C}}$ und $S1^{\mathrm{C}}$ sind die Komplementärmengen von $O1$ und $S1$. Es gilt $O1^{\mathrm{C}} = O0 \setminus O1$ und $S1^{\mathrm{C}} = S0 \setminus S1$, wobei $O0$ und $S0$ die Mengen aller Obstsorten bzw. die Mengen aller Schüsseln sind.

Wir nehmen nun den Obstspieß einer weiteren Person dazu. Die Menge der Obstsorten und Schüsseln der zweiten Person nennen wir $O2$ und $S2$. Wenn es gleiche Obstsorten auf beiden Spießen gibt, müssen die Personen diese aus denselben Schüsseln bekommen haben. Die Schnittmenge von $O1$ und $O2$ gehört also zur Schnittmenge von $S1$ und $S2$. Einfach geschrieben gilt $O1 \cap O2\ gehört\ zu\ S1 \cap S2$. Mit der gleichen Argumentation wissen wir auch, dass $O1^C \cap O2\ gehört\ zu\ S1^C \cap S2$, $O1 \cap O2^C\ gehört\ zu\ S1 \cap S2^C$ und $O1^C \cap O2^C\ gehört\ zu\ S1^C \cap S2^C$ gelten. Die 2 Obstmengen $O1$ und $O1^{\mathrm{C}}$ wurden jeweils durch die Schnittmenge mit $O2$ und die Schnittmenge mit der Komplementärmenge von $O2$ ersetzt. Dasselbe wurde mit den zugehörigen Schüsselmengen gemacht. Das sind alle Informationen, die wir durch die Hinzunahme der Obst- und Schüsselmenge einer weiteren Person bekommen können.

Die Menge M enthält alle Paare von Obstmengen mit ihren zugehörigen Schüsselmengen. Zuerst enthält sie nur die Menge $O0$ mit der zugehörigen Menge $S0$. Die Mengen in M werden nacheinander durch die Hinzunahme der Obst- und Schüsselmengen der Personen verändert.

Alle Obstmengen in M werden für jede Person wie oben gezeigt durch die Schnittmenge mit der Obstmenge der Person und die Schnittmenge mit der Komplementärmenge der Obstmenge der Person ersetzt. Die Anzahl der Mengen in M verdoppelt sich dabei mit jedem Durchgang. Für die dazugehörigen Schüsselmengen wird jeden Durchgang dasselbe gemacht.

Für Mengen gilt $A \cap B^{\mathrm{C}} = A \setminus B$. Anstatt eine Menge in M durch die Schnittmenge mit dem Komplement einer Menge zu ersetzen, wird sie durch die Differenzmenge mit der Menge ersetzt.

Nach dem ersten Durchgang mit der ersten Person enthält M folgende Mengen: $O0 \cap O1 = \mathrm{O1\ gehört\ zu\ S0 \cap S1 = S1}$ und $\mathrm{O0 \setminus O1 = O1^{C}\ gehört\ zu\ S0 \setminus S1 = S1^{C}}$. Das ist dasselbe Ergebnis, wie als wir zu Beginn die zueinander gehörenden Mengen bei einer Person bestimmt haben.

Nach dem Durchgang mit der letzten Person wurden alle zugehörigen Mengen so genau wie möglich bestimmt. Dann kann auch wenn es möglich ist, die Zielmenge, also die Menge, in der das Wunschobst zu finden ist, bestimmt werden.

Der Algorithmus hat bis jetzt ein exponentielles Wachstum, wird aber noch wie folgt optimiert. Es ist nicht nötig, die zugehörigen Mengen aller Obstsorten zu speichern. Deshalb enthält $O0$ am Anfang

nur das Wunschobst. Alle Obstmengen in M enthalten dann auch später nur Wunschobst. Sobald eine Schüsselmenge in M dieselbe Größe hat wie ihre zugehörige Obstmenge, muss sich aus jeder der Schüsseln genommen werden, um das Wunschobst zu bekommen. Sie ist also eine Teilmenge der Zielmenge. Solche Mengen werden aus M rausgenommen und nicht weiter verändert. Sie werden von nun an Teilzielmengen genannt.

Die Zielmenge ist am Ende die Vereinigungsmenge aller Teilzielmengen. Wenn nicht jede Schüsselmenge eine Teilzielmenge ist, kann die Zielmenge nicht ganz bestimmt werden. Der Teil, der bestimmt werden kann, wird dann ausgegeben. Die restlichen Obstmengen mit ihren zugehörigen Schüsselmengen werden auch ausgegeben. Donald könnte bei diesen dann sein Glück versuchen.

Die Anzahl der Mengen in M kann zwar am Anfang exponentiell ansteigen, sie kann aber höchstens je nachdem, was niedriger ist, die Anzahl der Wunschsorten oder die Hälfte (abgerundet) der Anzahl der Schüsseln erreichen. Dafür müsste jede Wunschsorte einzeln in einer Menge sein und/oder jede Schüsselmenge müsste genau 2 Schüsseln enthalten. Ansonsten gäbe es Teilzielmengen, die rausgenommen werden würden. In den gegebenen Beispielen wird diese Anzahl nie auch nur annähernd erreicht.

Da die Anzahl an Mengen in M ein konstantes Maximum hat, hat der Algorithmus eine Laufzeit von O(n), wobei die Eingabegröße n die Anzahl der Personen ist. Da ich zu wenig über die Laufzeit der von Python eingebauten Funktionen zur Erstellung von Schnitt- und Differenzmengen weiß, kann ich die Laufzeit nicht in Abhängigkeit von der Anzahl an Wunschobst und Schüsseln bestimmen.

Umsetzung

Die Lösungsidee wird in Python implementiert.

Die Lösungsidee basiert auf endlichen Mengen. Mengen sind in Python als der Datentyp Set mit eingebauten Funktionen integriert. Jede Obst- und Schüsselmenge wird in der Implementierung also als ein Set gespeichert.

Alle Obstmengen und die dazugehörigen Schüsselmengen, die das Programm erstellt, werden in den Listen „Obstmengen“ und „Schüsselmengen“ am selben Index gespeichert. Die beiden Listen haben die Funktion der Menge M.

Die Obst- und Schüsselmengen jeder Person werden in den Listen “Obstspieße” und “Schüsseln” gespeichert.

In jedem Durchgang mit einer Person werden Kopien von den Listen, “Obstmengen” und “Schüsselmengen” gemacht. Die ursprünglichen Listen werden geleert. Danach wird über die Kopien iteriert und zu jeder Menge werden die Schnittmenge und Differenzmenge mit den eingebauten Funktionen „intersection“ und „difference“ erstellt. Diese werden, sofern sie nicht leer sind und die Schüsselmenge keine Teilzielmenge ist, zu den ursprünglichen Listen hinzugefügt. Wenn die Schüsselmenge eine Teilzielmenge ist, wird sie stattdessen zur Liste „Zielmenge“ hinzugefügt.

Die Zielmenge wird am Ende durch die eingebaute Funktion set.union erstellt.

Wenn keine eindeutige Zielmenge bestimmt werden konnte, werden die restlichen Obst- und Schüsselmengen mithilfe der Funktion “Aufzählung” ausgegeben. Damit werden alle Obstsorten und die dazugehörigen Schüsseln einzeln aufgezählt.

Das Moduls sys wird benutzt, damit das Programm mit der einzulesenden Datei als Parameter auf der Kommandozeile aufgerufen werden kann. Die Dateien befinden sich dabei im selben Ordner, wie die Programmdatei.

Beispiele

Wir rufen das Python-Programm mit den verschiedenen BWINF-Eingabedateien auf. Alle Dateien liegen im gleichen Ordner wie die Programmdatei.

$ ./Spießgesellen.py spiesse1.txt

Die Menge der Schüsseln, in denen die Wunschsorten zu finden sind, lautet: {1, 2, 4, 5, 7}

$ ./Spießgesellen.py spiesse2.txt

Die Menge der Schüsseln, in denen die Wunschsorten zu finden sind, lautet: {1, 5, 6, 7, 10, 11}

$ ./Spießgesellen.py spiesse3.txt

Die Wunschsorte Litschi ist in den Schüsseln 2 oder 11 zu finden.

Die anderen Wunschsorten sind in den Schüsseln 1, 5, 7, 8, 10 und 12 zu finden.

$ ./Spießgesellen.py spiesse4.txt

Die Menge der Schüsseln, in denen die Wunschsorten zu finden sind, lautet: {2, 6, 7, 8, 9, 12, 13, 14}

$ ./Spießgesellen.py spiesse5.txt

Die Menge der Schüsseln, in denen die Wunschsorten zu finden sind, lautet: {1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 12, 14, 16, 19, 20}

$ ./Spießgesellen.py spiesse6.txt

Die Menge der Schüsseln, in denen die Wunschsorten zu finden sind, lautet: {18, 4, 20, 6, 7, 10, 11, 15}

$ ./Spießgesellen.py spiesse7.txt

Die Wunschsorten Grapefruit, Xenia und Apfel sind in den Schüsseln 26, 10, 3 oder 20 zu finden.

Die Wunschsorte Ugli ist in den Schüsseln 25 oder 18 zu finden.

Die anderen Wunschsorten sind in den Schüsseln 16, 17, 5, 6, 23, 24, 8 und 14 zu finden.

Quellcode

```
import sys

# Die Werte in der Eingabedatei werden in Variablen gespeichert
with open(sys.argv[1]) as f:
    Anzahl = int(next(f))
    Wunschobst = set([i for i in next(f).split()])
    n = int(next(f))
    Obstspieße = []
    Schüsseln = []
    for _ in range(0, n):
        Schüsseln += [{int(i) for i in next(f).split()}]
        Obstspieße += [{i for i in next(f).split()}]

# Schüsselmengen enthält am Anfang S0, also die Menge aller Schüsseln
Schüsselmengen = [{i for i in range(1, Anzahl + 1)}]
# Obstmengen enthält am Anfang O0, also das Wunschobst
Obstmengen = [Wunschobst.copy()]
# Zielmenge ist die Menge, in der Wunschobst zu finden ist
Zielmenge = []

# Jede Person wird durchgegangen
for index in range(0, n):
    # SchüsselmengeP ist die Schüsselmenge der Person
    SchüsselmengeP = Schüsseln[index]
    # ObstmengeP ist die Obstmenge der Person
    ObstmengeP = Obstspieße[index]
    # Während über die Obst- und Schüsselmengen iteriert wird, werden Mengen hinzugefügt
    # Dafür werden Kopien der Listen Schüsselmengen und Obstmengen gemacht
    Schüsselmengenkopie = Schüsselmengen.copy()
    Obstmengenkopie = Obstmengen.copy()
    Schüsselmengen = []
    Obstmengen = []
    # Jede Obst- und Schüsselmenge in M wird durchgegangen
```

```
    for index2 in range(0, len(Obstmengenkopie)):
        Obstmenge = Obstmengenkopie[index2]
        Schüsselmenge = Schüsselmengenkopie[index2]
        # Die Obstmenge wird durch die Schnittmenge mit der Obstmenge der Person ersetzt
        Obstmengeneu = Obstmenge.intersection(ObstmengeP)
        if len(Obstmengeneu) != 0:
            # Dasselbe wird mit der Schüsselmenge und der Schüsselmenge der Person gemacht
            Schüsselmengeneu = Schüsselmenge.intersection(SchüsselmengeP)
            # Wenn beide Mengen gleich groß sind, wird die neue Schüsselmenge zur Zielmenge hinzu-
gefügt
            # Ansonsten werden die Mengen zu den Obst- und Schüsselmengen hinzugefügt
            if len(Schüsselmengeneu) == len(Obstmengeneu):
                Zielmenge += [Schüsselmengeneu]
            else:
                Obstmengen += [Obstmengeneu]
                Schüsselmengen += [Schüsselmengeneu]

        # Des Weiteren wird die Differenzmenge mit der Obstmenge der Person erstellt
        Obstmengeneu = Obstmenge.difference(ObstmengeP)
        if len(Obstmengeneu) != 0:
            # Dasselbe wird mit der Schüsselmenge und der Schüsselmenge der Person gemacht
            Schüsselmengeneu = Schüsselmenge.difference(SchüsselmengeP)
            # Wenn beide Mengen gleich groß sind, wird die neue Schüsselmenge zur Zielmenge hinzu-
gefügt
            # Ansonsten werden die Mengen zu den Obst- und Schüsselmengen hinzugefügt
            if len(Schüsselmengeneu) == len(Obstmengeneu):
                Zielmenge += [Schüsselmengeneu]
            else:
                Obstmengen += [Obstmengeneu]
                Schüsselmengen += [Schüsselmengeneu]

# Wenn alle Obstmengen Teilzielmengen wurden, wird die Zielmenge ausgegeben
if len(Obstmengen) == 0:
    print(
        "Die Menge der Schüsseln, in denen die Wunschsorten zu finden sind, lautet:",
        set.union(*Zielmenge),
    )
else:
```

Der restliche Teil der Ausgabe ist unwichtig