1. **证明题**（本大题共4小题，每小题5分，共20分）
2. 设是中的范数，证明集合是一个凸锥。

**证**：任意给定，则（2分）

即证（1分）

又，故，集合是凸锥。（2分）

1. 证明函数是拟凹函数，其中和是正常数。

**证：**令的上水平集为（1分）

 （2分）

由于为凸函数，凸函数的0下水平集为凸集， （1分）

故为凸集，故为拟凹函数。（1分）

1. 证明函数在是凸函数。

**证：**  （2分）

（2分）

由于的二阶Hessian矩阵正定，故为凸函数。（1分）

1. 证明函数是凸函数。

**证：**（2分）

（2分）

的二阶Hessian矩阵为，其顺序主子式均大于0为正定矩阵，故为凸函数。（1分）

**三、 计算题**（本大题共5小题，每小题4分，共20分）

请求出下列函数的共轭函数，其中函数*f*的共轭函数定义为：

1. 

**解：**（1分）

令（1分）

1. 当时，（1分）
2. 当时，（1分）
3. 

**解：**（1分）

令（1分）

（2分）

1. 

**解：**（1分）

令

（2分）

（1分）

1. 

**解：**（1分）

令 

（2分）

（1分）

**四、 应用题**（本大题共3小题，共40分）

1、写出如下优化问题的对偶函数和KKT条件,并基于对偶优化问题给出原问题的最优解 （10分）



**解：**其Lagrange函数为（1分）

其对偶函数为（1分）

（2分）

KKT条件： （3分）

则（1分）

对偶问题可表示为：

（1分）

带入得到则原问题的最优解为。

3、考虑如下优化问题：（20分）



其中

（1）该优化问题的约束集合是否为凸集？为什么？（4分）

（2）该优化问题的目标函数是否为凹函数？为什么？（4分）

（3）写出该优化问题的KKT条件，并证明该问题的取得最优解时，（8分）

（4）对于上述优化问题的一个下界逼近问题：



请给出一种变量替换方法，将该下界逼近问题转化为一个等价的凸优化问题，写出其等价凸优化问题。（4分）

（1）**解：**是凸集

设集合

任取，则

，则

，

可知



所以

（2）不是凹函数，因为任取两点，两点的中点不在曲线下方。

（3）**解：**拉格朗日函数为：



KKT条件：



反证法：

假设



故总能找到一个新的功率分配分量满足总功率约束，获得更大的目标值。

（4）**解：**令

则原问题转换为：

证明（P1）为凸优化问题：



由于满足log-sum-exp形式，为凸函数，所以为凹函数，约束满足凸函数的下水平集为凸集，所以（P1）是一个凸优化问题。