一种考虑时间因素的 COVID-19 SIR 模型，包含无法检测到的感染者

（重庆邮电大学 通信与信息工程学院，重庆 400065）

摘 要：本文对 COVID-19 进行了数学和数值分析。为了预测 COVID-19 的趋势，我们提出了一个随时间变化的 SIR 模型，该模型跟踪 t 时刻的传播率和恢复率。利用中国权威机构提供的数据，我们发现一天的预测误差几乎小于 3%。根据我们的模型，可以预测中国的转折点和确诊病例总数。为了分析无法检测到的感染对疾病传播的影响，我们扩展了模型，考虑了两类感染者：可检测到的感染者和无法检测到的感染者。疫情是否爆发由一个 2×2 矩阵的谱半径来表征。如果 R0>1 ，则该矩阵的光谱半径大于 1，存在疫情爆发。同时绘制了疫情爆发的相变图，并显示在 2020 年 3 月 2 日，有几个国家处于 COVID-19 疫情爆发的边缘。为了说明社会距离的有效性，我们分析了配置随机网络中疾病传播的独立级联模型。展示了两种拉开社会距离的方法，它们可以降低有效繁殖数 Re 。

关键词：COVID-19、SARS-CoV-2、冠状病毒、时间依赖性 SIR 模型、检测不到的感染、群体免疫、超级传播者、独立级联、社会距离。

中图分类号：TN929 文献标志码：A

**A Time-Dependent SIR Model for COVID-19**

**With Undetectable Infected Persons**

（School of Communication and Information Engineering, Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing 400065, P. R. China）

**Abstract:** In this paper, we conduct mathematical and numerical analyses for COVID-19. To predict the trend of COVID-19, we propose a time-dependent SIR model that tracks the transmission and recovering rate at time t . Using the data provided by China authority, we show our one-day prediction errors are almost less than 3% . The turning point and the total number of confirmed cases in China are predicted under our model. To analyze the impact of the undetectable infections on the spread of disease, we extend our model by considering two types of infected persons: detectable and undetectable infected persons. Whether there is an outbreak is characterized by the spectral radius of a 2×2 matrix. If R0>1 , then the spectral radius of that matrix is greater than 1, and there is an outbreak. We plot the phase transition diagram of an outbreak and show that there are several countries on the verge of COVID-19 outbreaks on Mar. 2, 2020. To illustrate the effectiveness of social distancing, we analyze the independent cascade model for disease propagation in a configuration random network. We show two approaches of social distancing that can lead to a reduction of the effective reproduction number Re .

## 0 引 言

2019年12月初，中国武汉首次确诊了冠状病毒感染者，随后几周，这种疾病在中国大陆和其他国家广泛传播，引发了全球恐慌。该病毒被命名为“SARS-CoV-2”，引发的疾病被命名为“2019冠状病毒病（简称“COVID-19”）”。根据中国政府的官方声明，截至2020年3月2日，已有80151人感染该疾病，2943人死亡。为阻止病毒的传播，中国和其他国家的政府采取了一些策略，如城市封锁、交通停运、社区管理、社交距离和健康教育知识的宣传。

与严重急性呼吸系统综合症（SARS）和其他传染病不同，COVID-19 的一个问题特点是存在无症状感染（症状非常轻微）。这些无症状感染者不知道自己的传染能力，因此在被发现之前就会让更多人感染[1]。在这种情况下，传播率会急剧上升。根据世界卫生组织最近的报告[2]，COVID-19 患者中只有 87.9% 发烧，67.7% 干咳。如果以体温作为检测 COVID-19 感染病例的手段，则有超过 10%的感染者无法被检测出来。

由于最近疫情的发展，我们有兴趣为 COVID-19 解决以下重要问题：

Q1) 是否有可能遏制 COVID-19？全城封锁、交通管制、社区管理、健康教育知识宣传等常用措施能否有效遏制 COVID-19？

Q2）如果 COVID-19 能够得到控制，疫情的高峰期是什么时候？

Q3）无法检测到的感染对疾病传播有何影响？

Q4）如果 COVID-19 无法控制，那么需要感染人群的比例是多少才能实现群体免疫？

Q5）减少人际交往、取消群众集会等疏远社会的方法对控制 COVID-19 的效果如何？

对于 (Q1)，我们在本文中分析了中国的病例，并旨在预测病毒的传播方式。具体而言，我们建议使用与时间相关的易感-感染-康复（SIR）模型来分析和预测感染人数和康复人数（包括死亡人数）。在传统的 SIR 模型中，有两个时间不变变量：传播率 β 和恢复率 γ。传播率 β 表示每个人在单位时间内平均与随机选择的其他人有 β 次接触。传统的 SIR 模型忽略了 β 和 γ 的时变特性，过于简单，无法精确有效地预测疾病的趋势。因此，我们建议使用与时间相关的 SIR 模型，其中传播率 β 和康复率 γ 都是时间 t 的函数。我们的想法是使用机器学习方法跟踪传播率 β(t) 和康复率 γ(t)，然后利用它们预测未来某一时间 t 的感染人数和康复人数。我们的随时间变化的 SIR 模型可以动态调整关键参数，如 β(t) 和 γ(t)，以适应控制策略的变化，这与文献中现有的 SIR 和 SEIR 模型（如 [3]、[4]、[5]、[6]、[7] 和 [8]）不同。例如，我们观察到，与我们的模型相比，全城封锁会大大降低传播率。大多数用于预测 COVID-19 的数据驱动和曲线拟合方法，如 [9]、[10] 和 [11]，似乎都能完美地跟踪数据；但它们缺乏对疾病传播的物理洞察力。此外，它们对 2020 年 2 月 12 日湖北省确诊病例定义的突然变化非常敏感。另一方面，我们的随时间变化的 SIR 模型可以检验中国政府的疫情控制政策，并提供合理的解释。利用中华人民共和国国家卫生健康委员会（NHC）提供的数据[12]，我们发现，除了 2020 年 2 月 12 日由于确诊病例定义的改变而无法预测外，确诊病例数的单日预测误差几乎小于 3%。

对于 (Q2)，基本繁殖数 R0 定义为在感染期间，一个典型感染者在完全易感人群中恢复之前的预期额外感染（继发病例）数[13]，[14]，是检验疾病是否会暴发以及需要对多大比例的人群接种疫苗才能根除疾病的常用指标之一。事实上，在任何特定时间，不同比例的人群对任何特定疾病都具有免疫力。为此，有效繁殖数 Re(t) 被用来量化疾病在部分易感人群中的瞬时传播[14]。提前了解 R0 和 Re(t)有助于政府制定更准确的防疫政策。在经典的 SIR 模型中，R0 简单地说就是 β/γ，因为一个感染者平均需要 1/γ 天才能康复，在此期间，他（平均）会接触到 β 个人。在我们的随时间变化的 SIR 模型中，时间 t 的有效繁殖数定义为 β(t)/γ(t)，用 Re(t) 表示。如果 Re(t)>1，疾病将以指数形式传播，并感染总人口的一部分。相反，疾病最终会被控制住。因此，通过观察 Re(t) 随时间的变化，甚至预测未来的 Re(t)，我们可以检验某些流行病控制政策是否有效。根据中华人民共和国国家卫生健康委员会（NHC）提供的数据[12]，我们预测 2020 年 2 月 17 日为转折点（峰值），即有效繁殖数小于 1 的那一天。此外，在我们的（确定性）模型中，如果中国维持当前的传染病控制政策，疫情将在高峰期过后约 6 周结束。在这种情况下，根据我们的（确定性）模型预测，中国的确诊病例总数约为 80,000 例。

对于 (Q3)，我们将 SIR 模型扩展为两类感染者：可检测到的感染者（1 类）和不可检测到的感染者（2 类）。感染者属于 1 型（或 2 型）的概率为 w1（或 w2），其中 w1+w2=1 。1 型（或 2 型）感染者的传播率为 β1（或 β2），恢复率为 γ1（或 γ2）。该模型的基本繁殖数为：

实际上，1 型感染者的传播率低于 2 型感染者（因为 1 型感染者可以被隔离）。在这种模式下，疾病是否可控取决于 2×2 矩阵的谱半径。如果该矩阵的频谱半径大于 1，则说明疾病爆发。反之，如果它小于 1，则不会爆发。一个有趣的结果是，如果（1）中的基本繁殖数 R0 大于（或小于）1，则该矩阵的频谱半径大于（或小于）1。利用约翰霍普金斯大学 GitHub [16] 中 2020 年 1 月 22 日至 2020 年 3 月 2 日的历史数据，我们将研究扩展到其他一些国家，包括日本、新加坡、韩国、意大利和伊朗。我们的数值结果表明，包括韩国、意大利和伊朗在内的几个国家都在渗滤阈值曲线之上，它们即将在 2020 年 3 月 2 日爆发 COVID-19。与文献中的其他时间依赖性流行病模型（如著名的tsiR模型[17]、[18]和最近的《科学》文章[19]）相比，我们的模型进一步考虑了无法检测到的感染者的影响（另见[19]中对我们的论文[20]预印版的评论）。Oliver Wyman（全球知名的管理咨询公司之一）在其 COVID-19 大流行导航核心模型白皮书[21]中将我们的随时间变化的 SIR 模型的预印本[20]作为两个主要参考文献之一。他们还在白皮书中纳入了政府应对行动和 Google COVID-19 社区流动性报告，用于分析无法检测到的感染者的影响。这显示了进一步扩展我们的模型以获得更准确预测的潜力。

英国首相鲍里斯-约翰逊（Boris Johnson）曾建议，感染 COVID-19 并痊愈的人数比例要足够高，以实现群体免疫。为了解决 (Q4) 中的问题，我们认为群体免疫与 SIR 模型中易感人群数量的减少相对应，在至少有 1-1R0 的人感染 COVID-19 并康复后，就可以实现群体免疫。

对于问题 5，我们考虑了两种常用的拉开社会距离的方法：(i) 允许每个人保持的人际交往不超过其正常交往的一小部分，以及 (ii) 取消群众聚会。为了分析社会疏远，我们必须考虑到社会网络（及其网络结构）。为此，我们考虑了疾病在随机网络中传播的独立级联（IC）模型，该网络由度分布 pk,k=0,1,2,....。IC 模型已被广泛用于研究病毒营销中的影响力最大化问题（见，例如，[22]）。在 IC 模型中，一个受感染的节点可以以一定的传播概率将疾病传播给邻近的易感节点（通过边）。如此反复传播，我们就会得到一个长期包含受感染节点集合的子图。通过将 IC 模型中的传播概率与 SIR 模型中的传播率和恢复率联系起来，我们展示了社会距离的两种结果： (i) 对于允许每个人保持的人际接触不超过（平均）其正常接触的 a 部分的社会疏远方法，有效繁殖数减少了 a2 倍；(ii) 对于通过移除边数大于或等于 k0 的节点来取消大规模聚集的社会疏远方法，有效繁殖数减少了 ∑k0-2k=0kqk∑∞k=0kqk 倍，其中 qk 是 pk 的过量度分布。

本文接下来的内容安排如下： 在第二节中，我们提出了随时间变化的 SIR 模型。然后，我们在第三节中将该模型扩展为不可检测感染者的 SIR 模型。在第四节中，我们考虑了在一个由程度分布指定的随机网络中疾病传播的独立级联模型。在第五部分，我们进行了几个数值实验来说明我们模型的有效性。在第六部分，我们提出了控制 COVID-19 的一些讨论和建议。本文在第七节中结束。

## 1 随时间变化的 SIR 模型

### 1.1 易感-感染-恢复（SIR）模式

在典型的传染病数学模型中，人们通常将病毒与宿主的相互作用和流行病的演变简化为几种基本的疾病状态。其中一个最简单的流行病模型被称为易感-感染-恢复（SIR）模型[15]，包括三种状态：易感状态、感染状态和恢复状态。处于易感状态的个体是指在 t 时间尚未感染疾病的个体，但如果与感染疾病的人接触，则有可能被感染。感染状态指的是在 t 时间患有疾病的个体，可能会感染易感个体（如果他们相互接触）。痊愈状态指的是在 t 时间，患者已经痊愈或死亡，不再具有传染性。之所以将死亡人数计入康复状态，是因为从流行病学的角度来看，这基本上是一回事，无论康复还是死亡都不会对疾病的传播产生太大影响。因此，可以有效地将其从疾病的潜在宿主中排除[23]。用 S(t)、X(t) 和 R(t) 表示时间 t 的易感人数、感染人数和康复人数。总结上述 SIR 模型，我们认为它与 COVID-19 疫情非常相似，本文将采用 SIR 模型作为基本模型。

在传统的 SIR 模型中，有两个时间不变变量：传播率 β 和恢复率 γ。传播率 β 表示每个个体在单位时间内平均与随机选择的其他人有 β 次接触。传统的 SIR 模型忽略了 β 和 γ 的时变特性，这种假设过于简单，无法精确有效地预测疾病的趋势。因此，我们提出了随时间变化的 SIR 模型，其中传播率 β 和恢复率 γ 都是时间 t 的函数。

### 1.2 随时间变化的 SIR 模型的微分方程

在传统的 SIR 模型中，S(t)、X(t) 和 R(t) 这三个变量受以下微分方程控制（参见本书[15]）：

我们注意到

其中 n 为总人口。设 β(t) 和 γ(t) 为 t 时刻的传播率和恢复率。用 β(t) 和 γ(t) 代替上述微分方程中的 β 和 γ，可得

三个变量 S(t)、X(t) 和 R(t) 仍然满足 (2)。

现在我们简要解释一下这三个等式的直观含义。如果我们假设总人口为 n，那么随机选择的人处于易感状态的概率为 S(t)/n。因此，一个处于感染状态的人在单位时间内（平均）会接触到 β(t)S(t)/n 个处于易感状态的人，这意味着新感染者的数量为 β(t)S(t)X(t)/n （因为在时间 t 时有 X(t) 人处于感染状态）。相反，处于易感状态的人数将减少 β(t)S(t)X(t)/n。由于 S(t)、X(t) 和 R(t)这三个变量仍然满足（2），我们可以得到

即从易感状态变为感染状态的人数减去从感染状态变为恢复状态的人数（见 (4)）。

### 1.3 离散时间随时间变化的 SIR 模型

由于 COVID-19 数据按天更新[12]，我们将（3）、（4）和（5）中的微分方程修正为离散时差方程：

同样，三个变量 S(t)、X(t) 和 R(t) 仍然满足 (2)。

在疾病传播初期，确诊病例数量很少，大部分人群处于易感状态。因此，在分析 COVID-19 的初始阶段时，我们假设 {S(t)≈n，t≥0}，并进一步将（7）简化如下：

根据上述差分方程，我们很容易得出每天的 β(t) 和 γ(t)。根据 (8)，我们可以得出

在 (9) 中使用 (8) 可以得出

### 1.4 通过岭回归跟踪传输速率 β(t) 和恢复速率 γ(t)

在本小节中，我们通过线性系统中常用的有限脉冲响应（FIR）滤波器来跟踪和预测 β(t)和 γ(t)。用 β^(t) 和 γ^(t) 表示预测的传输速率和恢复速率。根据 FIR 滤波器，它们的预测结果如下：

其中，J 和 K 是两个 FIR 滤波器的阶数（aj,j=0,1,...,J，bk,k=0,1,...,K 是这两个 FIR 滤波器的脉冲响应系数）。

有几种广泛使用的机器学习方法可用于估计 FIR 滤波器的脉冲响应系数，如普通最小二乘法（OLS）、正则化最小二乘法（即脊回归）和偏最小二乘法（PLS）[24]。在本文中，我们选择脊回归作为估计方法，它可以解决以下优化问题：

## 2 未来研究趋势

到2030年，预计与自动驾驶汽车相关的服务将实现完

因此，有效管理车联网基础设施和探索新的计算方法至关重要。下面，列出了一些有前景的研究方向。

1.制定智能模型，例如文献中使用的 RL，用于决定计算应在何处卸载以及如何管理网络，以提高物联网基础设施的利用效率。例如，计算可以发送到雾服务器或云服务器。建立这样一个模型并决定一个考虑到当前服务器负载和车辆地理位置的奖励函数是值得考虑的。

2. 为边缘集群开发智能网络和存储资源管理。通过研究将数据和任务卸载到其他相邻集群的可能性来实现。这种方法应考虑模型的位置、数据传输对网络的影响，以及在研究多个集群的能力后在它们之间进行任务分工。在这种情况下，使用容器而不是虚拟机可以简化迁移、资源扩展和服务维护过程。

3. 由于采用区块链解决方案，收集车联网数据的成本可能仍然很高。因此，需要进一步优化网络、存储和计算资源方面的成本，以吸引利益相关者投资此类技术[8]。

4.提高 AI 算法在实践中的性能。仿真中的参数取值方面模拟性质较强，可能导致理论值与真实情况存在一定的偏差。现在大部分文献仅限于使用一些虚拟交通数据进行仿真评估，未来需要尽可能运用真实的交通数据，通过搭建硬件平台获取实际数据，基于实际数据对多设备、多资源下的计算通信资源分配问题与任务卸载决策问题进行研究，提出更具有普适性的联合任务卸载与资源分配的算法，以增强算法的实践性能。

## 3 总结

本文通过对人工智能在车联网的相关应用做了部分调研。主要调研了人工智能在车联网的资源管理和通信的应用，最后列出了一些未来有前景的研究方向。

## 参考文献

[1] R. A. Saeed, A. B. H. Naemat, A. B. Aris and M. K. B. Awang, "Design and evaluation of lightweight IEEE 802.11p-based TDMA MAC method for road side -to-vehicle communications," 2010 The 12th International Conference on Advanced Communication Technology (ICACT), Gangwon, Korea (South), 2010, pp. 1483-1488, doi: 10.1109/ICCCE.2010.5556774.

[2] F. Yang, S. Wang, J. Li, Z. Liu and Q. Sun, "An overview of Internet of Vehicles," in China Communications, vol. 11, no. 10, pp. 1-15, Oct. 2014, doi: 10.1109/CC.2014.6969789.

[3] A. Islam, M. T. Hossan and Y. M. Jang, "Introduction of optical camera communication for Internet of vehicles (IoV)," 2017 Ninth International Conference on Ubiquitous and Future Networks (ICUFN), Milan, Italy, 2017, pp. 122-125, doi: 10.1109/ICUFN.2017.7993760.

[4] C. Jiang, H. Zhang, Y. Ren, Z. Han, K. -C. Chen and L. Hanzo, "Machine Learning Paradigms for Next-Generation Wireless Networks," in IEEE Wireless Communications, vol. 24, no. 2, pp. 98-105, April 2017, doi: 10.1109/MWC.2016.1500356WC.

[5] H. Yang, A. Alphones, Z. Xiong, D. Niyato, J. Zhao and K. Wu, "Artificial-Intelligence-Enabled Intelligent 6G Networks," in IEEE Network, vol. 34, no. 6, pp. 272-280, November/December 2020, doi: 10.1109/MNET.011.2000195.

[6] E. Sayed Ali Ahmed, Z. T. Mohammed, M. Bakri Hassan, and R. A. Saeed, “Algorithms optimization for intelligent IoV applications,” *Handbook of Research on Innovations and Applications of AI, IoT, and Cognitive Technologies*, IGI Global, Hershey, PA, USA, pp. 1–25, 2021.

[7] Z. Ning *et al*., "Deep Reinforcement Learning for Intelligent Internet of Vehicles: An Energy-Efficient Computational Offloading Scheme," in *IEEE Transactions on Cognitive Communications and Networking*, vol. 5, no. 4, pp. 1060-1072, Dec. 2019, doi: 10.1109/TCCN.2019.2930521.

[8] A. Hammoud, H. Sami, A. Mourad, H. Otrok, R. Mizouni and J. Bentahar, "AI, Blockchain, and Vehicular Edge Computing for Smart and Secure IoV: Challenges and Directions," in *IEEE Internet of Things Magazine*, vol. 3, no. 2, pp. 68-73, June 2020, doi: 10.1109/IOTM.0001.1900109.

[9] T. Alladi, V. Kohli, V. Chamola, F. R. Yu and M. Guizani, "Artificial Intelligence (AI)-Empowered Intrusion Detection Architecture for the Internet of Vehicles," in *IEEE Wireless Communications*, vol. 28, no. 3, pp. 144-149, June 2021, doi: 10.1109/MWC.001.2000428.

[10] Ali, E.S., Hassan, M.B., Saeed, R.A. (2021). Machine Learning Technologies in Internet of Vehicles. In: Magaia, N., Mastorakis, G., Mavromoustakis, C., Pallis, E., Markakis, E.K. (eds) Intelligent Technologies for Internet of Vehicles. Internet of Things. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-76493-7\_7

[11] Z. Ning *et al*., "Deep Reinforcement Learning for Intelligent Internet of Vehicles: An Energy-Efficient Computational Offloading Scheme," in *IEEE Transactions on Cognitive Communications and Networking*, vol. 5, no. 4, pp. 1060-1072, Dec. 2019, doi: 10.1109/TCCN.2019.2930521.

[12] W. Tong, A. Hussain, W. X. Bo and S. Maharjan, "Artificial Intelligence for Vehicle-to-Everything: A Survey," in IEEE Access, vol. 7, pp. 10823-10843, 2019, doi: 10.1109/ACCESS.2019.2891073.

[13] G. Wang and F. Xu, "Regional Intelligent Resource Allocation in Mobile Edge Computing Based Vehicular Network," in IEEE Access, vol. 8, pp. 7173-7182, 2020, doi: 10.1109/ACCESS.2020.2964018.