凸优化理论及其在通信网中应用

王正强

重庆邮电大学通信学院

2023-2024第一学期

提纲

一、课程学时总学时：48　　　学分：3
二、适用学科专业：信息与通信工程，电子信息
三、教学目标

- 通过本课程的学习，使得学生掌握使得学生掌握凸优化的基本概念、对偶理论、典型的几类凸优化问题的判别及其优化方法和相关凸优化算法，从而使得学生能够掌握利用凸优化理论和方法对通信网中资源管理等相关问题进行建模与分析。
- 提升学生算法优化与设计的能力，培养学生的科学素养和开拓创新的精神，为今后从事通信网络优化与管理，以及通信相关的算法研究、设计与实现等相关工作打下良好的基础。

四、教学方式

- 课堂教学
  以课堂讲授为主，授课过程中灵活运用板书和多媒体教学，加强师生互动，注重启发式教学，根据教学内容适时引入应用案例。
- 研讨/讨论式教学
  研讨式教学为辅。根据教学内容，适当开展项目调研、分析和研讨活动，围绕课题或问题，由学生分组合作探索，形成以项目组为单位的研讨式报告、讨论教学。

五、考核与成绩评定

- 1. 平时成绩（40%）
  包括两部分：（1）完成与课程内容相匹配的课后作业；
  （2）结合最优化理论作为数学工具在通信工程中应用的前沿、热点、关键计算、难点等问题形成报告，或讨论。由任课教师综合课堂专题报告表现、小组讨论等做出评定。
- 2. 期末成绩（60%） 根据期末闭卷书面成绩评定。

六、参考资料

(1) Stephen Boyd，Lieven Vandenberghe，王书宁等译. 凸优化[M]. 出版地：北京，清华大学出版社，2013.（参考教材）

(2) 刘浩洋, 户将, 李勇锋，文再文，最优化：建模、算法与理论[M]. 出版地：北京，高教出版社，2020.

(3) 祁忠勇，李威锖，林家祥著，陈翔译. 信号处理与通信中的凸优化：从基础到应用[M]. 出版地：北京，电子工业出版社，2020.

(4) Dimitri P.Bertsekas 著，赵千川王梦迪译，凸优化理论，出版地：北京，清华大学出版社，2015.

(5) 英文版教材在线资源：http://stanford.edu/ boyd/cvxbook/

(6) 网络学习资源：http://www.stanford.edu/class/ee364a/

课程要求

- 掌握凸优化的基本概念、对偶理论；
- 几类凸优化问题的判别及其优化方法；
- 掌握实际问题转化为凸优化问题的基本方法和技巧；
- 利用凸优化理论和方法对通信网进行建模与优化。

提纲

最优化问题的一般形式

最优化问题一般可以描述为

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x), \\ \text{s.t.} \quad & x \in \mathcal{X}, \end{aligned} \tag{1}$$

- $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$是决策变量
- $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是目标函数
- $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$是约束集合或可行域，可行域包含的点称为可行解或可行点．记号 s.t. 是“subject to”的缩写，专指约束条件．
- 当$\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$时，问题(1) 称为无约束优化问题．
- 集合$\mathcal{X}$通常可以由约束函数$c_i(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, i = 1, 2, \cdots, m + l$ 表达为如下具体形式：

$$\begin{aligned} \mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid c_i(x) \le 0, \quad & i = 1, 2, \cdots, m, \\ c_i(x) = 0, \quad & i = m+1, m+2 \cdots, m+l\}. \end{aligned}$$

最优化问题的一般形式

- 在所有满足约束条件的决策变量中，使目标函数取最小值的变量x^* 称为优化问题(1) 的最优解，即对任意$x \in \mathcal{X}$ 都有

$$f(x) \geq f(x^*).$$

- 如果求解在约束集合$\mathcal{X}$ 上目标函数$f(x)$的最大值，则问题(1)的“min”应相应地替换为“max”.
- 注意到在集合$\mathcal{X}$ 上，函数f 的最小（最大）值不一定存在，但是其下（上）确界“inf f(sup f)”总是存在的. 因此，当目标函数的最小(最大）值不存在时，我们便关心其下（上）确界，即将问题(1) 中的“min(max)” 改为“inf(sup)”.
- 为了叙述简便，问题(1) 中x为$\mathbb{R}^n$空间中的向量. 实际上，根据具体应用和需求，x还可以是矩阵、多维数组或张量等.

最优化问题的类型

最优化问题的具体形式非常丰富，可以按照目标函数、约束函数以及解的性质将其分类.

- 当目标函数和约束函数均为线性函数时，问题称为线性规划；
- 当目标函数和约束函数中至少有一个为非线性函数时，相应的问题称为非线性规划；
- 如果目标函数是二次函数而约束函数是线性函数则称为二次规划；
- 包含非光滑函数的问题称为非光滑优化；
- 不能直接求导数的问题称为无导数优化；
- 变量只能取整数的问题称为整数规划；
- 在线性约束下极小化关于半正定矩阵的线性函数的问题称为半定规划，其广义形式为锥规划.

最优化问题的类型

- 最优解只有少量非零元素的问题称为稀疏优化；
- 最优解是低秩矩阵的问题称为低秩矩阵优化.
- 此外还有几何优化、二次锥规划、张量优化、鲁棒优化、全局优化、组合优化、网络规划、随机优化、动态规划、带微分方程约束优化、微分流形约束优化、分布式优化等.
- 就具体应用而言，问题(1) 可涵盖统计学习、压缩感知、最优运输、信号处理、图像处理、机器学习、强化学习、模式识别、金融工程、电力系统等领域的优化模型.

最小二乘问题

$$f_0(x) = \|Ax - b\|_2^2, m = 0.$$

线性规划问题

$$f_i(x)\text{为线性函数}$$

稀疏优化

$$x\text{满足稀疏性.}$$

凸优化问题

$$f_i(x)\text{为凸函数}$$

分式规划

$$f_0(x)\text{为分式函数}$$

最小二乘问题

$b = Ax + n$,其中A是自变量矩阵，b是因变量，x是回归系数向量，n为误差项，最小二乘法的目标是最小化残差平方和，即最小化：

$$\text{minimize} \quad \|Ax - b\|_2^2$$

求解最小二乘问题

- 解析解：$x^* = \left(A^T A\right)^{-1} A^T b$，为什么？
- 可靠的算法和软件
- 计算时间与$n^2 k$ $\left(A \in \mathbf{R}^{k \times n}\right)$成比例；如果具有一定结构，则更短
- 成熟技术

使用最小二乘法

- 最小二乘问题很容易识别
- 一些标准技术增加了灵活性（例如：包括权重，添正则化）

最小二乘问题

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \|Ax-b\|^2 \\
&= (Ax-b)^\top (Ax-b) \\
&= \left((Ax)^\top - b^\top\right)(Ax-b) \\
&= x^\top A^A x - x^\top A^\top b - b^\top Ax + b^\top b \\
&= x^\top A^\top Ax - 2x^\top A^\top b + b^\top b
\end{aligned}
$$

利用一阶最优条件，有

$$
\begin{aligned}
\frac{\nabla f(x)}{\nabla x} &= 2A^\top Ax - 2A^\top b = 0 \\
A^\top Ax &= A^\top b \\
x^* &= \left(A^\top A\right)^{-1} A^\top b.
\end{aligned}
$$

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & c^T x \\ \text{subject to} & a_i^T x \le b_i, i = 1, \ldots, m \end{array}$$

线性规划求解
1.没有解析解
2.可靠和精度高算法和软件可求解
3.计算时间与n^2m成比例，如果$m \ge n$比例系数难确定
4.成熟技术

使用线性规划
1.不容易写成最小二乘问题
2.存在一些标准的技巧可以将部分问题转化为标准的线性规划问题

Chebyshev逼近

原始优化问题: $\text{minimize} \quad \max_{i=1,\cdots,k} \left|a_i^T x - b_i\right|$

其中，优化变量$x \in \mathbb{R}^n$, $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}^n$. $b_1, \cdots, b_k \in \mathbb{R}$ 为问题的参数，参数取值确定即可得到一个具体问题。

等价问题:

$$
\begin{aligned}
&\text{minimize} \quad t \\
&\text{subject to} \quad a_i^T x - t \leqslant b_i, \quad i = 1, \cdots, k \\
&\ -a_i^T x - t \leqslant -b_i, \quad i = 1, \cdots, k,
\end{aligned}
$$

凸优化问题

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & f_0(x) \\
\text{subject to} & f_i(x) \le b_i, \quad i = 1, \ldots, m
\end{array}
$$

- 目标函数和约束是凸的

$$f_i(\alpha x + \beta y) \le \alpha f_i(x) + \beta f_i(y)$$

if $\alpha + \beta = 1, \alpha \ge 0, \beta \ge 0$

- 包括作为特例的最小二乘问题和线性规划问题

凸优化

解决凸优化问题

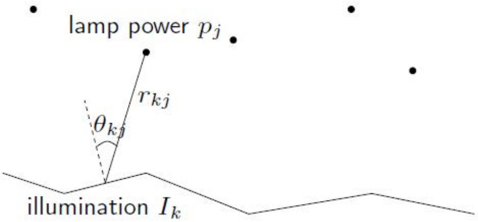
- 没有解析解
- 可靠高效的算法
- 计算时间（大致）与$\max\left\{n^3, n^2m, F\right\}$成正比，其中$F$是评估$f_i$及其一阶和二阶导数的成本
- 几乎是一项技术

使用凸优化

- 通常很难辨认
- 将问题转化成凸形式有许多技巧
- 令人惊讶的是，许多问题可以通过凸优化来解决

照明问题

m盏灯照亮n个小的平的小块土地



在地块k处的强度I_k线性的取决于灯的功率p_j

$$I_k = \sum_{j=1}^{m} a_{kj} p_j, \quad a_{kj} = r_{kj}^{-2} \max\{\cos\theta_{kj}, 0\}$$

问题：能否用有限的灯功率实现所需的照明强度I_{des}?

$$\min \max_{k=1,\ldots,n} |\log I_k - \log I_{des}|$$

$$\text{subject to } 0 \le p_j \le p_{\max}, \quad j = 1, \ldots, m$$

照明问题

如何求解？

1.使用均匀功率：$p_j = p, vary \quad p$

2.使用最小二乘法：

$$\text{minimize} \sum_{k=1}^{n} (I_k - I_{\text{des}})^2$$

round p_j if $p_j > p_{\max}$ or $p_j < 0$

3.使用加权最小二乘法：

$$\text{minimize} \sum_{k=1}^{n} (I_k - I_{\text{des}})^2 + \sum_{j=1}^{m} w_j (p_j - p_{max}/2)^2$$

迭代调整权重w_j直到$0 \le p_j \le p_{max}$

4.使用线性规划：

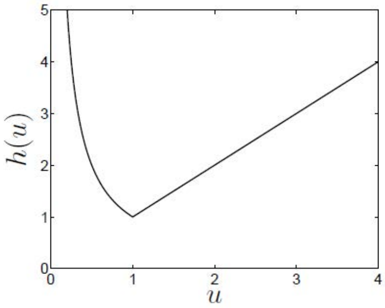
$$\begin{aligned} &\text{minimize} \quad \max_{k=1,\ldots,n} |\log I_k - \log I_{des}| \\ &\text{subject to} \quad 0 \le p_j \le p_{\max}, \quad j = 1, \ldots, m \end{aligned}$$

这可以通过线性规划来解决(为什么？)近似解（次优的）.

5.使用凸优化：问题等价于(为什么？)

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f_0(p) = \max_{k=1,\ldots,n} h(I_k/I_{des}) \\ \text{subject to} & 0 \le p_j \le p_{\max}, \quad j = 1,\ldots,m \end{array}$$

with $\quad h(u) = \max\{u, 1/u\}$



f_0是凸的(一组凸函数集合的最大化是凸的），凸优化算法求解。

照明问题

变体：两个附加约束

1.任何10盏灯的功率不超过总功率的一半
2.不超过一半的灯亮着$(p_j > 0)$
添加(1)或(2)会使问题复杂化吗?

- 有了(1),仍然很容易解决(为什么？)
- 有了(2)，极难解决(为什么？)

寓意

- 如果没有适当的背景(即本课程)，很容易的问题可能看起来与很难的问题非常相似。
- (未经训练的)直觉并不总是有效的

稀疏优化

给定$b \in \mathbb{R}^m$，矩阵$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$，且向量$b$ 的维数远小于向量x的维数，即$m \ll n$. 考虑线性方程组求解问题：

$$Ax = b. \tag{2}$$

- 注意到由于$m \ll n$，方程组(2) 是欠定的，因此存在无穷多个解，重构出原始信号看似很难.
- 这些解当中大部分是不重要的，真正有用的解是所谓的"稀疏解"，即原始信号中有较多的零元素.
- 如果加上稀疏性这一先验信息，且矩阵A以及原问题的解u满足某些条件，那么可以通过求解稀疏优化问题把u与方程组(2) 的其他解区别开.
- 这类技术广泛应用于压缩感知（compressive sensing），即通过部分信息恢复全部信息的解决方案

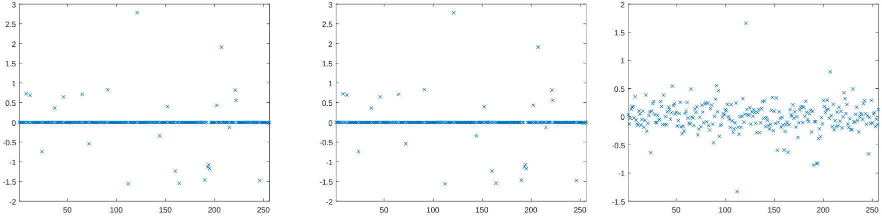
$$(\ell_0)\begin{cases}\min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} & \|x\|_0,\\ \text{s.t.} & Ax=b.\end{cases}\quad (\ell_2)\begin{cases}\min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} & \|x\|_2,\\ \text{s.t.} & Ax=b.\end{cases}\quad (\ell_1)\begin{cases}\min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} & \|x\|_1,\\ \text{s.t.} & Ax=b.\end{cases}\tag{3}$$

- 其中$\|x\|_0$是指x中非零元素的个数．由于$\|x\|_0$是不连续的函数，且取值只可能是整数，ℓ_0问题实际上是NP难的，求解起来非常困难．
- 若定义ℓ_1范数：$\|x\|_1=\sum_{i=1}^n|x_i|$，则得到了另一个形式上非常相似的问题，又称$\ell_1$ 范数优化问题.
- ℓ_2范数：$\|x\|_2=\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}$

在MATLAB环境里构造A, u和b：

```
m = 128; n = 256;
A = randn(m, n);
u = sprandn(n, 1, 0.1);
b = A * u;
```

构造一个128×256矩阵A，它的每个元素都服从高斯（Gauss）随机分布．精确解u只有10%的元素非零，每一个非零元素也服从高斯分布



(a) 精确解u (b) ℓ_1问题的解 (c) ℓ_2问题的解

Figure: 稀疏优化的例子

- 可以从理论上证明：若A, b满足一定的条件（例如使用前面随机产生的A和b），此时向量u也是ℓ_1范数优化问题(3)的唯一最优解．这一发现的重要之处在于，虽然问题(3) 仍没有显式解，但与零范数情形相比难度已经大大降低．
- 前面提到ℓ_0范数优化问题是NP 难问题，但ℓ_1范数优化问题的解可以非常容易地通过现有优化算法得到！从这个例子不难发现，优化学科的研究能够极大程度上帮助我们攻克现有的困难问题．但如果简单地把ℓ_1范数修改为ℓ_2范数：$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}$，即求解如下优化问题：

$$\begin{aligned} \min_{x\in\mathbb{R}^n} \quad & \|x\|_2, \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b. \end{aligned} \tag{4}$$

二者是否等价是一个问题

- 受限等距性质（Restricted Isometry Property，RIP）是在稀疏信号恢复和压缩感知领域中常用的概念，用于描述矩阵的稳定重构性质。

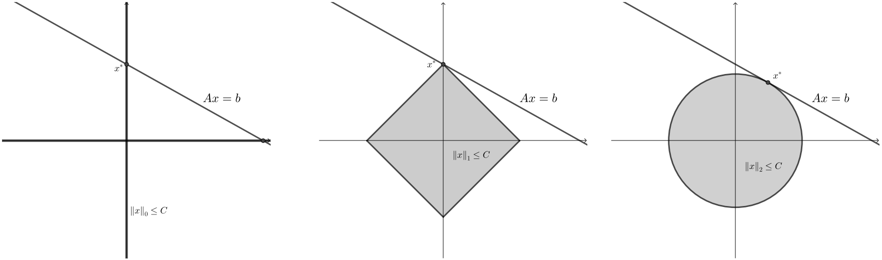
- 设A 是一个大小为$m \times n$ 的矩阵，$0 < \delta_s < 1$ 是一个预先给定的小于1的常数。矩阵A 满足RIP（s-稳定），如果对于任意不超过s 的正整数s，以下不等式成立：

$$(1-\delta_s)\|u\|_2^2 \leq \|Au\|_2^2 \leq (1+\delta_s)\|u\|_2^2 \tag{5}$$

其中$0 < \delta_s < 1$ 是一个给定常数，u 是一个具有至多s 个非零元素的向量。

- 换句话说，RIP要求矩阵A 在任意s 个元素组成的子集上保持了近似的欧几里德范数。这个性质保证了在压缩感知问题中，用A 的线性投影来测量原始信号的稀疏性时，测量值和原始信号之间的距离不会偏离太多。RIP衡量了一个矩阵在保持原始信号的稀疏性的同时，是否将其线性投影到一个低维空间中的一种性质。

- 问题(4) 是原点到仿射集$Ax=b$的投影，可以写出它的显式表达式．但u并不是问题(4) 的解，也可从图1(a)-(c)看出该结论
- 下图可说明ℓ_1范数问题的解具有稀疏性而ℓ_2范数问题的解不具有该性质．



(a) ℓ_0范数　(b) ℓ_1范数　(c) ℓ_2范数

Figure: 三种范数优化问题求解示意图

稀疏优化

- 问题(3) 的理论和算法研究在2006年左右带来了革命性的影响．理论上研究的课题包括什么条件下问题(3) 的解具有稀疏性，如何改进这些条件，如何推广这些条件到其他应用．
- 常见的数据矩阵A一般由离散余弦变换、小波变换、傅里叶（Fourier)变换等生成．虽然这些矩阵本身并没有稀疏性，但通常具有很好的分析性质，保证稀疏解的存在性．
- 注意到绝对值函数在零点处不可微，问题(3) 是非光滑优化问题．但是通过引入辅助变量，它可以等价于线性规划问题，但是数据矩阵A通常是稠密矩阵，甚至A的元素未知或者不能直接存储，只能提供Ax或$A^{\mathrm{T}}y$ 等运算结果．在这些特殊情况下，线性规划经典的单纯形法和内点法通常不太适用于求解大规模的问题(3)．
- 需要强调的是，问题(3) 主要特点是其最优解是稀疏向量，它是稀疏优化的一种典型形式．

低秩矩阵恢复

- 某视频网站提供了约48万用户对1万7千多部电影的上亿条评级数据，希望对用户的电影评级进行预测，从而改进用户电影推荐系统，为每个用户更有针对性地推荐影片．

- 显然每一个用户不可能看过所有的电影，每一部电影也不可能收集到全部用户的评级．电影评级由用户打分1 星到5 星表示，记为取值1~5 的整数．我们将电影评级放在一个矩阵M中，矩阵M的每一行表示不同用户，每一列表示不同电影．由于用户只对看过的电影给出自己的评价，矩阵M中很多元素是未知的

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccc}\text{电影1} & \text{电影2} & \text{电影3} & \text{电影4} & \cdots & \text{电影n}\end{array} \\
\begin{array}{c}\text{用户1}\\ \text{用户2}\\ \text{用户3}\\ \text{用户4}\\ \vdots \\ \text{用户m}\end{array} & \begin{bmatrix} 4 & ? & ? & 3 & \cdots & ? \\ ? & 2 & 4 & ? & \cdots & ? \\ 3 & ? & ? & ? & \cdots & ? \\ 2 & ? & 5 & ? & \cdots & ? \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ ? & 3 & ? & 4 & \cdots & ? \end{bmatrix}
\end{array}$$

低秩矩阵恢复问题的性质

该问题在推荐系统、图像处理等方面有着广泛的应用。

- 由于用户对电影的偏好可进行分类，按年龄可分为：年轻人，中年人，老年人；且电影也能分为不同的题材：战争片，悬疑片，言情片等。故这类问题隐含的假设为补全后的矩阵应为低秩的。即矩阵的行与列会有“合作”的特性，故该问题具有别名“collaborative filtering”。

- 除此之外，由于低秩矩阵可分解为两个低秩矩阵的乘积，所以低秩限制下的矩阵补全问题是比较实用的，这样利于储存且有更好的诠释性。

- 有些用户的打分可能不为自身真实情况，对评分矩阵有影响，所以原矩阵是可能有噪声的。

低秩矩阵恢复

由上述分析可以引出该问题：

- 令Ω是矩阵M中所有已知评级元素的下标的集合，则该问题可以初步描述为构造一个矩阵X，使得在给定位置的元素等于已知评级元素，即满足$X_{ij} = M_{ij},\ (i,j) \in \Omega$.
- 低秩矩阵恢复（low rank matrix completion）

$$\begin{aligned} \min_{X \in \mathbb{R}^{m \times n}} \quad & \operatorname{rank}(X), \\ \text{s.t.} \quad & X_{ij} = M_{ij},\ (i,j) \in \Omega. \end{aligned} \tag{6}$$

$\operatorname{rank}(X)$正好是矩阵X所有非零奇异值的个数

- 矩阵X的核范数（nuclear norm）为矩阵所有奇异值的和，即：$\|X\|_* = \sum_i \sigma_i(X)$(满足非负性、正齐次性，三角不等式):

$$\begin{aligned} \min_{X \in \mathbb{R}^{m \times n}} \quad & \|X\|_*, \\ \text{s.t.} \quad & X_{ij} = M_{ij},\ (i,j) \in \Omega. \end{aligned} \tag{7}$$

- 可以证明问题(7) 是一个凸优化问题，并且在一定条件下它与问题(6) 等价.
- 也可以将问题(7) 转换为一个半定规划问题，但是目前半定规划算法所能有效求解的问题规模限制了这种技术的实际应用.
- 考虑到观测可能出现误差，对于给定的参数$\mu > 0$，给出该问题的二次罚函数形式：

$$\min_{X\in\mathbb{R}^{m\times n}} \quad \mu\|X\|_* + \frac{1}{2}\sum_{(i,j)\in\Omega}(X_{ij} - M_{ij})^2. \tag{8}$$

- 秩r情形：$X = LR^T$,其中$L \in \mathbb{R}^{m\times r}$,$R \in \mathbb{R}^{n\times r}$ 并且$r \ll \min(m,n)$.则可将问题写为

$$\min_{\boldsymbol{L},\boldsymbol{R}} \sum_{(i,j)\in\omega} \left(\left[\boldsymbol{L}\boldsymbol{R}^T\right]_{ij} - M_{ij} \right)^2 + \alpha \|\boldsymbol{L}\|_F^2 + \beta \|\boldsymbol{R}\|_F^2$$

- 在该问题中，矩阵X在定义中已为秩r矩阵，所以没有必要再加上秩约束正则项。α, β为正则化参数，这里正则化的作用是消除解L, R在放缩意义下的不唯一性.
- 此时L, R矩阵中的数字之和为$(m+n)r$,远小于np,不过此时问题是非凸的.
- 尽管这个该问题是非凸的，但在某种意义上它是一个可处理问题的近似：如果对X 有一个完整的观察，那么秩-r近似可以通过X的奇异值分解来找到，并根据r导出的左奇异向量和右奇异向量定义L和R。

很多机器学习中的问题可以写为：

$$\min_{x\in\mathcal{W}} \quad \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}\|a_i^\top x - b_i\|_2^2 + \mu\varphi(x) \quad \text{线性回归}$$

$$\min_{x\in\mathcal{W}} \quad \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\log(1+\exp(-b_i a_i^\top x)) + \mu\varphi(x) \quad \text{逻辑回归}$$

$$\min_{x\in\mathcal{W}} \quad \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\ell(f(a_i,x),b_i) + \mu\varphi(x) \quad \text{一般形式}$$

- (a_i, b_i) 是给定的数据对，b_i 是数据a_i对应的标签
- $\ell_i(\cdot)$: 度量模型拟合数据点i的程度(避免拟合不足)
- $\varphi(x)$: 避免过拟合的正则项: $\|x\|_2^2$ 或者$\|x\|_1$等等
- $f(a,x)$: 线性函数或者由深度神经网络构造的模型

多层感知机（multi-layer perceptron, MLP）也叫作深度前馈网络（deep feedforward network）或前馈神经网络（feedforward neural network），它通过已有的信息或者知识来对未知事物进行预测.

- 在神经网络中，已知的信息通常用数据集来表示. 数据集一般分为训练集和测试集：训练集是用来训练神经网络，从而使得神经网络能够掌握训练集上的信息;测试集是用来测试训练完的神经网络的预测准确性.
- 一个常见的任务是分类问题. 假设我们有一个猫和狗的图片集，将其划分成训练集和测试集（保证集合中猫和狗图片要有一定的比例）. 神经网络是想逼近一个从图片到$\{0,1\}$的函数，这里0表示猫，1表示狗.
- 因为神经网络本身的结构和大量的训练集信息，训练得到的函数与真实结果具有非常高的吻合性.

多层感知机网络图表示:

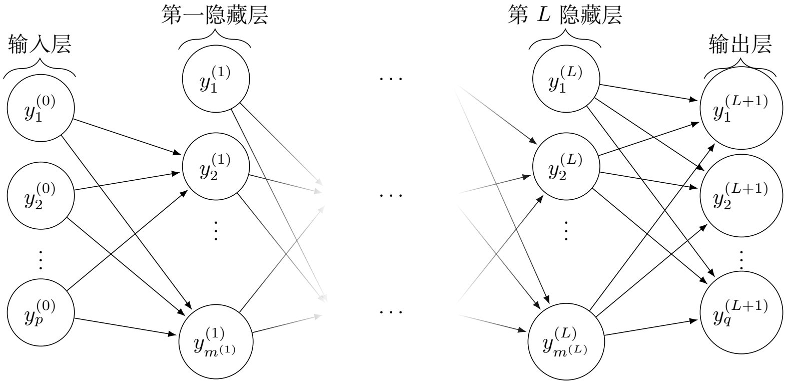


Figure: 带p个输入单元和q个输出单位的$(L+2)$层感知机的网络图，第l个隐藏层包含$m^{(l)}$个神经元.

给定训练集$D=\{\{a_1,b_1\},\{a_2,b_2\},\cdots,\{a_m,b_m\}\}$.

- 假设数据$a_i\in\mathbb{R}^p$, $b_i\in\mathbb{R}^q$. $a_{i1}=1$. 图3 给出了一种由p个输入单元和q个输出单元构成的$(L+2)$层感知机，其含有一个输入层，一个输出层，和L个隐藏层. 该感知机的第l个隐藏层共有$m^{(l)}$个神经元，为了方便用$l=0$表示输入层，$l=L+1$ 表示输出层，并定义$m^{(0)}=p$和$m^{(L+1)}=q$. 设$y^{(l)}\in\mathbb{R}^{m^{(l)}}$为第$l$层的所有神经元，令$y_1^{(l)}=1, 0\le l\le L$，
- 其余的元素则是通过上一层的神经元的值进行加权求和得到. 令参数$x=(x^{(1)},x^{(2)},\cdots,x^{(L+1)})$ 表示网络中所有层之间的权重，其中$x_{i,k}^{(l)}$ 是第$(l-1)$隐藏层的第k个单元连接到第l隐藏层的第i个单元对应的权重，则在第l隐藏层中，第i个单元（$i>1$，当$l=L+1$时可取为$i\ge 1$）计算输出信息$y_i^{(l)}$为

$$y_i^{(l)}=t(z_i^{(l)}),\quad z_i^{(l)}=\sum_{k=1}^{m^{(l-1)}}x_{i,k}^{(l)}y_k^{(l-1)}. \tag{9}$$

这里函数$t(\cdot)$称为激活函数.

常见的激活函数类型有Sigmoid 函数

$$t(z) = \frac{1}{1+\exp(-z)},$$

Heaviside函数

$$t(z) = \begin{cases} 1, & z \geq 0, \\ 0, & z < 0, \end{cases}$$

以及ReLU函数

$$t(z) = \max\{0, z\}. \tag{10}$$

整个过程可以描述为

$$y^{(0)} \xrightarrow{x^{(1)}} z^{(1)} \xrightarrow{t} y^{(1)} \xrightarrow{x^{(2)}} \cdots \xrightarrow{t} y^{(L+1)}.$$

卷积神经网络Convolutional neural network (CNN)

- 给定二维图像$\boldsymbol{I} \in \mathbb{R}^{n\times n}$和卷积核$\boldsymbol{K} \in \mathbb{R}^{k\times k}$，定义卷积操作$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{I} * \boldsymbol{K}$，它的元素是

$$\boldsymbol{S}_{i,j} = \langle \boldsymbol{I}(i:i+k-1, j:j+k-1), \boldsymbol{K} \rangle,$$

其中两个矩阵X, Y的内积是它们相应元素乘积之和

- 生成的结果$\boldsymbol{S}$可以根据卷积核的维数、$\boldsymbol{I}$的边界是否填充、卷积操作时滑动的大小等相应变化.

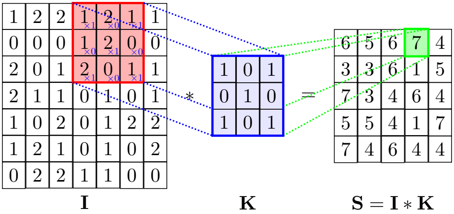


Figure: 卷积操作

全局和局部最优解

在求解最优化问题之前，先介绍最小化问题(1) 的最优解的定义.

定义 (最优解)

对于可行点$\bar{x}$ (即$\bar{x} \in \mathcal{X}$)，定义如下概念：

(1) 如果$f(\bar{x}) \leq f(x), \forall x \in \mathcal{X}$，那么称$\bar{x}$ 为问题(1) 的全局极小解（点），有时也称为（全局）最优解或最小值点；

(2) 如果存在$\bar{x}$ 的一个ε 邻域$N_\varepsilon(\bar{x})$ 使得$f(\bar{x}) \leq f(x), \forall x \in N_\varepsilon(\bar{x}) \cap \mathcal{X}$, 那么称$\bar{x}$ 为问题(1) 的局部极小解（点），有时也称为局部最优解；

(3) 进一步地，如果有$f(\bar{x}) < f(x), \forall x \in N_\varepsilon(\bar{x}) \cap \mathcal{X}$, 且$x \neq \bar{x}$ 成立，则称$\bar{x}$ 为问题(1) 的严格局部极小解（点）.

如果一个点是局部极小解，但不是严格局部极小解，则称为非严格局部极小解. 在图5 中，我们以一个简单的函数为例，指出了其全局与局部极小解.

全局和局部最优解

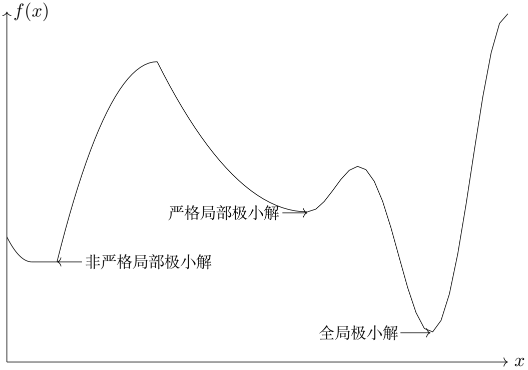


Figure: 函数的全局极小、严格局部极小和非严格局部极小解

在问题(1) 的求解中，我们想要得到的是其全局最优解，但是由于实际问题的复杂性，往往只能够得到其局部最优解.

优化算法收敛性

由于实际问题往往是没有办法显式求解的，因此常采用迭代算法.

- 迭代算法的基本思想是：从一个初始点x^0出发，按照某种给定的规则进行迭代，得到一个序列$\{x^k\}$. 如果迭代在有限步内终止，那么最后一个点就是优化问题的解. 如果迭代点列是无穷集合，那么希望该序列的极限点（或者聚点）则为优化问题的解.
- 在算法设计中，还需考虑算法产生的点列是否收敛到优化问题的解. 给定初始点x^0，记算法迭代产生的点列为$\{x^k\}$. 如果$\{x^k\}$ 在某种范数$\|\cdot\|$的意义下满足$\lim_{k\to\infty}\|x^k - x^*\| = 0$,且收敛的点$x^*$ 为一个局部（全局）极小解，那么我们称该点列收敛到局部（全局）极小解，相应的算法称为是依点列收敛到局部（全局）极小解的.

优化算法收敛性

- 如果从任意初始点x^0 出发，算法都是依点列收敛到局部（全局）极小解的，我们称该算法是全局依点列收敛到局部（全局）极小解的．记对应的函数值序列$\{f(x^k)\}$，可以定义算法的（全局）依函数值收敛到局部（全局）极小值的概念．
- 对于凸优化问题，因为其任何局部最优解都为全局最优解，算法的收敛性都是相对于其全局极小而言的．
- 除了点列和函数值的收敛外，实际中常用的还有每个迭代点的最优性条件（如无约束优化问题中的梯度范数，约束优化问题中的最优性条件违反度等等）的收敛．
- 对于带约束的情形，给定初始点x^0，算法产生的点列$\{x^k\}$ 不一定是可行的（即$x^k \in \mathcal{X}$ 未必对任意k 成立）．考虑到约束违反的情形，我们需要保证$\{x^k\}$ 在收敛到x^*的时候，其违反度是可接受的．除此要求之外，算法的收敛性的定义和无约束情形相同．

算法的渐进收敛速度

设$\{x^k\}$为算法产生的迭代点列且收敛于x^*

- 算法（点列）**Q-**线性收敛：对充分大的k有

$$\frac{\|x^{k+1}-x^*\|}{\|x^k-x^*\|} \le a, \quad a \in (0,1)$$

- 算法（点列）**Q-**超线性收敛：对充分大的k有

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\|x^{k+1}-x^*\|}{\|x^k-x^*\|} = 0,$$

- 算法（点列）**Q-**次线性收敛：对充分大的k有

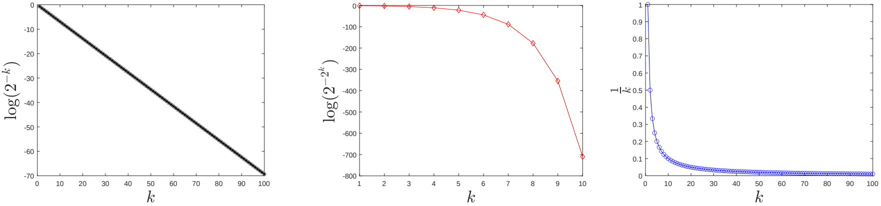
$$\lim_{k\to\infty} \frac{\|x^{k+1}-x^*\|}{\|x^k-x^*\|} = 1,$$

- 算法（点列）**Q-**二次收敛：对充分大的k有

$$\frac{\|x^{k+1}-x^*\|}{\|x^k-x^*\|^2} \le a, \quad a > 0,$$

算法的渐进收敛速度

我们举例来更直观地展示不同的Q-收敛速度，参见下图（图中对所考虑的点列作了适当的变换）．点列$\{2^{-k}\}$是Q-线性收敛的，点列$\{2^{-2^k}\}$是Q-二次收敛的（也是Q-超线性收敛的），点列$\{\frac{1}{k}\}$是Q-次线性收敛的．一般来说，具有Q-超线性收敛速度和Q-二次收敛速度的算法是收敛较快的



(a) Q-线性收敛　　(b) Q-二次收敛　　(c) Q-次线性收敛

Figure: 不同Q-收敛速度比较

- 算法（点列）**R-**线性收敛: 设$\{x^k\}$为算法产生的迭代点且收敛于x^*，若存在Q-线性收敛于0 的非负序列t_k 并且
$$\|x^k - x^*\| \leq t_k$$
对任意的k成立．类似地，可定义**R-**超线性收敛和**R-**二次收敛等收敛速度．从R-收敛速度的定义可以看出序列$\{\|x^k - x^*\|\}$ 被另一趋于0 的序列$\{t_k\}$控制．当知道t_k的形式时，我们也称算法（点列）的收敛速度为$\mathcal{O}(t_k)$．

- 算法复杂度．设x^*为全局极小点，某一算法产生的迭代序列$\{x^k\}$满足
$$f(x^k) - f(x^*) \leq \frac{c}{\sqrt{k}}, \quad \forall\, k > 0,$$
其中$c > 0$为常数。如果需要计算算法满足精度$f(x^k) - f(x^*) \leq \varepsilon$所需的迭代次数，只需令$\dfrac{c}{\sqrt{k}} \leq \varepsilon$ 则得到$k \geq \dfrac{c^2}{\varepsilon^2}$，因此该优化算法对应的（迭代次数）复杂度为$N(\varepsilon) = \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{\varepsilon^2}\right)$．

优化算法的收敛准则

为了使算法能在有限步内终止，一般会通过一些收敛准则来保证迭代停在问题的一定精度逼近解上.

- 对于无约束优化问题，常用的收敛准则有

$$\frac{f(x^k)-f^*}{\max\{|f^*|,1\}} \le \varepsilon_1, \quad \|\nabla f(x^k)\| \le \varepsilon_2, \tag{11}$$

  其中$\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 为给定的很小的正数，$\|\cdot\|$ 表示某种范数（这里可以简单理解为ℓ_2范数：$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}$，$f^*$ 为函数f 的最小值以及$\nabla f(x^k)$ 表示函数f在点x 处的梯度.

- 对于约束优化问题，还需要考虑约束违反度．也即要求最后得到的点满足

$$\begin{aligned} c_i(x^k) &\le \varepsilon_3, \ i = 1,2,\cdots,m, \\ |c_i(x^k)| &\le \varepsilon_4, \ i = m+1, m+2, \cdots, m+l, \end{aligned}$$

  其中$\varepsilon_3, \varepsilon_4$ 为很小的正数，用来刻画x^k 的可行性.

优化算法的收敛准则

- 除了约束违反度之外，也要考虑x^k 与最优解之间的距离，如(11)式中给出的函数值与最优值的相对误差．由于一般情况下事先并不知道最优解，在最优解唯一的情形下一般使用某种基准算法来得到x^* 的一个估计，之后计算其与x^k 的距离以评价算法的性能．
- 因为约束的存在，不能简单地用目标函数的梯度来判断最优性，实际中采用的判别准则是点的最优性条件的违反度．
- 对于具体的算法，根据其设计的出发点，不一定能得到一个高精度的逼近解．为了避免无用的计算开销，需要一些停机准则来及时停止算法的进行．常用的停机准则有

$$\frac{\|x^{k+1}-x^k\|}{\max\{\|x^k\|,1\}}\leq\varepsilon_5,\quad\frac{|f(x^{k+1})-f(x^k)|}{\max\{|f(x^k)|,1\}}\leq\varepsilon_6,$$

  其分别表示相邻迭代点和其对应目标函数值的相对误差很小．
- 在算法设计中，这两个条件往往只能反映迭代点列接近收敛，但不能代表收敛到优化问题的最优解．

提纲

第二章
凸集

凸集

- 仿射集合和凸集
- 重要例子
- 保凸运算
- 关于不等式
- 分离和支撑超平面
- 对偶锥和广义不等式

在$\mathbb{R}^n$空间中，经过不同的两点x_1,x_2可以确定一条直线，其方程为

$$y=\theta x_1+(1-\theta)x_2,\theta\in\mathbb{R}.$$

特别，当$0\leqslant\theta\leqslant 1$时，直线退化为以$x_1,x_2$为端点的线段.

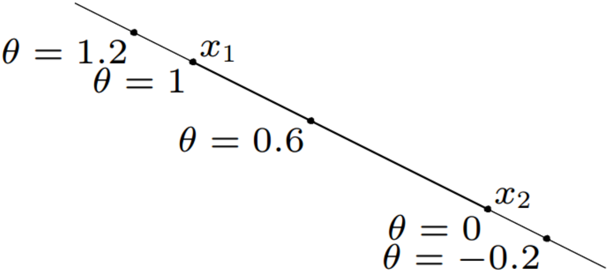
定义

仿射集　如果过集合$\mathcal{C}$中的任意两点的直线都在$\mathcal{C}$内，则称$\mathcal{C}$为**仿射集**，即

$$x_1,x_2\in\mathcal{C}\Rightarrow\theta x_1+(1-\theta)x_2\in\mathcal{C},\forall\theta\in\mathbb{R}.$$

直线直观几何解释

$$x = \theta x_1 + (1-\theta)x_2 \qquad (\theta \in \mathbf{R})$$



$$x = x_2 + \theta(x_1 - x_2)$$

仿射集合(Affine set)

仿射集的定义：过集合C内任意两点的直线均在集合C内，则称集合C为仿射集。

仿射集例：直线、平面、超平面

仿射组合：

$$x_1, \cdots, x_n \in C, \theta_1, \cdots, \theta_n \in R, \sum_{i=1}^{n} \theta_i = 1,$$

$\sum_{i=1}^{n} \theta_i x_i$ 形式的点称为$x_1, \cdots, x_n$ 的仿射组合。

仿射集合(Affine set)

命题

一个仿射集合包含其中任意点的仿射组合。即如果C是一个仿射集合，

$$x_1, \cdots, x_n \in C, \theta_1, \cdots, \theta_n \in R, \sum_{i=1}^{n} \theta_i = 1,$$

那么 $\sum_{i=1}^{n} \theta_i x_i \in C$ 。

仿射集合(Affine set)

命题

如果C是一个仿射集合并且$x_0 \in C$,则集合
$V = C - x_0 = \{x - x_0 \mid x \in C\}$是一个子空间。

子空间：关于加法和数乘法是封闭的。
V一定通过原点, 为什么?
仿射集合的表示：

$$C = V + x_0 = \{\mathbf{v} + x_0 \mid v \in V\}$$

仿射集合C的维数定义为子空间$V = C - x_0$的维数,x_0是C中的任意元素。

仿射集合(Affine set)

仿射集合的例子。

例

1. 线性方程组的解集$C=\{x\mid Ax=b\}$,其中$A\in R^{m*n}$,$b\in R^{m}$,是一个仿射集。

证明: 利用仿射集合定义。

2. 仿射集合相关联的子空间为**A**零空间。

3. 任意一个仿射集可以表示为一个线性方程组的解集。

仿射集合(Affine set)

定义

仿射包：集合C中的点的所有仿射组合组成的集合为C的仿射包，记为

$$\mathrm{aff}\, C = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \theta_i x_i \mid x_1 \cdots, x_k \in C, \sum_{i=1}^{k} \theta_i = 1, \right\}$$

仿射包是包含集合C的最小仿射集合。

定义

集合C的仿射维数定义为集合C的仿射包的维数。

二维平面的单位圆环

$$\{\mathrm{x} \in \mathrm{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$$

仿射包为全空间R^2

仿射集合(Affine set)

- 内点（interior）：

  $$intC = \{x|B(x,r) \subseteq C, r > 0\}$$
  $$B(x,r) = \{y\|y - x\| \leq r\}, \|\cdot\|$$为任意定义范数。

- 集合C的相对内部定义为$\mathrm{aff}\, C$的内部，记为$\mathrm{relint}\, C$,即

  $$relintC = \{x|B(x,r) \cap \mathrm{aff}\, C \subseteq Cr > 0\}$$

- 相对边界：

  $\mathrm{cl}C \backslash \mathrm{relint}\, C$, 其中$\mathrm{cl}\, C$ 表示C的闭包。

Example 2.2 Consider a square in the (x_1, x_2)-plane in $\mathbf{R}^3$, defined as

$$C = \{x \in \mathbf{R}^3 \mid -1 \leq x_1 \leq 1,\ -1 \leq x_2 \leq 1,\ x_3 = 0\}.$$

Its affine hull is the (x_1, x_2)-plane, *i.e.*, $\mathbf{aff}\, C = \{x \in \mathbf{R}^3 \mid x_3 = 0\}$. The interior of C is empty, but the relative interior is

$$\mathbf{relint}\, C = \{x \in \mathbf{R}^3 \mid -1 < x_1 < 1,\ -1 < x_2 < 1,\ x_3 = 0\}.$$

Its boundary (in $\mathbf{R}^3$) is itself; its relative boundary is the wire-frame outline,

$$\{x \in \mathbf{R}^3 \mid \max\{|x_1|, |x_2|\} = 1,\ x_3 = 0\}.$$

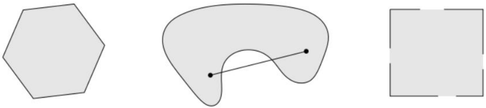
凸集(Convex Set)

定义

凸集的定义：集合**C**内任意两点间的线段均在集合**C**，则称集合**C**为凸集，即：

$$x_1, x_2 \in \mathcal{C} \Rightarrow \theta x_1 + (1-\theta)x_2 \in \mathcal{C}, \forall 0 \leqslant \theta \leqslant 1.$$

仿射集是凸集.



例 在左图中我

凸组合和凸包

定义

凸组合：

形如

$$x = \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \cdots + \theta_k x_k,$$

其中$\theta_1, \cdots, \theta_k$满足

$$\theta_1 + \cdots + \theta_k = 1, \theta_i \geqslant 0, i = 1, \cdots, k.$$

的点称为$x_1, \cdots, x_k$的凸组合.

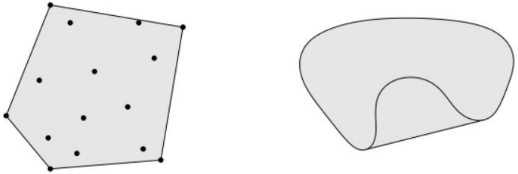
定义

凸包的定义： 集合C的所有点的凸组合构成的点集为C的凸包，记为$\textbf{conv}C$.

$$\textbf{conv}C = \left\{ \sum_{i=1}^k \theta_i x_i \mid x_i \in C, \theta_i \geq 0, \sum_{i=1}^k \theta_i = 1 \right\}$$

凸包的例子

例　在下图中我们列出了一些离散点集和连续点集的凸包. 其中, 左子图为离散点集的凸包, 右子图为扇形连续点集的凸包.



conv$\mathcal{S}$是包含$\mathcal{S}$的最小凸集

定理

conv$\mathcal{S}$是包含$\mathcal{S}$的最小凸集.

证明　由凸包的定义可知, $\mathcal{S} \in \textbf{conv}\mathcal{S}$, 并且**conv**$\mathcal{S}$是凸集.
若再设$\mathcal{X}$是另一凸集且满足$\mathcal{S} \subseteq \mathcal{X} \subseteq \textbf{conv}\mathcal{S}$, 下面我们需要证明只可能是$\mathcal{X} = \textbf{conv}\mathcal{S}$. 为证明此结论, 我们先证明一个重要的命题, 从而直接导出本定理的成立.

定理

对于任意向量集$\mathcal{S}$, **conv**$\mathcal{S}$是包含$\mathcal{S}$的一切凸集的交集.

证明　令$\mathcal{X}$表示包含$\mathcal{S}$的所有凸集的交集. 我们之前证明, 凸集的交是凸集, 因此$\mathcal{X}$是凸集. 因为**conv**$\mathcal{S}$是一个凸集且包含$\mathcal{S}$, 则$\mathcal{X} \subseteq \textbf{conv}\mathcal{S}$.
另一方面, $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{X}$, 因此$\textbf{conv}\mathcal{S} \subseteq \textbf{conv}\mathcal{X}$.
再由凸集和凸包的关系得到$\textbf{conv}\mathcal{X} = \mathcal{X}$, 得到$\textbf{conv}\mathcal{S} \subseteq \mathcal{X}$.
综上有$\mathcal{X} = \textbf{conv}\mathcal{S}$.

锥

- 锥的定义：

$$\forall x \in C, \theta \geq 0, \text{则有} \theta x \in C$$

- 凸锥的定义：集合C既是凸集又是锥。

$$\forall x_1, x_2 \in C, \theta_1, \theta_2 \geq 0, \text{则有} \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 \in C.$$

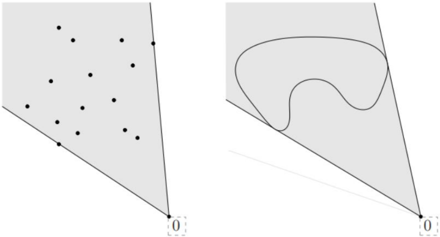
- 锥组合：

$$\sum_{i=1}^{k} \theta_k x_k, \theta_i \geq 0, \text{形式的点叫} x_1, \cdots, \quad x_k \text{的锥组合。}$$

锥包的定义：集合C内点的所有锥组合（包含C最小凸锥）。

$$\left\{ \sum_{i=1}^{k} \theta_i x_i \mid x_i \in C, \theta_i \geq 0 \right\}$$

锥包例子



重要的例子

简单例子：

1. 空集、任意单点集合、全空间R^n都是仿射集（凸集）

2. 任意直线是仿射的。直线通过原点，则是子空间，为凸锥。

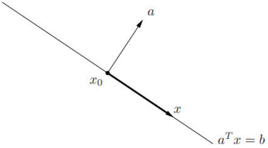
3. 线段是凸的，但是不是仿射的（除非退化为一个点）。

4. 不经过原点的射线为凸集，但不是仿射集。如果经过原点的射线为凸锥。

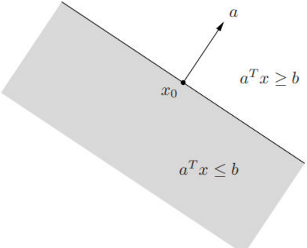
5. R^n任意子空间是仿射的、凸锥。

超平面和半空间

- 超平面(hyperplane)：$\{x|a^Tx = b\}$，仿射，凸



- 半空间(Halfspace): $\{x|a^Tx \leq b\}$，$a \neq 0$，凸



半空间几何解释

$\{x \mid a^T x \leq b\}$, $a \neq 0$, 凸

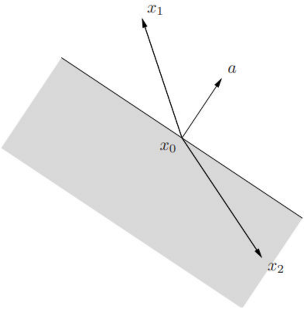


图2.8阴影集是由$a^T(x - x_0) \leq 0$确定的半空间.矢量$x_1 - x_0$ 与形成锐角a所以x_1 不在半空间中.矢量$x_2 - x_0$ 与形成钝角a，因此在半空间中。

Euclid球和椭球

- Euclid球:
  $B(x_c, r) = \{x \mid \|x - x_c\|_2 \leq r\} = \left\{x \mid (x - x_c)^T (x - x_c) \leq r^2\right\}$
  $B(x_c, r) = \{x_c + ru \mid \|u\|_2 \leq 1\}$

- 椭球(ellipsoid):
  $E = \varepsilon(x_c, P) = \left\{x \middle| (x - x_c)^T P^{-1} (x - x_c) \leq 1\right\}, P$ 为对称正定矩阵$E = \{x_c + Au \| \|u\|_2 \leq 1\}, A = P^{1/2}$

- Euclid球是凸集。
- 椭球是凸集。

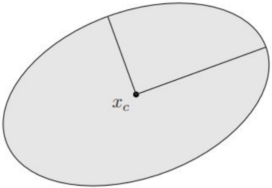


图2.9 $\mathbf{R}^2$中的椭圆体显示为阴影。中心x_c显示为一个点，而两个半轴显示为线段。

范数球和范数锥

- 范数(norm)： $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0$ 当且仅当$x = 0$；
  $\|tx\| = |t|\|x\|, t \in \mathcal{R}$ $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

- 范数球(norm ball)： 凸集
  $B(x_c, r) = \{x \mid \|x - x_c\| \leq r\}$

- 范数锥(norm cone)： 凸锥
  $C = \{(x, t) \mid \|x\| \leq t\} \subseteq R^{n+1}$

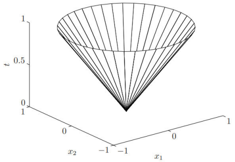


图2.10中二阶锥体的边界$\mathbf{R}^3$, $\left\{(x_1, x_2, t) \mid \left(x_1^2 + x_2^2\right)^{1/2} \le t\right\}$.

- 二阶锥：

例2.3 二阶锥是欧几里得范数的范数锥，即：

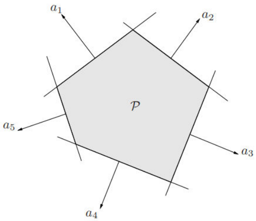
$$C = \left\{(x,t) \in \mathbf{R}^{n+1} \mid \|x\|_2 \le t\right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix} \le 0, t \ge 0 \right\}.$$

二阶锥还有其他几个名字。它被称为二次锥，因为它是由二次不等式定义的。它也被称为洛伦兹锥或冰淇淋锥。图2.10显示$\mathbf{R}^3$中的二阶锥.

多面体

- 多面体定义为有限个线性等式和不等式的解集：
  $P = \{x \mid a_j^T x \le b_j, j = 1, \cdots, m, c_i^T x = d_i, i = 1, \cdots, p\}$



多面体是有限数量的半空间和超平面的交集

- 单纯形(simplex)：k+1个点仿射独立，即 $v_1 - v_0, \cdots, v_k - v_0$ 线性独立，由这些点凸组合的集合，组成一个单纯形, 如下$\mathrm{C} =$ $\mathrm{conv}\left\{v_0, \cdots, v_k\right\} = \left\{\sum_{i=0}^{k} \theta_i v_i | \theta_i \geq 0, \sum_{i=0}^{k} \theta_i = 1\right\}$ C 仿射维数为k, 又称作R^{n} 空间k 维单纯形 。

1维单纯形: 线段

2维单纯形: 三角形

3维单纯形: 四面体

单纯形

- 单纯形是一种多面体。
- Proof：思路将单纯形用线性等式和不等式进行刻画。

半正定锥

- n阶对称矩阵集：

$$S^n = \{X \in \mathcal{R}^{n\times n} \mid X = X^T\}, \text{维数为} \frac{n(n+1)}{2}$$

- n阶半正定矩阵集：

$$S^n_+ = \{X \in S^n \mid X \succ= 0\}$$

- n阶正定矩阵集：

$$S^n_{++} = \{X \in S^n \mid X \succ 0\}$$

半正定锥

设A是n阶实对称矩阵，则下列的条件等价：

- A是半正定的(对于任意$x \neq 0, x^T Ax \geq 0$)
- A的所有主子式均为非负的。
- A的特征值均为非负的。
- 存在n阶实矩阵C，使$A = C'C$.
- 存在秩为r的r×n实矩阵B，使$A = B'B$.

半正定锥

对于n阶实对称矩阵$\mathbf{A}$,下列条件是等价的。

(1)$\mathbf{A}$是正定矩阵;(对于任意$\mathrm{x} \neq 0, \mathrm{x}^T\mathbf{A}\mathrm{x} > 0$)

(2)$\mathbf{A}$的一切顺序主子式均为正;

(3)$\mathbf{A}$的一切主子式均为正;

(4)$\mathbf{A}$的特征值均为正;

(5)存在实可逆矩阵$\mathbf{C}$,使$\mathbf{A} = \mathbf{C}'\mathbf{C}$

(6)存在秩为n的$\mathrm{m} \times \mathrm{n}$实矩阵$\mathbf{B}$,使$\mathbf{A} = \mathbf{B}'\mathbf{B}$

(7)存在主对角线元素全为正的实三角矩阵$\mathbf{R}$,使$\mathbf{A} = \mathbf{R}'\mathbf{R}$

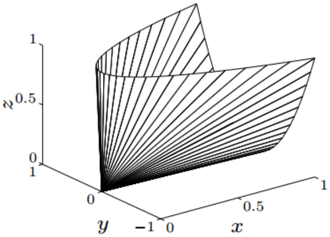
半正定锥

S^2 上半正定锥。

例2.6中的 S^2 半正定锥。我们有

$$X = \begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix} \in \mathbf{S}^2_+ \quad \Longleftrightarrow \quad x \geq 0, \quad z \geq 0, \quad xz \geq y^2$$

example: $\begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix} \in \mathbf{S}^2_+$



- 集合交运算

仿射变换

$$f(x) = Ax + b, A \in R^{m\times n}, b \in R^m$$

透视/投射函数(perspective function)

$$P(z,t) = z/t, z \in \mathcal{R}^n, t \in \mathcal{R}_{++}$$

线性分式函数(linear-fractional function)

$$f(x) = (Ax+b)/\left(c^T x + d\right)$$

$$A \in \mathcal{R}^{m\times n}, b \in \mathcal{R}^m, c \in \mathcal{R}^n, d \in \mathcal{R}, c^T x + d > 0$$

定理

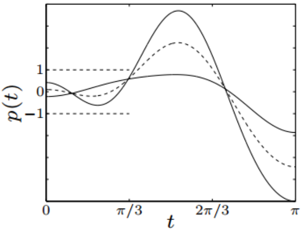
任意数量凸集的交集是凸集

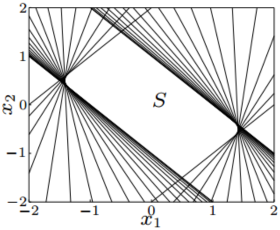
例如：

$$S = \{x \in \mathbf{R}^m \mid |p(t)| \leq 1 \text{ for } |t| \leq \pi/3\}$$

其中：$p(t) = x_1 \cos t + x_2 \cos 2t + \cdots + x_m \cos mt$

当$m = 2$：





- 例2.7正半定锥S_+^n可以表示为

$$\bigcap_{z\neq 0}\left\{X\in \mathbf{S}^n \mid z^TXz\geq 0\right\}$$

对于每个$z\neq 0, z^TXz$是X的线性函数(非同零)，因此集合

$$\left\{X\in \mathbf{S}^n \mid z^TXz\geq 0\right\}$$

实际上，半空间在S^n中。因此，正半定锥是无穷多个半空间的交集，因此也是凸的。

仿射函数

仿射变换(缩放、平移、投影等)也是保凸的.

定理

仿射变换的保凸性　设$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$是仿射变换, 即$f(x)=Ax+b$, $A\in\mathbb{R}^{m\times n}, b\in\mathbb{R}^m$, 则

- 凸集在f下的像是凸集:

$$S\subseteq\mathbb{R}^n\text{是凸集}\Rightarrow f(\mathcal{S})=\{f(x)|x\in\mathcal{S}\}\text{ 是凸集.}$$

- 凸集在f下的原像是凸集:

$$\mathcal{C}\subseteq\mathbb{R}^m\text{是凸集}\Rightarrow f^{-1}(\mathcal{C})=\{x|f(x)\in\mathcal{C}\}\text{ 是凸集.}$$

例多面体. 多面体$\{x \mid Ax \preceq b, Cx = d\}$ 可以表示为非负象限和原点的笛卡尔乘积在仿射函数$f(x) = (b - Ax, d - Cx)$ 下的原象：

$$\{x \mid Ax \preceq b, Cx = d\} = \left\{x \mid f(x) \in \mathbf{R}_+^m \times \{0\}\right\}$$

例线性矩阵不等式的解集。

条件：

$$A(x) = x_1 A_1 + \cdots + x_n A_n \preceq B,$$

这里$B, A_i \in \mathbf{S}^m$, 被叫做线性矩阵不等式(LMI). (注意与普通线性不等式的相似性)

$$a^T x = x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n \leq b$$

其中($b, a_i \in \mathbf{R}$.)

线性矩阵不等式的解集$\{x \mid A(x) \preceq B\}$是凸集。实际上，它是正半定锥在由，$f(x) = B - A(x)$ 给定的仿射映射$f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{S}^m$下的原象.

双曲锥。

$$\text{集合}\left\{x \mid x^T P x \leq \left(c^T x\right)^2, c^T x \geq 0\right\}\text{是凸集,}$$

其中$P \in \mathbf{S}_+^n$，$c \in \mathbf{R}^n$, 这是因为它是二阶锥,

$$\left\{(z, t) \mid z^T z \leq t^2, t \geq 0\right\}$$

在仿射函数$f(x) = \left(P^{1/2}x, c^T x\right)$下的原象。

$$z = P^{\frac{1}{2}} x, t = c^T x$$

椭球是球的仿射映射

例2.11 椭球
$$\mathcal{E}=\left\{x \mid \left(x-x_c\right)^T P^{-1}\left(x-x_c\right) \leq 1\right\},$$
这里$P \in \mathbf{S}_{++}^n$, 椭球是单位Euclid球$\{u \mid \|u\|_2 \leq 1\}$ 在仿射映射$f(u)=P^{1/2}u+x_c$下的象.
(同时也是单位球在仿射映射$g(x)=P^{-1/2}\left(x-x_c\right)$下的原象.)

- 透视变换 $P:\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}$:

$$P(x,t)=x/t,\quad \mathrm{dom}P=\{(x,t)\mid t>0\}.$$

透视变换下凸集的像和原像是凸集。

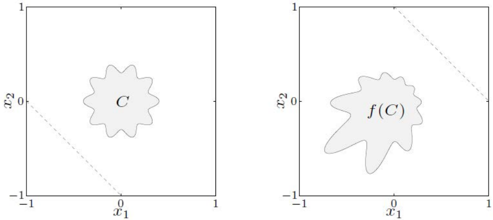
- 分式线性变换 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$:

$$f(x)=\frac{Ax+b}{c^{\mathrm{T}}x+d},\quad \mathbf{dom}f=\{x\mid c^{\mathrm{T}}x+d>0\}$$

分式线性变换下凸集的像和原像是凸集。

线性分式函数的例子

$$f(x)=\frac{1}{x_1+x_2+1}x$$



正常锥(proper cone)

定义

正常锥的定义：锥$K \subset R^n$满足如下条件:

- K为凸集；
- K为闭集；
- K是实的，即具有非内空间；
- K是尖的，即不包含直线(等价$x \in K, -x \in K \Rightarrow x = 0$)

- 正常锥K下的定义R^n的偏序关系(partial ordeing)

$$x \preceq_K y \Leftrightarrow y - x \in K$$

偏序关系

定义

给定集合S，“$\preceq$”是S上的二元关系，若“$\preceq$”满足

1. 自反性：$\forall a \in \mathrm{S}$,有$a \preceq a$;
2. 反对称性：$\forall a$, $\mathrm{b} \in \mathrm{S}$,$a \preceq b$且$b \preceq a$,则$a = b$;
3. 传递性：$\forall a$, b, $\mathrm{c} \in \mathrm{S}$,$a \preceq b$且$b \preceq c$,则$a \leq c$;

那么称“$\preceq$”是S上的偏序。

偏序关系是集合上的自反的、可传递、反对称关系,它提供比较集合中元素的工具;也提供了事物之间的顺序关系。

偏序集例子

例

1. 集合A的幂集2^A上定义的“$\subseteq$”是偏序关系。$\langle 2^A, \subseteq\rangle$是偏序集。
   例如：集合$A=\{a,b\}$, A的幂集$2^A=\{\{a\},\{b\},\{a,b\},\varnothing\}$
2. 实数集合R上定义的“$\leq$”是偏序关系，$\langle R, \leq\rangle$是偏序集。
3. 实数集合R上定义的“$\geq$”是偏序关系，$\langle R, \geq\rangle$是偏序集。
4. 大于零的自然数集合N^+上定义的“整除”关系“$|$”也是一个偏序关系,$\langle N^+, |\rangle$是偏序集。

- 正常锥K下的定义R^n的偏序关系(partial ordering)：

$$x \preceq_K y \Leftrightarrow y - x \in K$$

严格偏序关系

$$x \prec_K y \Leftrightarrow y - x \in intK$$

$K = R_+$时，偏序关系$\prec_K$为R中$\leq$,偏序关系$\preceq_K$为R中$<$

例

例2.14 非负象限及分量不等式。非负象限$K = \mathbf{R}^n_+$是一个正常锥。相应的广义不等式$\preceq_K$对应于向量间的分量不等式，即$x \preceq_K y$等价于$x_i \leq y_i, i = 1, ..., n$。相应地，其严格不等式对应于严格的分量不等式，即$x \prec_K y$等价于$x_i < y_i, i = 1, ..., n$。
我们将常常使用对应于非负象限的不严格和严格的偏序关系，因此省略下标$\mathbf{R}^n_+$。当$\preceq$或$\prec$出现在向量间的时候，该符号应被理解为分量不等式。

例

半正定锥和矩阵不等式

例2.15 半正定锥$\mathbf{S}^n$是空间中的正常锥，相应的广义不等式$\preceq_K$就是通常的矩阵不等式，即$X \preceq_K Y$等价于$Y - X$为半正定矩阵。(在$\mathbf{S}^n$中)$\mathbf{S}^n_+$的内部由正定矩阵组成，因此严格广义不等式也等同于通常的对称矩阵的严格不等式，即$X \preceq_K Y$等价于$Y - X$为正定矩阵。

这里，也是由于经常使用这种偏序关系，因此省略其下标，即对于对称矩阵，我们将广义不等式简写为$X \preceq_K Y$或$X \prec_K Y$，它们表示关于半正定锥的广义不等式。

[0,1]上非负多项式锥

例2.16 [0,1]上非负的多项式锥。K定义如下

$$K = \{c \in \mathbf{R}^n \mid c_1 + c_2 t + \cdots + c_n t^{n-1} \geqslant 0 \text{ 对于} t \in [0,1]\},$$

即K是$[0,1]$上最高$n-1$阶的非负多项式(系数)锥。可以看出K是一个正常锥，其内部是$[0,1]$上为正的多项式的系数集合。

两个向量$c, d \in \mathbf{R}^n$满足$c \preceq_K d$的充要条件是，对于所有$t \in [0,1]$有

$$c_1 + c_2 t + \cdots + c_n t^{n-1} \leq d_1 + d_2 t + \cdots + d_n t^{n-1}$$

广义不等式$\preceq_K$满足许多性质，例如：

命题

1. $x \preceq_K x$;(自反)
2. $x \preceq_K y, y \preceq_K x \Rightarrow x = y$;(反对称)
3. $x \preceq_K y, y \preceq_K z \Rightarrow x \preceq_K z$; (可传递)
4. $x \preceq_K y, u \preceq_K v \Rightarrow x + u \preceq_K y + v$; (加法保序)
5. $x \preceq_K y, \alpha > 0 \Rightarrow \alpha x \preceq_K \alpha y$; (非负数乘保序)
6. $x_i \preceq_K y_i, x_i \to x, y_i \to y \Rightarrow x \preceq_K y$.(极限运算保序)

广义不等式

严格广义不等式$\prec_K$满足许多性质，例如：

命题

1. $x \prec_K y \Rightarrow x \preceq_K y$;
2. $x \prec_K y, u \preceq_K v \Rightarrow x + u \prec_K y + v$;
3. $x \prec_K y, \alpha > 0 \Rightarrow \alpha x \prec_K \alpha y$
4. $x \not\prec_K x$;
5. $x \prec_K y, u, v$ 足够小$\Rightarrow x + u \prec_K y + v$

最小与极小元

- **最小元的定义:** 设$x \in S$, 对$\forall y \in S$, 都有$x \prec=_K y$ 成立, 则称x 为S 的最小元(minimum element)。

- **极小元的定义:** 设$x \in S$, 对于$y \in S$, 若$y \prec=_K x$, 则$y = x$ 成立, 则称x 为S 上极小元(minimal element)。

命题

1. 一个集合有最小（最大）元，那么最小（最大）元是唯一的。
2. 一个集合可以有多个极小（或极大）元。

用简单的集合符号，我们可以对最小元和极小元进行描述。

命题

1. 元素$x \in S$ 是S 中的一个最小元，当且仅当$S \subseteq x+K$. 其中$x+K$ 表示可以与x 相比并且大于或等于(根据 $\leqslant_K$) x的所有元素。
2. 元素$x \in S$ 是S 中的一个极小元，当且仅当$(x-K) \cap S = \{x\}$ 。
其中，$x-K$ 表示可以与x 相比并且小于或等于(根据 $\leqslant_K$) x 的所有元素。

例2.17 考虑锥$\mathbf{R}^2_+$, 它导出的是$\mathbf{R}^2$ 上的关于分量的不等式。对此, 我们可以给出一些关于极小元和最小元的简单的几何描述。

不等式$x \preceq y$ 的含义是y 在x 之上、之右。$x \in S$ 是集合S 的最小元, 表明S 的其他所有点都在它之上、之右。

而x 为集合S 的极小元, 是指S 中没有任何一个点在x 之下、之左, 其区别可见下图（书上图2.17）。

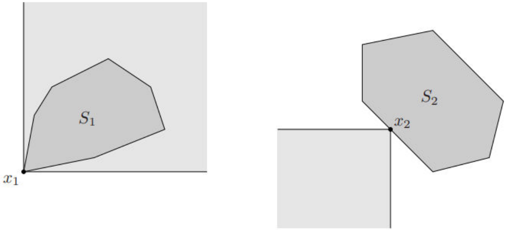


图2.17 左. 集合S_1 关于$\mathbf{R}^2$ 上的分量不等式有最小元x_1 。集合$x_1 + K$ 由浅色阴影所示; x_1 是S_1 的最小元, 因为$S_1 \subseteq x_1 + K$ 。
右. 点x_2 是S_2 的极小元。集合$x_2 - K$ 由浅色阴影所示。点x_2 是极小的, 因为$x_2 - K$ 和S_2 只相交于x_2 。

例2.18 对称矩阵集合中的最小元和极小元。我们用$A \in \mathbf{S}_{++}^n$表示一个圆心在原点的椭圆，即

$$\mathcal{E}_A = \left\{x \mid x^T A^{-1} x \leqslant 1\right\}$$

我们知道$A \preceq B$ 等价于$\mathcal{E}_A \subseteq \mathcal{E}_B$ 。

给定$v_1, \cdots, v_k \in \mathbf{R}^n$ 并定义

$$S = \left\{P \in \mathbf{S}_{++}^n \mid v_i^T P^{-1} v_i \leqslant 1, i = 1, \cdots, k\right\}$$

它对应于包含了点$v_1, \cdots, v_k$ 的椭圆的集合。集合S 没有最小元：对于任意包含点$v_1, \cdots, v_k$ 的椭圆，我们总可以找到另一个包含这些点但不可比的椭圆。一个椭圆是极小的，如果它包含这些点但没有更小的椭圆也包含这些点。图2.18显示了$\mathbf{R}^2$ 上$k = 2$ 时的一个例子。

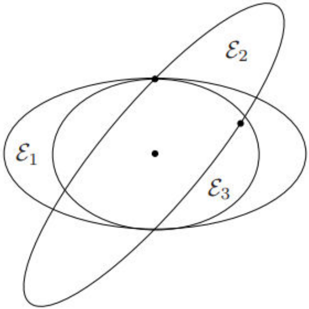


图2.18 $\mathbf{R}^2$ 中的三个椭球，它们均以原点(图中较低的点所示) 为中心，并且包含较高处的点。椭球$\mathcal{E}_1$ 不是极小的，因为存在包含这些点并且更小的椭球(例如，$\mathcal{E}_3$)。由于同样的原因，$\mathcal{E}_3$ 也不是极小的。同样，椭球$\mathcal{E}_2$ 不是是极小的，因为有其他(以原点为中心) 包含这些点并被$\mathcal{E}_2$ 包含的椭球。

分离超平面定理

超平面是空间中一类特殊的凸集(仿射集), 可以证明$\mathbb{R}^n$空间中的超平面恰好是$n-1$维的. 我们可以用超平面分离不相交的凸集.

定理

分离超平面定理 如果$\mathcal{C}$和$\mathcal{D}$是不相交的凸集, 则存在非零向量a和常数b, 使得

$$a^{\mathrm{T}}x \leqslant b, \forall x \in \mathcal{C},$$

且

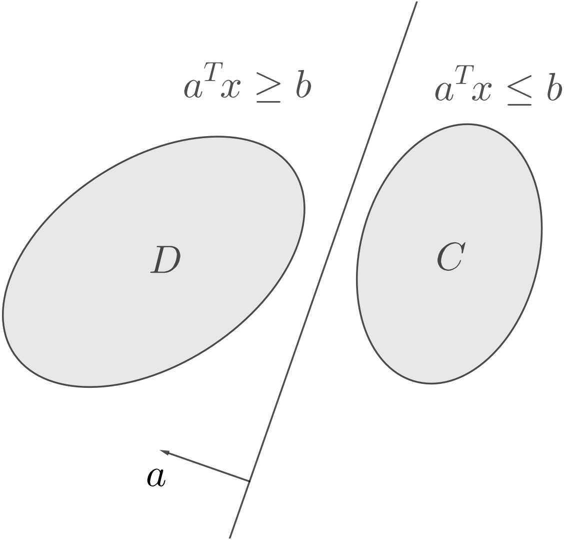
$$a^{\mathrm{T}}x \geqslant b, \forall x \in \mathcal{D},$$

即超平面$\{x|a^{\mathrm{T}}x = b\}$分离了$\mathcal{C}$和$\mathcal{D}$.

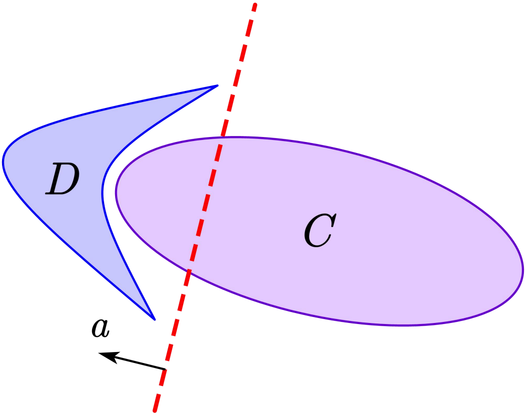
超平面分离定理表明, 如果要软划分$\mathbb{R}^n$中的2个凸集, 则只需要求得一个适当的超平面即可. 这在分类问题中属于很容易解决的问题. 实际上, 如果有任何一个集合不是凸集, 则定理一般不成立, 此时我们若要划分不同的集合, 则一般需要使用更加复杂的平面.

分离超平面的示意

例　下图是$\mathbb{R}^2$中的2个凸集, 我们使用超平面即可轻松划分.



例　下图是$\mathbb{R}^2$中的两个集合，其中一个不为凸集. 我们无法使用超平面对其划分，而必须使用更加复杂的平面. 这就给划分问题带来了巨大的挑战.



分离超平面定理证明

这里仅考虑一个特殊情形。假设存在$c \in C$和$d \in D$使得:

$$\|c-d\|_2 = \mathbf{dist}(C,D) = \inf\{\|u-v\|_2 \mid u \in C, v \in D\} > 0.$$

定义$a = d - c$, $b = (\|d\|_2^2 - \|c\|_2^2)/2$和

$$f(x) = a^{\mathrm{T}}x - b = (d-c)^{\mathrm{T}}(x-(d+c)/2).$$

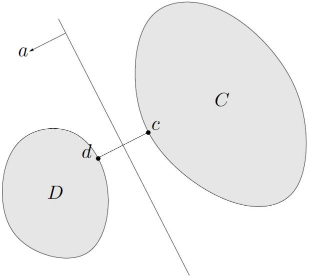
以下证:$f(x) \le 0, \forall x \in C$且$f(x) \ge 0, \forall x \in D$，即给出了分离超平面。

- 先证$f(x) \ge 0, \forall x \in D$。其它情形类似。
- 假设存在$u \in D$，使得

$$f(u) = (d-c)^{\mathrm{T}}(u-(d+c)/2) < 0.$$

可以将$f(u)$写成:

$$f(u) = (d-c)^{\mathrm{T}}(u-d) + \|d-c\|_2^2/2.$$



- 因此有：

$$(d-c)^{\mathrm{T}}(u-d)<0.$$

- 对于$t\in[0,1]$，构造d与u的凸组合$z(t)=d+t(u-d)$，因此$z(t)$也在集合D里. 由于

$$\frac{d}{dt}\|z(t)-c\|_2^2|_{t=0}=2(d-c)^{\mathrm{T}}(u-d)<0,$$

因此存在充分小的$t_1\in(0,1]$，使得

$$\|z(t_1)-c\|_2<\|d-c\|_2.$$

这意味着点$z(t_1)$到c的距离比d近，矛盾。

严格分离定理

我们在超平面分离时提到了软划分的概念，其表明若集合仅是凸集，则定理中等号可能成立，即某一凸集与超平面相交(请尝试举一个简单例子). 很多时候进一步要求超平面与任何凸集都不交，为此我们需要加强定理的条件.

定理

严格分离定理 如果$\mathcal{C}$和$\mathcal{D}$是不相交的凸集，且$\mathcal{C}$是闭集，$\mathcal{D}$是紧集，则存在非零向量a和常数b，使得

$$a^{\mathrm{T}}x < b, \forall x \in \mathcal{C},$$

且

$$a^{\mathrm{T}}x > b, \forall x \in \mathcal{D},$$

即超平面$\{x|a^{\mathrm{T}}x = b\}$严格分离了$\mathcal{C}$和$\mathcal{D}$.

此定理的退化形式即$\mathcal{D}$退化为单点集$\{x_0\}$. 此时课本中的定理成立.

上述严格分离定理的退化形式要求$x_0 \notin C$. 当点x_0恰好落在C的边界上时(此时不满足"不相交"的条件), 我们可以构造超平面.

定义

支撑超平面 给定集合C以及边界上的点x_0, 如果$a \neq 0$满足$a^{\mathrm{T}}x \leqslant a^{\mathrm{T}}x_0, \forall x \in C$, 那么称集合

$$\{x | a^{\mathrm{T}}x = a^{\mathrm{T}}x_0\}$$

为C在边界点x_0处的支撑超平面.

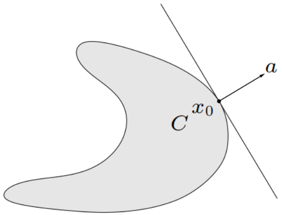
根据定义, 点x_0和集合C也被该超平面分开.
从集合上而言, 超平面$\{x|a^{\mathrm{T}}x = a^{\mathrm{T}}x_0\}$与集合$C$在点$x_0$处相切, 并且半空间$\{x|a^{\mathrm{T}}x \leqslant a^{\mathrm{T}}x_0\}$包含$C$.

支撑超平面定理

注意根据凸集成立的分离超平面定理，凸集上任何的边界点都满足支撑超平面存在的条件，则对于凸集成立如下的定理.

定理

支撑超平面定理 若C是凸集，则C的任意边界点处都存在支撑超平面.



支撑超平面定理有非常强的几何直观：给定一个平面后，可把凸集边界上的任意一点当成支撑点，将凸集放在该平面上.

这也是凸集的特殊性质，一般的集合甚至无法保证存在平面上的支撑点.

仿射集和凸集的分离：

例2.19 仿射集与凸集的分离。设C 是凸集，而D 是仿射的，即$D=\{Fu+g|u\in\mathbf{R}^m\}$，其中$F\in\mathbf{R}^{n\times m}$ 。设C和D 不相交，那么根据超平面分离定理，存在$a\neq 0$ 和b使得对于所有$x\in C$ 有$a^Tx\leqslant b$，对于所有$x\in D$有$a^Tx\geqslant b$ 。

这里$a^Tx\geqslant b$ 对于所有$x\in D$ 均成立，表明对于任意$u\in\mathbf{R}^m$ 均有$a^TFu\geqslant b-a^Tg$ 。但是在$\mathbf{R}^m$ 上，只有当一个线性函数为零时，它才是有界的。

因此，可以推知$a^TF=0$ (并且因此有$b\leqslant a^Tg$)。所以，我们可知存在$a\neq 0$ 使得$F^Ta=0$ 和$a^Tx\leqslant a^Tg$ 对于所有$x\in C$ 均成立。

- 点和闭凸集合的严格分离

例2.20。设C为闭凸集，且$x_0 \notin C$。那么就存在一个能将x0和C严格分离的超平面。

注意集合C和$B(x_0, \epsilon)$，在$\epsilon > 0$时不相交。根据超平面分离定理，存在$a \neq 0$和b满足$a^T x \leq b$，且$x \in C$；对于$a^T x \geq b$，$x \in B(x_0, \epsilon)$。

利用$B(x_0, \epsilon) = \{x_0 + u \mid \|u\|_2 \leq \epsilon\}$，第二个条件可以表示为:

$$a^T (x_0 + u) \geq b \text{ for all } \|u\|_2 \leq \epsilon$$

使左边最小的u为$u = -\epsilon a / \|a\|_2$，通过这个值我们得到：

$$a^T x_0 - \epsilon \|a\|_2 \geq b.$$

因此仿射函数表示为：

$$f(x) = a^T x - b - \epsilon \|a\|_2 / 2$$

此函数在C处为负，在x_0处为正。

- 严格线性不等式的择一定理

例 2.21 严格线性不等式的择一定理。 我们导出严格线性不等式

$$Ax \prec b \tag{2.17}$$

有解的充要条件。该不等式不可行的充要条件是（凸）集

$$C = \{b - Ax \mid x \in \mathbf{R}^n\}, \qquad D = \mathbf{R}^m_{++} = \{y \in \mathbf{R}^m \mid y \succ 0\}$$

不相交。集合 D 是开集，而 C 是仿射集合。根据前述的结论，C 和 D 不相交的充要条件是，存在分离超平面，即存在非零的 $\lambda \in \mathbf{R}^m$ 和 $\mu \in \mathbf{R}$ 使得 C 中 $\lambda^T y \leqslant \mu$ 而 D 中 $\lambda^T y \geqslant \mu$。

这些条件可以被简化。第一个条件意味着对于所有 x 都有 $\lambda^T(b - Ax) \leqslant \mu$。这表明（如例 2.19 所示）$A^T\lambda = 0$，$\lambda^T b \leqslant \mu$。第二个不等式意味着 $\lambda^T y \geqslant \mu$ 对于所有 $y \succ 0$ 均成立。这表明 $\mu \leqslant 0$ 且 $\lambda \succeq 0$，$\lambda \neq 0$。

将这些结果放在一起，我们可以得知严格不等式组 (2.17) 无解的充要条件是存在 $\lambda \in \mathbf{R}^m$ 使得

$$\lambda \neq 0, \qquad \lambda \succeq 0, \qquad A^T\lambda = 0, \qquad \lambda^T b \leqslant 0. \tag{2.18}$$

这些不等式和等式关于 $\lambda \in \mathbf{R}^m$ 也是线性的。我们称式(2.17) 和式 (2.18) 构成一对择一选择：对于任意的 A 和 b，两者中仅有一组有解。

我们知道锥是凸集. 一个凸锥$K \subseteq \mathbb{R}^n$是正常锥, 当其还满足

- K是闭集;
- K是实心的, 即$\mathbf{int}K \neq \emptyset$;
- K是尖的, 即内部不含有直线: 若$x \in K, -x \in K$, 则一定有$x = 0$.

例　非负卦限$K = \mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n | x_i \geqslant 0, i = 1, \cdots, n\}$ 是正常锥.

例　半正定锥$K = \mathcal{S}^n_+$是正常锥.

例　$[0, 1]$上的有限非负多项式

$$K = \left\{x \in \mathbb{R}^n | x_1 + x_2 t + \cdots + x_n t^{n-1} \geqslant 0, \forall t \in [0, 1]\right\}$$

是正常锥.

广义不等式

广义不等式是一种偏序(不必要保证所有对象都具有可比较性)关系，可以使用正常锥诱导.

定义

广义不等式 对于正常锥K, 定义偏序广义不等式为

$$x \preceq_K y \Longleftrightarrow y - x \in K,$$

严格偏序广义不等式为

$$x \prec_K y \Longleftrightarrow y - x \in \mathbf{int} K.$$

例 坐标分量不等式($K = \mathbb{R}^n_+$)

$$x \preceq_{\mathbb{R}^n_+} y \Longleftrightarrow y_i \geqslant x_i.$$

例 矩阵不等式($K = \mathcal{S}^n_+$)

$$X \preceq_{\mathcal{S}^n_+} Y \Longleftrightarrow Y - X\text{半正定}.$$

广义不等式的性质

$\preceq_K$的诸多性质在$\mathbb{R}$中与$\leqslant$类似.

定理

广义不等式的性质 记$\preceq_K$是定义于正常锥K上的广义不等式, 则

- 自反性: $x \preceq_K x$;
- 反对称性: 若$x \preceq_K y$且$y \preceq_K x$, 则$x = y$;
- 传递性: 若$x \preceq_K y$且$y \preceq_K z$, 则$x \preceq_K z$;
- 可加性: 若$x \preceq_K y$且$u \preceq_K v$, 则$x + u \preceq_K y + v$;
- 非负缩放: 若$x \preceq_K y$且$\alpha \geqslant 0$, 则$\alpha x \preceq_K \alpha y$.

利用偏序关系和广义不等式的定义可以轻松证明上述性质.

对偶锥

设K是一个锥.

定义

对偶锥 令锥K为全空间Ω的子集，则K的对偶锥为

$$K^* = \{y \in \Omega | \langle x, y \rangle \geqslant 0, \forall x \in K\}.$$

对偶锥是相对于锥K定义的，因此我们知道锥的同时也可以求出对偶锥.
我们将对偶锥为自身的锥称为自对偶锥

例 $K = \mathbb{R}^n_+$的对偶锥是它本身，因此是自对偶锥.

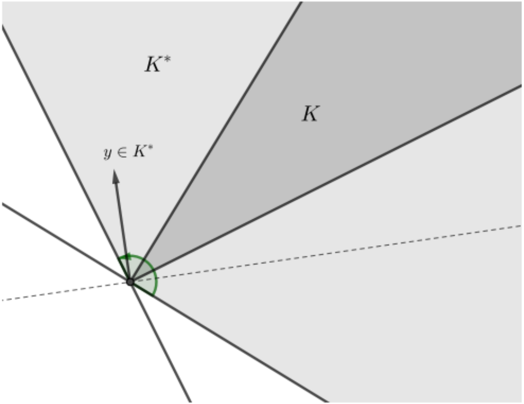
例 $K = \mathcal{S}^n_+$的对偶锥是它本身，因此是自对偶锥.

例 锥$K = \left\{(x, t) \mid \|x\|_p \leqslant t, t > 0, p \geqslant 1\right\}$的对偶锥是

$$K^* = \left\{(x, t) \mid \|x\|_q \leqslant t, t > 0, q \geqslant 1, (p, q)\text{共轭}\right\}.$$

例 上例中二次锥的对偶锥是它本身（$p = q = 2$），因此是自对偶锥.

例　我们在下图中给出了一个$\mathbb{R}^2$平面上的一个例子. 图中深色区域表示锥K, 根据对偶锥的定义, K^*中的向量和K中所有向量夹角均为锐角或直角. 因此, 对偶锥K^*为图中的浅色区域.
注意, 在这个例子中, K也为K^*的一部分.



对偶锥的性质

下面我们简单列举对偶锥满足的性质.

命题

对偶锥的性质 设K是一锥, K^*是其对偶锥, 则满足

1. K^*是锥(哪怕K不是锥也成立);
2. K^*始终是闭集, 且是凸集;
3. 若$\mathbf{int}K \neq \oslash$, 则$K^*$是尖的, 即内部不含有直线;
4. 若K是尖的, 则$\mathring{K}^* \neq \oslash$;
5. 若K是正常锥, 则K^*是正常锥;
6. (二次对偶)K^{**}是K的凸包. 特别, 若K是凸且闭的, 则$K^{**} = K$.

广义不等式的对偶

正常锥的对偶锥仍是正常锥,因此可以用正常锥K的对偶锥K^*导出一个广义不等式. 我们在下文简称其为"对偶广义不等式".

定义

对偶广义不等式 正常锥的对偶锥K^*可定义广义不等式

$$x \preceq_{K^*} y \Longleftrightarrow y - x \in K^*,$$

其满足性质:

- $x \preceq_K y \Longleftrightarrow \lambda^{\mathrm{T}} x \leqslant \lambda^{\mathrm{T}} y, \forall \lambda \succeq_{K^*} 0;$
- $y \succeq_{K^*} 0 \Longleftrightarrow y^{\mathrm{T}} x \geqslant 0, \forall x \succeq_K 0.$

使用对偶广义不等式的好处是, 对偶锥始终是闭且凸的, 并可将一个偏序问题转换为满足一个偏序条件的全序问题.