一种考虑时间因素的 COVID-19 SIR 模型，包含无法检测到的感染者

（重庆邮电大学 通信与信息工程学院，重庆 400065）

摘 要：本文对 **COVID-19** 进行了数学和数值分析。为了预测 **COVID-19** 的趋势，我们提出了一个随时间变化的 **SIR** 模型，该模型跟踪时刻的传播率和恢复率。利用中国权威机构提供的数据，我们发现一天的预测误差几乎小于 3%。根据我们的模型，可以预测中国的转折点和确诊病例总数。为了分析无法检测到的感染对疾病传播的影响，我们扩展了模型，考虑了两类感染者：可检测到的感染者和无法检测到的感染者。疫情是否爆发由一个 2×2 矩阵的谱半径来表征。如果则该矩阵的光谱半径大于1，存在疫情爆发。同时绘制了疫情爆发的相变图，并显示在 2020 年 3 月 2 日，有几个国家处于 COVID-19 疫情爆发的边缘。为了说明社会距离的有效性，我们分析了配置随机网络中疾病传播的独立级联模型。展示了两种拉开社会距离的方法，它们可以降低有效繁殖数。

关键词：COVID-19、SARS-CoV-2、冠状病毒、时间依赖性 SIR 模型、检测不到的感染、群体免疫、超级传播者、独立级联、社会距离。

中图分类号：TN929 文献标志码：A

**A Time-Dependent SIR Model for COVID-19**

**With Undetectable Infected Persons**

HUANG Yu

（School of Communication and Information Engineering, Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing 400065, P. R. China）

**Abstract:** In this paper, we conduct mathematical and numerical analyses for **COVID-19**. To predict the trend of **COVID-19**, we propose a time-dependent **SIR** model that tracks the transmission and recovering rate at time  . Using the data provided by China authority, we show our one-day prediction errors are almost less than 3% . The turning point and the total number of confirmed cases in China are predicted under our model. To analyze the impact of the undetectable infections on the spread of disease, we extend our model by considering two types of infected persons: detectable and undetectable infected persons. Whether there is an outbreak is characterized by the spectral radius of a 2×2 matrix. If  then the spectral radius of that matrix is greater than 1, and there is an outbreak. We plot the phase transition diagram of an outbreak and show that there are several countries on the verge of **COVID-19** outbreaks on Mar. 2, 2020. To illustrate the effectiveness of social distancing, we analyze the independent cascade model for disease propagation in a configuration random network. We show two approaches of social distancing that can lead to a reduction of the effective reproduction number .

## 0 引 言

2019年12月初，中国武汉首次确诊了冠状病毒感染者，随后几周，这种疾病在中国大陆和其他国家广泛传播，引发了全球恐慌。该病毒被命名为“SARS-CoV-2”，引发的疾病被命名为“2019冠状病毒病（简称“COVID-19”）”。根据中国政府的官方声明，截至2020年3月2日，已有80151人感染该疾病，2943人死亡。为阻止病毒的传播，中国和其他国家的政府采取了一些策略，如城市封锁、交通停运、社区管理、社交距离和健康教育知识的宣传。

与严重急性呼吸系统综合症（SARS）和其他传染病不同，COVID-19 的一个问题特点是存在无症状感染（症状非常轻微）。这些无症状感染者不知道自己的传染能力，因此在被发现之前就会让更多人感染[1]。在这种情况下，传播率会急剧上升。根据世界卫生组织最近的报告[2]，COVID-19 患者中只有 87.9% 发烧，67.7% 干咳。如果以体温作为检测 COVID-19 感染病例的手段，则有超过 10%的感染者无法被检测出来。

由于最近疫情的发展，我们有兴趣为 **COVID-19** 解决以下重要问题：

Q1) 是否有可能遏制 **COVID-19**？全城封锁、交通管制、社区管理、健康教育知识宣传等常用措施能否有效遏制 **COVID-19**？

Q2）如果 **COVID-19** 能够得到控制，疫情的高峰期是什么时候？又将在何时结束？

Q3）无法检测到的感染对疾病传播有何影响？

Q4）如果 **COVID-19** 无法控制，那么需要感染人群的比例是多少才能实现群体免疫？

Q5）减少人际交往、取消群众集会等疏远社会的方法对控制 **COVID-19** 的效果如何？

对于(**Q1**)，我们在本文中分析了中国的病例，旨在预测病毒的传播方式。具体而言，我们建议使用与时间相关的易感-感染-康复（**SIR**）模型来分析和预测感染人数和康复人数（包括死亡人数）。在传统的**SIR**模型中，有两个时间不变变量：传播率和恢复率 。传播率表示每个人在单位时间内平均与随机选择的其他人有次接触。传统的 **SIR** 模型忽略了和的时变特性，过于简单，无法精确有效地预测疾病的趋势。因此，我们建议使用与时间相关的 **SIR** 模型，其中传播率 和康复率都是时间的函数。我们的想法是使用机器学习方法跟踪传播率和康复率，然后利用它们预测未来某一时间的感染人数和康复人数。我们的随时间变化的 SIR 模型可以动态调整关键参数，如和，以适应控制策略的变化，这与文献中现有**SIR**和**SEIR** 模型（如 [3]、[4]、[5]、[6]、[7] 和 [8]）不同。例如，我们观察到，从我们的模型来看，全城封锁会大大降低传播率。大多数用于预测 **COVID-19** 的数据驱动和曲线拟合方法，如 [9]、[10] 和 [11]，似乎都能完美地跟踪数据；但它们缺乏对疾病传播的物理洞察力。此外，它们对 2020 年 2 月 12 日湖北省确诊病例定义的突然变化非常敏感。另一方面，我们的时变**SIR** 模型可以检验中国政府的疫情控制政策，并提供合理的解释。利用中华人民共和国国家卫生健康委员会（**NHC**）提供的数据[12]，我们发现，除了 2020 年 2 月 12 日由于确诊病例定义的改变而无法预测外，确诊病例数的单日预测误差几乎小于 3%。

对于 (**Q2**)，基本繁殖数定义为在感染期间，一个典型感染者在完全易感人群中恢复之前的预期额外感染（继发病例）数[13]，[14]，是检验疾病是否会暴发以及需要对多大比例的人群接种疫苗才能根除疾病的常用指标之一。事实上，在任何特定时间，不同比例的人群对任何特定疾病都具有免疫力。为此，有效繁殖数 被用来量化疾病在部分易感人群中的瞬时传播[14]。提前了解和有助于政府制定更准确的防疫政策。在经典的**SIR**模型中，简单地定义为 ，因为一个感染者平均需要 天才能康复，在此期间，他（平均）会接触到个人。在我们的时变 **SIR** 模型中，时间的有效繁殖数定义为，用表示。如果>1，疾病将以指数形式传播，并感染总人口的一部分。相反，疾病最终会被控制住。因此，通过观察随时间的变化，甚至预测未来的，我们可以检验某些流行病控制政策是否有效。根据中华人民共和国国家卫生健康委员会（NHC）提供的数据[12]，我们预测 2020 年 2 月 17 日为转折点（峰值），即有效繁殖数小于 1 的那一天。此外，在我们的（确定性）模型中，如果中国维持当前的传染病控制政策，疫情将在高峰期过后约 6 周结束。在这种情况下，根据我们的（确定性）模型预测，中国的确诊病例总数约为80,000 例。

对于 (**Q3**)，我们将 **SIR** 模型扩展为两类感染者：可检测到的感染者（类型）和不可检测到的感染者（类型）。感染者属于型（或型）的概率为 （或 ），其中 。型（或型）感染者的传播率为 （或 ），恢复率为（或 ）。该模型的基本繁殖数为：



实际上，型感染者的传播率低于型感染者（因为型感染者可以被隔离）。在这种模式下，疾病是否可控取决于×矩阵的谱半径。如果该矩阵的频谱半径大于，则说明疾病爆发。反之，如果它小于，则不会爆发。一个有趣的结果是，如果（）中的基本繁殖数大于（或小于），则该矩阵的频谱半径大于（或小于）。利用约翰霍普金斯大学 GitHub [16] 中 2020 年 1 月 22 日至 2020 年 3 月 2 日的历史数据，我们将研究扩展到其他一些国家，包括日本、新加坡、韩国、意大利和伊朗。我们的数值结果表明，包括韩国、意大利和伊朗在内的几个国家都在渗滤阈值曲线之上，它们即将在 2020 年 3 月 2 日爆发 COVID-19。与文献中的其他时间依赖性流行病模型（如著名的tsiR模型[17]、[18]和最近的《科学》文章[19]）相比，我们的模型进一步考虑了无法检测到的感染者的影响（另见[19]中对我们的论文[20]预印版的评论）。Oliver Wyman（全球知名的管理咨询公司之一）在其**COVID-19 Pandemic Navigator Core Model [21]**中将我们的时变 **SIR** 模型的预印本[20]作为两个主要参考文献之一。他们还在白皮书中纳入了政府应对行动和 Google COVID-19 社区流动性报告，用于分析无法检测到的感染者的影响。这显示了进一步扩展我们的模型以获得更准确预测的潜力。

英国首相鲍里斯-约翰逊（Boris Johnson）曾建议，感染 **COVID-19** 并痊愈的人数比例要足够高，以实现群体免疫。为了解决 (**Q4**) 中的问题，我们认为群体免疫与 **SIR** 模型中易感人群数量的减少相对应，在至少有的人感染 **COVID-19** 并康复后，就可以实现群体免疫。

对于问题5，我们考虑了两种常用的拉开社会距离的方法：(i) 允许每个人保持的人际交往不超过其正常交往的一小部分，以及 (ii) 取消群众聚会。为了分析社会距离，我们必须考虑到社会网络（及其网络结构）。为此，我们考虑了疾病在随机网络中传播的独立级联（**IC**）模型，该网络基于度分布  。**IC** 模型已被广泛用于研究病毒营销中的影响力最大化问题（例如，[22]）。在 **IC** 模型中，一个受感染的节点可以以一定的传播概率将疾病传播给邻近的易感节点（通过边）。如此反复传播，我们就会得到一个长期包含受感染节点集合的子图。通过将**IC** 模型中的传播概率与 **SIR** 模型中的传播率和恢复率联系起来，我们展示了社会距离的两种结果： (i) 对于允许每个人保持的人际接触不超过（平均）其正常接触的部分的社会距离方法，有效繁殖数减少了倍；(ii) 对于通过移除边数大于或等于的节点来取消大规模聚集的社会距离方法，有效繁殖数减少了 倍，其中是的多余度分布。

本文接下来的内容安排如下： 在第二节中，我们提出了随时间变化的 **SIR** 模型。然后，我们在第三节中将该模型扩展检测不到感染者的 **SIR** 模型。在第四节中，我们考虑了在一个由度分布指定的随机网络中疾病传播的独立级联模型。在第五部分，我们进行了几个数值实验来说明我们模型的有效性。在第六部分，我们提出了控制 **COVID-19** 的一些讨论和建议。本文在第七节中结束。

## 1 随时间变化的 SIR 模型

### 1.1 易感-感染-恢复（SIR）模式

在典型的传染病数学模型中，人们通常将病毒与宿主的相互作用和流行病的演变简化为几种基本的疾病状态。其中一个最简单的流行病模型被称为易感-感染-恢复（**SIR**）模型[15]，包括三种状态：易感状态、感染状态和恢复状态。处于易感状态的个体是指在时间尚未感染疾病的个体，但如果与感染疾病的人接触，则有可能被感染。感染状态指的是在时间患有疾病的个体，可能会感染易感个体（如果他们相互接触）。痊愈状态指的是在时间，患者已经痊愈或死亡，不再具有传染性。之所以将死亡人数计入康复状态，是因为从流行病学的角度来看，这基本上是一回事，无论康复还是死亡都不会对疾病的传播产生太大影响。因此，可以有效地将其从疾病的潜在宿主中排除[23]。用、 和表示时间的易感人数、感染人数和康复人数。总结上述 **SIR** 模型，我们认为它与 **COVID-19** 疫情非常相似，本文将采用 **SIR** 模型作为基本模型。

在传统的 **SIR** 模型中，有两个时间不变变量：传播率和恢复率。传播率表示每个个体在单位时间内平均与随机选择的其他人有次接触。传统的 SIR 模型忽略了和的时变特性，这种假设过于简单，无法精确有效地预测疾病的趋势。因此，我们提出了随时间变化的 **SIR** 模型，其中传播率和恢复率都是时间的函数。

### 1.2 时变SIR 模型的微分方程

在传统的 **SIR** 模型中，、 和这三个变量受以下微分方程控制（参考书[15]）：

我们注意到



其中为总人口。设和为时刻的传播率和恢复率。用和代替上述微分方程中的和，可得







三个变量、和仍然满足。

现在我们简要解释一下这三个等式的直观含义。如果我们假设总人口为，那么随机选择的人处于易感状态的概率为 。因此，一个处于感染状态的人在单位时间内（平均）会接触个处于易感状态的人，这意味着新感染者的数量为（因为在时间时有人处于感染状态）。相反，处于易感状态的人数将减少。此外，由于处于感染状态的每个个体的康复率为 ，因此在时间 时人康复。在公式（5）中说明了时间在时 的差异。由于、和这三个变量仍然满足，我们可以得到

即从易感状态变为感染状态的人数减去从感染状态变为康复状态的人数（见 ）。

### 1.3 离散时间时间相关SIR 模型

由于 **COVID-19** 数据按天更新[12]，我们将、和中的微分方程修正为离散时差方程：







同样，三个变量、和仍然满足。

在疾病传播初期，确诊病例数量很少，大部分人群处于易感状态。因此，在分析 **COVID-19** 的初始阶段时，我们假设 {≈，≥0}，并进一步将简化如下：



根据上述差分方程，我们很容易得出每天的和。根据 ，我们可以得出



在中代入可以得出



根据某一时期的历史数据{，， }，我们可以使用公式(10)和(11)得到相应的{，，}。利用上述信息，我们可以使用机器学习方法预测随时间变化的传播率和恢复率。

1.4 通过岭回归跟踪传输速率和恢复速率

在本小节中，我们通过线性系统中常用的有限脉冲响应（**FIR**）滤波器来跟踪和预测和 。用和  表示预测的传输速率和恢复速率。根据 **FIR** 滤波器，它们的预测结果如下：





其中,和是两个**FIR** 滤波器的阶数(),和 是这两个 FIR 滤波器的脉冲响应系数）。

有几种广泛使用的机器学习方法可用于估计 **FIR**滤波器的脉冲响应系数，如普通最小二乘法（**OLS**）、正则化最小二乘法（即岭回归）和偏最小二乘法（**PLS**）[24]。在本文中，我们选择岭回归作为估计方法，它可以解决以下优化问题：





其中和为正则化参数.

### 1.5跟踪时间相关SIR 模型的感染人数 和康复人数

在本小节中，我们将展示如何在随时间变化的 **SIR** 模型中使用两个 **FIR** 滤波器来跟踪和预测感染人数和康复人数。给定一段历史数据{,, 0≤≤ }，我们首先通过和得出{,,0≤≤}。然后，我们求解岭回归（目标函数为 和，约束条件为和）来学习 **FIR** 滤波器的系数，即 和。学习到这些系数后，我们就可以通过和中训练好的岭回归预测时刻的和。

要预测时的和，我们只需用和中的和替换和。由此得出:





为了预测时的和，我们利用和估算和 。与和 类似，我们预测和如下：





算法 1 概述了我们的跟踪/预测方法的详细步骤。

|  |
| --- |
| 算法 1：跟踪离散时间时变 **SIR** 模型 |
| 输入： {,, }, 正则化参数 和, **FIR** 滤波器的阶数和, 预测窗口  输出： {，，}，{，，}，以及{，，}.   1. 分別使用公式和，计算出{，，} 2. 使用（14）和（15）训练岭回归。 3. 分别通过（12）和（13）估计和。 4. 分别使用（16）和（17）估计第二天感染人数和康复人数。 5. While  do 6. 分别估计（12）和（13）中的和。 7. 分别使用（18）和（19）预测和。 8. End while |

我们注意到，这种确定性流行病模型是基于 和的平均场近似值。这种近似是大数定律的结果。因此，当和相对较小时，平均值场近似可能没有预期的那么精确。在这种情况下，我们可能不得不采用随机流行病模型，如马尔可夫链。

## 2 检测不到感染者的 SIR 模型

根据世界卫生组织的最新报告[2]，**COVID-19** 患者中只有 87.9% 发烧，67.7% 干咳。这说明存在无症状感染。最近的研究[7]和[25]也指出了 **COVID-19** 无症状携带者的存在。这些人没有意识到自己的传染性，从而使更多的人受到感染。在这种情况下，传播率会急剧上升。如果没有大规模检测等方法来检测这些无症状感染者，这些人将无法被检测到。

本文中的无法检测到的感染者是指在现行防疫政策下尚未检测到或检测不到的感染者。为了将无法检测到的感染者考虑在内，我们在本节中提出了包含无法检测到的感染者的 **SIR** 模型。我们假设有两类感染者。可检测到（有明显症状）的感染者被归类为型感染者，无症状且无法检测到的感染者被归类为型感染者。对于一个感染者来说，其成为型感染者的概率为，成为型感染者的概率为，其中。此外，这两类感染者根据是否接受治疗或隔离，其传播率和康复率也不同。我们将和分别表示第类感染者在第时间的传播率和康复率；同样， 和分别表示第类感染者在第时间的传播率和康复率。

### 2.1 检测不到感染者的 SIR 模型的控制方程

现在我们来推导有两类感染者的 **SIR** 模型的控制方程。让或 （）为时间时的第一类（或第二类）感染者人数。与前面小节中(7)、(8)的推导类似，我们假设{≈, ≥0} 在流行病的初始阶段，并将分成两类感染者。我们有以下差分方程：







其中，、、和为常数。值得注意的是，这些常量也可以是随时间变化的，正如我们在之前中所做的那样。不过，在本节中，我们将它们设为常量，以关注无法检测到的感染者的影响。将和以矩阵形式重写，可得到以下矩阵方程：



其中，。设为上述系统方程的转移矩阵，即



众所周知（从线性代数中），如果的谱半径（特征值的最大绝对值）小于1，那么这样的系统就是稳定的。换句话说，当变为无穷大时， 和 将逐渐收敛为有限常数。在这种情况下，就不会爆发。相反，如果频谱半径大于1，就会爆发疫情，受感染的人数将随时间呈指数增长（以频谱半径的速率）。

此外，和还可以进一步写成随时间变化的形式。如果假设 ，根据和，我们可以得出以下表达式



根据，如果假设、和在一段时间内是常数，我们可以测量随时间的变化，即



由于疫情的进展，与的比值会随着政府的防疫政策而发生变化。通常，在新的防疫政策出台后，该政策会在一段时间内对与的比值产生明显的影响，因此通常以阶跃函数的形式出现。

### 2.2 基本再生数

为了进一步研究此类系统的稳定条件，我们设定



注意，只是新感染者的基本再生数，因为一个感染者平均可以再感染（如果是类型 1）或 （如果是类型 2）人，并且这种情况分别以或的概率发生。在下面的定理中，我们表明，如果，则不会爆发疫情；如果 ，则会爆发疫情。因此，式中的被称为该模型中疫情爆发的渗透阈值[15]。

定理 1：如果，那么公式中矩阵 的谱半径小于 1，且不会发生疫情爆发。另一方面，如果，那么公式中矩阵的谱半径大于 1，会发生疫情爆发。

证明：（定理 1）

首先，我们注意到和是恢复率，在离散时间设置中，它们不可能大于 1，即感染者至少需要一天时间才能康复。因此，矩阵是一个正矩阵（其所有元素均为正数）。由 Perron-Frobenius 定理可知，该矩阵谱半径是 2×2 矩阵中的较大特征值。

现在我们找到矩阵的较大特征值。设为 2×2 单位矩阵，



通过公式







很容易证明的两个特征值是



和



注意。由可知，转移矩阵的较大特征值是。如果，则我们知道<0，，且。因此，从可知<0。鉴于，我们得出结论



这表明，且的谱半径小于1。另一方面，如果，则>0，并且我们从可知



这表明，且的谱半径大于1。系统参数和相变之间的关系将在下面小节中展示。

### 2.3 群体免疫

如果有足够多的人对疾病免疫，尤其是通过接种疫苗，群体免疫就是抵御传染病传播的一种方式。英国首相鲍里斯·约翰逊曾提出过一个有趣的策略，即有足够多的人感染了 **COVID-19** 并从疾病中康复，以实现群体免疫。问题是，需要感染多少人才能实现 **COVID-19** 的群体免疫。

为了解决这个问题，我们注意到，在 **SIR** 模型中，群体免疫对应于易感人群数量的减少。在我们之前的分析中，我们都假设每个人在早期阶段都易患 **COVID-19**，因此/≈1。对于群体免疫的分析，我们假设随机选择的人在时间易感的概率为。这相当于比例的个体对该疾病免疫。在这样的假设下，我们有



根据中的差分方程，我们可以重写-以推导出群体免疫的控制方程如下：







与-中的原始控制方程相比，唯一的区别是类型 1（类型 2）的传播率从变为（类型 2）从 变为）。因此，群体免疫有效地将传播率降低了 倍。作为定理1的直接结果，我们有以下推论。

推论 2：对于由我们的 SIR 模型建模的传染病，如果该模型中有两种感染者，且中的 大于 1，则在至少 比例的个体感染并从传染病中康复后，即可实现群体免疫，其中



有关可能的有限免疫力的影响及其对 **COVID-19** 群体免疫的影响的更多讨论，请参阅最近的论文 [26]。作者在那里讨论了在没有疫苗的情况下达到 **COVID-19** 群体免疫阈值可能产生的后果。特别是，[26] 指出，医疗资源的枯竭不仅会导致 **COVID-19** 死亡率上升，还会导致全因死亡率上升。

## 3 网络中疾病传播的独立级联 (IC) 模型

我们在上一节的分析没有考虑社交网络的结构如何影响疾病的传播。还有其他广泛使用的政策，例如社交距离，无法通过第三节中具有不可检测感染者的 **SIR** 模型进行建模。为了考虑网络结构，在本节中，我们考虑了疾病传播的独立级联 (IC) 模型。Kempe、Kleinberg 和 Tardos 之前在 [22] 中研究**IC**模型，用于解决病毒式营销中的影响力最大化问题。在 **IC** 模型中，有一个由图建模的社交网络，其中是节点集,是边集。受感染的节点可以以一定的传播概率将疾病传播到相邻的易感节点（通过边）。由于我们的模型中有两种类型的感染者，我们用 （分别为）表示类型 1（分别为类型 2）感染节点将疾病传播给感染节点的（直接）邻居的传播概率。一旦相邻节点被感染，它就变成类型 1（类型 2）感染节点，概率为（分别为 ），并且可以继续将疾病传播给其邻居。继续传播，我们便会形成的一个子图，从长远来看，该子图包含感染节点集。将这样的子图称为感染子图。一个有趣的问题是，如何控制疾病的传播，以便即使节点总数非常大，感染子图中的节点总数也能保持较少。

### 3.1 配置模型中的感染树

对于大量人群来说，通常很难获得确切的网络结构，即网络的邻接矩阵。但是，我们可能可以了解网络的一些特征，特别是节点的度分布。配置模型（参见书籍 [15]）是一类由节点度分布指定的随机网络。在这种随机网络中，随机选择的节点的度为，概率为。节点的边随机连接到其他节点的边。由于边连接是随机的，如果沿着受感染节点的边将疾病传播到此类网络中的其他节点，则受感染的子图看起来是一棵树（概率很高）。树假设是配置模型最重要的特性之一。配置模型的另一个关键属性是超度分布。在连接到该节点的边上找到度为的节点的概率为



因此，除去到达节点的边，仍有条边可以传播疾病。这也是被称为超度分布的原因。请注意，超度分布通常不同于度分布。当为泊松度分布时，它们是相同的。在这种情况下，配置模型简化为著名的 Erdös-Rényi 随机图。

由于感染子图在配置模型中是一棵树，我们想知道感染树的大小是否有限。如果感染节点的感染树的大小有限且概率为 1 ，则我们说没有爆发。让（或）表示类型 1（或类型 2）节点的感染树的大小通过其特定邻居之一为有限的概率。然后，





为了直观地了解的内涵，我们注意到邻居要么被感染，要么未被感染。它未被感染的概率为 1−。另一方面，它被感染的概率为。然后，以概率（分别为），被感染的邻居属于类型 1（代表类型 2）。此外，以概率，邻居有额外的条边来传播疾病。根据树假设，如果被感染的邻居属于类型 1（代表类型 2），则这条边都具有有限感染树的概率为 （分别为 ）。中的等式来自类似的论证。

定义



为超度分布的矩生成函数。然后我们可以将和简化如下：



