JOHANNES KEPLER
UNIVERSITÄT LINZ

FUZZY.LOGIC.LAB.LINZ

Mathematik 1 und 2

für

Mechatronik,

Kunststofftechnik,

Elektronik und Informationstechnik,

Medical Engineering,

Maschinenbau

Aufgabensammlung

Susanne Saminger-Platz, Robert Pollak

Version 4.1, WS 2021

Johannes Kepler Universität Linz | Fuzzy Logic Laboratorium Linz-Hagenberg

Institut für Mathematische Methoden in Medizin und Datenbasierter Modellierung
(ehem. Institut für Wissensbasierte Mathematische Systeme)
Johannes-Kepler-Universität Linz
Altenberger Straße 69
4040 Linz
Austria

Fuzzy Logic Laboratorium Linz-Hagenberg
Softwarepark Hagenberg
Meierhof 1
4232 Hagenberg
Austria

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Die vorliegende Aufgabensammlung begleitet die Übungen „Mathematik 1 und 2 für Mechatronik, Kunststofftechnik, Elektronik und Informationstechnologie, Medical Engineering, Maschinenbau“ an der Johannes Kepler Universität Linz.

Sie basiert zu großen Teilen auf der „Aufgabensammlung Mathematik für Mechatronik“, welche von Christiane Takacs, Roland Takacs und Klaus Schiefermayer an der Abteilung für Stochastik des früheren Instituts für Algebra, Stochastik und Wissensbasierte Systeme der Johannes Kepler Universität Linz verfasst und zuletzt 2002 in ihrer 7. Auflage veröffentlicht wurde.

Für die Übungen der letzten Jahre wurde eine Auswahl dieser Aufgaben weiterentwickelt und angepasst, sowie neue Aufgaben der Sammlung hinzugefügt. Wir bedanken uns sehr herzlich bei allen Personen, die in den letzten Jahren an den Übungen oder der Entstehung dieser Sammlung von Übungsaufgaben mitgewirkt haben (in alphabetischer Reihenfolge): Michael Aichinger, Lorenz Auer, Günter Auzinger, Carlos Cernuda, Dmitry Efrosinin, Johannes Fürst, Mario Gobrial, Dominik Jochinger, Christian Kletzmayr, Christoph Koutschan, Philipp Langgruber, Moritz Lehner, Sebastian Moharitsch, Andreas Neubauer, Clemens Raab, Stefan Raffetseder, Stefan Takacs, Thomas Vetterlein, Fabian Wagner und Alexandru-Ciprian Zăvoianu. Wir danken der JKU für die Unterstützung bei diesem Vorhaben.

Wir haben diese Sammlung im Studienjahr 2019/20 erstmals zur Verfügung gestellt. Wir sind uns (fast) sicher, dass sich an der einen oder anderen Stelle ein Fehler eingeschlichen hat oder eine Aufgabenstellung noch klarer formuliert werden könnte. Auch sind uns Anregungen zu weiteren Beispielen willkommen. Über konstruktives Feedback dazu würden wir uns freuen, am besten im Moodle-Forum der Übung oder per Email mit Betreff „[mmech] Feedback zur Aufgabensammlung: …“ an robert.pollak@jku.at.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg beim Erarbeiten der Inhalte der Lehrveranstaltung!

Linz, September 2020 — Susanne Saminger-Platz, Robert Pollak

Teil I

Grundlagen

Kapitel 1

Logik

1.1 Überprüfen Sie die Äquivalenz der Aussagen

$$A \Rightarrow B, \quad \neg A \Rightarrow \neg B, \quad \neg(A \Rightarrow B), \quad B \Rightarrow \neg A, \quad \neg A \Rightarrow B$$

1.2 Überprüfen Sie, ob folgende Aussagen für beliebige Aussagen A, B, C wahr sind:

(a) $(A \vee (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$,
(b) $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$,
(c) $((A \Rightarrow B) \wedge (\neg B)) \Rightarrow \neg A$,
(d) $(\neg B \vee A) \equiv (\neg A \Rightarrow \neg B)$.

1.3 Prüfen Sie jeweils mit Wahrheitstafeln, ob die folgenden Paare von Aussagen äquivalent sind.

(a) $\neg(A \wedge B) \wedge (A \vee B)$ und $\neg(A \Leftrightarrow B)$,
(b) $(A \wedge B) \Rightarrow C$ und $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$.

Überprüfen Sie weiters eines der Distributivgesetze via Wahrheitstafel.

1.4 (a) Bestimmen Sie die Wahrheitstafel der Aussage

$$(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \Rightarrow A \wedge (B \vee C).$$

(b) Bestimmen Sie den Wahrheitswert der Aussage

$$((1 < 2) \wedge (2 < 3) \Rightarrow (1 < 3)) \Leftrightarrow ((\neg(2 = 3) \vee (2 = 4)) \Leftrightarrow (1 = 2)).$$

1.5 Überprüfen Sie mit Hilfe der Wahrheitswerttabelle, ob

$$(A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow \neg C) \quad \text{und} \quad (A \vee B) \wedge C$$

äquivalent sind.

1.6 Zeigen Sie

(a)

$$(A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B) \equiv A,$$

(b)

$$A \Leftrightarrow B \equiv (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A),$$

mit Hilfe der Wahrheitswerttabelle.

1.7 Zeigen Sie mit Hilfe einer Wahrheitswerttabelle, dass

$$A \Rightarrow B \quad \text{und} \quad \neg\, A \vee B$$

äquivalent sind. Überprüfen Sie dann durch Umformen, ob die beiden Aussagen

$$A \Rightarrow (B \Rightarrow \neg\, C) \quad \text{und} \quad \neg\, (A \wedge B \wedge C)$$

logisch äquivalent sind.

1.8 Überprüfen Sie mit Hilfe einer Wahrheitswerttabelle und durch Umformen, ob die beiden Aussagen

$$(A \Rightarrow \neg\, B) \Rightarrow C \quad \text{und} \quad (A \wedge B) \vee C$$

logisch äquivalent sind.

Hinweis: Verwenden Sie die Äquivalenz von $A \Rightarrow B$ und $\neg\, A \vee B$.

1.9 Zeigen Sie durch Äquivalenzumformungen, dass die Aussagen $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$ und $(A \wedge B) \Rightarrow C$ äquivalent sind.

1.10 Konstruieren Sie ein Schaltwerk, das das Produkt von zweistelligen Binärzahlen berechnet.

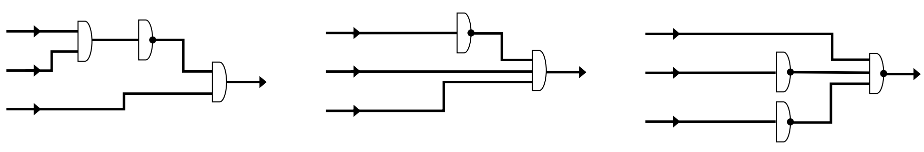
1.11 Ein Gremium aus 4 Personen stimmt immer dann mit ja ab, wenn zumindest 3 Personen mit ja stimmen. Bei Stimmengleichheit entscheidet die Stimme der ersten Person. Konstruieren Sie dafür eine Abstimmungsmaschine.

1.12 Gegeben sei die Schaltfunktion

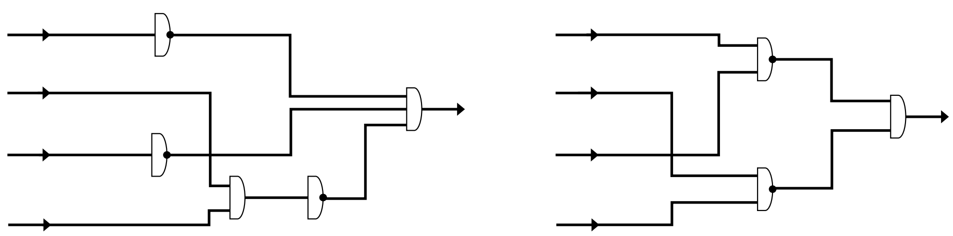
x	0	0	0	0	1	1	1	1
y	0	0	1	1	0	0	1	1
z	0	1	0	1	0	1	0	1.
$f(x,y,z)$	0	0	0	1	1	1	0	1

Bestimmen Sie eine Gatterdarstellung aus UND-, ODER- und NICHT- Gattern.

1.13 (a)



(b)



Bestimmen Sie die Schaltfunktionen dieser Gatterdarstellungen. Welche Gatter sind äquivalent?

1.14 Zeigen Sie folgende Aussagen auf jeweils zwei Arten: mittels Wahrheitstafel und unter schrittweiser Verwendung der in der Vorlesung eingeführten Gesetze.

(a) $(A \wedge \neg A) \wedge \neg B$ ist eine Kontradiktion,

(b) $(A \vee B) \vee \neg A$ ist eine Tautologie,

(c) $A \Rightarrow (B \Rightarrow \neg C) \equiv \neg(A \wedge B \wedge C)$.

1.15 Formulieren Sie folgende Aussagen in der Sprache der Logik unter Verwendung der logischen Quantoren $\forall$ und $\exists$:

(a) Zu jeder beliebigen natürlichen Zahl lässt sich immer eine größere finden, die durch 3 teilbar ist.

(b) Das Quadrat jeder beliebigen reellen Zahl ist größer gleich Null.

(c) Zwischen je zwei reellen Zahlen liegt eine dritte.

(d) Es existieren natürliche Zahlen, die sowohl durch 2 als auch durch 3 teilbar sind.

1.16 Negieren Sie folgende Aussagen bezüglich der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Gilt jeweils die Aussage oder ihre Negation?

(a) $\exists a\ \forall b : a \leq b$.

(b) $\exists a\ \forall b : a \geq b$.

(c) $\forall b\ \exists a : a \geq b$.

(d) $\forall b\ \exists a : a \leq b$.

(e) $\forall a\ \exists b\ \exists c : b + c = a$.

1.17 Beweisen Sie die Aussage

$$\forall x \text{ aus } \mathbb{R} : |x - 4| < 1 \Rightarrow x < 5$$

(a) mit Widerspruchsbeweis.

(b) mit Fallunterscheidung nach dem Vorzeichen von $x - 4$.

1.18 Beweisen Sie, dass es unbeschränkt viele Primzahlen gibt.

Hinweis: Leiten Sie aus der Negation einen Widerspruch ab, indem Sie eine Zahl finden, die durch keine der Primzahlen teilbar ist.

1.19 Beweisen Sie die Behauptung für alle natürlichen Zahlen n: Wenn n^3 durch 2 teilbar ist, dann ist auch n durch 2 teilbar.
Hinweis: Widerspruchsbeweis.

1.20 Beweisen Sie die folgende Aussage: Wählt man fünf natürliche Zahlen aus, so kann man unter diesen immer drei Zahlen finden, deren Summe durch 3 teilbar ist.

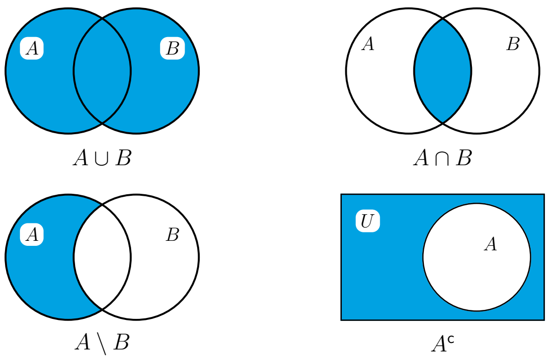
Hinweis: Man kann beim Teilen natürlicher Zahlen durch die Zahl 3 den Rest 0, 1 oder 2 erhalten. Stellen Sie sich vor, Sie haben drei Kisten, auf die Sie die Zahlen aufteilen bezüglich ihres Restes beim Teilen durch drei. Führen Sie eine Fallunterscheidung.

1.21 In einem Stiegenhaus kann von jeder der drei Etagen die Stiegenhausbeleuchtung ein- und ausgeschaltet werden. Stellen Sie die Wirkungsweise der Schaltung tabellarisch dar und finden Sie eine Darstellung durch die Grundgatter.

Kapitel 2

Mengenlehre

2.1 Folgende Abbildung zeigt Beispiele für Venn-Diagramme. Darin sind Mengen als Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ dargestellt. Geben Sie diese als Menge von Punkten mit charakteristischen Eigenschaften an.



2.2 Visualisieren Sie folgende Mengen in der Zahlenebene:

(a) $A = \{(x, y) \mid (x-2)^2 + (y-2)^2 \leq 4 \wedge 1 \leq x \leq 3\}$,

(b) $B = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 4 \wedge 1 \leq y \leq x^2\}$,

(c) $C = \{(x, y) \mid -2 \leq x \leq 2 \wedge x^2 + 1 \leq y \leq 4\}$,

(d) $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq x\}$.

2.3 Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch? Begründen Sie Ihre Einschätzung.

(a)

$$\begin{aligned} 3 \in \{1,2,3\}, \quad \{3\} \in \{1,2,3\}, \quad \{3\} \subseteq \{1,2,3\}, \\ 3 \in \mathcal{P}(\{1,2,3\}), \quad \{3\} \in \mathcal{P}(\{1,2,3\}), \quad \{3\} \subseteq \mathcal{P}(\{1,2,3\}), \\ \{\{3\}\} \in \mathcal{P}(\{1,2,3\}), \quad \{\{3\}\} \subseteq \mathcal{P}(\{1,2,3\}) \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \{3\} \in \mathbb{N}, \quad \{3\} \subseteq \mathbb{N}, \quad \{\{3\}\} \in \mathbb{N}, \quad \{\{3\}\} \subseteq \mathbb{N} \\ \{3\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N}), \quad \{3\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N}), \quad \{\{3\}\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N}), \quad \{\{3\}\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N}) \end{aligned}$$

(c)
$$\mathbb{N} \in \mathbb{Z}, \quad \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}, \quad \mathbb{N} \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}), \quad \mathbb{N} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{Z}).$$

2.4 Bestimmen Sie für folgende Mengen A und B jeweils den Durchschnitt $A \cap B$, die Vereinigung $A \cup B$, die Differenzen $A \setminus B$ und $B \setminus A$, sowie die kartesischen Produkte $A \times B$ und $B \times A$.

(a) $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 3, 4\}$,

(b) $A = [1, 3]$, $B = [2, 4]$,

(c) $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{Z}$,

(d) $A = \emptyset$, B eine beliebige Menge.

2.5 Seien A und B zwei Mengen.

(a) Beweisen Sie: Wenn A eine Teilmenge von B ist, so folgt, dass $A \cup B = B$ sowie $A \cap B = A$ ist.

(b) Beweisen Sie: Wenn $B = A \cup B$ ist, so folgt, dass $A \subseteq B$.

2.6 Seien A und B zwei Mengen. Die *symmetrische* Differenz $A \triangle B$ dieser Mengen ist definiert als
$$A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$
Zeigen Sie durch Einsetzen der Definitionen und Umformen, dass $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ ist.

2.7 Bestimmen Sie die Potenzmengen der folgenden Mengen:

(a) $A = \{a\}$,

(b) $B = \{a, b\}$

(c) $C = \emptyset$,

(d) $D = \{\emptyset, 0\}$.

2.8 Gegeben sind die Mengen $A = \{a, b, c\}$, sowie $B = \{a, b, \{a\}\}$.

(a) Bestimmen Sie die Potenzmengen von A und B, sowie deren Mächtigkeiten.

(b) Beurteilen Sie, ob a, $\{a\}$, $\{\{a\}\}$ Elemente oder Teilmengen von A, B, $\mathcal{P}(A)$ bzw. $\mathcal{P}(B)$ sind.

2.9 (a) Bestimmen Sie die Potenzmenge von $\{\{a\}, a\}$ und $\{\{a\}, \{\{a\}\}\}$, sowie die Mächtigkeiten dieser Mengen.

(b) Sind $\{\{\{a\}\}\}$, $\{\{a\}\}$, $\{a\}$, a Elemente bzw. Teilmengen der Potenzmengen von $\{\{a\}, a\}$ bzw. $\{\{a\}, \{\{a\}\}\}$?

2.10 Gegeben sei die Menge
$$M = \{\frac{1}{2}(x-1) \mid x \leq 12, x \in \mathbb{P}\} \cap \mathbb{Z}.$$

(a) Geben Sie die Menge M durch Angabe der darin vorkommenden Elemente explizit an.

(b) Bestimmen Sie das kartesische Produkt M^2.

(c) Welche der Mengen ist größer: M^2 oder $\mathcal{P}(M)$?

2.11 (a) Erstellen Sie die Menge A der ganzen Zahlen im Intervall $(10, 15)$ und die Menge B der ganzen Zahlen im Intervall $[13, 16]$.

(b) Bilden Sie die Produktmengen $C = A \times B$ und $D = B \times A$ und skizzieren Sie diese grafisch.

(c) Bilden Sie den Durchschnitt von C und D, die Vereinigung von C und D sowie die Differenzmenge $C \setminus D$.

(d) Bestimmen Sie die Mächtigkeiten aller Mengen. Müssen Sie dazu immer alle Elemente abzählen?

2.12 (a) Argumentieren Sie mit Hilfe der charakteristischen Eigenschaften der Mengen, dass für beliebige Mengen A, B, C und D gilt

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D).$$

(b) Gilt auch folgender Zusammenhang für beliebige Mengen A, B, C und D? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

$$(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D).$$

(c) Bestimmen Sie die Mächtigkeit der Menge

$$([-\pi, \pi] \times (-3, \sqrt{5}]) \cap (\mathbb{N} \times \mathbb{Z}).$$

2.13 Gegeben sei die Menge $M = \{1, 2, 3\}$. Zeigen Sie, dass die binäre Relation R auf M, gegeben durch

$$R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (1,3), (2,3)\}$$

reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.

2.14 Stellen Sie fest, ob die folgenden Relationen R auf der Menge der ganzen Zahlen reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch oder transitiv sind, wobei $(x, y) \in R$ genau dann, wenn

(a) $x \neq y$,

(b) $x = y + 1$ oder $x = y - 1$,

(c) x ist ein ganzzahliges Vielfaches von y.

2.15 Gegeben sei die Menge $M = \mathcal{P}(\{1, 3, 5, 7\}) \setminus \{\emptyset\}$, sowie die binäre Relation $\simeq$ auf M mit

$$A \simeq B \quad :\Leftrightarrow \quad \min A = \min B.$$

(a) Geben Sie M explizit an.

(b) Weisen Sie nach, dass $\simeq$ eine Äquivalenzrelation auf M ist.

(c) Geben Sie die Äquivalenzklassen bzgl. $\simeq$ an.

2.16 Untersuchen Sie folgende binäre Relationen auf der Menge aller Menschen hinsichtlich ihrer Eigenschaften:

(a) $xRy \quad :\Leftrightarrow \quad x$ ist Elternteil von y,

(b) $xRy \quad :\Leftrightarrow \quad x$ wohnt an der gleichen Adresse wie y,

(c) $xRy \quad :\Leftrightarrow \quad x$ ist größer als y,

(d) $xRy \quad :\Leftrightarrow \quad x$ ist nicht kleiner als y,

2.17 Untersuchen Sie folgende binäre Relationen auf der Menge aller Staaten hinsichtlich ihrer Eigenschaften:

(a) $xRy \quad :\Leftrightarrow \quad x$ und y besitzen eine gemeinsame Grenze.

(b) $xRy \quad :\Leftrightarrow$ Die Hauptstadt von x liegt weiter nördlich als die Hauptstadt von y.

(c) $xRy \quad :\Leftrightarrow \quad x$ kann von y über eine Flugverbindung erreicht werden.

(d) $xRy \quad :\Leftrightarrow \quad x$ und y haben gleich viel EinwohnerInnen.

2.18 Untersuchen Sie folgende binäre Relationen auf der Menge aller Studierenden der JKU hinsichtlich ihrer Eigenschaften:

(a) $xRy \quad :\Leftrightarrow \quad x$ und y besitzen die gleiche Studienkennzahl.

(b) $xRy \quad :\Leftrightarrow$ Die Matrikelnummer von x ist eine höhere Zahl als jene von y.

(c) $xRy \quad :\Leftrightarrow \quad x$ und y besuchen gemeinsam eine Vorlesung.

(d) $xRy \quad :\Leftrightarrow \quad x$ hat bis dato mindestens so viele ECTS-Punkte wie y positiv absolviert.

2.19 Sei M eine Menge und $\approx$ eine Äquivalenzrelation auf M. Zeigen Sie, dass für zwei Äquivalenzklassen $[a]_\approx$ und $[b]_\approx$ gilt:

$$[a]_\approx \cap [b]_\approx \neq \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad [a]_\approx = [b]_\approx$$

2.20 Zeigen Sie, dass die Teilbarkeitsrelation $a|b$ auf $\mathbb{N}$ eine Ordnungsrelation ist. Handelt es sich dabei um eine totale Ordnung? Ist sie auf $\mathbb{Z}$ auch eine Ordnungsrelation? Begründen Sie Ihre Antwort.

2.21 (a) Erstellen Sie die Menge der ganzen Zahlen zwischen 123 und 237, die ein Vielfaches von 7 sind.

(b) Bestimmen Sie die Mächtigkeit dieser Menge.

(c) Überprüfen Sie, ob die Zahlen 138, 147, 211 Elemente dieser Menge sind.

(d) Überprüfen Sie, ob die Menge $\{126, 154, 167, 182\}$ eine Teilmenge dieser Menge ist.

2.22 (a) Bestimmen Sie die Potenzmenge von $\{1, 2, a, 2, 3, a\}$ und $\{\{1\}, 1\}$.

(b) Ist $\{\{1\}\}, \{1\}, 1$ Element bzw. Teilmenge der Potenzmenge von $\{\{1\}, \{\{1\}\}\}$?

(c) Ist $\{\{\{1\}\}\}$ Element bzw. Teilmenge der Potenzmenge von $\{\{1\}, \{\{1\}\}\}$?

2.23 (a) Erstellen Sie die Menge A der ganzen Zahlen im Intervall $]10, 20[$ und die Menge B der ganzen Zahlen im Intervall $[15, 25]$.

(b) Bilden Sie die Produktmenge $C = A \times B$ und $D = B \times A$ und veranschaulichen Sie diese grafisch.

(c) Bilden Sie den Durchschnitt von C und D, die Vereinigung von C und D, sowie die Differenzmenge $C - D$.

(d) Bestimmen Sie die Mächtigkeiten aller Mengen.

2.24 Zeichnen Sie die Venn-Diagramme für $(A \cap B) \setminus C, (A \cap B) \cup (A \cap C), A \setminus (B \cup C)$.

2.25 Wie viele Elemente enthält $([-\pi, \sqrt{7}] \times [-3, 5]) \cap (\mathbb{Z} \times \mathbb{N})$?

2.26 Veranschaulichen Sie die folgenden Mengen in der Ebene $\mathbb{R}^2$ bzw. im dreidimensionalen Raum $\mathbb{R}^3$.

(a) $\{1, 2, 3\} \times \{4, 5\}$, $[1, 3] \times [4, 5]$, $[1, 3[\times]4, 5[$, $\{1, 2, 3\} \times [4, 5]$

(b) $\{1, 3\} \times \{4, 5\} \times \{6, 7\}$, $[1, 3] \times [4, 5] \times [6, 7]$, $[1, 3] \times \{4, 5\} \times [6, 7]$

2.27 Eine Firma stellt 120 Geräte aus je 4 Schaltelementen her. Ein Gerät ist intakt, wenn alle Schaltelemente intakt sind. Nachträglich stellt sich heraus, dass von Schaltelement A 7 Stück, von Schaltelement B 3 Stück, von Schaltelement C 5 Stück und von Schaltelement D 10 Stück defekt sind.

(a) Wie viele Geräte sind mindestens bzw. höchstens intakt?

(b) Bei mindestens bzw. höchstens wie vielen Geräten sind alle Schaltelemente defekt?

(c) Bei mindestens bzw. höchstens wie vielen Geräten sind genau drei Schaltelemente defekt?

Kapitel 3

Abbildungen

3.1 Sei $f\colon A \to B$ eine Funktion und seien $A_1, A_2 \subset A$ und $B_1, B_2 \subset B$. Zeigen Sie, dass folgende Zusammenhänge gelten:

(a) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$,

(b) $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$,

(c) $f(A_1 \setminus A_2) \supseteq f(A_1) \setminus f(A_2)$,

(d) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$,

(e) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$,

(f) $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$.

3.2 Gegeben ist die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^4 - 5x^2 + 4$. Bestimmen Sie die Bildmengen $f(A_i)$ sowie die Urbilder $f^{-1}(B_i)$ für die Mengen A_i bzw. B_i. Fertigen Sie dazu eine Skizze des Funktionsgraphen an. Hinweis: $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4 = (x-1)(x+1)(x+2)(x-2)$.

$$A_1 = [-1, 1]\,, \quad A_2 = \{0, 1, 2\}, \quad B_1 = \{0\}, \quad B_2 = \{4\}, \quad B_3 = \mathbb{R}_0^+.$$

3.3 Entscheiden Sie, ob die folgenden Abbildungen injektiv, surjektiv oder bijektiv sind. Begründen Sie Ihre Antwort. Geben Sie im letzteren Fall die Umkehrfunktion an.

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+, x \mapsto |x|$

(b) $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto n + 1$

(c) $h : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{Z}, n \mapsto \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{wenn } n \text{ gerade,} \\ -\frac{n+1}{2}, & \text{wenn } n \text{ ungerade.} \end{cases}$

(d) $k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto |x| + |y|$

(e) $m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (\sin(2t), \sin(3t))$

3.4 Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 2 - x^2$.

(a) Begründen Sie, warum f weder injektiv noch surjektiv ist.

(b) Bestimmen Sie größtmögliche Mengen $A \subseteq \mathbb{R}$ und $B \subseteq \mathbb{R}$, sodass $f\colon A \to B$ einmal injektiv, einmal surjektiv und einmal bijektiv ist.

Argumentieren Sie mit Hilfe einer Skizze.

3.5 (a) f sei eine Abbildung von A nach B. A und B seien dabei endliche Mengen; f sei injektiv, surjektiv bzw. bijektiv. Was können Sie nun über die Mächtigkeiten der Mengen aussagen?

(b) Existiert eine Umkehrabbildung einer Abbildung von $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ nach $\{a, b, c, d\}$? Begründen Sie die Antwort.

3.6 Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 2x^2 - 1$.

(a) Ist f injektiv, surjektiv, bijektiv?

(b) Bestimmen Sie größtmögliche Mengen A und B, sodass $f : A \to B$ injektiv ist.

(c) Bestimmen Sie größtmögliche Mengen A und B, sodass $f : A \to B$ surjektiv ist.

(d) Bestimmen Sie größtmögliche Mengen A und B, sodass $f : A \to B$ bijektiv ist.

Argumentieren Sie anhand einer Skizze.

3.7 Gegeben seien die Funktionen

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } f(x) = 2x - 4,$$
$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } g(x) = x^3.$$

(a) Bestimmen Sie $f \circ g$ und $g \circ f$ und zeichnen Sie die dazugehörigen Funktionsgraphen.

(b) Bestimmen Sie die Umkehrabbildungen f^{-1}, g^{-1}, $(g \circ f)^{-1}$, $f^{-1} \circ g^{-1}$ und überprüfen Sie die Formel

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

3.8 Gegeben seien die Zuordnungsvorschriften

$$f(x) = \frac{3x + 2}{4x - 1} \quad \text{und} \quad g(x) = 2x + 5.$$

(a) Bestimmen Sie jeweils die größtmögliche Definitionsmenge und den zugehörigen Wertebereich, sodass die Funktion bijektiv ist. Zeichnen Sie dazu die Funktion mit dem Computer.

(b) Bestimmen Sie die Umkehrfunktion f^{-1} und g^{-1} und zeichnen Sie auch diese.

(c) Berechnen Sie $f \circ f^{-1}$, $f^{-1} \circ f$, $g \circ g^{-1}$, $g^{-1} \circ g$.

(d) Zeigen Sie für diese Funktionen die Gleichheiten

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1},$$
$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Kapitel 4

Zahlenmengen

4.1 Schreiben Sie folgende Ausdrücke mit Hilfe von Summen- bzw. Produktzeichen an.

(a) $1 + 4 + 9 + 16 + ... + 100$

(b) $b_1 + b_3 + b_5 + ... + b_{17}$

(c) $\frac{1}{1} \cdot \frac{2}{1+2} \cdot \frac{3}{1+2+3} \cdot ... \cdot \frac{100}{1+2+3+...+100}$

(d) $2^4 + 3^6 + 4^8 + ... + 10^{20}$

4.2 Schreiben Sie folgende Ausdrücke mit Hilfe eines Summen- bzw. Produktzeichens.

(a) $1 + 3 + 5 + 7 + ... + 21$

(b) $3^2 + 4^3 + ... + 10^9$

(c) $\frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + ... + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot ... \cdot 100}$

(d) $\frac{50!}{10!}$

(e) $a_2 + a_4 + a_6 + ... + a_{40}$

(f) $11 \cdot 12 \cdot ... \cdot 120$

(g) $(1 \cdot 2) + (2 \cdot 3) + (3 \cdot 4) + ... + ((n-1) \cdot n)$

4.3 Berechnen Sie:

(a) $\sum_{i=2}^{4} i^{i-2}$,

(b) $\sum_{i=3}^{5} \prod_{j=3}^{i} \frac{i+j}{j}$.

4.4 Berechnen Sie:

(a) $\sum_{i=1}^{3} i^{i+1}$,

(b) $\sum_{i=3}^{5} \prod_{j=3}^{i} \frac{i}{j}$.

4.5 Beweisen Sie durch vollständige Induktion:

(a) $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$,

(b) $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$,

(c) $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$,

(d) $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^{n} i!i = (n+1)! - 1$,

(e) $\forall n \in \mathbb{N} : \prod_{i=1}^{n} (n+i) = 2^n (1 \cdot 3 \cdot ... \cdot (2n-1))$,

(f) $\forall n \in \mathbb{N} : 6 \mid n^3 + 11n$,

(g) $\forall n \in \mathbb{N} : n \geq 2 \Rightarrow n^n > n!$.

4.6 Zeigen Sie mithilfe der Definition des Binomialkoeffizienten, dass $\forall k, n \in \mathbb{N}_0 : k \leq n$:

(a) $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$

(b) $\binom{n}{1} = n = \binom{n}{n-1}$

(c) $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$

4.7 (a) Bestimmen Sie mithilfe des erweiterten Euklidischen Algorithmus den ggT von 648 und 123 sowie Zahlen $u, v \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{ggT}(648, 123) = 648u + 123v$.

(b) Bestimmen Sie die Lösungen der Gleichung $10x + 15y = 75$ in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ bzw. in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

4.8 (a) Rechnen Sie folgende Zahlen ins Dual- und ins Hexadezimalsystem um:

$$22 \qquad 64 \qquad 8.7$$

(b) Rechnen Sie folgende Zahlen ins Dezimalsystem um:

$$(101010)_2 \qquad (11.101)_2 \qquad (A21)_{16}$$

(c) Stellen Sie die Zahl 538 in der Basis 7 dar.

4.9 Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, die jeweils die folgende Ungleichung erfüllen:

(a) $|x - 3| \geq 2x + 5$,

(b) $\frac{x^2 - 2x - 3}{x - 1} \leq x + 4$,

(c) $\frac{|4x - 3|}{x + 7} \geq 4$,

(d) $|\frac{2x-2}{x-5}| \leq \frac{2}{3}$,

(e) $\frac{x^2-7}{x-3} < |x+3|$.

4.10 Lösen Sie die folgenden Ungleichungen:

(a) $|5x-3| \geq 3x+4$,

(b) $|2x+3| < x+4$,

(c) $\frac{x^2-2x-3}{x-1} < x+4$,

(d) $\frac{3x^2-7x+1}{3x+1} \leq x-2$.

4.11 Bestimmen Sie, falls existent, Supremum und Infimum von $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q} \cap \,]0,1]$, $\{x \mid x^2 < 2\}$. Sind Supremum und Infimum Elemente der Menge?

4.12 Zur Härtemessung wird eine Stahlkugel mit Durchmesser 10 mm auf eine Platte gedrückt. In der Platte entsteht eine kreisförmige Einbuchtung mit einem Durchmesser von 8 mm. Wie groß ist die Oberfläche dieser Einbuchtung?

4.13 Zwei Ohmsche Widerstände werden parallel geschaltet $(1/R_p = 1/R_1 + 1/R_2)$ bzw. hintereinander geschaltet $(R_h = R_1 + R_2)$. Zeigen Sie $R_h \geq 4R_p$.

4.14 Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler t von $x = 8436$ und $y = 20397$ sowie ganze Zahlen u und v, für die $t = ux + vy$ gilt.

4.15 Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler t von $x = 633$ und $y = 120$ sowie ganze Zahlen u und v, für die $t = ux + vy$ gilt.

4.16 (a) Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Gleichungen in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ bzw. in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$:

i. $20x + 52y = 64$,

ii. $27x + 18y = 52$.

Stellen Sie die Lösung grafisch dar.

(b) Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Gleichungen in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ bzw. in $\mathbb{Z}^- \times \mathbb{N}$:

i. $24x + 14y = 54$,

ii. $24x + 18y = 52$.

Stellen Sie die Lösung grafisch dar.

4.17 (a) Stellen Sie die folgenden Zahlen im Dualsystem und im Hexadezimalsystem dar: 21, 37, 64, 85, 8.7, 20.3.

(b) Stellen Sie die folgenden Zahlen im Dezimalsystem dar: $(101010)_2$, $(10000.01)_2$, $(111)_2$, $(111)_{16}$, $(CAD)_{16}$.

(c) Wandeln Sie die Hexadezimalzahl $AFFE$ in eine Zahl zur Basis 7 um.

4.18 Berechnen Sie folgende Ausdrücke und geben Sie diese in der Form $a + bi$ an. Berechnen Sie weiters den Betrag und das Argument aller Ergebnisse und veranschaulichen Sie die Ergebnisse in der komplexen Zahlenebene.

(a) $(2 - 3i)^2$,

(b) $(1 + 2i)^3$,

(c) $\dfrac{4 - 3i}{2 + 5i}$.

(d) $\dfrac{3 + 2i}{(1 + i)^2}$,

(e) $\dfrac{(4 - 8i)^2}{2 + 2i}$

4.19 Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{C}$, die die jeweilige Gleichung erfüllen:

(a) $x^2 - 4x + 29 = 0$,

(b) $\dfrac{x^2 - 2x + 13}{x - 1 + 2i\sqrt{3}} = 0$,

(c) $\left(\dfrac{1 + x}{1 - x}\right)^2 = -1$.

Teil II

Lineare Algebra - Teil 1

Kapitel 5

Vektoren und Vektorräume

5.1 Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = (10, 22, 32)$ und $\vec{b} = (14, 3.5, -7.9)$.

(a) Berechnen Sie $3.5\vec{a} - 7.2\vec{b}$, $-2.9\vec{a} + 4\vec{b}$ und $\vec{a}_0$.

(b) Programmieren Sie am Computer eine Funktion `Betrag(a)`, welche die Länge $\|\vec{a}\|$ eines Vektors $\vec{a}$ berechnet.

5.2 Gegeben sei ein Punkt $P = (p_x, p_y, p_z)$. Bestimmen Sie

(a) den kleinsten Abstand des Punktes von der z-Achse,

(b) den kleinsten Abstand des Punktes von der (x, y)-Ebene,

(c) den Abstand des Punktes vom Ursprung.

5.3 Gegeben sei ein Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$.

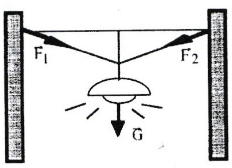
(a) Bestimmen Sie seine Koordinaten so, dass er senkrecht auf die (y, z)-Ebene steht und die Länge 2 hat.

(b) Bestimmen Sie seine Koordinaten so, dass er in der (y, z)-Ebene liegt, mit der positiven z-Achse einen Winkel von $60°$ einschließt und ein Einheitsvektor ist.

5.4 (a) Gegeben seien vier Punkte A, B, C, D im Raum. Zeigen Sie, dass die Mittelpunkte der Verbindungsstrecken $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ ein Parallelogramm bilden.

(b) Unter welchen Bedingungen entsteht ein Rechteck bzw. eine Raute?

5.5 Eine Straßenlampe der Masse $m = 2.5$ kg hängt in der Mitte eines Haltedrahtes, der an zwei 15 m voneinander entfernten Masten befestigt ist. Die Lampe hängt d Meter durch. Wie groß sind die Spannkräfte in den Drähten? Wie groß muss der Durchhang der Lampe sein, dass die Beträge der Spannkräfte 100 N nicht übersteigen. (Lösung mit Vektoren)



5.6 Massen von 2, 3, 4 und 5 kg werden in den Punkten $(1,2)$, $(1,4)$, $(3,5)$ und $(2,6)$ angebracht. Wohin soll eine Masse von 1 kg gebracht werden, damit die Konfiguration ihren Schwerpunkt im Ursprung hat?

5.7 Beweisen Sie, dass sich die Schwerlinien eines Dreiecks im Verhältnis 1:2 scheiden und berechnen Sie damit die Formel für den Flächenschwerpunkt des Dreiecks. Welcher Massenschwerpunkt wird durch die selbe Formel beschrieben?

5.8 Die Punkte $A = (1,-2,8), B = (-2,-2,9), C = (1,2,8)$ sind die Fundamente von Stäben, die zum Punkt $D = (0,0,10)$ führen. Dort greift die Kraft

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ -100 \\ -500 \end{pmatrix} kN$$

an. Werden die Fundamente auf Druck oder Zug belastet? Welches Fundament erfährt die größte senkrechte (in z-Richtung) Belastung?

5.9 Ein Massenpunkt mit Gewichtskraft 10 N (wobei die Schwerkraft in Richtung der z-Achse wirkt) liegt auf der Ebene $x+y+2z=4$ im Punkt $P=(2,2,0)$ und wird durch zwei Seile gehalten, die in den Punkten $S_1 = (1,0,2)$ und $S_2 = (0,1,2)$ befestigt sind. Berechnen Sie die Seilkräfte und die Kraft, die auf die Ebene wirkt.

5.10 In den Punkten $A = (2,2,1), B = (-1,2,2)$ und $C = (-1,-2,2)$ sind Seile verankert, die im Ursprung zusammengeführt werden. Dort greift die Kraft $\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ -20 \\ -100 \end{pmatrix}$ kN an.

(a) Berechnen Sie die Kräfte in den Seilen.

(b) Um welchen Faktor darf die Kraft vergrößert werden, ohne dass die Seile reißen, wenn ihre Reißfestigkeit $300kN$ ist?

5.11 Finden Sie alle Vektoren der Länge $\sqrt{2}$, die senkrecht auf den Vektor $(1,0,-2)$ stehen und mit dem Vektor $(1,0,1)$ einen Winkel von 60° einschließen.

5.12 Auf eine durch die drei Punkte $A = (2,2,1), B = (-4,1,5), C = (2,4,-1)$ gegebene Ebene ϵ fällt ein durch den Richtungsvektor $\vec{r} = \overrightarrow{OR}$ mit $R = (-1,1,-3)$ gegebener Lichtstrahl. Gesucht ist die Richtung sowie die Richtungscosinusse des reflektierten Strahls.

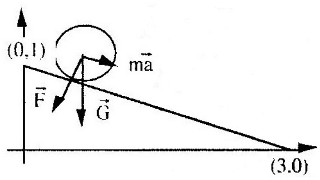
5.13 Eine Ladung q bewegt sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ durch ein elektromagnetisches Feld mit der elektrischen Feldstärke $\vec{E}$ und der magnetischen Flussdichte $\vec{B}$ und erfährt dort die Kraft $\vec{F} = q\vec{E} + q(\vec{v} \times \vec{B})$. Bestimmen Sie für

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ -300 \\ -300 \end{pmatrix} \frac{V}{m}, \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \frac{Vs}{m^2} \quad \text{und} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 100 \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \frac{m}{s}$$

die Geschwindigkeitskomponenten v_y und v_z so, dass die Bewegung kräftefrei erfolgt.

5.14 (a) Mit welcher Kraft $\vec{F}$ drückt eine Walze der Masse $m = 50$ kg auf eine schiefe Ebene? Die Walze hat das Gewicht $|\vec{G}| = mg$ ($g = 9.81$ m/s^2).

(b) Geben Sie den Beschleunigungsvektor $\vec{a}$ an.



5.15 (a) Welche Arbeit W ist erforderlich, um einen Körper K durch die Kraft $\vec{F} = (5,3,7)$ N längs des geradlinigen Weges $\vec{s} = (-8,17,4)$ m zu bewegen?

(b) Ein Wagen von 2500 kg soll auf einer schiefen Ebene von 7° Steigungswinkel 20 m weit hinaufgezogen werden. Die ihn ziehende konstante Motorkraft betrage 4000 N. Wie groß ist die aufgewendete Arbeit?

5.16 Ein Dreieck mit den Eckpunkten $A = (3,0,0)$, $B = (0,3,0)$ und $C = (3,3,3)$ rotiert mit Winkelgeschwindigkeit 10 s^{-1} um eine Achse durch seinen Schwerpunkt, die senkrecht auf die Dreiecksfläche steht. Berechnen Sie den Bahngeschwindigkeitsvektor des Punktes C.

5.17 Ein starrer Körper sei drehbar um eine Achse durch die Punkte $A = (1,3,0)$ m und $B = (7,2,5)$ m gelagert. Im Punkt $P = (5,6,5)$ m greift eine Kraft $\vec{F} = (3,-5,3)$ N an.

(a) Wie groß ist das Moment der Kraft in P bezüglich A?

(b) Wie groß ist das dadurch erzeugte Drehmoment bezüglich der Achse?

(c) Wie groß ist das Moment der Kraft in P bezüglich B?

(d) Wie groß ist das dadurch erzeugte Drehmoment bezüglich der Achse?

5.18 Eine Drehachse verläuft durch die Punkte $A = (1,0,1)$ und $B = (2,-1,0)$. Im Punkt $P = (1,1,1)$ (alle Angaben in m) greift die Kraft

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ z \end{pmatrix} N$$

an und verursacht ein Drehmoment bezüglich der Achse. Bestimmen Sie z so, dieses Drehmoment gleich $\sqrt{27}$ Nm ist.

5.19 Eine Drehachse verläuft durch die Punkte $A = (1,1,0)$ und $B = (2,0,-1)$. Im Punkt $P = (x,1,1)$ (alle Angaben in m) greift die Kraft

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -15 \end{pmatrix} N$$

an und verursacht ein Drehmoment $\vec{M}_{\overrightarrow{AB}}$ bezüglich der Achse $\overrightarrow{AB}$. Bestimmen Sie x so, dass der Betrag dieses Drehmoments gleich $4\sqrt{3}Nm$ ist.

5.20 Ein von einem Strom $i = 6$ A durchflossener Stab AB mit $A = (1, 0, 1)$ m und $B = (0, 2, 3)$ m befindet sich in einem Magnetfeld mit Induktion

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{Vsm}^{-2}$$

und ist um die Achse PQ mit $P = (1, 1, 1)$ und $Q = (-1, 0, -1)$ drehbar gelagert. Berechnen Sie das entstehende Drehmoment bezüglich dieser Achse.

5.21 Ein Teilchen der Ladung q, das sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ in einem magnetischen Feld, beschrieben durch die magnetische Induktion $\vec{b}$, bewegt, wird durch die Lorentz-Kraft $\vec{F} = q\left(\vec{v} \times \vec{b}\right)$ abgelenkt. In einem konstanten Magnetfeld $\vec{b} = (a, b, c)$ ergab sich für $\vec{v} = (1, 1, 0)$ die Kraft $\vec{F} = q(1, \alpha, 2)$ und für $\vec{v} = (0, 1, 1)$ die Kraft $\vec{F} = q(\beta, \gamma, 2)$. Berechnen Sie die Werte α, β, γ. Ein Neutron fliegt durch die dasselbe Magnetfeld mit der Geschwindigkeit $\vec{v} = (1, 1, 1)$. Welchen Winkel schließen $\vec{v}$ und $\vec{b}$ miteinander ein? Welche Kraft wirkt auf das Neutron?

5.22 Ein Roboter besteht aus einer Säule, die entlang der x-Achse verschiebbar und um dieselbe Achse drehbar gelagert ist. An dieser Säule ist im rechten Winkel ein Greifarm befestigt, dessen Länge teleskopartig veränderbar ist. Das Ende des Greifarms befindet sich nun im Punkt $P = (1, 1, 1)$ m und hat die Geschwindigkeit $(-0.1, 0.2, 0.05)$ m/s.

(a) Mit welcher Geschwindigkeit v_x bewegt sich die Säule entlang der x-Achse?

(b) Mit welcher Geschwindigkeit v_a wird der Greifarm eingezogen bzw. ausgefahren?

(c) Mit welcher Winkelgeschwindigkeit ω rotiert die Säule um die Achse?

5.23 Ein Dreieck mit den Eckpunkten $(2, 1, 2)$ cm, $(5, 7, 4)$ cm und $(8, 0, 1)$ cm wird von einer Flüssigkeit mit konstanter Geschwindigkeit $(-1, -1, 8)$ cm/s durchströmt. Welches Volumen fließt in 7 s durch das Dreieck?

5.24 Die dreiseitige Pyramide, die von den vier Ebenen $x = 0, y = 0, z = 0$ und $x + y + z = 1$ begrenzt wird, soll parallel zur letzteren Ebene in n Scheiben von gleichem Volumen zerschnitten werden. Wo sind die Schnitte zu setzen?

5.25 (a) Wenden Sie die Graßmann-Identität auf jeden der Summanden der Jacobi-Identität an und weisen Sie auf diesem Wege die Gültigkeit der Jacobi-Identität

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{0}$$

nach.

(b) Berechnen Sie die einzelnen Summanden der Jacobi-Identität für

i. $\vec{e_i}, i = 1, 2, 3,$

ii. $\vec{a} = (1, 0, 0)^t$, $\vec{b} = (1, 1, 0)^t$, $\vec{c} = (1, 1, 1)^t$.

(c) Die zyklische Vertauschbarkeit des Spatprodukts besagt, dass für alle Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ gilt, dass

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{v} \cdot (\vec{w} \times \vec{u}).$$

Nutzen Sie diesen Zusammenhang aus, um unter Zuhilfenahme der Graßmann-Identität die Lagrange-Identität zu beweisen:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \cdot (\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d}) \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c}).$$

Hinweis: Setzen Sie $\vec{u} = \vec{a} \times \vec{b}$.

Kapitel 6

Analytische Geometrie

6.1 Berechnen Sie mittels orthogonaler Projektion den kürzesten Abstand des Punktes $P = (2, 1, 3)$ von der Ebene $2x - 3y + z - 6 = 0$ und die Koordinaten des Fußpunktes.

6.2 Berechnen Sie unter Verwendung von orthogonaler Projektion das Spiegelbild des Punktes $P = (7, 0, 1)$ bezüglich der Ebene $3x - y + 2z = -5$, sowie den Abstand von P zu seinem Spiegelbild.

6.3 (a) Berechnen Sie eine Parameterdarstellung der Schnittgeraden der Ebene $3x - 2y + z = 0$ und $4x + 5y - 2z - 3 = 0$.

(b) Bestimmen Sie den kürzesten Abstand des Punktes $P = (1, 2, -1)$ von dieser Schnittgeraden.

(c) Bestimmen Sie den kürzesten Abstand der Geraden $(x, y, z) = (2, -1, 1) + t(1, 0, -2)$ von obiger Schnittgeraden und beide Fußpunkte.

6.4 Gegeben seien die Punkte $P = (1, 0, -2)$, $Q = (3, 2, 4)$, $R = (7, 2, 0)$ und $S = (0, 7, 0)$.

(a) Bestimmen Sie die Gleichung der Ebene $\mathcal{E}$, die durch die Punkte Q, R und S geht.

(b) Bestimmen Sie die Gerade g, die senkrecht auf $\mathcal{E}$ steht und durch P verläuft.

(c) In welchem Punkt X schneiden einander g und $\mathcal{E}$?

(d) Welchen Abstand hat die Gerade g_{QR} von der Geraden g_{PS}?

6.5 Gegeben seien die Punkte $P = (1, 0, 1)$, $Q = (1, 2, 1)$, $R = (2, 1, 0)$ und $S = (0, 2, 0)$.

(a) Bestimmen Sie die Gleichung der Ebene $\mathcal{E}$, die durch die Punkte Q, R und S geht.

(b) Bestimmen Sie die Gerade g, die senkrecht auf $\mathcal{E}$ steht und durch P verläuft.

(c) In welchem Punkt X schneiden einander g und $\mathcal{E}$?

(d) Welchen Abstand hat die Gerade g_{QR} von der Geraden g_{PS}?

6.6 Durch $x + 2y + 2z = 12$ ist eine Ebene gegeben. Ein Lichtstrahl, der entlang der Geraden

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix}$$

auf die Ebene zuläuft, wird an der Ebene reflektiert. In welchem Punkt trifft der Lichtstrahl auf die Ebene und unter welchem Winkel (zwischen Lichtstrahl und Normalvektor der Ebene) fällt er ein? Auf welcher Geraden verläuft der reflektierte Strahl?

6.7 Durch $2x - y + 2z = 32$ ist eine Ebene gegeben. Ein Lichtstrahl, der entlang der Geraden

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

auf die Ebene zuläuft, wird an der Ebene reflektiert. In welchem Punkt trifft der Lichtstrahl auf die Ebene und unter welchem Winkel (zwischen Lichtstrahl und Normalvektor der Ebene) fällt er ein? Auf welcher Geraden verläuft der reflektierte Strahl?

6.8 Im Ursprung wird an einer Spiegelebene $\mathcal{E} : x - y + z = 0$ ein Lichtstrahl reflektiert, der vom Punkt $P = (-1, 2, 0)$ ausgeht. Im Punkt P befindet sich außerdem ein zweiter Spiegel, der so eingestellt wird, dass der reflektierte Strahl senkrecht darauf einfällt.

(a) In welcher Ebene liegt dieser zweite Spiegel?

(b) In welchem Punkt fällt der reflektierte Lichtstrahl auf den zweiten Spiegel?

Kapitel 7

Lineare Gleichungssysteme und Matrizen

7.1 Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden linearen Gleichungssysteme:

(a)
$$x - 2y = 1,\ 2x + y - z = 2.$$

(b)
$$3x + y - 3z = 2,\ x + 2y + z = 1,\ 2x - y - 3z = 1.$$

7.2 Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden linearen Gleichungssysteme:

a) $2x + y - 1 = z,\ x + 2z = y - 1,\ 3x + z = 0,\ x + 2y = 3z + 2$

b) $4x - 6z = 2y + 2,\ x - 2y + z + 2 = 0,\ 2x = y + z - 1,\ x - y + z = 0.$

7.3 (a) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Geben Sie $a \in \mathbb{R}$ so an, dass das folgende Gleichungssystem lösbar ist und berechnen Sie alle Lösungen:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -1 \end{pmatrix} \vec{y} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -1 \\ a \end{pmatrix}.$$

7.4 Berechnen Sie:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

7.5 Bestimmen Sie mit Hilfe elementarer Zeilen- bzw. Spaltenumformungen den Rang r der jeweiligen Matrizen. Sind die Matrizen singulär oder regulär?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \text{ bzw. } B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 16 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

7.6 Jedem Körper kann bezüglich eines mit ihm fest verbundenen kartesischen Koordinatensystems eine dreireihige symmetrische Matrix A als Trägheitstensor zugeordnet werden. Ist e nun der Einheitsvektor einer durch den Ursprung des Systems laufenden Achse, so ist das Trägheitsmoment bezüglich dieser Achse gleich $J = e^t Ae$. Für einen homogenen Doppelkreiskegel von Radius r, der Höhe $2h$ und der Masse m, dessen Symmetrieachse die z-Achse ist, ist A durch

$$A = \frac{3m}{20} \begin{pmatrix} r^2 + 4h^2 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 + 4h^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2r^2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Zeigen Sie, dass das Trägheitsmoment bzgl. jeder Mantellinie des Doppelkegels gleich ist.

7.7 Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & -4 \\ 3 & 6 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

(a) Transformieren Sie die Matrix A mittels Elementarumformungen in eine obere Dreiecksmatrix D_o und geben Sie eine Matrix B an, so dass $B \cdot A = D_o$

(b) Transformieren Sie die Matrix A mittels Elementarumformungen in eine untere Dreiecksmatrix D_u und geben Sie eine Matrix C an, so dass $A \cdot C = D_u$

7.8 Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Bestimmen Sie Matrizen $L, R \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ so, dass $A = L \cdot R$ gilt, L eine untere Dreiecksmatrix ist, welche in der Diagonale ausschließlich die Zahl 1 enthält, und R eine obere Dreiecksmatrix ist.

7.9 Gegeben ist das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & 2 \\ 3 & \alpha & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ \beta \end{pmatrix}.$$

(a) Für welche Werte von α und β besitzt das System (i) keine, (ii) eine, (iii) unendlich viele Lösungen? Geben Sie die entsprechenden Lösungsmengen an.

(b) Bestimmen Sie weiters die Lösungsmenge des zugehörigen homogenen linearen Gleichungssystems für $\alpha = -3$.

7.10 Im skizzierten Quadrat sind in die 8 Kästchen mit $*$ ganze Zahlen so einzusetzen, dass die drei Zeilensummen, die drei Spaltensummen und die Diagonalsummen den Wert 15 haben.

$*$	9	$*$
$*$	$*$	$*$
$*$	$*$	$*$

Stellen Sie das zugehörige Gleichungssystem auf und lösen Sie es.

7.11 Eine Messung der Stromstärke I (mA) in Abhängigkeit der Zeit t (s) ergab folgende Tabelle

t	0	1	2	3	4	5
I	0	6	4	3	4	10

Berechnen Sie das Polynom 5. Grades, also $p(t) = a + bt + ct^2 + dt^3 + et^4 + ft^5$, das diese Werte interpoliert, also $p(1) = 6$, ... Stellen Sie das zugehörige lineare Gleichungssystem auf und lösen Sie dieses.

7.12 Bestimmen Sie die Determinate der Matrix A und, falls möglich, die Inverse der Matrix A mithilfe des Gauß-Jordan-Verfahrens.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

7.13 Berechnen Sie die Determinanten der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \\ -4 & 0 & -3 \end{pmatrix} \text{ bzw. } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

7.14 Berechnen Sie die Determinante folgender Matrizen mittels Laplace-Entwicklung:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} a & b & 0 & a+b \\ a & a-b & 0 & 2b \\ 2a & 2b & 0 & b \\ a-b & 0 & b & a+b \end{pmatrix},$$

worin $a, b \in \mathbb{R}$.

7.15 Zeigen Sie, dass durch

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x & y & z, \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} = 0$$

die Gleichung der Ebene durch 3 Punkte $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3)$ bestimmt ist.

7.16 Beweisen Sie für 2 Spaltenvektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$: $\det\left(E + \vec{a}\,\vec{b}^\top\right) = 1 + \vec{a}^\top \vec{b}$

7.17 Benutzen Sie die Cramersche Regel zur Lösung des folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 - x_4 &= 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 4x_3 + x_4 &= -1 \end{aligned}$$

7.18 Lösen Sie mit der Cramerschen Regel $A\vec{x} = \vec{b}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ -4 & -4 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

7.19 Beweisen Sie

a) $$\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & a_1 & \dots & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_2 & \dots & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \end{vmatrix} = a_1(a_2 - a_1)(a_3 - a_2)\dots(a_n - a_{n-1})$$

b) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2^2 & 3^2 & \dots & n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2^{n-1} & 3^{n-1} & \dots & n^{n-1} \end{vmatrix} = 1!2!3!\dots(n-1)!$$

Hinweis zu b): Siehe Vandermonde-Determinante.

7.20 Beweisen Sie, dass für Determinante

$$f_n = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & a_3 & b_3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \ddots & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c_{n-2} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & c_{n-1} & a_n \end{vmatrix}, \ n \in \mathbb{N},$$

die folgende Rekursionsgleichung

$$f_n = a_n f_{n-1} - c_{n-1} b_{n-1} f_{n-2}$$

erfüllt ist, wobei $f_1 = |a_1| = a_1$, $f_0 = 1$ und $f_{-1} = 0$. Berechnen Sie diese Determinante für $n = 4$.

7.21 Sei $A \in \mathbb{R}^{r\times r}$, und sei $C \in \mathbb{R}^{n-r\times n-r}$. Die Nullmatrix 0 und die Matrix B seien von passender Dimension. Zeigen Sie, dass gilt

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det A \cdot \det C.$$

Hinweis: Stellen Sie die Matrix $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ im Form $\begin{pmatrix} E_r & * \\ * & * \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} * & * \\ * & E_{n-r} \end{pmatrix}$ dar.

Teil III

Reelle Funktionen in einer Variablen

Kapitel 8

Eigenschaften reeller Funktionen und Folgen

8.1 f und g seien monoton steigende Funktionen.

(a) Ist $f \circ g$ monoton steigend?

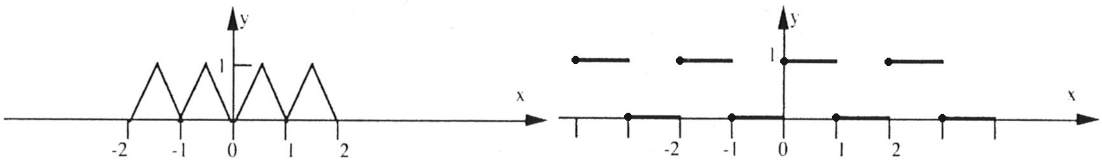
(b) Ist $f \cdot g$ monoton steigend?

8.2 (a) f und g seien beschränkte Funktionen. Ist $f \cdot g$ beschränkt?

(b) f und g seien beschränkte Funktionen, $g(x) \neq 0$ für alle x aus dem Definitionsbereich. Ist f/g beschränkt?

(c) f und g seien beschränkte Funktionen. Ist $f \circ g$ beschränkt?

8.3 (a) Finden Sie Zuordnungsvorschriften für periodische Funktionen g und h mit folgenden Graphen:

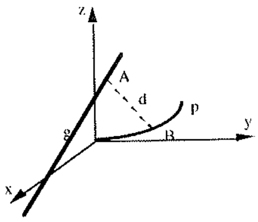


(b) Können die Graphen von g und h so horizontal und vertikal verschoben werden, dass die zugehörigen Funktionen gerade bzw. ungerade werden? Wie müsste h an den Sprungstellen geändert werden? Drücken Sie die Zuordnungsvorschriften der verschobenen Funktionen in der Form $f(x+a)+b$ aus.

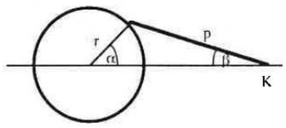
8.4 In der dargestellten räumlichen Zweipunktführung bewegt sich der Punkt A längs der Geraden g und führt den Punkt B um Abstand $d = 12$ längst der Parabel p, wobei

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad p : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10s \\ 5s^2 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie die Koordinaten von B in Abhängigkeit von t an. Für welche t ist die Funktion definiert?



8.5 Der Kreuzkopf K eines Schubkurbelgetriebes bewegt sich zwischen seinen Totpunkten hin und her. Stellen Sie den Ort des Kreuzkopfes aus Funktion des Kurbelwinkels α dar. Für welchen Kurbelwinkel befindet sich der Kreuzkopf genau zwischen den beiden Totpunkten? Für welches p ist bei gegebenem r dieser „mittlere“ Kurbelwinkel gleich 90°?



8.6 Zeigen Sie unter Verwendung des ε-δ-Kriteriums, dass

$$f(x) = \frac{1}{x^3}$$

auf $I = [1, \infty)$ stetig ist.

Hinweis: Zeigen Sie, dass

$$|f(x) - f(x_0)| \leq K \cdot \delta = \varepsilon,$$

wobei K ein konstanter Faktor ist.

8.7 Überprüfen Sie die folgenden Folgen auf Konvergenz und berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert mit $n \to \infty$.

a) $a_n = (-1)^n$ b) $a_n = (-1)^n \dfrac{1}{n}$ c) $a_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} i$

d) $a_n = \dfrac{1}{n^2} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} i$ e) $a_n = \dfrac{n^2}{n^2 + 2n}$ f) $a_n = \dfrac{n}{n!}$

g) $a_n = \displaystyle\sum_{i=n}^{2n} \frac{1}{i!}$ h) $a_n = \dfrac{(2n+2)!3^{n-1}}{(2n)!3^n(n+1)^2}$ i) $a_n = \dfrac{4n^2 + 2}{n^3 - 2n}$.

8.8 Überprüfen Sie die folgenden Folgen auf Konvergenz und berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert mit $n \longrightarrow \infty$.

a) $a_n = \sqrt[n]{n^5 + 3n^2}$ b) $a_n = \dfrac{\sqrt{4n^2 + 5n + 2}}{2n}$ c) $a_n = \sqrt{4n^2 + 5n + 2} - 2n$

d) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})}$ e) $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)^3 - \left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)^3$

Hinweis zu a), e): Vergleichskriterium. Sie dürfen verwenden, dass $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ ist.

8.9 Überprüfen Sie, ob folgende rekursiv definierte Folgen konvergieren und bestimmen Sie den dazugehörigen Grenzwert mit $n \to \infty$.

a) $a_0 = 2, \quad a_{n+1} = \dfrac{1}{a_n}$ b) $a_0 = 1, \quad a_{n+1} = \dfrac{a_n}{n+1}$

c) $a_0 = 1, a_{n+1} = \dfrac{1+a_n^2}{2+a_n}$ d) $a_0 = 1, \quad a_{n+1} = a_n - 1 + e^{-a_n}$

e) $a_0 = 3, \quad a_{n+1} = \dfrac{3+a_n^2}{2a_n}$ f) $a_0 = 1, \quad a_{n+1} = \dfrac{3+a_n^2}{2a_n}$

Hinweis: Verwenden Sie für Teil d) die Tatsache, dass

$$a \leq b \Rightarrow a + e^{-a} \leq b + e^{-b},\ a,\ b \in [0, \infty).$$

8.10 Bei einer gedämpften Pendelschwingung ist jede nachfolgende positive Amplitude um 33% kleiner als die vorhergehende.
Wie groß ist die 6. positive Amplitude A_6, wenn die Anfangsamplitude $A_1 = 280$ beträgt?
Bei der wievielten positiven Amplitude ist der Ausschlag zum ersten Mal geringer als 0.5% der Anfangsamplitude?

8.11 Gammastrahlung kann durch absorptive Materialien abgeschirmt werden. Um die Qualität eines Abschirmmaterials zu bestimmen, wird in einer Versuchsanordnung eine 0,5 cm starke Platte des entsprechenden Materials zur Abschirmung einer Strahlenquelle benutzt und die hinter der Abschirmung auftretende Strahlung gemessen (in % der Anfangsintensität I_0).
Mit Aluminium als Abschirmmaterial misst man hinter einer abschirmenden Platte einen Intensitätsverlust von 0,083 I_0 bei Cäsium als γ-Quelle und 0,074 I_0 bei Kobalt als γ-Quelle. Welche Intensität tritt nach 5 oder 10 Platten auf?
Dasselbe bei Blei (Intensitätsverlust 0,44 I_0 bei Cäsium und 0,3 I_0 bei Kobalt als γ-Quelle).
Wie groß ist die Halbwertsdicke (das ist die Dicke des Materials, die die Hälfte der Strahlung absorbiert, also ein Maßstab für die Abschirmqualität eines Materials) von Aluminium und Blei bei Cäsium- bzw. Kobaltstrahlung?

8.12 Zwei Behälter A und B sind durch eine Membran getrennt. A beinhaltet anfangs N Teilchen, B ist leer. Innerhalb einer Minute wandert das x-fache ($x < \frac{19}{20}$) der in A vorhandenen Teilchen nach B und ein Zwanzigstel der in B vorhandenen Teilchen nach A.
Geben Sie eine Rekursionsformel für die Anzahl der Teilchen in A an.
Bestimmen Sie den Grenzwert.
Was passiert für $x > \frac{19}{20}$ (exemplarisch)?

8.13 Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte von Funktionen (falls existent):

a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\frac{3x}{x-1} - \frac{2x}{x+1} \right)$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x+3} - \frac{2}{3x+5}}{x-1}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2}$ d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x}$ f) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+5x}}{7x}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^3-2x}{(4-3x)^3}$

8.14 Bestimmen Sie alle Asymptoten folgender Funktionen:

a) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ b) $f(x) = \dfrac{x^2+2}{2x-1}$ c) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+1}$ d) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^4-1}}{3x+1}$

8.15 Eine Filterschaltung aus verlustfreien Schaltelementen hat einen Scheinwiderstand

$$Z(\omega) = \frac{\omega L}{1-\omega^2 L C_2} - \frac{1}{\omega C_1}.$$

Sei nun $C_1, C_2, L > 0$. Bestimmen Sie Nullstellen, Pole und Asymptoten. Zeichnen Sie ein qualitativ richtiges Schaubild dieser Funktion für $\omega \geq 0$.

8.16 Bei einem senkrechten Verdichtungsstoß bestehen vor der Stoßfront der Druck p_1 und die Dichte ρ_1, und hinter der Stoßfront der Druck p_2 und die Dichte ρ_2. Zwischen diesen Größen gilt folgende Beziehung:

$$\frac{p_2}{p_1} - \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\kappa-1}{2}\left(1+\frac{p_2}{p_1}\right)\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}-1\right).$$

Stellen Sie das Verhältnis von Druck nach und vor dem Stoß als Funktion des Verhältnisses der Dichte nach und vor dem Stoß dar.
Bestimmen Sie die Unstetigkeitsstellen dieser Funktion (für $\kappa > 1$).
Welche maximale Verdichtung ist für $\kappa = 1{,}4$ (Luft) möglich?

8.17 Geben Sie zu jeder der folgenden Funktionsvorschriften diejenige stetige Funktion an, die die größtmögliche Definitionsmenge besitzt.

a) $f(x) = \sin(\cosh(e^x))$ b) $f(x) = \dfrac{x^2+x-6}{x-2}$ c) $f(x) = \dfrac{x^2+x-5}{x-2}$ d) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$

8.18 Geben Sie zu jeder der folgenden Funktionsvorschriften diejenige stetige Funktion an, die die größtmögliche Definitionsmenge besitzt.

a) $f(x) = \log(1-x^2)$ b) $f(x) = \sqrt{\log(1-x^2)}$ c) $f(x) = \sqrt{2-x-x^2}$ d) $f(x) = \sqrt{x^2+x-2}$

8.19 (a) f sei auf (a,b) definiert, stetig und beschränkt. Muss f auf (a,b) ihr Maximum und Minimum annehmen?

(b) f sein auf (a,b) definiert, stetig und $\lim_{x\to a} f(x) < 0, \lim_{x\to b} f(x) > 0$. Muss f dann in (a,b) mindestens eine Nullstelle besitzen?

(c) Geben Sie eine auf $[0,1)$ definierte stetige Funktion an, die nicht gleichmäßig stetig ist.

8.20 Prüfen Sie, ob folgende Folgen komplexer Zahlen konvergieren, und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

(a) $a_n = (\frac{3+4i}{5})^n$
(b) $b_n = (\frac{3+2i}{5})^n$
(c) $c_n = n - \frac{n^2}{n-i}$

Visualisieren Sie jeweils den Verlauf der komplexen Folgeglieder in der komplexen Zahlenebene für $n = 1, ..., 4$. Betrachten Sie in a) und b) den Betrag der Folgenglieder.

Kapitel 9

Polynome und rationale Funktionen

9.1 Gegeben sei die Polynomfunktion

$$f(x) = 2(x+1)^3(x-2)^2(x+4)(x-3)^4.$$

Skizzieren Sie die Funktion mit Hilfe ihrer Nullstellen (ohne Computerunterstützung).

9.2 (a) Legt man an eine Serienschaltung zweier Widerstände eine Spannung von 220 V an, so misst man eine Stromstärke von 0.9 A. Eine Parallelschaltung dieser beiden Widerstände ergibt eine Stromstärke von 6 A. Berechnen Sie die Widerstände.

(b) Wird in einem Stromkreis mit 110 V Spannung der Widerstand um 10 Ω erhöht, so sinkt die Stromstärke um 1 A. Berechnen Sie Stromstärke und Widerstand.

9.3 Es gilt die Bewegungsgleichung $s(t) = s_0 + v_0 t - \frac{g}{2}t^2$. Für die Geschwindigkeit gilt $v(t) = v_0 - gt$. Eine Rakete startet mit einer Geschwindigkeit von 42 m/s.

(a) Wie weit ist sie nach 1 s geflogen?

(b) Welche maximale Höhe erreicht sie? Wann erreicht die Rakete die maximale Höhe?

(c) Mit welcher Geschwindigkeit und wann trifft die Rakete wieder auf der Erde auf?

(d) Welche Anfangsgeschwindigkeit wäre notwendig gewesen, damit die Rakete in 20 s wieder auf der Erde auftrifft?

(e) Zeigen Sie, dass die Rakete für die Aufwärtsbewegung und für die Abwärtsbewegung unabhängig von der Anfangsgeschwindigkeit gleich lang braucht.

9.4 Ermitteln Sie für die Stützpunkte $(0,1), (1,1), (2,3), (3,2), (4,1), (5,0)$ das Newtonsche Interpolationspolynom und stellen Sie die Datenpunkte sowie das Polynom graphisch dar.

9.5 Gegeben sei die rationale Funktion

$$f(x) = \frac{4(x-1)^2(x+2)}{(x-2)^2(x+3)(x+1)^3}.$$

Bestimmen Sie die Nullstellen und Pole von $f(x)$. Skizzieren Sie die Funktion ohne Computerunterstützung.

9.6 (a) Geben Sie eine rationale Funktion an, die in 1 einen einfachen und in 3 einen zweifachen Pol besitzt, sowie in 0 und 4 jeweils eine einfache und in 2 eine zweifache Nullstelle.

(b) Bestimmen Sie den ganzen Anteil und das Restpolynom dieser Funktion.

(c) Führen Sie für obige rationale Funktion eine Partialbruchzerlegung durch.

9.7 Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler t der Polynome

$$p(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6 \quad \text{und} \quad q(x) = x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x - 6,$$

sowie Polynome u und v, für die $t = u \cdot p + q \cdot v$ gilt.

9.8 Zerlegen Sie die rationale Funktion

$$y(x) = \frac{x^2 + 4x + 10}{(x^2 - 4)(x^2 + 2x + 2)}$$

in Partialbrüche.

9.9 Zerlegen Sie die rationale Funktion

$$y(x) = \frac{x^2 + 4x + 10}{-x^3 + 3x - 2}$$

in Partialbrüche.

9.10 Von einer gebrochenrationalen Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ ist bekannt, dass sie

- die Nullstellen $x_1 = 2$ und $x_2 = -1$ besitzt,
- in $x_3 = 1$ einen zweifachen Pol und in $x_4 = 4$ einen einfachen Pol hat,
- die y-Achse bei 3 schneidet.

Lösen Sie folgende Aufgabenstellungen:

(a) Bestimmen Sie den größtmöglichen Definitionsbereich D von f.

(b) Geben Sie f in der Form $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ an.

(c) Führen Sie eine Partialbruchzerlegung durch.

(d) Bestimmen Sie die Grenzwerte von f gegen die Ränder des Definitionsbereichs.

9.11 Gegeben ist die rationale Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ als

$$f(x) = \frac{x^4 + x^3 + 3x + 3}{2 + x + 2x^2 + x^3}$$

(a) Bestimmen Sie die Nullstellen des Nennerpolynoms und damit den größtmöglichen Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$.

(b) Bestimmen Sie den ganzen Anteil h von f mittels Polynomdivision und geben Sie f als $h + \frac{r}{q}$ an.

(c) Führen Sie eine Partialbruchzerlegung für $\frac{r}{q}$ durch.

9.12 Von der Gleichung

$$z^4 - 4z^3 - 2z^2 + 12z = 16$$

kennt man die Lösung $z_1 = 1 + i$. Bestimmen Sie alle weiteren Lösungen.

9.13 Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler der Polynome $p(x) = x^5 + 2x^4 + x^2 + x - 2$ und $q(x) = x^4 + 2x^3$.

Kapitel 10

Exponential-, Logarithmus- und Hyperbelfunktionen

10.1 Lösen Sie die folgenden Gleichungen und überprüfen Sie mit dem Computer:

(a) $(x^{\ln x})^3 = \dfrac{x^7}{e^2}$

(b) $\ln^2(x) - \ln(x^3) + 2 = 0$

(c) $\ln(5x + 12) + \ln(5x - 12) = \ln(81)$

10.2 Lösen Sie die folgenden Gleichungen und überprüfen Sie mit dem Computer:

(a) $4 \cdot 3^{x+5} - 3 \cdot 2^{3x-2} = 3^{x+1} + 5 \cdot 2^{3x+1}$

(b) $2^{4x-1} \cdot 3^{2x+2} = 4^{x+1}$

10.3 In Meereshöhe betrage der Luftdruck $p_0 = 1013,25$ hPa (Hektopascal). In unmittelbarer Nähe der Erdoberfläche nimmt der Luftdruck bei einem Höhenanstieg von 8m um ein hPa ab.

(a) Welchen Wert hätte demnach der Druck in einer Höhe von 10m, 100m, 1000m?

(b) In welcher Höhe wäre bei dieser Annahme der Luftdruck gleich Null?

(c) Betrachtet man die Erdatmosphäre als eine kompressible Flüssigkeit konstanter Temperatur, dann gilt in besserer Näherung die sog. barometrische Höhenformel

$$p(h) = p_0 e^{-\alpha h}$$

Hier ist p_0 der Druck an der Erdoberfläche, h die Höhe in m und $\alpha = 1,25 \cdot 10^{-4}\text{m}^{-1}$ eine Konstante.
Welchen Wert hat jetzt der Druck in einer Höhe von 10m, 100m, 1000m?

10.4 Ein Organismus, dessen Masse m dem idealen Wachstumsgesetz $m(t) = m_0 e^{\lambda t}$ (t in h und $m(t)$ in g) erfolgt, hat zur Zeit $t_1 = 2$ h die Masse $m(t_1) = 715{,}3$ g und zur Zeit $t_2 = 7$ h die Masse $m(t_2) = 791{,}2$ g. Berechnen Sie m_0 und λ.

10.5 Um Farben zu analysieren wird ihre Intensität I mit einer Referenzintensität I' verglichen. Der Skalenwert S ergibt sich aus $S = k\log(I/I'), k \geq 0$.

(a) Zeigen Sie, dass die Skala 0 anzeigt, wenn $I = I'$ ist.

(b) Welches Vorzeichen hat S, wenn $I = 2I'$ bzw. $I = \frac{I'}{2}$ ist?

(c) Will man nun die Intensität I einer Farbe messen, so muss die verwendete Referenzintensität bei den meisten fotografischen Anwendungen im Bereich $\frac{I}{8} \leq I' \leq 8I$ liegen. In welchem Bereich schwanken dann die Werte der Skala?

10.6 Zur Altersdatierung von historischen Funden wird die Radiokarbonmethode verwendet. Sie beruht darauf, dass in der Atmosphäre und damit im Körper aller Lebewesen das radioaktive Kohlenstoffisotop C^{14} in gewisser Konzentration vorliegt. Stirbt nun der Organismus, so sinkt der C^{14}-Gehalt exponentiell. Die Halbwertszeit von C^{14} beträgt 5700 Jahre. Bei Ausgrabungen in Ägypten wurde ein Menschenknochen gefunden, dessen C^{14}-Gehalt 67 % des Anteils in der Atmosphäre beträgt. Wie alt ist er?

10.7 Zeigen Sie:

(a) $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

(b) $\sinh(x+y) = \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y)$

(c) $\operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ für $x \in (-1, 1)$

10.8 Zeigen Sie:

(a) $\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)$

(b) $\tanh(2x) = \dfrac{2\tanh(x)}{1+\tanh^2(x)}$

(c) $\sinh^2(x) = \dfrac{1}{2}(\cosh(2x) - 1)$

Kapitel 11

Trigonometrische Funktionen und Schwingungen

11.1 Bestimmen Sie die Lösungen $x \in [0, 2\pi]$ der Gleichung

$$\sin x \cos(2x) + \cos x \sin(2x) - 2 \sin x \cos x = 0.$$

11.2 Ein Beobachter sieht die Spitze eines auf horizontaler Ebene stehenden Turmes in der Entfernung $b = 45$ m unter einem doppelt so hohen Höhenwinkel wie in einer Entfernung $a = 120$ m. Berechnen Sie die Höhe des Turmes, wenn sich die Augen des Beobachters 1,5 m über dem Boden befinden.

11.3 Der Wirkungsgrad η bei Schrauben für die Umsetzung von Drehmoment in Längskraft genügt der Beziehung

$$\eta = \frac{\tan \alpha}{\tan(\alpha + \rho)}.$$

Drücken Sie $\tan \alpha$ in Abhängigkeit von η und ρ aus. Wie groß muss der Steigungswinkel α gewählt werden, damit man für einen Reibungskoeffizienten $\mu = \tan \rho =$0,1 den Wirkungsgrad $\eta =$0,8 erreicht?

11.4 Unter welchem Winkel φ muss eine Leiter der Länge $L = 6$ m an eine Wand gelehnt werden, dass sie im Punkt C, der von Wand und Fußboden je 1,1 m entfernt ist, fixiert werden kann?

11.5 Zeigen Sie:

(a) $\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha)\tan(\beta)}$

(b) $\sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)\right)$

(c) $\sin^2(\alpha) = \dfrac{1}{2}(1 - \cos(2\alpha))$

11.6 Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung

$$(z + i)^2 = 2e^{-\frac{\pi}{2}i}.$$

11.7 Gegeben ist die komplexe Zahl
$$z = \frac{4}{1+i}.$$

(a) Geben Sie z in arithmetischer Form $a + bi$ und in Exponentialform $r \cdot e^{i\varphi}$ an.

(b) Bestimmen Sie z^3.

(c) Bestimmen Sie alle dritten Wurzeln von z und geben Sie diese in Exponentialform $r \cdot e^{i\varphi}$ an.

11.8 Bestimmen Sie Betrag und Argument von

$$(e^{-\frac{i\pi}{4}})^{10}, (1+\sqrt{3}i)^3, \sqrt[3]{8e^{\frac{3i\pi}{4}}}, \sqrt[3]{-27i}$$

veranschaulichen Sie die Ergebnisse in der komplexen Zahlenebene.

11.9 Veranschaulichen Sie

$$2e^{i\frac{\pi}{4}},\ -3i,\ i,\ \frac{i}{2},\ 3e^{i\pi},\ e^{-\pi},\ 4e^{-\frac{i\pi}{2}},\ -e^{i\frac{\pi}{3}}$$

in der komplexen Zahlebene und bestimmen Sie jeweils Realteil, Imaginärteil, Argument und Absolutbetrag. Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse mit dem Computer.

11.10 Bestimmen Sie Betrag und Argument von

$$(e^{-i\frac{\pi}{4}})^{10},\ (1+i)^{10},\ (-1-i)^{10},$$

veranschaulichen Sie die Ergebnisse in der komplexen Zahlenebene und überprüfen Sie Ihre Ergebnisse mit dem Computer.

11.11 (a) Bestimmen Sie Betrag und Argument aller dritten Wurzeln von $8e^{i\frac{3\pi}{4}}$, $-27i$, veranschaulichen Sie die Ergebnisse in der komplexen Zahlenebene und überprüfen Sie Ihre Ergebnisse mit dem Computer.

(b) Finden Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung $z^4 = -1$, veranschaulichen Sie die Ergebnisse in der komplexen Zahlenebene und überprüfen Sie Ihre Rechnung mit dem Computer.

(c) Bestimmen Sie alle zweiten Wurzeln von $(-1+i)^2$ und $(-1-i)^3$, veranschaulichen Sie die Ergebnisse in der komplexen Zahlenebene und überprüfen Sie Ihre Ergebnisse mit dem Computer.

11.12 (a) Durch drei parallele Strombahnen fließen gleichfrequente Wechselströme:

$$i_1(t) = 2\sin(\omega t), i_2(t) = 3\sin(\omega t + 90°), i_3(t) = \sin(\omega t - 60°).$$

Sie vereinigen sich zu einem Strom i. Stellen Sie diesen als harmonische Schwingung dar.

(b) Durch $y_1(t) = 5\cos(\omega t)$ cm und $y_2(t) = 4\sin(\omega t)$ cm mit $\omega = 10\pi\mathrm{s}^{-1}$ sind gleichfrequente Schwingungen gegeben. Zu welchen Zeiten tritt in der Überlagerungsschwingung die Auslenkung 3 cm auf?

(c) Wann nimmt die Schwingung $y(t) = 6\sin(\omega t) + 4\cos(\omega t + 0{,}7) - 5\cos(\omega t)$ mit $\omega = 50\text{s}^{-1}$ ihre größten positiven Werte an?

11.13 Geben Sie jeweils die Überlagerung folgender gleichfrequenten Schwingungen in der Gestalt $A\cos(\omega t + \alpha)$ an:

(a) $2\sin(3t) + 5\cos\left(3t + \frac{\pi}{2}\right)$

(b) $3\sin\left(2t + \frac{\pi}{4}\right) - 4\cos\left(2t + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(2t - \frac{\pi}{4}\right)$

(c) $3\sin(-2t) - 4\cos\left(2t + \frac{\pi}{2}\right) + \cos(-2t + \pi)$

Zu welchen Zeitpunkten $t \in [0, \pi]$ nimmt die jeweilige Schwingung ihren Maximal- zw. Minimalwert an? Kontrollieren Sie Ihre Ergebnisse, indem Sie die Schwingungen computerunterstützt zeichnen.

11.14 Geben Sie die Überlagerung der gleichfrequenten Schwingungen

$$3\sin\left(2t + \frac{\pi}{4}\right) - 4\cos\left(2t + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(2t - \frac{\pi}{4}\right)$$

in der Gestalt $A\cos(\omega t + \alpha)$ an. Zu welchen Zeitpunkten $t \in [0, \pi]$ nimmt diese Schwingung ihren Maximal- bzw. Minimalwert an?

11.15 Gegeben seien ein Ohmscher Widerstand R, ein induktiver Widerstand L und ein kapazitiver Widerstand C. Berechnen Sie den komplexen Gesamtwiderstand $\underline{Z}$ für alle möglichen Kombinationen von Parallel- und Serienschaltungen dieser drei Bauteile.

11.16 Zeigen Sie:

(a) Eine Serienschaltung von mehreren Ohmschen Widerständen und mehreren induktiven Widerständen kann durch eine Serienschaltung aus einem Ohmschen Widerstand und einem induktiven Widerstand ersetzt werden.

(b) Eine Parallelschaltung von mehreren kapazitiven Widerständen kann durch einen kapazitive Widerstand ersetzt werden.

11.17 An einen

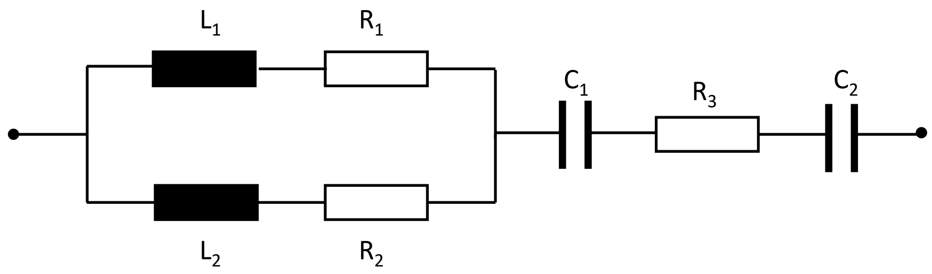
(a) Ohmschen Widerstand $\underline{Z} = R$,

(b) induktiven Widerstand $\underline{Z} = i\omega L$, und

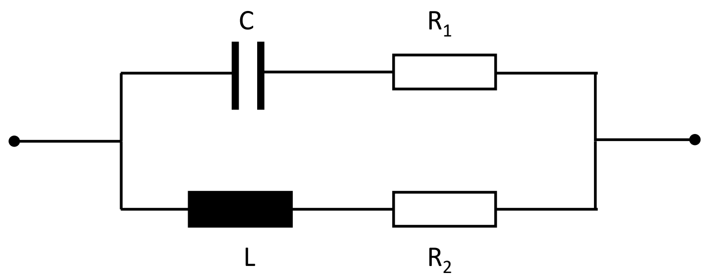
(c) kapazitiven Widerstand $\underline{Z} = \dfrac{1}{i\omega L}$

wird die Spannung $\underline{U} = U(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ angelegt. Berechnen Sie die reelle Amplitude I des Stromes und die Phasenverschiebung φ zwischen Spannung und Strom.

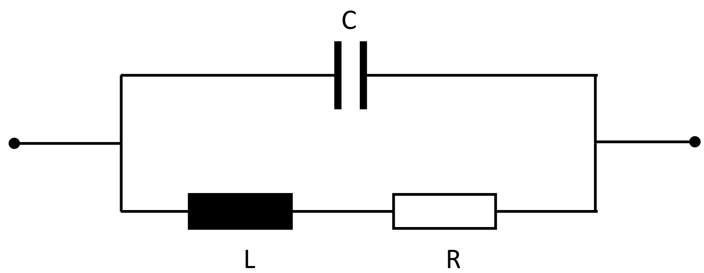
11.18 Berechnen Sie alle auftretenden Ströme und Spannungen für folgenden Schaltung mit $L_1 = 750$ mH, $L_2 = 380$ mH, $C_1 = C_2 = 14.3\ \mu$F, $R_1 = 47\ \Omega$, $R_2 = 19\ \Omega$, $R_3 = 100\ \Omega$. Die Klemmenspannung beträgt $\hat{U} = 220$ V mit $f = 50$ Hz.



11.19 Berechnen Sie für die unten abgebildete Schaltung den Spannungsabfall an der Spule L als Funktion von ω und zeichnen Sie Absolutbetrag und Argument dieser Funktion mit dem Computer. Wählen Sie $L = 10$ mH, $C = 100\ \mu$F, $R_1 = 50\ \Omega$ und $R_2 = 10\ \Omega$, und $\underline{\hat{U}} = 100$ V.



11.20 Durch die unten abgebildete Schaltung mit den Daten $C = 10\ \mu$F, $L = 10$ mH und $R = 10\ \Omega$ fließt ein Strom von 410 A mit $\omega = 2\pi f = 1000\ \mathrm{s}^{-1}$.

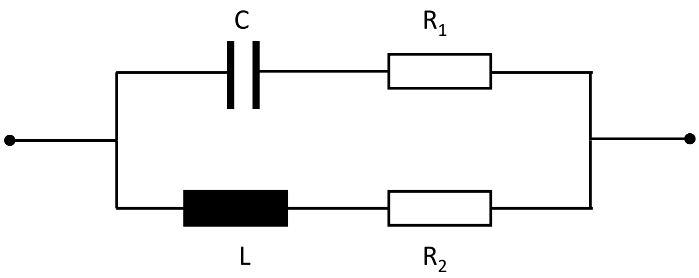


(a) Bestimmen Sie den komplexen Gesamtwiderstand der Schaltung, sowie die komplexe Amplitude der Spannung am Kondensator.

(b) Welcher Strom fließt durch den Kondensator?

(c) Welche Frequenz hat einen Strom der Gestalt $i(t) = 500 \cos(2 + 300t)$?

11.21 An die unten abgebildete Schaltung mit den Daten $C = 100\ \mu$F, $L = 100$ mH, $R_2 = 10\ \Omega$ und unbekanntem R_1 wird eine Spannung von $u(t) = 200 \cos(100t)$ angelegt.



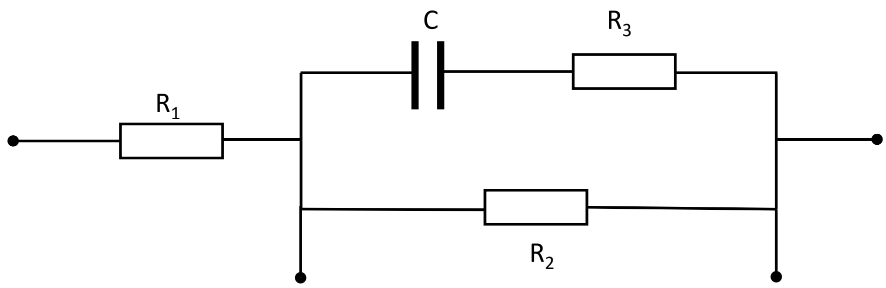
(a) Berechnen Sie das Verhältnis der komplexen Widerstände $\underline{Z}_1 : \underline{Z}_2$, wobei $\underline{Z}_1$ der Widerstand im oberen Zweig der Schaltung und $\underline{Z}_2$ der im unteren Zweig ist.

(b) Bestimmen Sie R_1 so, dass dieses Verhältnis der Widerstände rein imaginär ist.

(c) Gegeben Sie in diesem Fall das Verhältnis $\hat{\underline{I}}_1 : \hat{\underline{I}}_2$ der komplexen Amplituden der Ströme an, wobei $\hat{\underline{I}}_1$ durch den Kondensator und $\hat{\underline{I}}_2$ durch die Spule fließt.

(d) Welche Phasenverschiebung tritt zwischen den reellen Strömen $i_1(t)$ und $i_2(t)$ auf und in welchem Verhältnis stehen die reellen Amplituden?

11.22 An die abgebildete elektrische Schaltung wird eine Eingangsspannung angelegt, die am Widerstand R_2 eine Ausgangsspannung erzeugt.



(a) Geben Sie eine allgemeine Formel an, mit der die komplexe Amplitude der Ausgangsspannung aus der komplexen Amplitude der Eingangsspannung berechnet wird.

(b) Wie lautet die Übertragungsfunktion dieses Vierpols?

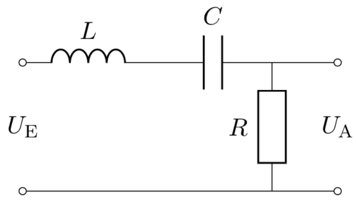
(c) Wählen Sie $R_3 = 0$ und $C = 20\ \mu$F. Wie sind die beiden anderen Widerstände zu wählen, damit man die Übertragungsfunktion

$$F(\omega) = \frac{1}{16 + 8\omega j}$$

erhält?

(d) Berechnen Sie in diesem Fall die zur Eingangsspannung $u(t) = 20\cos(100t)$ V gehörige Ausgangsspannung.

11.23 Betrachten Sie den Schwingkreis in der folgenden Abbildung.



An die Schaltung wird eine Eingangsspannung U_E angelegt und am Widerstand die Ausgangsspannung U_A abgegriffen. Berechnen Sie das Verhältnis der komplexen Amplituden U_E/U_A und geben Sie dessen Betrag und Phase an.

Teil IV

Differentiation und Integration von Funktionen einer Variablen

Kapitel 12

Grundlagen der Differentialrechnung

12.1 $f(t)$ beschreibe die Lebenshaltungskosten zur Zeit t. Was heißt dann $f'(t) > 0$? Was heißt $f''(t) > 0$? Ein Politiker sagt: „Die Rate, mit der die Inflation zunimmt, sinkt.“ Drücken Sie diese Aussage mithilfe der Ableitungen $f'(t)$, $f''(t)$ und $f'''(t)$ aus.

12.2 Berechnen Sie die ersten Ableitungen der folgenden Funktionen

(a) $f(x) = \cos^2(4x) + x^{-3}$

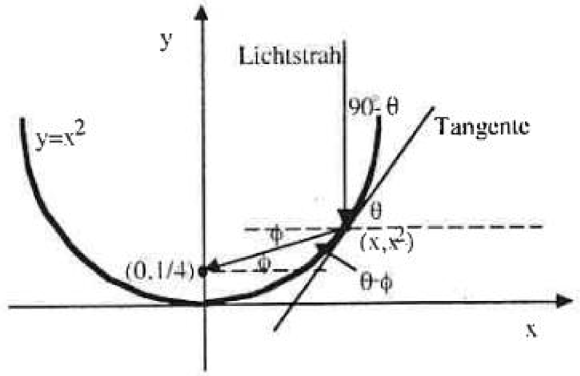
(b) $g(x) = \sin^3(x+1) + e^{3x}$

12.3 Gegeben sei die Funktion $f\colon (-1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{1+x}$. Bestimmen Sie die ersten drei Ableitungen von f. Finden Sie eine Formel für die n-te Ableitung der Funktion und beweisen Sie diese mittels vollständiger Induktion.

12.4 Überprüfen Sie die Differenzierbarkeit der Funktion $f(x) := |x-2|$ an der Stelle $x_0 = 2$.

12.5 Zeigen Sie, dass die Parabel $y = x^2$ parallel einfallende Lichtstrahlen im Punkt $(0, \frac{1}{4})$, ihrem *Brennpunkt*, bündelt, d.h. zeigen Sie, dass in der unten stehenden Abbildung $90° - \theta = \theta - \phi$ gilt.

Hinweis: Drücken Sie $\tan\phi$ und $\tan\theta$ als Funktion von x aus und verwenden Sie die Beziehung $\tan(90° - \theta) = \frac{1}{\tan\theta}$.



12.6 Eine Funktion $y = y(x)$ ist durch die implizite Gleichung

$$\cos(y)\ln(x) + y\sqrt{x^2+3} = 1 + xy\ln(x)$$

gegeben. Bestimmen Sie die Tangente an die Funktion $y(x)$ im Punkt $(1, y(1))$.

12.7 Zeigen Sie:

(a) $\arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(b) $\arccos'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

12.8 (a) Approximieren Sie $\sqrt{3}$ durch eine rationale Rahl, indem Sie die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ an einer geeigneten Stelle x_0 (in der Nähe von 3, mit $\sqrt{x_0} \in \mathbb{Q}$) linear approximieren.

(b) Zeigen Sie mit linearer Approximation: Legt man zwei Kilometer in $60 - x$ Sekunden zurück, so ist $2(60+x)$ km/h die beste lineare Approximation für die Geschwindigkeit in der Nähe von 120 km/h.

12.9 Verwenden Sie lineare Approximation, um folgende Aufgaben zu lösen. Der Radius einer Kugel ändert sich von 5 auf 5.01.

(a) Wie ändert sich die Oberfläche?

(b) Wie ändert sich das Volumen?

12.10 Drei Läufer rennen auf einem Kurs, der die Form eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge 50 m hat. Die Läufer sind gleichmäßig üder den Kurs verteilt und laufen alle gleich schnell mit einer Geschwindigkeit von 20 km/h. Wie ändert sich der Abstand zwischen je zwei von ihnen, wenn sie

(a) die Ecken verlassen,

(b) an den Ecken ankommen,

(c) in der Mitte der Seite sind.

Hinweis: Cosinussatz

12.11 Eine Funktion $y = y(x)$ ist durch die implizite Gleichung

$$\cos(y)\ln(x) + y\sqrt{x^2+3} = 1 + x\,y\ln(x)$$

gegeben. Bestimmen Sie die Tangente an die Funktion $y(x)$ im Punkt $(1, y(1))$.

12.12 Zeigen Sie:

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

12.13 Ein Behälter hat die Form einer oben offenen, auf der Spitze stehenden Pyramide mit quadratischer Grundfläche mit Höhe H und Seitenlänge S. Der anfangs leere Behälter wird mit 5 l/min mit Wasser befüllt. Berechnen Sie die Höhe $h(t)$ des Wasserspiegels in Abhängigkeit der Zeit. Wie schnell steigt der Wasserspiegel in Abhängigkeit der Zeit? Wie schnell steigt der Wasserspiegel, wenn er $\frac{H}{2}$ hoch ist?

12.14 Zeigen Sie, dass die Funktion $f\colon \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \tan(x) - x$ invertierbar ist und bestätigen Sie, dass für die zugehörige Inverse f^{-1} gilt $\left(f^{-1}\right)'(y) = (f^{-1}(y) + y)^{-2}$.

Kapitel 13

Anwendungen der Differentialrechnung

13.1 Weisen Sie für die Funktion

$$f(x) = x\ln(x^2 + 1)$$

nur mittels der ersten Ableitung nach, dass f keinen Extremwert besitzt.

13.2 Der Wirkungsgrad η eines Transformators hängt durch

$$\eta(P) = \frac{P}{c + P + kP^2}$$

von der Leistung P ab. Die Konstanten $c > 0$ und $k > 0$ hängen vom Transformator ab. Bei welcher Leistung ist der Wirkungsgrad eines Transformators am größten?

13.3 Eine Stromquelle mit der Quellspannung U_q und einem positiven inneren Widerstand R_i wird mit einem positiven Verbraucherwiderstand R verbunden. Dann ergibt sich die aktive Leistung, die dem Verbraucher zur Verfügung steht, durch die Formel

$$P = U_q^2 \frac{R}{(R + R_i)^2}.$$

(a) Zeigen Sie, dass diese Leistung für $R = R_i$ maximal ist. Man spricht von Leistungsanpassung. Welche maximale Leistung kann erzeugt werden?

(b) Betrachten Sie nun einen Stromkreis aus einer Stromquelle mit der Quellspannung U_q und mit positivem inneren Widerstand R_i, einer Spule (Induktivität L) und einem Ohmschen Widerstand R, der Wärme mit der Leistung

$$P = U_q^2 \frac{R}{(2\pi L)^2 + (R + R_i)^2}$$

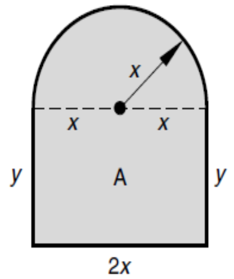
erzeugt. Welches R maximiert diese Leistung? Welche maximale Leistung kann erzeugt werden?

13.4 Bezeichne $c(t)$ die Konzentration eines Wirkstoffes im Blut t Stunden nach der Injektion und gilt $c(t) = \frac{16t}{(10t+20)^2}$. Finden Sie die maximale Konzentration und den Zeitpunkt ihres Auftretens.

13.5 Eine bedruckte Papierseite soll 60 cm² Text enthalten, rechts und links sollen je 5 cm und oben und unten je 3 cm Rand sein. Welches Format muss gewählt werden, um den Papierverbrauch zu minimieren?

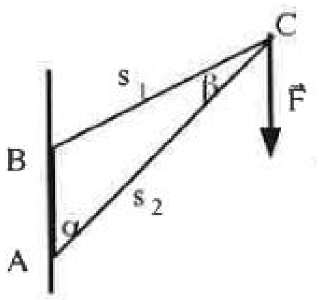
13.6 Jemand will möglichst schnell einen b km breiten Fluss überqueren, und zwar von einem Punkt A zu einem c km entfernten Punkt B am anderen Ufer. Die Person kann einerseits mit v_1 km/h mit dem Ruderboot fahren, andererseits mit v_2 km/h laufen, welchen Weg muss sie einschlagen?
Überpüfen Sie Ihr Ergebnis mit den Daten $b = 0.1\,\text{km}$, $c = 0.4\,\text{km}$, $v_1 = 3\,\text{km/h}$ und $v_2 = 12\,\text{km/h}$.

13.7 Der Querschnitt eines Tunnels besteht aus einem Rechteck mit aufgesetztem Halbkreis. Wie müssen die Abmessungen gewählt werden, damit bei fest vorgegebenem Umfang $U = \text{const} = c$ die Querschnittsfläche möglichst groß wird?



13.8 Eine Kiste vom Gewicht G soll über eine schiefe Ebene mit Neigungswinkel φ und einem Reibungskoeffizienten μ hinaufgezogen werden. Unter welchem Winkel muss gezogen werden, um die aufzuwendende Kraft zu minimieren?

13.9 An einem Kran ABC hängt eine Last, die eine Kraft von $\vec{F} = 2000\text{N}$ ausübt. Man denke sich nun den Punkt B senkrecht verschiebbar, während A und C fest bleiben. Wo muss B liegenm wenn die Kraft $\vec{F_1}$ längs der Strebe s_1 den kleinsten Betrag haben soll? Geben Sie die Lage von B durch β an. Welche Länge ergibt sich für s_1?



13.10 Zeigen Sie mit dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung, dass zwischen je zwei Nullstellen der Sinus-Funktion jeweils eine Nullstelle der Cosinus-Funktion liegt und umgekehrt.

13.11 Sei $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \frac{\ln(13x+1)}{x}$. Berechnen Sie f' und zeigen Sie mit dem Mittelwertsatz, dass f' negativ ist.

13.12 Führen Sie für die folgende Funktion eine Kurvendiskussion durch und skizzieren Sie den Funktionsgraphen:

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2-4}.$$

13.13 In der kinetischen Gastheorie spielt die Maxwellverteilung eine Rolle. Diskutieren Sie ihre Dichte

$$y(x) = \frac{4x^2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}.$$

13.14 In der Schwingungslehre tritt im aperiodischen Grenzfall die Gleichung

$$y(t) = (a+bt)e^{-\delta t}$$

auf. Diskutieren Sie diese Funktion für $a = 5.00\,\text{mm},\ b = 3.87\,\text{mm/s}$ und $\delta = 0.333\,\text{s}^{-1}$.

13.15 Für die elektrische momentane Leistung gilt $p(t) = i(t)u(t)$, wobei $i(t) = I\cos(\omega t)$ und $u(t) = U\cos(\omega t + \varphi)$. Diskutieren Sie diese Funktion.

13.16 Ein Gas der Temperatur T und des Anfangsdrucks p_1 wird durch eine zweistufige, reversible, adiabatische Kompression auf einen Enddruck p_2 komprimiert. Um den Zwischendruck p zu erreichen, ist die Arbeit

$$A(p) = nRT\frac{\kappa}{\kappa-1}\left[\left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} - 2 + \left(\frac{p}{p_2}\right)^{-\frac{\kappa}{\kappa-1}}\right]$$

erforderlich ($\kappa > 1$). Bestimmen Sie die Extremstellen der Funktion im Intervall $[p_1, p_2]$.

13.17 Als linear gedämpfte Schwingung bezeichnet man

$$g(x) = e^{-ax} \cdot \sin(\omega x + \varphi), \quad a > 0,\ x \geq 0.$$

Einer derartigen Schwingung unterliegt z.B. die Stomstärke in einem RLC-Schwingkreis, in dem eine anfangs am Kondensator gespeicherte Ladung abgebaut wird. Diskutieren Sie diese Funktion. Für welche x berührt $g(x)$ die Kurven $\pm e^{-ax}$? Skizzieren Sie die Graphen $y = g(x),\ y = e^{-ax},\ y = -e^{-ax}$ für $a = \omega = 1$ und $\varphi = \pi/4$.

13.18 (a) Entwickeln Sie ein Iterationsverfahren (Newton), das $\sqrt[z]{a}$, z und a vorgegeben, näherungsweise berechnet.

(b) Gesucht ist die Lösung der Gleichung $\arctan x = 0$. Für welche Startwerte konvergiert das Newtonverfahren?

13.19 Das Wachstum von bestimmten Bakterien kann durch die Funktion

$$N(t) = \frac{Ae^{\lambda t}}{AC + e^{\lambda t}}, \quad t \geq 0$$

beschrieben werden, wobei $N(t)$ die Anzahl der Bakterien nach t Sekunden bedeutet und $A,\ C,\ \lambda$ positive Konstanten sind.

(a) Zeigen Sie, dass $N'(t) > 0$ für alle $t \geq 0$ gilt. Was bedeutet das?

(b) Berechnen Sie $N(0)$ und $\lim_{t\to\infty} N(t)$ und skizzieren Sie $N(t)$ qualitativ.

(c) Am Anfang ($t = 0$) seien $N_0 = 10^2$ Bakterien vorhanden, nach 4 Sekunden ca. 10^3 Bakterien und nach langer Zeit ca. 10^6 Bakterien. Berechnen Sie daraus näherungsweise die Konstanten $A,\ C$ und λ.

13.20 Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte (falls existent):

(a) $\lim_{x\to\infty} \left(x\ln(3x^2+1) - 2x\ln x\right)$

(b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{-x}-1}{x}$

(c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1-x)+x^2}{(1+x)^5-1+x^2}$

(d) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\ln(a+be^x)}{\sqrt{c+dx}} \quad (b, d > 0)$

(e) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln^2(1+x)-\sin^2 x}{1-e^{-x^2}}$

(f) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{-x^2}-1+x^2}{x^4}$

(g) $\lim_{x\to -1^+} \left[\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)+\dfrac{1}{x+1}\right]$

(h) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{\sin(ax)}}{\sqrt{\sin(bx)}}$

13.21 Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\sin(x)} - \dfrac{1}{e^x-1}\right)$

(b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(2x)}{x\sin(x)}$

(c) $\lim_{x\to 1} (1-x)\tan(\dfrac{\pi x}{2})$

13.22 Zerfällt eine radioaktive Muttersubstanz A mit einer Zerfallskonstante a in eine radioaktive Tochtersubstanz B mit Zerfallskonstante $b \neq a$, so ist zur Zeit $t \geq 0$ von B eine Menge

$$m_B(t) = \frac{a}{b-a} m_A(0)\left(e^{-at} - e^{-bt}\right)$$

vorhanden. ($m_A(0)$ ist die Menge von A zu Beobachtungsbeginn.)

(a) Bestimmen Sie die Formel $m_B(t)$ für den Fall $b = a$ (Regel von L'Hospital).

(b) Zu welcher Zeit ist eine maximale Menge B vorhanden (für $b \neq a$ und $b = a$)?

13.23 Bestimmen Sie näherungsweise die (einzige reelle) Nullstelle des Polynoms $p(x) = x^3 + 2x - 1$ mithilfe des Newtonverfahrens. Wählen Sie geeignete Startwerte und berechnen Sie zwei Iterationen.

13.24 Bestimmen Sie näherungsweise die Nullstelle der Funktion $f(x) = e^x + \ln(x) - x$ mithilfe des Newtonverfahrens. Wählen Sie einen geeigneten Startwert und berechnen Sie zwei Iterationen. Ein Startwert x_0 gilt als „geeignet“, wenn er folgendes Konvergenzkriterium erfüllt:

$$|\frac{f(x_0)f''(x_0)}{f'(x_0)^2}| < 1$$

13.25 Bestimmen Sie näherungsweise die (einzige reelle) Nullstelle des Polynoms $p(x) = x^3 + 3x - 1$ mithilfe des Newtonverfahrens. Wählen Sie dazu den Startwert $x_0 = 0$ und berechnen Sie drei Iterationen. Wählen Sie anschließend den Startwert $\overline{x}_0 := 5$ und berechnen Sie Näherungen $\overline{x}_n$ bis Sie mit x_3 auf 6 Kommastellen übereinstimmen. Wie viele Iterationsschritte sind notwendig?

13.26 Bestimmen Sie nach der Methode kubischer Splines eine interpolierende Funktion durch die Punkte A=(0,0), B=(1,2), C=(2,1) und D=(3,0) die in den Randpunkten nicht gekrümmt ist.

Kapitel 14

Grundlagen der Integralrechnung

14.1 (a) Zeigen Sie, dass die Entfernung, die ein Bus mit Geschwindigkeit $v(t)$ bis zur Zeit T zurücklegt, gleich $\int_0^T v(t)\,dt$ ist.

(b) Ein Teilchen startet im Ursprung und hat die Geschwindigkeit

$$v(t) = 7 + 4t^3 + 6\sin(\pi t)\text{cm/s}.$$

Welchen Weg hat es in 200 s zurückgelegt?

(c) Die Geschwindigkeit eines Zuges fluktuiert nach der Formel

$$v(t) = 100 + e^{-3t}\sin(2\pi t)\text{km/h}.$$

Wie weit kommt der Zug in einer Stunde? Nach 100 h?

14.2 Zeigen Sie, dass die Keplersche Fassregel

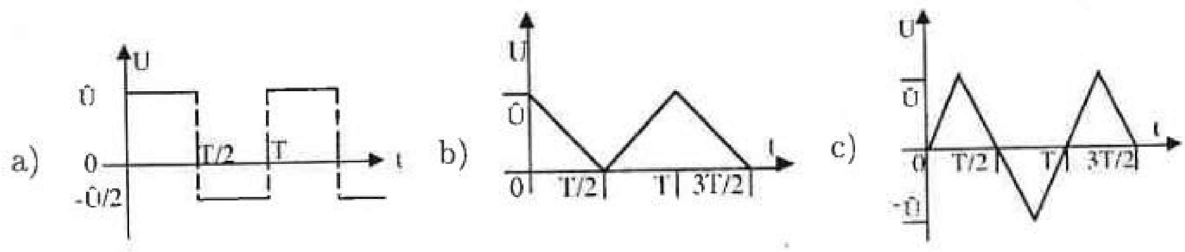
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{6}(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)))$$

für jedes Polynom 3. Grades exakt gilt.

14.3 Der Effektivwert U_{eff} einer Spannung $U(t)$ mit der Periode T ist gegeben durch

$$U_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T U^2(t)\,dt}.$$

Berechnen Sie diesen für die abgebildeten Spannungsverläufe.



14.4 Die Formänderungsarbeit bei der Balkenbiegung ergibt sich aus der Gleichung

$$W = \frac{1}{EI} \int\limits_0^L M^2(x)\,dx,$$

wobei L die Balkenlänge, E den Elastizitätsmodul, I das konstante Flächenmoment bezeichnet. Ist der Balken an einer Seite fest eingespannt und wirkt an der anderen die Kraft F, so gilt $M(x) = F \cdot (L - x)$. Berechnen Sie die Formänderungsarbeit.

14.5 Spannung und Stromstärke eines Wechselstroms sind durch folgende Formeln gegeben:

$$U(t) = \hat{U}\cos(\omega t + \alpha) \qquad\qquad I(t) = \hat{I}\cos(\omega t + \alpha - \varphi)$$

Berechnen Sie die Wirkleistung $\frac{1}{T}\int\limits_0^T U(t)I(t)\,dt$, wobei $T = \frac{2\pi}{\omega}$ die Periode bezeichnet. ($\cos(\varphi)$ heißt Leistungsfaktor.)

14.6 Bestimmen Sie folgende Integrale mithilfe der Substitutionsmethode, $a > 0$.

(a) $\int x^2\sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x \quad (x = a\sin t)$

(b) $\int \sqrt{a^2 + x^2}\,\mathrm{d}x \quad (x = a\sinh t)$

(c) $\int \sqrt{x^2 - a^2}\,\mathrm{d}x \quad (x = a\cosh t)$

(d) $\displaystyle\int \frac{e^x + e^{2x}}{e^x - 1}\,\mathrm{d}x \quad (e^x = t)$

14.7 Bestimmen Sie folgende Integrale mithilfe partieller Integration.

(a) $\int \sin(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x$

(b) $\int x^2 e^x\,\mathrm{d}x$

(c) $\int x^3 \sin x\,\mathrm{d}x$

(d) $\int e^x \sin(x)\mathrm{d}x$

(e) $\int \sin^3(x)\mathrm{d}x$

(f) $\int e^{2x}\sin(5x)\mathrm{d}x$

(g) $\int x^5 \ln x\,\mathrm{d}x$

(h) $\displaystyle\int \frac{\ln(x)}{x^3}\,\mathrm{d}x$

(i) $\int x\sinh x\,\mathrm{d}x$

14.8 Bestimmen Sie folgende Integrale mithilfe einer Partialbruchzerlegung.

(a) $\displaystyle\int \frac{3x^3 + 10x^2 - x}{(x^2 - 1)^2}\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int \frac{7x^2 - 10x + 37}{x^3 - 3x^2 + 9x + 13}\,\mathrm{d}x$

14.9 Fließt durch den zwischen x_1 und x_2 auf der x-Achse eingespannten elektrischen Leiter der Strom I, so gilt für die magnetische Feldstärke H im Punkt $(0, a)$ der (x, y)-Ebene nach dem Gesetz von Biot und Savart

$$H = \frac{I}{4\pi} \int_{x_1}^{x_2} a(a^2 + x^2)^{-\frac{3}{2}} \, dx.$$

Berechnen Sie H für $x_1 \to -\infty$ und $x_2 \to \infty$.

Hinweis: Substituieren Sie $x = a \sinh t$.

14.10 Der Druck (Kraft pro Fläche) in der Tiefe h unter der Wasseroberfläche ist gegeben durch $p = \rho g h = 9800h \, N/m^2$. Ein Damm sei nun gegeben als Graph einer Funktion f, wobei $f(x)$ jeweils die Tiefe der Staumauer an der Stelle x bezeichnet, $x \in [a, b]$.

(a) Zeigen Sie, dass die gesamte Kraft, die das Wasser ausübt, gleich ist

$$\int_a^b \frac{\rho g}{2} [f(x)]^2 \, dx.$$

Berechnen Sie zuerst die Kraft, die auf einen vertikalen rechteckigen Stab ausgeübt wird.

(b) F kann geometrisch als Volumen aufgefasst werden. Wie?

(c) Berechnen Sie die Kraft, die auf einen trapezförmigen Damm von der Länge 300m, unter einer Länge 50m und Höhe 100m ausgeübt wird.

14.11 Berechnen Sie folgende uneigentliche Integrale:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \, \mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \, \mathrm{d}x$

14.12 Fließt durch den zwischen x_1 und x_2 auf der x-Achse eingespannten elektrischen Leiter der Strom I, so gilt für die magnetische Feldstärke H im Punkt $(0, a)$ der (x, y)-Ebene nach dem Gesetz von Biot und Savart

$$H = \frac{I}{4\pi} \int_{x_1}^{x_2} a(a^2 + x^2)^{-3/2} \, \mathrm{d}x.$$

Berechnen Sie H für $x_1 \to -\infty$ und $x_2 \to \infty$. Substituieren Sie dazu $x = a \sinh(t)$.

14.13 Berechnen Sie folgende uneigentliche Integrale:

(a) $\displaystyle\int_0^\infty \sqrt{x} \, \mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1 + x^2} \, \mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int_0^4 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x$

14.14 Prüfen Sie mit dem Vergleichskriterium, ob folgende uneigentliche Integrale konvergieren:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\sin x}}\,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}\,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x$

Kapitel 15

Geometrische Anwendungen der Integralrechnung

15.1 Berechnen Sie die Fläche zwischen einem Bogen einer Zykloide und der x-Achse zwischen $(0,0)$ und $(2r\pi,0)$, schreiben Sie den zugehörigen Kreis mit Radius r und Mittelpunkt $(\pi r, r)$ in diese Fläche ein und zeigen Sie, dass alle entstehenden Teilflächen gleich groß sind.

15.2 Berechnen Sie den Flächeninhalt des von der Astroide

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos^3 t \\ \sin^3 t \end{pmatrix}, 0 \leq t \leq 2\pi$$

begrenzten Bereiches.

15.3 Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von einer Hypozykloide mit drei Spitzen

$$\vec{x}(t) = a \begin{pmatrix} 2\cos t + \cos(2t) \\ 2\sin t - \sin(2t) \end{pmatrix},\ 0 \leq t \leq 2\pi$$

berandet wird.

15.4 Ein Teilchen bewegt sich auf einer ebenen Bahn. Durch $\vec{x}(t) = (3\cos(t), 5\sin(t), 1)^t$ ist der zugehörige Ortsvektor gegeben. Bestimmen Sie den Flächeninhalt der vom Ortsvektor überstrichenen Sektorfläche.

15.5 Berechnen Sie die Bogenlänge der folgenden Kurven

(a) $(\sin(t), \cos(t), t)$ für $t \in [0, 2\pi]$,

(b) $(e^t \cos(t), e^t \sin(t), e^t)$ für $t \in [0, 2\pi]$,

(c) $((t+1)^2, (t-1)^2, t^2)$ für $t \in [0, 1]$.

15.6 Berechnen Sie Volumen und Mantelfläche folgender Rotationskörper bei Rotation um die x-Achse:

(a) $f(x) = \cos(x)$ für $x \in [0, \pi/2]$,

(b) $f(x) = e^x$ für $x \in [0, 1]$,
(c) $f(x) = x^2$ für $x \in [0, 1]$.

15.7 Gegeben sei die Viertel-Hyperbel $\vec{x}(t) = (a\cosh(t), b\sinh(t)),\ t \in [0, 1]$, die um die y-Achse rotiert.

(a) Leiten Sie die Formel für das Volumen des Rotationskörpers her und berechnen Sie dieses.
(b) Leiten Sie die Formel für das Trägheitsmoment des dazugehörigen Vollkörpers mit konstanter Dichte ρ her und berechnen Sie dieses mit dem Computer.

15.8 Berechnen Sie den Flächeninhalt eines Parabolspiegels, der als Mantelfläche eines Rotationskörpers der Erzeugenden $f(x) = 6\sqrt{x}$ mit $x \in [0, 8]$ aufgefasst werden kann.

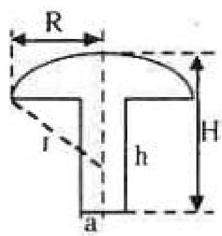
15.9 Die beiden Parabeln $y = \frac{x^2}{32}$ und $y = \frac{3x^2}{256} + 5$ bestimmen den Querschnitt einer Linse. Welches Volumen hat die Linse? Welchen Schwerpunkt?

15.10 Entwerfen Sie ein Sektglas mit 0.1 l Inhalt und 16 cm Höhe und ein Weinglas mit 0.2 l Inhalt und 6 cm Höhe. Das Sektglas soll ein Drehkegel sein und das Weinglas ein Drehpolynom 4. Grades der Gestalt $f(x) = a_0 + a_4x^4$.

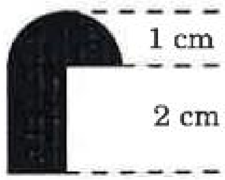
15.11 Der abgebildete Ballonquerschnitt wird von der Funktion $y = \sqrt{ax}e^{-bx}$ begrenzt. Die Form des Ballons denkt man sich durch Rotation und die x-Achse entstanden. Wie viel m² Nylon braucht man, um einen solchen Ballon herzustellen? Berechnen Sie das Integral mit Computerunterstützung.

15.12 Berechnen Sie den Schwerpunkt des Bereichs A, der von der x-Achse und den Funktionen $f(x) = 1 + x$ für $x \in [-1, 0]$ und $g(x) = 1 - x^2$ für $x \in [0, 1]$ eingeschlossen wird.

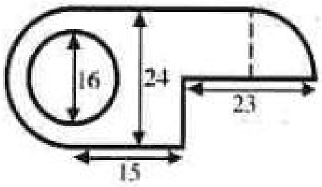
15.13 Berechnen Sie den Schwerpunkt eines Halbrundniets mit den Abmessungen $H = 15$ mm, $R = 10$ mm, $a = 2,5$ mm.

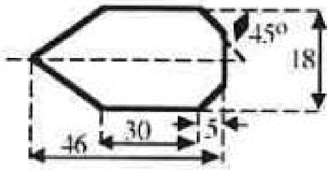


15.14 Eine ringförmige Gummidichtung mit äußerem Radius $r = 20$ cm hat die abgebildete Querschnittsfläche, die rechts von der senkrechten Rotationsachse liegt. Berechnen Sie Volumen und Masse für $\rho_{\text{Gummi}} = 1200$ kg/m³. Wo befindet sich der Schwerpunkt?



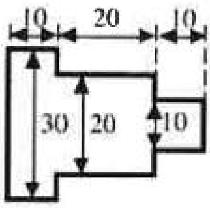
15.15 Zur Konstruktion eines Schnittstempels muss der Einspannzapfen stets im Schwerpunkt der Schnittlinie angesetzt werden. Folgende Teile sollen aus einem Blech ausgeschnitten werden. Wo sind die Stempel einzuspannen?





15.16 Ein Wassertank habe die Form eines Rotationskörpers um eine vertikale Achse. Finden Sie eine Formel für die Arbeit, die benötigt wird, um den Tank von oben leerzupumpen. Zeigen Sie, dass diese Arbeit gleich Mgh ist, wobei M die Masse des Wassers und h die Höhe des Tanks über dem Schwerpunkt des Wassers bezeichnet. Illustrieren Sie diese Ergebnisse für eine Halbkugelschale.

15.17 Berechnen Sie den Schwerpunkt und das Trägheitsmoment bezüglich der Symmetrieachse des aus drei homogenen Zylindern zusammengesetzten Drehteils.



Teil V

Lineare Algebra — Teil 2

Kapitel 16

Vektorräume

16.1 (a) Überprüfen Sie, ob $V = \mathbb{R}^2$ mit der inneren Verknüpfung
$(a_1, a_2) \oplus (b_1, b_2) := (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$
und der äußeren Verknüpfung $\lambda \otimes (a_1, a_2) := (\lambda \cdot a_1, a_2)$ einen Vektorraum bildet.

(b) wie a) mit der äußeren Verknüpfung $\lambda \otimes (a_1, a_2) := (\lambda \cdot a_1, 0)$.

(c) Überprüfen Sie, ob $V = \mathbb{R}$ mit der inneren Verknüpfung $a \oplus b := \sqrt[3]{a^3 + b^3}$ und der äußeren Verknüpfung $\lambda \otimes a := \sqrt[3]{\lambda}$ einen Vektorraum bildet.

16.2 Zeigen Sie nur mithilfe der Vektorraumaxiome (aus der Definition!), dass in jedem Vektorraum V gilt: $0 \odot u = o$ für alle $u \in V$. (o bezeichnet dabei das Nullelement von V.)

16.3 Bestimmen Sie die lineare Hülle von

(a) $1 + x^2, 1 - x^2$

(b) $1, 1 + x, (1 + x)^2, (1 + x)^3, (1 + x)^4$

im Vektorraum P_4 aller Polynome vom Grad ≤ 4.

16.4 Geben Sie von der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

den Zeilen- und Spaltenraum in möglichst einfacher und übersichtlicher Weise an.

16.5 Überprüfen Sie, ob folgende Vektoren jeweils linear unabhängig sind:

(a) $(1, 2, 1), (2, -1, 1), (1, 3, -2), (2, 2, 1)$

(b) $(1, 2, -1, 3), (2, 1, 1, 0), (1, 0, 2, 3)$

16.6 Sind die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig?

16.7 Gegeben sei die Basis B eines Vektorraums des $\mathbb{R}^4$,

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -9 \\ 16 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -14 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Für welche Werte von a und b gehört der Vektor $c = (a, 0, 0, b)$ zu dem Vektorraum?

16.8 Überprüfen Sie, ob $(1, 2, -1), (2, 1, 3), (1, 1, -2)$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist und berechnen Sie gegebenenfalls die Koordinaten von $(-1, 3, -2)$ bezüglich dieser Basis.

16.9 Berechnen Sie die Dimension desjenigen Unterraums des $\mathbb{R}^3$, der von den Vektoren $(1, 2, 2)$, $(1, 1, -1), (2, 3, 1), (1, 3, 5)$ erzeugt wird, und geben Sie eine Basis an. Berechnen Sie die Koordinaten der angegebenen Vektoren bezüglich der Basis.

16.10 Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch $f(\vec{v}) = A \cdot \vec{v}$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Geben Sie das Bild $\operatorname{Im}(f)$ und den Kern $\operatorname{Ker}(f)$ von f explizit an.
(Aus der Vorlesung wissen Sie bereits, dass es sich dabei um Untervektorräume handelt).

(b) Zeigen Sie, dass es für jeden beliebigen Vektor $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$ zwei Vektoren $\vec{u} \in \operatorname{Im}(f)$ und $\vec{v} \in \operatorname{Ker}(f)$ gibt, so dass

$$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}.$$

16.11 Gegeben seien die Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_4 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}.$$

(a) Weisen Sie nach, dass $B = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4)$ eine Basis von $\mathbb{R}_4$ ist, wenn $a \neq c$ gilt.

(b) Wählen Sie $a = 0$, b die letzte Ziffer Ihrer Matrikelnummer, $c = 1$ und $d = 0$ und bestimmen Sie für $\vec{w}$ mit $(\vec{w})_B = (1, 2, 3, 4)$ die Koordinaten bezüglich der kanonischen Basis.

16.12 Gegeben seien die Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}.$$

(a) Weisen Sie nach, dass $B = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4)$ eine Basis von $\mathbb{R}^4$ ist, wenn $b \neq d$ gilt.

(b) Wählen Sie $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$ und $d = -1$ und bestimmen Sie die Koordinaten von $\vec{w}$ mit $(\vec{w})_B = (1, 2, -2, -1)$ bezüglich der kanonischen Basis.

Kapitel 17

Lineare Abbildungen

17.1 Welche der Abbildungen $f_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sind linear?
Wie lautet gegebenenfalls die Matrixdarstellung? Geben Sie in diesem Fall auch Bild und Kern der linearen Abbildung an.

(a) $f_1(x_1, x_2, x_3) = (\sin(x_1), x_2 + x_3, 0)$

(b) $f_2(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2, 3x_2, x_1 + x_2^2)$

(c) $f_3(x_1, x_2, x_3) = (3x_3 + 2x_2, x_3 + x_1, x_2 - 5x_1)$

(d) $f_4(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2 + 1, x_3)$

(e) $f_5(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, 2x_1 + x_3, x_1 + x_2 + x_3)$

17.2 Bestimmen Sie die Matrixdarstellung jener linearen Abbildung, die jedem Vektor $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)^t$ die orthogonale Projektion auf den Vektor $(1, 1, -3)^t$ zuordnet. Welchen rang hat diese Matrix? Ist die Abbildung bijektiv?

17.3 Gegeben seien zwei Basen B und C des $\mathbb{R}^n$, indem die Koordinaten (bezüglich des kanonischen Basis) der Basisvektoren als Spaltenvektoren angegeben werden. Zeigen Sie, dass für die Basistransformationmatrix A_C^B die Gleichung $A_C^B = C^{-1}B$ gilt.
Berechnen Sie A_C^B für die Basen $B = \Big((1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 0)\Big)$ und $C = \Big((2, 3, 4, 5), (0, 1, 0, 1), (-3, 2, -3, 2), (1, 0, 0, 1)\Big)$.

17.4 Gegeben Sei der Raum $\mathbb{P}_3$ aller Polynome vom Grad ≤ 3 mit den Basen

$$B = (1, 1 + x, (1 + x)^2, (1 + x)^3), \qquad C = (1, 1 + x, 1 + x^2, 1 + x^3).$$

Berechnen Sie die Basistransformation A_C^B und A_B^C.

17.5 Berechnen Sie die Eigenwerte, Eigenvektoren und Eigenräume der Matrizen:

(a) $\begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}$,

(b) $\begin{pmatrix} 20 & 5 & 0 & 0 \\ -15 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 20 & 5 \\ 5 & 0 & -15 & 0 \end{pmatrix}$.

Hinweis zu b): Heben Sie den gemeinsamen Faktor heraus.

17.6 Berechnen Sie die Eigenwerte, Eigenvektoren und Eigenräume der Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix}.$$

17.7 Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 \\ 0 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie ihre Eigenwerte und Eigenräume.

(b) Diagonalisieren Sie A und berechnen Sie A^n für $n \in \mathbb{N}$.

17.8 Sei die Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine Rotation um die y-Achse um den Winkel β.

(a) Zeigen Sie, dass f linear ist, indem Sie aus einer Skizze die Matrixdarstellung ermitteln.

(b) Berechnen Sie für $\beta \neq \pi$ die Eigenwerte und Eigenräume dieser Rotation und überprüfen Sie sie durch Vergleich mit dem Skriptum (Beispiel „Drehung um eine Achse, die durch den Ursprung verläuft“).

17.9 Man bestimme ein Hauptachsensystem (eine aus Eigenvektoren bestehende Orthonormalbasis) für die folgende symmetrische Matrix:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

17.10 Bestimmen Sie die Matrixdarstellung D und das Bild des Punktes $(1, 2, 3)$ der linearen Abbildung, die sich aus einer Drehung um die y-Achse um $\alpha = \frac{\pi}{6}$ mit anschließender Drehung um die z-Achse um $\beta = \frac{\pi}{4}$ zusammensetzt. Bestimmen Sie die Drehachse und den Drehwinkel δ.

17.11 Bestimmen Sie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, so dass die folgende Matrix orthogonal ist:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ a & -\frac{1}{\sqrt{2}} & b \\ c & 0 & d \end{pmatrix}$$

Hierfür gibt es zwei Möglichkeiten. Bestimmen Sie jeweils

(a) die Determinante;

(b) den Drehwinkel, die Drehachse bzw. die Spiegelebene;

(c) das Bild von $(1,2,3)^T$.

17.12 Zwei orthogonale Abbildungen p und q des $\mathbb{R}^3$ sind aus jeweils zwei Elementarabbildungen zusammengesetzt:
Abbildung p: Drehung um die z-Achse mit Winkel φ und Spiegelung an der Ebene $y = 0$,
Abbildung q: Drehung um die z-Achse mit Winkel φ und Spiegelung am Bild der Ebene $y = 0$.
Bestimmen Sie die Matrixdarstellung der beiden Abbildungen. Welcher Typ von Abbildung liegt jeweils vor?

17.13 (a) Spiegeln Sie den Punkt $(x_1, x_2, x_3)^t \in \mathbb{R}^3$ an der Geraden durch den Ursprung mit Richtungsvektor $\vec{a} = (1,2,3)^t$.

(b) Zeigen Sie, dass diese Spiegelung eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}^3$ ist.

(c) Bestimmen Sie die Eigenwerte und die dazugehörigen Eigenräume.

17.14 Eine Drehspiegelung in $\mathbb{R}^3$ setzt sich zusammen aus einer Drehung um 0 mit Achsenrichtung $\vec{a}(|\vec{a}| = 1)$ und Drehwinkel φ mit anschließender Spiegelung an der Ebne $\vec{x} \cdot \vec{a} = 0$. Bestimmen Sie die Matrix D der Drehspiegelung $\vec{x} \to \vec{y}$.

17.15 Wenden Sie das Gram-Schmidt-Orthonormalisierungsverfahren auf die Vektoren $(3,0,4)$, $(7,0,1)$ und $(10,4,5)$ an.

17.16 Betrachten Sie den Vektorraum der Polynome vom Grad <= 2.

(a) Weisen Sie nach, dass die Polynome $b_1 = x$, $b_2 = 1 - x$, $b_3 = x(1-x)$, sowie die Polynome $c_1 = 1$, $c_2 = x$, $c_3 = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$ jeweils Basen des P_2 darstellen. (*Info: c_i sind Legendre-Polynome)

(b) Gegeben ist weiters die lineare Abbildung: $f\colon P_2 \to P_2$, $f(p) = p' + p''$. Bestimmen Sie die Matrixdarstellungen $(f)_K^K$, sowie $(f)_C^B$, wobei $K = (1, x, x^2)$ und $B = (b_1, b_2, b_3)$ bzw. $C = (c_1, c_2, c_3)$ die Basen aus Aufgabe a) sind.

(c) Welche Dimension haben der Kern und das Bild der lineare Abbildung?

17.17 Prüfen Sie, ob es sich bei folgender Matrix um eine Drehmatrix handelt und bestimmen Sie gegebenenfalls die Drehachse und den Drehwinkel.

$$Q = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Für den Drehwinkel ϕ einer Drehmatrix Q gilt: $\cos(\phi) = \frac{1}{2}(\text{Spur}(Q) - 1)$, wobei sich die Spur einer Matrix als Summe der Hauptdiagonalelemente berechnen lässt: Spur(Q) = $\sum_i^n q_{ii}$

17.18 Gegeben Sei die symmetrische Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix P, so dass $P^T AP$ eine Diagonalmatrix ist.

17.19 Sei $V = \mathbb{R}_3$ und sei $f : V \mapsto V$ eine lineare Abbildung mit

$$f((x,y,z)) := (8x - 9y, 6x - 7y, 9x - 9y - z)$$

Prüfen Sie, ob f diagonalisierbar ist, und bestimmen Sie gegebenenfalls eine Basis B von V, sodass $(f)_B^B$ eine Diagonalmatrix ist.

17.20

- Bestimmen Sie die Definitheit der folgenden Matrix:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

- Bestimmen Sie die Definitheit folgender quadratischer Formen:

  (a) $q(x_1, x_2, x_3) = x^t \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} x$

  (b) $q(x_1, x_2, x_3) = 4x_1x_3 - x_1^2 - x_2^2 + 2x_2x_3 - 5x_3^2$

Teil VI

Zahlenreihen, Funktionenfolgen, Funktionenreihen

Kapitel 18

Reihen

18.1 Berechnen Sie die Grenzwerte folgender Reihen für $n \to \infty$.

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{3^{2k}-5}{14^k}$ b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (\sqrt{1+k}-\sqrt{k})$

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k(k-1)}{k!}$ d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$

e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$

Hinweis zu d) und f): Partialbruchzerlegung.

18.2 Überprüfen Sie die Konvergenz der folgenden Reihen:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+1}$ b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k(1+k)}}$

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}$ d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k$

e) $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$

18.3 Überprüfen Sie die Konvergenz der folgenden Reihen:

a) $\displaystyle\sum_{k=5}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k(k^2+1)}}$ b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k^2}$

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1}$ d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!2^k}{k^k}$

18.4 Überprüfen Sie die Konvergenz und die absolute Konvergenz der folgenden Reihen:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k!}{k^k}$ b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} k}{k^2+1}$

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k k!}{2^k}$ d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} k}{2^k}$

e) $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} \frac{\cos(k^2)}{k^2}$

18.5 Untersuchen Sie eine Wurfparabel $y(t) = vt - gt^2/2$ und stellen Sie einen Zusammenhang zwischen der Anfangsgeschwindigkeit v, der Zeitdauer T eines Wurfes und der Maximalhöhe H her. Ein Gummiball fällt von einer Höhe h. Bei jedem Aufschlag auf dem Boden wird er mit $2/3$ seiner Aufschlaggeschwindigkeit reflektiert.
Welche Höhe erreicht der Ball bei jedem Sprung?
Wie lang dauert jeder Sprung?
Wie lange springt er insgesamt?
Welchen Weg legt er insgesamt zurück?
Welche Ergebnisse würden auf dem Mond auftreten?

18.6 Die Cantorsche Drittelmenge ist eine mathematisch interessante Menge und wird auf folgende Weise gebildet: Das Intervall $[0, 1]$ wird in drei gleich große Teile geteilt und das mittlere Drittel entfernt. Die beiden verbleibenden Teile werden wiederum in je drei gleich große Teile geteilt und die jeweils mittleren Teile entfernt. Dieser Prozess wird immer weiter wiederholt. Die verbleibende Menge C heißt Cantorsche Drittelmenge.

Der Bildungsprozess der Mengen kann also folgendermaßen modelliert werden:

$$\begin{aligned} &C_0 = [0,1]\,,\\ &C_1 = C_0 \setminus \left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\right) = \left[0, \tfrac{1}{3}\right] \cup \left[\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\right]\,,\\ &C_2 = C_1 \setminus \left\{\left(\tfrac{1}{9}, \tfrac{2}{9}\right) \cup \left(\tfrac{7}{9}, \tfrac{8}{9}\right)\right\} = \left[0, \tfrac{1}{9}\right] \cup \left[\tfrac{2}{9}, \tfrac{1}{3}\right] \cup \left[\tfrac{2}{3}, \tfrac{7}{9}\right] \cup \left[\tfrac{8}{9}, 1\right]\,,\\ &C_3 = \ldots\,, \end{aligned}$$

und $C = \cap_{n\in\mathbb{N}} C_n$.

Sei nun s_n jene Partialsumme, die die Gesamtlänge aller entfernten Intervalle bis zum n-ten Bildungsschritt angibt. Untersuchen Sie die Reihe $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und gehen Sie dazu folgendermaßen vor:

(a) Bestimmen Sie rekursiv die ersten vier Reihenglieder s_1, s_2, s_3, s_4.
(Hinweis: $s_1 = \frac{1}{3}$, $s_2 = s_1 + \ldots$).

(b) Leiten Sie aus Ihren Beobachtungen aus (a) eine Formel für s_n ab, konkret: Zeigen Sie, dass $s_n = a \cdot \sum_{k=0}^{n-1} q^k$ gilt, in dem Sie a und q angeben.

(c) Es handelt sich also bei $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ um eine geometrische Reihe. Geben Sie deren Grenzwert an. Welche Länge hat dann die Menge C?

Kapitel 19

Funktionenfolgen und -reihen

19.1 Untersuchen Sie folgende Funktionenfolge auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz:

(a) $f_n(x) = \dfrac{\sin(n^2 x)}{n}$

(b) $f_n(x) = 2\, n\, x\, e^{-nx^2}$

(c) $f_n(x) = \dfrac{1}{n + x^2}$

19.2 Untersuchen Sie folgende Funktionenreihe auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n + x^2}$

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{(1 + x^2)^n}$ d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x}{(1 + x^2)^n}$

Hinweis zu b) und d) Leibnizkriterium, Hinweis zu c) geometrische Reihe.

Kapitel 20

Potenzreihen

20.1 Berechnen Sie

$$\text{a)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dx}\left(\frac{x^k}{k!}\right) \qquad \text{b)} \frac{d}{dx}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\right)$$

$$\text{c)} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{x^k}{k!} dx \qquad \text{d)} \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} dx$$

und begründen Sie, warum Sie in a) und b), sowie in c) und d) dasselbe Ergebnis erhalten.

20.2 Untersuchen Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ die folgenden Potenzreihen konvergieren. Berücksichtigen Sie auch die Randpunkte des Konvergenzintervalls.

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \qquad \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \qquad \text{c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{n-1}}{n^2\, 3^n}(x-3)^n$$

$$\text{d)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^n (x-1)^n \qquad \text{e)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{2^n} \qquad \text{f)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^2}{2^n} x^{2n}$$

$$\text{g)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{7n+3}}{2^n} \qquad \text{h)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad \text{i)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^{3n+1}}{2^{6n}}$$

$$\text{j)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^{2n}}{n^2 2^n}$$

20.3 (a) Berechnen Sie die Potenzreihe von

$$\cos(\omega x) + i \sin(\omega x)$$

und finden Sie eine Erklärung, warum man diese Funktion mit $e^{i\omega x}$ bezeichnet.

(b) Zeigen Sie mithilfe der Potenzreihe, dass die definierende Differentialgleichung $y'(x) = \alpha y(x)$ der Exponentialfunktion $y(x) = e^{\alpha x}$ auch für die komplexe Exponentialfunktion gilt.

20.4 Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2+7}{x-3}$$

Berechnen Sie $f^{(n)}(x)$ allgemein. Bestimmen Sie das Taylorpolynom vom Grad n im Punkt $x_0 = 0$ und schätzen Sie das Restglied im Intervall $[-1, 1]$ ab.

20.5 Das Potential eines Dipols setzt sich aus den Potentialen zweier Punktladungen mit entgegengesetzt gleich großer Ladung q im Abstand $2h$

$$V(x, y, z) = \frac{q}{\sqrt{(x-h)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{q}{\sqrt{(x+h)^2 + y^2 + z^2}}$$

zusammen. Berechnen Sie eine Näherung von V für kleine h mit Hilfe einer Taylorentwicklung bis zur 2. Ordnung.

20.6 Beim Schubkurbelgetriebe gilt (bei geeigneter Wahl des Koordinatensystems) für den Ort des Kreuzkopfes

$$s = p\left[1 + \lambda(1-\cos\alpha) - \sqrt{1-\lambda^2\sin^2\alpha}\right]$$

wobei α den Kurbelwinkel, p die Länge der Pleuelstange und $\lambda = r/p$ das Schubstangenverhältnis (r Radius des Schwungrades) bezeichnet. Finden Sie Näherungsformeln für den Ort s für folgende Fälle:

a) $0 < \lambda << 1$ b) $0 < \lambda << 1$ und $0 \leq \alpha << \pi$.

Hinweis zu a) Taylorentwicklung nach λ, Hinweis zu b) Entwicklung der Funktion aus a) nach α.

20.7 Für das Verhältnis des Staudrucks p relativ zum normalen Luftdruck p_0 an einem Flugzeug gilt folgende Formel in Abhängigkeit von der Mach'schen Zahl $M = \frac{v}{c}$ (dem Verhältnis zwischen der Geschwindigkeit des Flugzeugs und der Schallgeschwindigkeit):

$$\frac{p}{p_0}(M) = \left(1 + M^2 \cdot \tfrac{\kappa-1}{2}\right)^{\frac{\kappa}{1-\kappa}}$$

wobei $\kappa_{\text{Luft}} = 1.4$. Leiten Sie die Näherungsformel $1 - \frac{\kappa}{2}M^2$ mittels Talyorreihenentwicklung nach M (und $M_0 = 0$) her.

20.8 Berechnen Sie das Integral $\int_{-1}^{1} e^{-x^2}dx$, indem Sie den Integranden in eine Taylorreihe um den Punkt 0 entwickeln und gliedweise integrieren. Bis zu welcher Ordnung muss man entwickeln, damit der Fehler kleiner als $0,5 \cdot 10^{-5}$ ist?

Kapitel 21

Fourierreihen

21.1 Approximieren Sie die folgenden Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch Fourier-Polynome dritten Grades und bestimmen Sie den mittleren quadratischen Fehler.

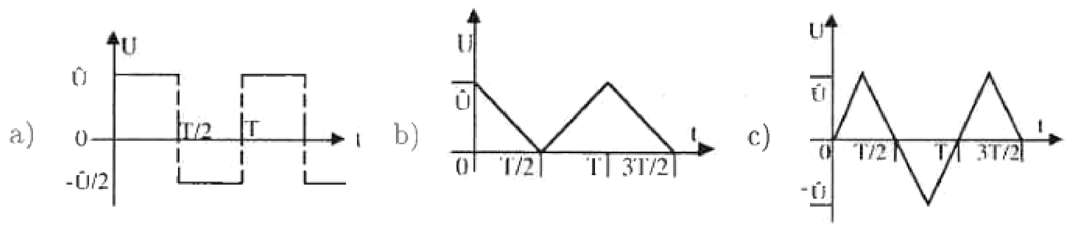
$$\text{a) } f(x) = \sin^2 x \qquad \text{b) } f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } (2k-1)\pi \le x < 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}, \\ 1 & \text{falls } 2k\pi \le x < (2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

21.2 Gegeben sei die 2π-periodische Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welche auf $[-\pi, \pi)$ folgendermaßen definiert ist:

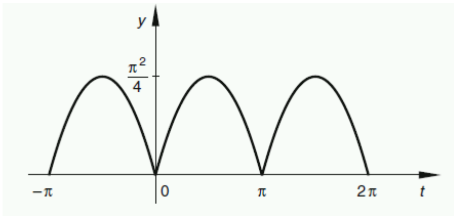
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x \in [-\pi, -\pi/2] \\ -x & \text{für} \quad x \in (-\pi/2, \pi/2) \\ -1 & \text{für} \quad x \in [\pi/2, \pi) \end{cases}$$

Skizzieren Sie die Funktion und berechnen Sie die ersten 4 Glieder ihrer Fourier-Reihe. Zeichnen Sie Funktion und Fourierentwicklung mit dem Computer. Wie verhält sich die Fourierentwicklung in den Unstetigkeitsstellen der Funktion?

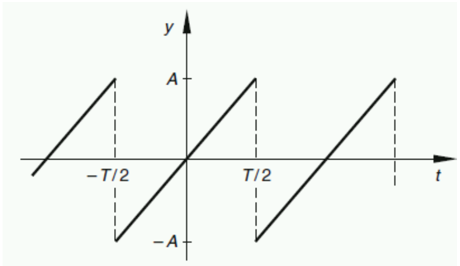
21.3 Approximieren Sie die abgebildeten Spannungsverläufe durch Fourier-Polynome dritten Grades.



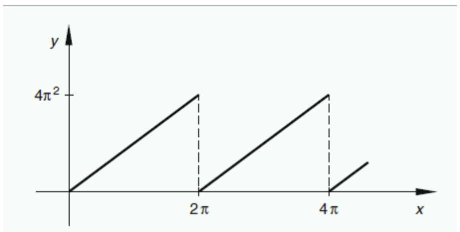
21.4 Bestimmen Sie die Fourierreihe der im Bild dargestellten parabelförmigen Impulsfolge mit Periodendauer $T = \pi$.



21.5 Bestimmen Sie die Fourierreihe der im Bild dargestellten Sägezahnschwingung, die durch die Funktion $f(t) = \frac{2A}{T}t, -\frac{T}{2} \leq t < \frac{T}{2}$ beschrieben wird.



21.6 Bestimmen Sie die Fourierreihe der im Bild dargestellten Sägezahnfunktion mit Periode $T = 2\pi$ und Kreisfrequenz $\omega_0 = 2\pi/T = 1$ in komplexer Form. Wie lautet die reelle Reihenentwicklung?



21.7 Die einweggleichgerichtete Sinusspannung mit $U = 30$ V wird an eine Reihenschaltung mit $R = 2\ k\Omega$ und $L = 10$ H gelegt. Bestimmen Sie unter Verwendung der Fourierreihe den Spannungsabfall am Widerstand. Vergleichen Sie das Amplituden- und Phasenspektrum der angelegten Spannung mit dem des Spannungsabfalls.

21.8 Untersuchen Sie allgemein den Zusammenhang der Fourierkoffizienten zweier 2π-periodischer Funktionen f und g, welche durch $g(x) = f(x) + \alpha$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$ zueinander in Beziehung stehen.

Teil VII

Weiterführendes zur Differential- und Integralrechnung

Kapitel 22

Gewöhnliche Differentialgleichungen

22.1 Berechnen Sie die Lösungen der folgenden separablen Differentialgleichungen mit Anfangsbedingungen und bestimmen Sie den Definitionsbereich der Lösungsfunktionen.

(a) $y'(t)y(t) = \cos(t), \quad y(0) = 1$

(b) $y'(x) = (y(x))^2 e^x, \quad y(1) = 1$

(c) $z'(x) = -xe^{z(x)}, \quad z(1) = 2$

(d) $x'(t)\sin x(t) = \sin t, \quad x(0) = 0$

22.2 Umweltverschmutzung

(a) Ein kleiner See enthält 4×10^7 Liter reines Wasser zur Zeit $t = 0$. Ein verschmutzter Bach leitet 0.67 l Schadstoff in 10 l Wasser pro Sekunde ein. Nehmen Sie an, es erfolgt augenblicklich eine vollständige Vermischung der Substanzen. Gleichzeitig fließt auf der anderen Seite des Sees dieselbe Menge Schmutzwasser wieder ab. Finden Sie eine Funktion die den Zusammenhang zwischen Schadstoffmenge im See und Zeit beschreibt. Welcher Grenzwert ergibt sich? in welcher Zeit erreicht der See 90% seiner Grenzverschmutzung?

(b) Nehmen Sie an , das ausfließende Schmutzwasser fließt in einen zweiten kleineren See, der 10^7 l zur Zeit $t = 0$ reines Wasser enthält. Finden Sie eine Funktion, die den Zusammenhang zwischen der Schadstoffmenge im zweiten See und der Zeit beschreibt. Vergleichen Sie mit a).

22.3 Eine Population $P(t)$ wachse mit folgender Rate

$$\frac{dP}{dt}(t) = k\,P(t)\,(M - P(t)), \quad k, M > 0$$

konstant. Beschreiben Sie die Bevölkerungsentwicklung mit der Zeit. Was ergibt sich für $t \longrightarrow \infty$?

22.4 Ein Objekt der Masse m fällt aus einem Flugzeug, der Luftwiderstand bewirkt eine Kraft entgegengesetzt zur Fallrichtung und proportional zur Geschwindigkeit (Faktor c).

(a) Berechnen Sie Geschwindigkeit und Fallstrecke als Funktion der Zeit. Nach wie langer Zeit hat das Objekt 90% seiner Endgeschwindigkeit erreicht?

(b) Die Endgeschwindigkeit eines Fallschirmspringers ist ungefähr 6.3 m/s. Wie lange braucht er, um 90% davon zu erreichen? Wie weit ist er dann schon gefallen?

22.5 Kurvenscharen:

(a) Finden Sie jene Kurven, für die die Steigung der Tangente in (x, y) gleich $\frac{1+x}{1+y}$ ist.

(b) Gegeben Sei eine Differentialgleichung, z.B. $\frac{dy}{dx} = y^2 - 3y + 2$ mit $y(0) \in [1, 2]$. Man kann sich nun einen Überblick über die Lösungen verschaffen, wenn man in einigen Punkten der (x, y)-Ebene die Tangente aufzeichnet. Insbesondere kann man $\lim_{x\longrightarrow\infty} y(x)$ bestimmen. Tun Sie das.

22.6 Zahlreiche psychologische Untersuchungen beschäftigen sich mit Lernprozessen. Unter diesen ist die Gedächtnisleistung mathematisch besonders einfach zu modellieren. Bezeichne $a(t)$ den angeeigneten Lernstoff zur Zeit t und m den maximal erreichbaren Lernstoff, so können verschiedene Modelle verwendet werden.

(a) Die Lerngeschwindigkeit $\dot{a}(t)$ ist proportional zum noch verbliebenen Lernstoff, der Proportionalitätsfaktor k charakterisiert die individuelle Lernfähigkeit. Lösen Sie die Differentialgleichung und diskutieren Sie $a(t)$ (Skizze).

(b) Die Lerngeschwindigkeit $\dot{a}(t)$ nimmt durch Ermüdung überproportional ab, d.h. k ist durch eine zeitabhängige Funktion $e(t)$ ersetzt, die sinnvollerweise positiv und monoton fallend ist, z.B.

$$e(t) = \frac{k}{1+t}.$$

Lösen Sie die entsprechende Differentialgleichung und skizzieren Sie $a(t)$, vergleichen Sie mit a).

(c) Wir betrachten wieder Modell a), wobei $a(t)$ zusätzlich dem Effekt des Vergessens proportional zum bereits erlerntem Stoff unterliegt. Was ergibt sich nun für $a(t)$ und $\lim_{t\longrightarrow\infty} a(t)$?

22.7 Lösen Sie die folgenden homogenen linearen Differentialgleichungen

a) $y' - 2y = 0$ b) $y'' + 2y = 0$ c) $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$

22.8 Lösen Sie die folgenden homogenen linearen Differentialgleichungen

a) $y'' - 3y' + 2y = 0$ b) $y'' - 2y' + y = 0$

c) $y^{(5)} + 2y^{(4)} + y''' = 0$ d) $y''' - 6y'' + y' + 34y = 0$

22.9 Lösen Sie die folgenden inhomogenen linearen Differentialgleichungen durch Variation der Konstanten.

a) $y' - 2y = \ln(x)$ b) $y' - 2y = e^{2x} \cdot \ln(x)$

Hinweis: Verwenden Sie als Ansatz für die spezielle Lösung $y_s(x) = c(x)y_h(x)$ und lösen Sie die dann auftretende Differentialgleichung für $c(x)$.

22.10 Gegeben Sei die inhomogene lineare Differentialgleichung

$$y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = f(x)$$

(a) Lösen Sie die zugehörige homogene Differentialgleichung.

(b) Bestimmen Sie für die folgenden rechten Seiten $f(x)$ Ansätze für die spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

i. $f(x) = x^2 e^{3x}$
ii. $f(x) = e^x \sin(x)$
iii. $f(x) = 1 + x^2$
iv. $f(x) = x^3 \cos(x)$
v. $f(x) = xe^x$
vi. $f(x) = x^2 e^x + xe^{2x}$

(c) Überprüfen Sie ihre Ansätze mit dem Computer.

22.11 Gegeben Sei die inhomogene lineare Differentialgleichung

$$y''(x) - 2y'(x) + 5y(x) = f(x)$$

(a) Lösen Sie die zugehörige homogene Differentialgleichung.

(b) Bestimmen Sie für die folgenden rechten Seiten $f(x)$ Ansätze für die spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

i. $f(x) = e^x$
ii. $f(x) = x^3 \sin(x)$
iii. $f(x) = 1 + 3x$
iv. $f(x) = e^{2x} \sin(x)$
v. $f(x) = -e^x \cos(2x)$
vi. $f(x) = xe^x(\sin(x) + 2\sin(2x))$

(c) Überprüfen Sie ihre Ansätze mit dem Computer.

22.12 Berechnen Sie die Lösungen der folgenden inhomogenen linearen Differentialgleichungen:

(a) $y'' - 2y' + y = e^x \sin(x)$
(b) $y'' - 2y' + y = xe^x$
(c) $y^{(4)} + 2y'' + y = \sin(x)$
(d) $y'' - 2y' + y = e^{2x} \sin(x)$

22.13 Lösen Sie die folgenden linearen Differentialgleichungen durch Variation der Konstanten:

a) $y' + y = x$.
b) $y' - 2y = \ln x$.

Hinweis: Verwenden Sie als Ansatz für die spezielle Lösung $y_s(x) = c(x)y_h(x)$ und lösen Sie die dann auftretende Differentialgleichung für $c(x)$.

Für (b): Stellen Sie im auftretenden Integral $\int \frac{e^{-2x}}{x} dx$ den Integranden als Potenzreihe dar und integrieren Sie diese Reihe komponentenweise.

22.14 a) Zeigen Sie, dass eine Bernoullische Differentialgleichung der Form

$$y' + p(x)y + q(x)y^n = 0$$

für $n = 0$ eine lineare Differentialgleichung und für $n = 1$ eine separable Differentialgleichung ist, und für sonstiges n durch die Substitution $z := y^{1-n}$ zu einer linearen Differentialgleichung wird.

b) Lösen Sie die Bernoullische Differentialgleichung $y' - y + y^2 = 0$.

22.15 Lösen Sie die homogenen Differentialgleichungen

a) $y'' - y = 0,$

b) $y'' + 3xy' + 3y = 0.$

in Form einer Potenzreihe und finden Sie Näherungslösungen 6. Grades.
Zusatzaufgabe: Finden Sie geschlossene Formeln für a_{2n} und a_{2n+1}?

22.16 Differentialgleichungen der Form $F(x, y', y'') = 0$ lassen sich oft durch die Substitution $z := y'$ lösen. Lösen Sie damit die folgenden Differentialgleichungen.

a) $y'' = 2(y')^2,$

b) $xy'' = (1 - y')$

c) $y'y'' = x.$

22.17 Die Differentialgleichung $R\,\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = E$ beschreibt die Ladung Q an einem Kondensator, wobei R, C, E konstant sind. Finden Sie $Q(t)$ unter der Anfangsbedingung $Q(0) = 0$. Wie lange dauert es, bis die Ladung am Kondensator 99% ihres Grenzwerts erreicht?

22.18 Ein Schwingkreis mit kapazitivem Widerstand C und induktivem Widerstand L wird durch das Differentialgleichungssystem

$$I(t) = -C\,U'(t),\; U(t) = L\,I'(t)$$

für die Spannung $U(t)$ und die Stromstärke $I(t)$ beschrieben. Die Anfangswerte sind $U(0) = U_0$ und $I(0) = I_0$. Lösen Sie es.

22.19 Bestimmen Sie mittels Potenzreihenansatz (Entwicklungspunkt $x_0 = 0$) und Koeffizientenvergleich eine zweiparametrige Schar von Lösungen der linearen Differentialgleichung

$$(x^2 + 3)y''(x) = 2y(x).$$

22.20 Bestimmen Sie mittels Potenzreihenansatz (Entwicklungspunkt $x_0 = 0$) und Koeffizientenvergleich die Lösung der Besselschen Differentialgleichung

$$x^2y''(x) + xy'(x) + (x^2 - n^2)y(x) = 0$$

für $n = 0, 1, 2.$

Kapitel 23

Ausblick: Differentialgeometrie

23.1 Zeigen Sie, dass für parametrisierte Kurven $\vec{x}$, $\vec{y}$ im $\mathbb{R}^3$ folgende Zusammenhänge gelten:

$$\text{a) } \frac{d}{dt}\|\vec{x}(t)\| = \frac{d}{dt}\{\sqrt{\vec{x}(t)\cdot\vec{x}(t)}\} = \frac{\vec{x}(t)\cdot\dot{\vec{x}}(t)}{\|\vec{x}(t)\|} \qquad \text{b) } \frac{d}{dt}\frac{1}{\|\vec{x}(t)\|} = -\frac{\vec{x}(t)\cdot\dot{\vec{x}}(t)}{\|\vec{x}(t)\|^3}$$

23.2 Berechnen Sie für die Bahnkurve $(e^t \cos t, e^t \sin t, e^t)$ den Geschwindigkeitsvektor, die Bahngeschwindigkeit, den Beschleunigungsvektor und den Tangenteneinheitsvektor.

23.3 Ein Teilchen A bewegt sich entlang der Bahnkurve mit $\vec{x}(t) = (\cos t, \sin t)$ und ein Teilchen B mit $\vec{x}(t) = (\cos(\omega t), \sin(\omega t))$, wobei $\omega \geq 1$. Wie weit entfernen Sie sich maximal voneinander? Für welches $t \geq 0$ tritt diese maximale Entfernung das erste Mal auf?

23.4 Welche Punkte der parametrisierten Kurve $\vec{x}(t) = (\cos t, \sin t, -\sin t), t \in [0, 2\pi]$ haben von der Ebene $e : x + y + z = 2$ den kürzesten Normalabstand?

Hinweis: Stellen Sie dazu die Abstandsfunktion $d(t)$ auf und suchen Sie von dieser Funktion das Minimum.

23.5 Die Bahn eines Massenpunktes sei durch $(x, y, z) = (\cos t, -\sin t, -t^2)$ gegeben. Berechnen Sie die Tangential- und die Normalkomponente der Beschleunigung.

23.6 Zykloide:

(a) Ein Rad mit Radius 1 rollt gleichmäßig auf der x-Achse und rotiert eine halbe Umdrehung pro Sekunde. Ein Punkt auf dem „Reifen" hat dann die Koordinaten $\vec{x}(t) = (\pi t - \sin(\pi t), 1 - \cos(\pi t))$. Berechnen Sie die Bahngeschwindigkeit des Punktes, insbesondere, wenn y maximal ist.

(b) Ein Stück Lehm auf einem Fahrradreifen folgt der Zykloide $\vec{x}(t) = (6t - 3\sin(2t), 3 - 3\cos(2t))$. Zur Zeit $t = \pi/2$ fliegt der Schmutz weg. In welche Richtung fliegt er?

23.7 Berechnen Sie für die Bahnkurve $(e^t \cos t, e^t \sin t, e^t)$ den Krümmungsvektor, die Krümmung, den Hauptnormaleneinheitsvektor, den Mittelpunkt des Krümmungskreises und den Krümmungsradius.

23.8 Berechnen Sie für die Bahnkurve $(e^t \cos t, e^t \sin t, e^t)$ den Binormaleneinheitsvektor, den Torsionsvektor und die Torsion.

23.9 Gegeben ist die räumliche Spirale

$$\vec{x}(t) = (t\cos t, t\sin t, 2t), \quad t \geq 0.$$

Berechnen Sie das begleitende Dreibein. Wie groß sind Krümmung und Torsion im Ursprung? Welche Kurve ergibt sich in der Projektion auf die Ebene $z = 0$? Berechnen Sie mit dem Computer die Torsion der Spirale allgemein in Abhängigkeit von t. Nimmt die Torsion mit wachsendem t zu oder ab?

Teil VIII

Mehrdimensionale Differentialrechnung

Kapitel 24

Grundlagen mehrdimensionaler Differentialrechnung

Kapitel 25

Differentialrechnung reellwertiger Funktionen

25.1 (a) Berechnen Sie die Norm von $\vec{x} = (1, 2, -1, 3, 1)$.

(b) Geben Sie die 0.4-Umgebung von $\vec{x}$ an. Liegt $\vec{y} = (0.9, 2.1, -1, 3.2, 0.8)$ in dieser Umgebung?

(c) Bestimmen Sie die größte ϵ-Umgebung von $\vec{x}$, in der $\vec{y}$ nicht enthalten ist.

(d) Bestimmen Sie von $D = [0, 1[\, \times\,]0, 2]$ das Innere, den Rand und den Abschluss.

(e) Ist die Menge $D = \{(x, y) \mid ax^2 + by^2 \leq 1\}$ abgeschlossen?

(f) Für welche a, b ist die Menge D beschränkt bzw. kompakt? Geben Sie die Schranken an.

25.2 Gegeben sei jeweils eine Funktionsvorschrift und ein ausgezeichneter Punkt.

(a) $f(x, y) = x^y$, Punkt $(0, 0)$

(b) $f(x, y) = x \cos y$, Punkt $(0, 0)$

(c) $f(x, y) = x/(y - 1)$, Punkt $(0, 1)$

Kann man dem Punkt einen Funktionswert zuordnen, sodass eine stetige Funktion entsteht?

25.3 Berechnen Sie alle partiellen Ableitungen von

(a) $f(x, y) = x^2y - xy^3$

(b) $f(x, y, z) = e^{xy} + \sin(xz^2) - \cos(z \ln(x))$

(c) $f(x, y, z) = g(x, y)^{h(z)}$ (Hinweis für $\frac{df}{dz}$: $a^b = e^{b \ln(a)}$.)

25.4 Zeigen Sie, dass $g(x, t) = 2 + e^{-t} \sin x$ die Wärmegleichung

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$$

erfüllt, wobei g die Temperatur zur Zeit t an der Stelle x bezeichnet. Wie sieht die Funktion aus? Was passiert mit $g(x, t)$ für $t \to \infty$?

25.5 Berechnen Sie die Richtungsableitungen der Funktionen

(a) $f(x, y) = x^2 - xy$ im Punkt $(1, 1)$ in Richtung $(2, -1)$.

(b) $f(x, y, z) = \sin(x) - y\cos(z)$ im Punkt $(0, 1, 0)$ in Richtung $(1, -1, 1)$.

25.6 Zwei Orientierungsläufer bewegen sich in einem Gelände, das durch

$$z(x, y) = \sqrt{2}(y\sqrt{x} + \frac{x}{2} - y)$$

gegeben ist, wobei die x-Achse von Westen nach Osten zeigt und die y-Achse von Süden nach Norden. Der erste Läufer ist eben am Kontrollpunkt $(9, 5, z_1)$ angekommen und muss nun Richtung Nordosten weiterlaufen. Der zweite Läufer befindet sich in $(16, 4, z_2)$ und hat sein nächstes Ziel in Richtung Nordwesten. Wie groß sind die Steigungen, die die Läufer im Moment vor sich haben, wenn sie die angegebenen Richtungen einhalten?

25.7 Bestimmen Sie den Gradienten sowie die Tangentialebene der Funktion $f(x, y) := -x^2 - y^2$ im Punkt $\vec{x_0} = (1, -1)$.

25.8 Approximieren Sie die Funktion

(a) $f(x, y) = x^2 - xy$ im Punkt $(1, 1)$,

(b) $f(x, y, z) = x \sin y + ye^z$ in $(1, 0, 0)$,

durch Tangentialhyperebenen.

25.9 Seien f und g differenzierbare Funktionen. Sei nun $\varphi(x, t) = f(x - t) + g(x + t)$. Zeigen Sie, dass φ die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$

erfüllt. Veranschaulichen Sie φ mit $f(x) = \sin(2x)$ und $g(x) = 2\sin x$ einerseits durch Plotten und andererseits durch Animation von Plot-Graphiken für verschiedene t am Computer.

25.10 Eine Ente schwimmt entlang der Kurve $\vec{x}(t) = \Big((3 + t)^2, 2 - t^2\Big)$, während die Wassertemperatur durch die Formel $T(x, y) = e^x(x^2 + y^2)$ gegeben ist. Berechnen Sie die Temperaturänderung dT/dt entlang der Kurve auf zwei verschiedene Arten, mit Hilfe der Kettenregel und durch direktes Einsetzen und anschließendes Differenzieren.

25.11 Die Kapazität einer Anordnung eines Leiters (Radius R) und einer Ebene parallel dazu im Abstand h wird aus

$$C = 2\pi\epsilon_0 \left(\ln \left(\frac{h}{R} + \sqrt{\left(\frac{h}{R}\right)^2 - 1} \right) \right)^{-1}$$

berechnet. Ein Leiter von 0.57 cm Radius ist in 3 cm Abstand von einer Leiterplatte angebracht. Durch Wärmezufuhr wird der Radius des Leiters um 0.02 cm erhöht und der Draht so gebogen, dass der endgültige Abstand mit 3.15 cm angenommen werden kann. Wie ändert sich die Kapazität?

25.12 Nehmen Sie an, ein Berg habe die Form eines elliptischen Paraboloids

$$z(x,y) = 1 - \frac{x^2}{10} - \frac{y^2}{20}.$$

Sie befinden sich im Punkt $(1,1,z)$ und legen eine Kugel auf den Boden. Wohin rollt sie? Sie wollen weiters eine Straße mit einer Steigung von 3% bauen. In welche Richtung führt sie?

25.13 Gegeben sei das Gleichungssystem $\cosh x - 3x\tan y = 1$, $xy = 2\ln x \ln y$. Wählen Sie einen geeigneten Startwert und führen Sie einen Schritt des Newton-Raphson-Verfahrens durch. Vergleichen Sie die gefundene Näherung mit der computerunterstützten numerischen Lösung.

25.14 Eine quaderförmige Box soll einen Liter fassen. Der Boden kostet b, die Seiten s, der Deckel d €/dm^2. Welche Dimensionen minimieren die Kosten?

25.15 Die Temperatur auf der Oberfläche eines kugelförmigen Planetoiden (Mittelpunkt $(0,0,0)$, Radius 1) ist durch die Funktion

$$T(x,y,z) = x - 2y + 2z + 120$$

gegeben. Bestimmen Sie die Punkte maximaler und minimaler Temperatur auf der Planetoidenoberfläche.

25.16 Ein trapezförmiger Kanal soll so gebaut werden, dass bei konstantem Querschnitt A (gleichschenkliges Trapez) der benetzte Umfang möglichst klein ist. Der Kanal ist charakterisiert durch die Bodenbreite x, die Wassertiefe y und den Böschungswinkel θ, gemessen mit der Senkrechten. Zeigen Sie, dass für optimale Wassertiefe gilt

$$y^2 = \frac{A\cos\theta}{2-\sin\theta}, \text{ wobei } \theta = 30^\circ.$$

Lösen Sie auch dazu das duale Problem: Maximaler Inhalt bei vorgegebenem Umfang. In welchem Zusammenhang stehen die Lösungen?

25.17 Ammoniak NH_3 soll bei konstanter Temperatur T und Druck p produziert werden. N_2, H_2 und NH_3 unterliegen den Partialdrucken u, v und w, die die Bedingungen

$$u + v + w = p \quad \text{und} \quad w^2 = cuv^3$$

($c > 0$ konstant) erfüllen. Um möglichst viel Ammoniak zu produzieren, muss w maximal werden. Wie groß ist das maximale w?

25.18 Bestimmen Sie die Extremwerte der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = x^3 + 3x^2y + 3y^2 - 6y.$$

25.19 Zerlegen Sie 120 in drei nichtnegative Summanden, sodass die Summe aus den Produkten jeweils zweier Summanden maximal wird. Lösen Sie die Aufgabe sowohl mit als auch ohne Lagrange'sche Multiplikatoren.

25.20 Ein Draht der Länge L wird in drei Teile geteilt. Das erste Stück wird zu einem Quadrat gebogen, das zweite zu einem Kreis und das dritte zu einem gleichseitigen Dreieck. Auf welche Weise erhält man durch diese Prozedur eine minimale und wie eine maximale Gesamtfläche? Lösen Sie mittels Lagrange-Multiplikatoren.

25.21 Bestimmen Sie die Extremwerte der Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = 1 + yx^2$$

unter der Nebenbedingungen $x^2 + y^2 = 1$ durch

- Kreis-Parametrisierung der Nebenbedingung,
- Auflösen der Nebenbedingung nach y,
- Einsatz der Lagrange-Multiplikator-Methode.

Kapitel 26

Differentialrechnung vektorwertiger Funktionen

26.1 Berechnen Sie die Funktionalmatrix von

(a)

$$\vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} e^{x_1}\sin(x_2) \\ e^{x_1}\cos(x_2) \\ e^{x_1} \end{pmatrix}$$

(b)

$$\vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1x_2x_3 \\ 2{x_1}^2 - x_2x_3 \\ x_1 + x_2^2x_3 \end{pmatrix}$$

26.2 Approximieren Sie $\vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} e^{x_1}\sin(x_2) \\ e^{x_1}\cos(x_2) \\ e^{x_1} \end{pmatrix}$ bei $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ durch eine lineare Mannigfaltigkeit.

26.3 Berechnen Sie für

$$\vec{v} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} e^{x_1}\sin(x_2) \\ e^{x_1}\cos(x_2) \\ e^{x_1} \end{pmatrix} \text{ und } \vec{w} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y_1^2 + y_2^2 \\ y_2^2 - y_3^2 \end{pmatrix}$$

mit und ohne Kettenregel die Ableitung

$$\frac{\partial \vec{w} \circ \vec{v}}{\partial \vec{x}}.$$

26.4 Gegeben sind folgende Vektorfelder im $\mathbb{R}^3$. Beschreiben Sie die Feldvektoren und bestimmen Sie die Divergenz und Rotation

(a)

$$\vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} y \\ -x \\ z(x^2 + y^2) \end{pmatrix}$$

(b)

$$\vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x^2y \\ xy^2 \\ z^2 \end{pmatrix}$$

26.5 Beschreiben Sie die Feldvektoren des Vektorfelds, indem Sie Divergenz und Rotation bestimmen, und versuchen Sie das Feld als Gradientenfeld darzustellen.

(a)

$$\vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x(x^2+y^2) \\ y(x^2+y^2) \\ z^3 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 + \ln z \\ yz^{-1} \end{pmatrix}, \quad z > 0$$

(c)

$$\vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} (x^2+y^2+z^2)x^{-2}z^{-1} \\ -2yx^{-1}z^{-1} \\ (y^2-x^2-z^2)x^{-1}z^{-2} \end{pmatrix}, \quad x, z \neq 0$$

26.6 Gegeben ist das folgende Vektorfeld im $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{v}(\vec{x}) = \frac{1}{x^2+y^2} \begin{pmatrix} 4xy \\ -4x^2 \\ 2x^2 - xy \end{pmatrix}.$$

Das Vektorfeld ist in einem räumlichen Gebiet, das die z-Achse nicht enthält, zu betrachten. Zeigen Sie, dass der Vektor $\vec{v}$ im Punkt $P = (x_0, y_0, z_0)$ den Zylinder $x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2$ berührt und zur Ebene $x/4 + y/2 + z = 1$ parallel ist. Beschreiben Sie die Feldvektoren und die Feldlinien, finden Sie eine Parameterdarstellung für die Feldlinien, bestimmen Sie Divergenz und Rotation.

26.7 Gegeben ist folgendes Vektorfeld im $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{v}(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+1}} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Beschreiben Sie die Feldvektoren, bestimmen Sie Divergenz und Rotation und zeigen Sie, dass die Feldlinien Schraublinien der Form

$$\vec{x}(t) = (r\cos(t), r\sin(t), a + ht)$$

mit $r > 0$, $h =?$ und $a \in [0, 2\pi)$ sind.

26.8 Überprüfen Sie, ob die Vektorfelder $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

(a)
$$\vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} xy \\ xz - y \\ x + y - yz \end{pmatrix}$$

(b)
$$\vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 2xy - yz \\ x^2 - xz \\ 2z - xy \end{pmatrix}$$

Gradientenfelder passender Funktionen sind und finden Sie gegebenenfalls diese Funktion.

Teil IX

Mehrdimensionale Integralrechnung

Kapitel 27

Integralrechnung reellwertiger Funktionen

27.1 Berechnen Sie das Integral sowohl in der Originalform als auch mit vertauschter Integrationsreihenfolge. Skizzieren Sie dazu den Integrationsbereich.

$$\int_0^1 \int_y^{y^2+1} x^2 y \, dx \, dy.$$

27.2 Berechnen Sie das Volumen unter der Funktion

$$f(x, y) = 1 + \sin\left(\frac{\pi y}{2}\right) + x$$

über dem Parallelogramm mit den Eckpunkten $(0, 0), (1, 2), (2, 0), (3, 2)$.

27.3 Berechnen Sie mittels Polarkoordinaten das Volumen unter der Funktion

$$f(x, y) = 4x^2 + 3y^2 + 27$$

über dem Kreis mit Radius 2 und Mittelpunkt (0,1).

27.4 Mittels $\vec{p}\colon [0, r] \times [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\vec{p}(t, \phi, \theta) = ((R + t \sin(\theta)) \cos(\phi), (R + t \sin(\theta)) \sin(\phi), t \cos(\theta))$$

ist die Parametrisierung eines Torus mit Radien $R > r > 0$ gegeben.

a) Berechnen Sie das Volumen des Torus.

b) Berechnen Sie das Trägheitsmoment I_z bzgl der z-Achse bei konstanter Dichte ρ.

27.5 Sei $\mathcal{K} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4,\ x \leq 0,\ y \leq 0,\ 0 \leq z \leq xy\}$. Berechnen Sie das Volumen des Körpers $\mathcal{K}$, einmal ohne Substitution und einmal mit Transformation auf Zylinderkoordinaten.

27.6 Berechnen Sie das Volumen zwischen den Funktionen

$$f(x,y) = 1 + 2x \quad \text{und} \quad g(x,y) = -6 - x - 3y$$

über dem Bereich zwischen der y-Achse und $x = 4 - y^2$.

27.7 Berechnen Sie

$$\int\int\int \sin(z)\, dV,$$

wobei V eine dreiseitige Pyramide mit den Seitenflächen $x = 0, y = 0, z = 0$ und $x + y + 2z = 1$ bezeichnet.

27.8 Berechnen Sie für ein Dreieck begrenzt von $x = 0, y = 0, 3x + 4y = 24$ mit konstanter Dichte ρ das Trägheitsmoment bezüglich der y-Achse.

27.9 Eine Parkhausauffahrt hat die Gestalt einer Wendelfläche

$$\vec{x}(t,r) = (r\cos t, r\sin t, t),$$

wobei $5m \leq r \leq 9m$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Berechnen Sie den Flächeninhalt und vergleichen Sie ihn mit der Fläche des Kreisringes, der den Grundriss der Fläche bestimmt.

27.10 Berechnen Sie das Kurvenintegral des Skalarfeldes $f(\vec{x}) = x_2 x_3$ längs der Kurve

$$\vec{x} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}_3, t \mapsto (\cos t, \sin t, \cos t).$$

Kapitel 28

Integralrechnung vektorwertiger Funktionen

28.1 Berechnen Sie mit Integralrechnung die Oberfläche eines Rotationskörpers um die x-Achse mit erzeugender Funktion

$$\vec{x}(t) = (3\cos(t), 3\sin(t)),\ t \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

28.2 Berechnen Sie für die folgenden Kraftfelder

$$\vec{f}_1(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 - y \\ x + y^2 \end{pmatrix} \text{N/m}^2, \qquad \vec{f}_2(x,y) = \begin{pmatrix} x^3 - 3xy^2 \\ y^3 - 3yx^2 \end{pmatrix} \text{N/m}^2$$

die Kurvenintegrale auf jeweils drei verschiedenen Wegen zwischen dem Punkt $P = (0,1)$ und dem Punkt $Q = (1,2)$.
1. Weg: Gerade PQ
2. Weg: Parabelfunktion $\vec{x}(t) = (t, t^2 + 1),\ 0 \leq t \leq 1$
3. Weg: Zwei achsenparallele Wegstücke
Hinweis: 1. Hauptsatz für Kurvenintegrale, wenn möglich

28.3 Berechnen Sie für die Kraftfelder

$$\vec{f}_1(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2xy \\ y^2 \\ z^2 \end{pmatrix} \text{N/m}^2,\ \vec{f}_2(x,y,z) = \begin{pmatrix} y^2 \\ 2xy \\ z^2 \end{pmatrix} \text{N/m}^2$$

die Kurvenintegrale auf jeweils zwei verschiedenen Wegen zwischen dem Koordinatenursprung und dem Punkt $P = (a,b,c)$.

1. Weg: Gerade $\vec{x}(t) = t \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, 0 \leq t \leq 1$

2. Weg: Räumliche Potenzfunktion $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} a\,t \\ b\,t^2 \\ c\,t^4 \end{pmatrix}, 0 \leq t \leq 1$

Hinweis: Erster Hauptsatz für Kurvenintegrale, wenn möglich.

28.4 Gegeben ist folgendes Vektorfeld im $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{v}(\vec{x}) = \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} 4xy \\ -4x^2 \\ 2x^2 - xy \end{pmatrix}.$$

Welche Arbeit wird von der Kraft $\vec{v}$ verrichtet, wenn sich ein Massenpunkt auf der Ellipse

$$x^2 + y^2 = 1,\ 2y + z = 2,\ x \leq 0$$

vom tiefsten zum höchsten Punkt der Ellipse bewegt? Welche Arbeit wird auf einer geradlinigen Verbindung dieser beiden Punkte verrichtet?

28.5 Gegeben ist folgendes Vektorfeld in $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} a^2yz \\ -b^2xz \\ 2xyz \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Berechnen Sie $\int_{\mathcal{F}} \vec{v}\ d\vec{F}$, wobei $\mathcal{F}$ die Oberfläche des Körpers

$$B = \{(x, y, z)|x, y \geq 0, 0 \leq z \leq 1, x^2/a^2 + y^2/b^2 \leq 1\}$$

ist, mithilfe des Gaußschen Integralsatzes.

28.6 Gegeben ist folgendes Vektorfeld im $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x^2y \\ xy^2 \\ z^2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie

$$\int_{\mathcal{F}} \vec{v} \cdot d\vec{F},$$

wobei $\mathcal{F}$ die Oberfläche der Halbkugel $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ bezeichnet, mit und ohne (mit Kugelkoordinaten) Gaußschem Integralsatz.

28.7 Gegeben ist folgendes Vektorfeld im $\mathbb{R}_3$:

$$\vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 2x^2yz \\ 2xy^2z \\ -xyz \end{pmatrix}.$$

Demonstrieren Sie an dem Paraboloid, das von den zwei Flächen $x^2 + y^2 = z$ und $z = 1$ begrenzt wird, die Gültigkeit des Gaußschen Integralsatzes.

28.8 Gegeben ist folgendes Vektorfeld im $\mathbb{R}_3$:

$$\vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x - y \\ x + y \\ z \end{pmatrix}.$$

a) Demonstrieren Sie an dem auf der Spitze in $(0, 0, 0)$ stehenden Drehkegel um die z-Achse mit der Höhe 1 und dem Grundkreisradius 1 die Gültigkeit des Gaußschen Integralsatzes.

b) Bestätigen Sie für den Kreis $x^2 + y^2 = 1, z = 1$ und die von ihm umschlossene Kreisscheibe die Gültigkeit des Stokesschen Integralsatzes.

28.9 Verifizieren Sie den Satz von Green an der Fläche, die von den Kurven $y = x^2$ und $y = x$ begrenzt wird, und

$$\vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} xy \\ x \end{pmatrix}.$$

28.10 Gegeben ist eine Fläche $\mathcal{S}$ durch $z = 8 - (x^2 + y^2)^{3/2}$ und $x^2 + y^2 \leq 4$ und ein Vektorfeld

$$\vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} y^3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Skizzieren Sie $\mathcal{S}$ und berechnen Sie $\int_{\mathcal{S}} \operatorname{rot} \vec{v}\, d\vec{F}$.

28.11 Gegeben ist folgendes Vektorfeld im $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} y - z \\ z - x \\ x - y \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie direkt und mit Hilfe des Integralsatzes von Stokes $\int_E \vec{v} \cdot d\vec{x}$, wobei E die durch $x^2/4 + y^2/9 = 1$ und $z = 0$ beschriebene Ellipse bezeichnet.

Teil X

Programmieraufgaben

Kapitel 29

Programmieraufgaben zu „Grundlagen“

29.1 Zeigen Sie mithilfe einer Wahrheitstabelle, dass die beiden Aussageformeln

$$(A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow C \quad \text{und} \quad (A \wedge B) \vee C$$

logisch äquivalent sind.

29.2 Erzeugen Sie die Mengen

$$A = \{i^2 : 20 \leq i \leq 40 \wedge i \in \mathbb{N}\},$$
$$B = \{i^3 : 1 \leq i \leq 20 \wedge i \in \mathbb{N} \wedge i \text{ ungerade}\}.$$

(a) Berechnen Sie die Vereinigung der Mengen.

(b) Berechnen Sie den Durchschnitt der Mengen.

(c) Bilden Sie die Differenzmengen $A \setminus B$ und $B \setminus A$.

(d) Bestimmen Sie die Mächtigkeit aller genannten Mengen. Ist die Mächtigkeit der Menge A gleich der Summe der Mächtigkeiten des Durchschnitts und einer der Differenzmengen?

29.3 (a) Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen $x \mapsto \sin(x)$, $x \mapsto \sin(x + 0.2)$, $x \mapsto \cos(x/2)$, $x \mapsto \cos(x)$, $x \mapsto \cos(2x)$ und $x \mapsto \tan(x)$ in einem gemeinsamen Diagramm.
Beschriften Sie die Funktionen.

(b) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion $(x, y) \mapsto \sqrt{1 - \frac{1}{2}x^2 - 2y^2}$ für $(x, y) \in [-2, 2] \times [0, 1]$.

Beschriften Sie die Achsen.
Hinweis: Zum Plotten von Funktionen kann entweder `sympy.plotting` oder die Bibliothek `matplotlib.pyplot` sowie für Aufgabe (b) der Befehl `contour3D` verwendet werden.

29.4 a) Lösen Sie folgende Ungleichungen in $\mathbb{R}$:

$$\frac{x-2}{2x-3} < \frac{3x+4}{x} \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{(4x+5)^2}{x-3} < x+3.$$

Verwenden Sie dazu `solveset`.

b) Berechnen Sie die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, für die beide Ungleichungen gelten.

29.5 Berechnen Sie für die folgenden komplexen Zahlen die arithmetische Form $a + ib$:

a)
$$(2+3i)(3-i)(4+3i) - (5-i)^2(4+3i) - 12(4-i) - (3-i).$$

b)
$$\frac{1-i}{1+i} + 5 - 3i.$$

c)
$$\frac{4-3i}{4+3i} - (3+2i)^2.$$

d)
$$\frac{(2+3i)(-2-i)}{(3+i)(4-4i)}.$$

e)
$$\frac{(3+2i)^2(2-i)}{(-1+3i)^2}.$$

f)
$$\frac{2-i}{5+i} - \frac{1+i}{1+5i} - \frac{1}{i}.$$

Stellen Sie die Ergebnisse in der komplexen Zahlenebene graphisch dar. Bestimmen Sie jeweils Realteil, Imaginärteil, Argument und Absolutbetrag.

Kapitel 30

Programmieraufgaben zu „Lineare Algebra - Teil 1"

30.1 (a) Schreiben Sie eine Funktion `my_lorentz(v, B)`, welche mithilfe der Formel für die Lorentz-Kraft

$$F_L = q(\vec{v} \times \vec{B}) \tag{30.1}$$

jene Kraft berechnet, die ein durch ein homogenes Magnetfeld $\vec{B} \in \mathbb{R}^3$ bewegtes, geladenes Teilchen der Ladung $q = 1.602 \cdot 10^{-19}$ As mit der Geschwindigkeit $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ erfährt. Testen Sie Ihre Funktion mit dem homogenen Magnetfeld $\vec{B} = (1, 2, -1)$ und der Geschwindigkeit $\vec{v} = (1, 1, 1)$.

(b) Schreiben Sie eine Funktion `my_dist(a, b, c)`, die den Abstand eines Punktes c von einer durch zwei Punkte a und b gegebenen Gerade und die Koordinaten des FußPunktes berechnet. Testen Sie Ihre Funktion mit der Gerade gegeben durch die Punkte $(1, 2, -1), (0, 0, 1)$ und dem Punkt $(3, 3, 1)$.

30.2 Gegeben ist folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 6, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= -3, \\ -x_1 - 4x_2 + 3x_3 &= 14. \end{aligned}$$

a) Bringen Sie das Gleichungssystem in die Form $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$, indem Sie A, $\vec{x}$ und $\vec{b}$ definieren.

b) Treffen Sie eine Aussage zur Lösbarkeit des Systems, indem Sie die dazu nötigen Matrix-Ränge ermitteln.

c) Lösen Sie das Gleichungssystem in Matrixform und geben Sie die Lösung in der Form

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

an. Verwenden Sie nicht `linsolve` oder Ähnliches, sondern finden Sie die Lösung durch Umformen der Gleichung $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$.

30.3 Erstellen Sie eine Funktion `my_det[A, i, m]` zur Berechnung der Determinante einer Matrix A gemäß dem Laplaceschen Entwicklungssatz.

Die Eingabe soll neben einer $n \times n$-Matrix A die Angabe einer Spalte oder Zeile i ermöglichen, und ein String `m` ("`row`" oder "`col`") soll bestimmen, ob nach der i-ten Zeile oder i-ten Spalte entwickelt werden soll. Die Ausgabe soll neben der Determinante selbst auch die Determinanten der n durch die Spalten- und Zeilenelemente bestimmten Unterdeterminanten umfassen. Die Unterdeterminanten sollen jeweils durch rekursiven Aufruf von `my_det[]` bestimmt werden, bis nur noch die Determinante einer 1×1-Matrix übrig bleibt. Falls beim rekursiven Aufruf $i > n$ auftritt, so soll $i = n$ verwendet werden.

Testen sie anschließend ihr Programm, um zu bestimmen, für welche Werte von h die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 \\ h & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h \end{pmatrix}$$

invertierbar ist.

Kapitel 31

Programmieraufgaben zu „Reelle Funktionen in einer Variablen“

31.1 Berechnen Sie die ersten 20 Glieder der Folgen

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{n^2 + 9n + 4}{\sqrt[4]{n^9} + 2n + 1}, \\ b_n &= (2^n + (-2)^n)3^{-n}, \\ c_n &= \frac{1{,}01^n}{n}, \\ d_n &= \sqrt{n}(\sqrt{n+10} - \sqrt{n}), \\ e_n &= \left(10 + \frac{1}{\sqrt[10]{n}}\right)^{10} \end{aligned}$$

und stellen Sie diese graphisch dar. Berechnen Sie die Grenzwerte der Folgen, falls existent.

31.2 a) Die rationale Funktion

$$f(x) = \frac{x^4 - 7x^3 + 15x^2 - 21x + 36}{x^2 - 7x + 6}$$

kann in der Form $f(x) = h(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$ dargestellt werden, wobei $h(x)$ der ganze Anteil von $f(x)$, $r(x)$ der Rest der Division des Zählers von $f(x)$ durch den Nenner von $f(x)$ und $q(x)$ der Nenner von $f(x)$ ist. Finden Sie $h(x)$ und $r(x)$.

b) Zeichnen Sie den Graphen von $f(x)$ und $h(x)$ in einem geeigneten Intervall.

31.3 Zerlegen Sie die rationale Funktion

$$\frac{x^4 - 3x^2 + x + 5}{x^{11} - 3x^{10} - x^9 + 7x^8 - 9x^7 + 23x^6 - 11x^5 - 3x^4 - 4x^3 - 32x^2 - 16}$$

in Partialbrüche, ohne den Befehl `apart` zu verwenden.

Hinweis: Sie können die Befehle `roots` und `solve_undetermined_coeffs` verwenden.

31.4 Gegeben ist die Überlagerung der gleichfrequenten Schwingungen

$$2\sin(t + 0{,}3) + 5\cos(t + \frac{\pi}{4}) + \cos(t - 3{,}1).$$

(a) Die Schwingung kann in die Form

$$a\sin(t) + b\cos(t)$$

gebracht werden. Berechnen Sie a und b.

Hinweis: Sie können die Befehle `expand` und `collect` verwenden.

(b) Ermitteln Sie Betrag und Phase der Schwingung und bringen Sie sie in die Form

$$A\cos(\omega t + \alpha).$$

Verwenden Sie darin `evalf` zur Dezimaldarstellung der Konstanten.

(c) Zu welchen Zeitpunkten $t \in [0, 2\pi]$ nimmt die Schwingung den Wert 0,5 an? Kontrollieren Sie Ihre Ergebnisse, indem Sie die Schwingung zeichnen.

Hinweis: Verwenden Sie die Form aus Punkt b) und den Befehl `solveset`.

Kapitel 32

Programmieraufgaben zu „Differentiation und Integration von Funktionen einer Variablen“

32.1 Berechnen Sie mit Hilfe von SymPy und finden Sie die Definitionsbereiche mittels `continuous_domain`:

$$\frac{\partial}{\partial x} x^x \ln(x)$$

$$\frac{\partial^4}{\partial z^4} \sin(z)\cos(z)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{x^3 y - x y^3}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \frac{x^3 y - x y^3}{x^2 + y^2}$$

32.2 a) Erstellen Sie eine Funktion `my_min(f,x1,x2)`, die den Funktionsterm einer mathematischen Funktion $f(x)$ und die Stellen x_1, x_2 einliest und das Minimum von f auf dem Intervall $[x_1, x_2]$ zurückgibt (Stelle und Wert). Untersuchen Sie dazu nur die Ableitung und die Intervallränder. Verwenden Sie nicht `sympy.calculus.util.minimum` oder Ähnliches.

b) Erstellen Sie eine Funktion `my_point_discuss(f,x0)`, die den Funktionsterm einer mathematischen Funktion $f(x)$ und die Stelle x_0 einliest und entsprechend eine der folgenden Antworten zurückgibt (ergänzen Sie die Liste der Antworten falls nötig):

```
"f steigt bei x0"
"f fällt bei x0"
"f hat lokales Maximum bei x0"
"f hat lokales Minimum bei x0"
"f hat Wendepunkt bei x0"
```

Testen Sie die Funktionen von a) und b) an den Funktionen:

$$f(x) = e^{-x^2}, \quad f(x) = -x, \quad f(x) = e^x,$$

$$f(x) = x^4, \qquad f(x) = x^5, \qquad f(x) = 1$$

mit: $x_0 = 0,\ x_1 = -1,\ x_2 = 1$.

32.3 Implementieren Sie ein Newton-Iterationsverfahren zur näherungsweisen Berechnung von $\sqrt[z]{a}$ für gegebenes a und z. Testen Sie an $\sqrt[5]{243}$ mit einem geeigneten Startwert ungleich 3 und unter tabellarischer Ausgabe der Zwischenergebnisse.

32.4 Berechnen Sie mit Hilfe von SymPy und veranschaulichen Sie das Integral durch eine entsprechende Visualisierung.

$$\int_0^\pi x \sin(x)\ \mathrm{d}x$$

$$\int \frac{x^2+1}{x+1}\ \mathrm{d}x, \qquad x \in (-1, \infty)$$

$$\int \sin(x)\cos(x)\ \mathrm{d}x$$

$$\int e^{-x^2}\ \mathrm{d}x$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$$

32.5 Erstellen Sie eine Funktion `my_spline()`, die eine geordnete Liste an Punkten $(x_1, x_2, ..., x_n)$ einliest und einen dazugehörigen Spline $B(t)$ zurückgibt. Testen Sie Ihre Funktion anhand der Punktepaare $(0,0), (\frac{\pi}{2}, 1), (\pi, 0), (\frac{3\pi}{2}, -1), (2\pi, 0)$ und visualisieren Sie die Ergebnisse im Vergleich zur dadurch approximierten Funktion $sin(x)$. Verwenden Sie dazu keine vorhandene Spline-Funktionalität (wie `sympy.interpolating_spline` oder `scipy.interpolate`).

32.6 a) Erstellen Sie eine Funktion `my_volume()`, die den Funktionsterm einer mathematischen Funktion $f(x)$ und die Stellen x_1, x_2 einliest und das Volumen von f rotiert um die x-Achse auf dem Intervall $[x_1, x_2]$ zurückgibt.

b) Erstellen Sie eine Funktion `my_hull()`, die den Funktionsterm einer mathematischen Funktion $f(x)$ und die Stellen x_1, x_2 einliest und die Mantelfläche von f rotiert um die x-Achse auf dem Intervall $[x_1, x_2]$ zurückgibt.

Testen Sie die Funktionen von a) und b) an den Funktionen:

$$f(x) = x - 1 \qquad 0 \leq x \leq 5$$

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \qquad -r \leq x \leq r$$

$$f(x) = 1/x \qquad 1 \leq x$$

Fun fact: Die Ergebnisse der letzteren Funktion bilden das “Painter’s Paradox”.

Kapitel 33

Programmieraufgaben zu „Lineare Algebra - Teil 2“

33.1 Gegeben sei die lineare Abbildung $A : V \to W$, wobei bekannt sei, dass für die Dimension des Kerns $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = 1$ gilt.

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie im ersten Schritt den Parameter α, indem Sie die Determinante von A berechnen. Setzen Sie diesen Wert dann für α in A ein.

Berechnen Sie nun:

- den Kern der Abbildung A,
- den Rang der Abbildung A,
- die Eigenwerte der Abbildung A,
- Eigenvektoren zu den jeweiligen Eigenwerten.

33.2 Gegeben seien die Vektoren

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v_4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass es sich bei $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ um zwei orthogonale Vektoren handelt und dass die Vektoren linear unabhängig sind.

(b) Finden Sie ausgehend von den obigen Vektoren $\vec{v_i}$ mittels Gram-Schmidt'schem Orthogonalisierungsverfahren eine orthogonale Basis des $\mathbb{R}^4$. Verwenden Sie dazu nicht den Befehl `sympy.GramSchmidt()`, vergleichen Sie jedoch Ihr Ergebnis mit dem dieser Funktion.

33.3 Schreiben Sie eine Funktion `my_exp_matrix(A,n)` zur Approximation des Matrixexponentials. Die Berechnung soll mithilfe folgender Taylor-Entwicklung bis zum Grad n erfolgen.

$$e^{\mathbf{A}} \simeq \sum_{i=0}^{n} \frac{A^k}{k!} = \mathbf{E} + \mathbf{A} + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2 + \ldots + \frac{1}{n!}\mathbf{A}^n$$

Prüfen Sie am Beginn ihrer Funktion, ob die Matrix nilpotent ist. (Sie können dazu die Funktion `sympy.Matrix.is_nilpotent()` verwenden.) In diesem Fall soll die Funktion den Parameter n ignorieren und das exakte Ergebnis ausgeben. Testen Sie Ihre Funktion für die Matrizen

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 9 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 15 & -9 & 6 \\ 10 & -6 & 4 \end{pmatrix},$$

indem Sie Ihre Resultate mit dem Ergebnis von `sympy.Matrix.exp()` vergleichen. Falls nötig, können Sie dabei mit `.evalf()` runden.

Hinweis: Summieren Sie die Terme in einer Schleife auf. Mit `sympy.Matrix.is_zero_matrix` können Sie feststellen, ob es sich um eine Nullmatrix handelt.

33.4 Überprüfen Sie, ob die folgende Matrix A diagonalisierbar ist. Bestimmen Sie gegebenenfalls die Matrix P, sodass $P^{-1} \cdot A \cdot P$ eine Diagonalmatrix ist. Berechnen Sie die diagonalisierte Matrix ohne Verwendung von `sympy.Matrix.diagonalize()`, vergleichen Sie jedoch Ihr Ergebnis mit dem dieser Funktion.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 6 \\ 6 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Kapitel 34

Programmieraufgaben zu „Zahlenreihen, Funktionenfolgen, Funktionenreihen“

34.1 Berechnen Sie (mit dem Befehl `doit()`) den Grenzwert $a(x)$ der Reihe

$$a_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

für $x \in \mathbb{R}$. Plotten Sie die ersten n Partialsummen für $x \in [0, 2\pi]$ und $n = 0, 1, \ldots, 10$. Bestimmen Sie jeweils das kleinste $n_0 \in \mathbb{N}$ für $x = \pi$ und $x = 2\pi$, sodass

$$|a_{n_0}(x) - a(x)| \leq \varepsilon$$

für $\epsilon = 10^{-k}$ mit $k = 1, 2, 3$.

34.2 Berechnen Sie die ersten 20 Partialsummen der Reihen

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \qquad b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k!},$$

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2+1}{k^4}, \qquad d_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{k+1}{2^k},$$

und stellen Sie diese graphisch dar. Berechnen Sie, falls existent, die Grenzwerte der Reihen.

34.3 Schreiben Sie eine Funktion `my_taylor(f, x0, order)` zur Modellierung einer Funktion $f(x)$ als Taylorreihe. Verwenden Sie dazu **keine** verfügbaren Funktionen zur Taylorreihen-Entwicklung, sondern `sympy.diff`.

Testen Sie Ihre Funktion mit $f(x) = \ln(x)\sin(e^{x-1})$ und dem Entwicklungspunkt $x_0 = 1$. Veranschaulichen Sie die Konvergenz, indem Sie f und die ersten sechs Partialsummen der Reihenentwicklung in einer gemeinsamen Grafik zeichnen.

34.4 Schreiben Sie eine Funktion `my_fourier(f, T, order)` zur Modellierung einer Funktion $f(x)$ als Fourierreihe. Verwenden Sie dazu **keine** verfügbaren Funktionen zur Fourier-Entwicklung, sondern `sympy.integrate`.

Testen Sie Ihre Funktion an der 2π- periodischen Funktion

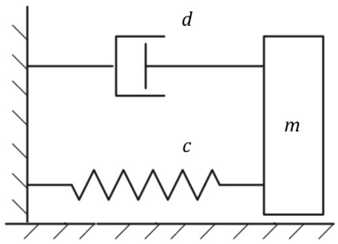
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für } x \in [0, \pi/2), \\ \pi - x & \text{für } x \in [\pi/2, \pi), \\ 0 & \text{für } x \in [\pi, 2\pi). \end{cases}$$

Veranschaulichen Sie die Konvergenz, indem Sie f und die ersten sechs Partialsummen der Reihenentwicklung in einer gemeinsamen Grafik zeichnen.

Kapitel 35

Programmieraufgaben zu „Weiterführendes zur Differential- und Integralrechnung“

35.1 Stellen Sie die Differentialgleichung für das Feder-Masse-Dämpfer-System aus der Abbildung auf. Reibkräfte sollen vernachlässigt werden.



Lösen Sie die Differentialgleichung und plotten Sie die implizit gegebenen Lösungsfunktionen mit verschiedenen Werten für c und d und geeigneten Werten für Masse und Startpunkt.

35.2 Gegeben sei die Ellipse mit den Achsen a und b, dargestellt durch die Parametrisierung $\vec{x} : [0, 2\pi]$ mit

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} a\cos(t) \\ b\sin(t) \end{pmatrix}$$

Ermitteln Sie Bahngeschwindigkeit, Beschleunigung, Tangenteneinheitsvektor, Hauptnormaleneinheitsvektor und die Krümmung.

Kapitel 36

Programmieraufgaben zu „Mehrdimensionale Differentialrechnung“

36.1 Bestimmen Sie für die Funktion $f(x, y) = x \sin y + y \sin x$ die quadratische Approximation mit dem Taylorpolynom 2. Grades. Verwenden Sie als Entwicklungspunkt $\vec{x_0} = (\frac{\pi}{2}, 0)^T$. Berechnen Sie hierfür zuerst den Gradienten und die Hessematrix. Anschließend geben Sie die Approximation im Entwicklungspunkt an.

36.2 Gegeben sei ein Torus (Kreisring) mit mittlerem Ringradius $R = 4$ und Querschnittsradius $r = 1$,

$$\vec{x}(\varphi, \theta) = \begin{pmatrix} (R + r\cos\theta)\cos\varphi \\ (R + r\cos\theta)\sin\varphi \\ r\sin\theta \end{pmatrix} \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le \theta \le 2\pi$$

a) Plotten Sie den Torus.

b) Berechnen Sie die Oberfläche des Torus mittels Integration.

c) Berechnen Sie das Volumen des Torus mithilfe eines entsprechenden Dreifachintegrals. *Hinweis:* `sympy.integrate`.