Στοχαστικές αριθμητικές μέθοδοι και εφαρμογές

Εργασία 3

Καρποντίνης Δημήτρης
Μπουτσίνης Αναστάσης
20 Φεβρουαρίου 2019

Περιεχόμενα

1 Εισαγωγή

1.1 Επεξήγηση Βημάτων

Στην άσκηση αυτή θα επικεντρωθούμε στην μελέτη των διαδικασιών affine και της μεθόδου Fourier.Πιο συγκεκριμένα :

1. Θα αποδείξουμε πως οι λύσεις του μοντέλου του Heston αποτελούν διαδικασίες affine και θα υπολογίσουμε την χαρακτηριστική συνάρτηση αυτών,χρησιμοποιώντας τα εργαλεία που μας παρέχει η θεωρία των affine διαδικασιών.

2. Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε τον μετασχηματισμό Fourier του ευρωπαϊκού δικαιώματος πώλησης $f(\mathrm{x}_t) = (K - e^{\mathrm{x}_t})^+$,όπου x_t είναι η λύση της πρώτης εξίσωσης του μοντέλου του Heston.Η μορφή του δικαιώματος πώλησης, σε συνδυασμό με τις προυποθέσεις της μεθόδου Fourier,θα μας οδηγήσουν στην ανάγκη κατασκευής της περιοριστικής συνάρτησης $f_R(x) = e^{-Rx}\, f(x)$.
   Έχοντας πλέον δείξει την χρησιμότητα της περιοριστικής συνάρτησης $f_R(x)$,θα υπολογίσουμε τις τιμές της παραμέτρου R για τις οποίες ικανοποιούνται οι προυποθέσεις της μεθόδου Fourier.

3. Αφού πλέον έχουν οριστεί τα παραπάνω,θα υπολογίσουμε την μέση τιμή του δικαιώματος πώλησης,χρησιμοποιώντας την μέθοδο Fourier και θα αναλύσουμε τα αποτελέσματα που προκύπτουν.

4. Τέλος θα συγκρίνουμε τα αποτελέσματα που βρήκαμε ως προς την ακρίβεια και τον υπολογιστικό χρόνο με τα αντίστοιχα της μεθόδου Euler-Monte-Carlo για την μέση τιμή του δικαιώματος πώλησης.

1.2 Βασικές θεωρητικές έννοιες

Ορισμός 1.1. *[1][Διαδικασίες Affine] Η στοχαστική διαδικασία $\mathrm{X} = (\mathrm{X}_t)_{t>0}$ είναι Affine εάν η F_t-δεσμευμένη χαρακτηριστική συνάρτηση της X_T είναι εκθετικά Affine ως προς την X_t. Δηλαδή εάν υπάρχουν συναρτήσεις $\Phi : [0,T] \times i\,\mathbb{R}^d \to \mathbb{C}, \Psi : [0,T] \times i\,\mathbb{R}^d \to \mathbb{C}^d$ τέτοιες ώστε:*

$$E[e^{\langle u, X_T\rangle}|F_t] = e^{(\Phi(T-t,u)+\langle\Psi(T-t,u),X_t\rangle)}$$

Παρατηρήσεις:

- Η απαίτηση του παραπάνω ορισμού γράφεται πιο απλά :
  $E_{X_0=x}[e^{\langle u,X_t\rangle}] = E[e^{\langle u,X_t\rangle}|X_0 = x] = E[e^{\langle u,X_t\rangle}|F_0] = e^{\Phi(t,u)+\langle\Psi(t,u),x\rangle}$
- Οι Affine στοχαστικές διαδικασίες είναι Μαρκοβιανές
- Αφού $u \in i\,\mathbb{R}^d$ ισχύει ότι:
  $E[|e^{\langle u,X_T\rangle}|F_t|] \leqslant 1 \iff Re\{\Phi(T-t,u) + \langle\Psi(T-t,u),X_t\rangle\} \leqslant 0$

Θεώρημα 1.2. *[1]*
Έστω η στοχαστική διαφορική εξίσωση :

$$dX_t = b(X_t)\,dt + \sigma(X_t)\,dW_t, X_0 = x$$

Όπου

- $(X_t)_{t\geqslant 0}$, $x \in D \subseteq \mathbb{R}^d$
- $b : D \to \mathbb{R}^d$, *συνεχής*
- $\sigma : D \to \mathbb{R}^{d\times d}$, *μετρήσιμη*

Η X είναι Affine αν και μόνο αν οι $a(X) := \sigma(X)\,\sigma(X)^T, b(X)$ είναι Affine ως προς X_t, δηλαδή:

$$\begin{aligned} b(X) &= b + \sum_{i=1}^{d} \beta_i\, X_i, b, \beta_1, \ldots \beta_d \in \mathbb{R}^d \\ \alpha(X) &= \mathrm{a} + \sum_{i=1}^{d} \alpha_i\, X_i\, , \mathrm{a}, \alpha_1 \ldots \alpha_d \in \mathrm{R}^{d\times d} \end{aligned}$$

Επιπλέον οι συναρτήσεις $\Phi, \Psi = (\Psi_1, \ldots, \Psi_d)$ ικανοποιούν ένα σύστημα από συνήθεις διαφορικές εξισώσεις Ricatti της μορφής:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi(t,u)}{\partial t} &= F(\Psi(t,u)),\ \Phi(0,u) = 0 \\ \frac{\partial \Psi_i(t,u)}{\partial t} &= R_i(\Psi(t,u)),\ \Psi(0,u) = u \end{aligned} \tag{1}$$

Όπου F, R είναι :

$$\begin{aligned} F(u) &= \langle u, b\rangle + \frac{\langle u, \mathrm{a}\,u\rangle}{2} \\ R_i(u) &= \langle u, \beta_i\rangle + \frac{\langle u, \alpha_i\,u\rangle}{2} \end{aligned}$$

Παρατηρήση:
Το παραπάνω θεώρημα διευκολύνει την εύρεση διαδικασιών Affine , καθώς αυτή ανάγεται στον έλεγχο της μορφής των γνωστών συναρτήσεων $a(X), b(X)$.

Ορισμός 1.3. *[1] :*
Έστω $x, u \in \mathbb{R}^d$, με x τυχαία μεταβλητή.
Η ροπογεννήτρια συνάρτηση της x στο u είναι της μορφής:

$$M_x(u) = E[e^{\langle u, x\rangle}]$$

Παρατήρηση:
Στην περίπτωση που ισχύει ότι x είναι μια Affine στοχαστική διαδικασία, τότε η ροπογεννήτρια συνάρτηση υπολογίζεται από το παραπάνω θεώρημα με ντετερμινιστικό τρόπο.

Ορισμός 1.4 (Μετασχηματισμός Fourier). *[1]*
Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,τέτοια ώστε $f \in L^1(\mathbb{R})$.
Ο μετασχηματισμός Fourier της f έχει την μορφή:

$$\widehat{f}(u) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\,u\,x}\, f(x)\, dx \ , u \in \mathbb{R}$$

Παρατήρησεις:

- Ο μετασχηματισμός της f είναι φραγμένη συνάρτηση.
  Πράγματι:

$$|\widehat{f}(u)| = \left| \int_{\mathbb{R}} e^{i\,u\,x}\, f(x)\, dx \right| \leqslant \int_{\mathbb{R}} |e^{i\,u\,x}|\, |f(x)|\, dx \leqslant \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx = \|f\| < \infty \ , f \in L^1(\mathbb{R})\ , u \in \mathbb{R}$$

- Ο μετασχηματισμός της f για $u \in \mathbb{C}$ ορίζεται παρόμοια,δεδομένου ότι ο μετασχηματισμός είναι φραγμένος.Δεδομένου δηλαδή ότι για $u = a + i\,b,\ \ a, b \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |e^{-b\,x}|\, |f(x)|\, dx &< \ \ \infty \quad \Longrightarrow \\
\int_{\mathbb{R}} |e^{i\,a\,x}|\, |e^{-b\,x}|\, |f(x)|\, dx &< \ \ \infty \quad \Longrightarrow \\
\int_{\mathbb{R}} |e^{i\,(a+i\,b)\,x}|\, |f(x)|\, dx &< \ \ \infty \quad \Longrightarrow \\
\left| \int_{\mathbb{R}} e^{i\,u\,x}\, f(x)\, dx \right| &< \ \ \infty
\end{aligned}$$

Αξίζει να αναφερθεί ότι κατα τη μετάβαση στην τελευταία σχέση χρησιμοποιήθηκε η ιδιότητα:

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx \right| \leqslant \int_{\mathbb{R}} |f(x)\,|\, dx$$

Επομένως πράγματι αν $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |e^{-b\,x}|\, |f(x)|\, dx < \infty \implies |\widehat{f}(u)| < \infty$ για $u \in \mathbb{C}$

Ορισμός 1.5. *[1]*
Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ και έστω $R \in \mathbb{R}$.
Η περιοριστική συνάρτηση της f ως προς R,έχει την μορφή :

$$f_R(x) = e^{-R\,x}\, f(x)$$

Παρατήρηση:
Σκοπός της περιοριστικής συνάρτησης f_R είναι να στείλει την f στο σύνολο $L^1_{bc}(\mathbb{R})$, προκειμένου να έχει νόημα το παρακάτω θεώρημα :

Θεώρημα 1.6 (Μέθοδος Fourier). *[1]*
Έστω τα σύνολα $I = \{R \in \mathbb{R} : f_R \in L^1_{bc}(\mathbb{R}),\ \hat{f}_R \in L^1(\mathbb{R})\},\ J = \{R \in \mathbb{R} : M_x(R) < \infty\}$.
Έστω ακόμα ότι το σύνολο $\mathrm{R} := I \cap J \neq \emptyset$.
Τότε :

$$E[f(x)] = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} M_x(R - iu)\, \hat{f}(u + iR)\, du \ , \forall R \in \mathrm{R}$$

Παρατηρησεις:

- Η βασική υπόθεση του παραπάνω θεωρήματος ($\mathrm{R} \neq \emptyset$) , ικανοποίειται από μία ευρεία κλάση συναρτήσεων.
- Η χρησιμότητα της μεθόδου Fourier στηρίζεται στο γεγονός ,ότι υπολογίζει την μέση τιμή της συνάρτησης f ,με ντετερμινιστικό τρόπο,στην περίπτωση που η x είναι μια Affine στοχαστική διαδικασία .Έτσι η παραπάνω μέθοδος,παρέχει θεωρητικό απότέλεσμα για την μέση τιμη, καθώς δεν χρησιμοποιεί τυχαίο δείγμα για την εύρεση αυτής.
- Στην περίπτωση που η f εκφράζει κάποιο χρηματοοικονομικό παράγωγο,υπάρχει το ενδεχόμενο το σύνολο R να είναι κενό.Για τον λόγο αυτό ορίζουμε τα σύνολα I, J, R ως :

  $$I = \{R \in \mathbb{R} : f_R \in L^1(\mathbb{R})\}, J = \{R \in \mathbb{R} : M_x(R) < \infty, M_x(R - i\,u) \in L^1(\mathbb{R})\}, \mathrm{R} = I \cap J$$

  Αποδεικνύεται ότι το παραπάνω θεώρημα ισχύει και για το καινούργιο σύνολο R όταν $\mathrm{R} \neq \emptyset$.

2 Άσκηση 1

2.1 Θεωρία

Αφού πλέον έχουν αναφερθεί οι βασικές θεωρητικές έννοιες , θα υπολογίσουμε την χαρακτηριστική συνάρτηση του μοντέλου του Heston χρησιμοποιώντας τα εργαλεία που παρουσιάστηκαν παραπάνω. Πρώτα όμως θα αποδείξουμε ,πως οι λύσεις του μοντέλου του Heston αποτελούν διαδικασίες Affine.
Το μοντέλο στοχαστικής διακύμανσης του Heston δίνεται από το παρακάτω σύστημα στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων :

$$\begin{aligned} dX_t &= (r - \frac{1}{2}V_t)\,dt + \sqrt{V_t}\,dW_t \\ dV_t &= \kappa(\theta - V_t)\,dt + \eta\sqrt{V_t}d\overline{W}_t \end{aligned}$$

Όπου $\overline{W}_t = \rho\, W_t + \sqrt{1-\rho^2}\,\widehat{W}_t$ και $W, \widehat{W}, \overline{W}$ είναι κινήσεις Brown.

Για να δείξουμε τώρα ότι οι λύσεις του μοντέλου στοχαστικής διακύμανσης του Heston είναι Affine, αρκεί οι συναρτήσεις $\alpha(V,X) := \sigma(V,X)\,\sigma(V,X)^T, b(V,X)$ να έχουν την μορφή που απαιτεί το Θεώρημα 1.2.
Επισημαίνουμε ότι στο μοντέλο αυτό έχουμε διάσταση 2 και επομένως για τις συναρτήσεις b, σ ισχύει :

$$\begin{aligned} b &: D \to \mathbb{R}^2 \\ \sigma &: D \to \mathbb{R}^{2\times 2}, D \subseteq \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

Με την $b(V,X)$ να προκύπτει ως το άθροισμα όλων των όρων που πολλαπλασιάζονται με dt και την $\sigma(V,X)$ να προκύπτει ως το άθροισμα όλων των όρων που πολλαπλασιάζονται με $dW_t, d\widehat{W}_t$.

Έτσι οι συναρτήσεις b, σ έχουν την μορφή:

$$\begin{aligned} b(V,X) &= \begin{pmatrix} \kappa\theta \\ r \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \kappa \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} V + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} X \\ \sigma(V,X) &= \begin{pmatrix} \eta\,\rho\sqrt{V} & \eta\,\sqrt{(1-\rho^2)\,V} \\ \sqrt{V} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Επομένως το α είναι της μορφής :

$$\begin{aligned} \alpha(V,X) &= \begin{pmatrix} \eta\,\rho\sqrt{V} & \eta\,\sqrt{(1-\rho^2)\,V} \\ \sqrt{V} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta\,\rho\sqrt{V} & \sqrt{V} \\ \eta\,\sqrt{(1-\rho^2)\,V} & 0 \end{pmatrix} \iff \\ \alpha(V,X) &= \begin{pmatrix} \eta^2\,V & \eta\rho\,V \\ \eta\rho\,V & V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta^2 & \eta\rho \\ \eta\rho & 0 \end{pmatrix} V + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X \end{aligned}$$

Άρα οι συναρτήσεις $b(V,X), \alpha(V,X)$ γράφονται πράγματι στην μορφή :

$$\begin{aligned}\alpha(V,X) &= \mathrm{a} + \alpha_1 V + \alpha_2 X \\ b(V,X) &= b + \beta_1 V + \beta_2 X\end{aligned}$$

Όπου:

$$\begin{aligned}\mathrm{a} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \alpha_1 = \begin{pmatrix} \eta^2 & \eta\rho \\ \eta\rho & 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ b &= \begin{pmatrix} \kappa\,\theta \\ r \end{pmatrix}, \beta_1 = \begin{pmatrix} -\kappa \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Δηλαδή από θεώρημα 1.2 έχουμε ότι οι λύσεις του μοντέλου στοχαστικής διακύμανσης του Heston αποτελούν διαδικασίες Affine.
Επιπλέον από το θεώρημα 1.2 γνωρίζουμε ότι, ο υπολογισμός της χαρακτηριστικής συνάρτησης για το μοντέλο στοχαστικής διακύμανσης του Heston ,ανάγεται στην επίλυση του συστήματος(1).
Για τον λόγο αυτό αναφέρουμε το παρακάτω λήμμα που μας διευκολύνει στην επίλυση διαφορικών εξισώσεων Ricatti .

Λήμμα 2.1. *[2]*
Έστω η διαφορική εξίσωση Ricatti :

$$\frac{\partial G}{\partial t} = A\,G^2 + B\,G - C,\ G(0,u) = u, \tag{2}$$

όπου $A, B, C \in \mathbb{C}$ *και* $u \in \mathbb{C}$ *με* $A \neq 0$ *και* $B^2 + 4\,A\,C \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$.
Έστω ακόμη ότι η $\sqrt{.}$ *εκφράζει την αναλυτική επέκταση της πραγματικής τετραγωνικής ρίζας στο* $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$. *Ορίζουμε* $\lambda = \sqrt{B^2 + 4\,A\,C}$.
Τότε η συνάρτηση :
$G(t,u) = -\dfrac{2\,C(e^{\lambda t}-1) - (\lambda(e^{\lambda t}+1) + B(e^{\lambda t}-1))\,u}{\lambda\,(e^{\lambda t}+1) + B(e^{\lambda t}-1) - 2\,A(e^{\lambda t}-1)\,u}$*,είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης(2) στο μέγιστο διάστημα ύπαρξής της* $[0, t_+(u))$.
Ακόμα ισχύει ότι :

$$\int_0^t G(s,u)\,ds = \frac{1}{A}\,log\left(\frac{2\,\lambda\,e^{\frac{\lambda - B}{2}t}}{\lambda(e^{\lambda t}+1) - B(e^{\lambda t}-1) - 2\,A(e^{\lambda t}-1)\,u}\right) \qquad *$$

2.2 Επίλυση

Έχοντας αναφέρει τα παραπάνω θα επιχειρήσουμε να βρούμε την χαρακτηιστική συνάρτηση του μοντέλου του Heston επιλύοντας τις αντίστοιχες εξίσωσεις Ricatti :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\Phi(t,u_1,u_2)}{\partial t} &= \kappa\,\theta\,\Psi_1(t,u_1,u_2) + r\,\Psi_2(t,u_1,u_2)\\
\frac{\partial\Psi_1(t,u_1,u_2)}{\partial t} &= -\kappa\,\Psi_1(t,u_1,u_2) - \frac{1}{2}\Psi_2(t,u_1,u_2) + \frac{1}{2}{\Psi_2}^2(t,u_1,u_2) + \frac{1}{2}n^2\Psi_1{}^2(t,u_1,u_2) + n\,\rho\,\psi\\
\frac{\partial\Psi_2(t,u_1,u_2)}{\partial t} &= 0
\end{aligned}$$

Όπου $\Phi(0,u_1,u_2)=0,\ \Psi_1(0,u_1,u_2)=u_1,\ \Psi_2(0,u_1,u_2)=u_2$ και $\psi=\Psi_1(t,u_1,u_2)\,\Psi_2(t,u_1,u_2)$

Αρχικά επιλύουμε την τρίτη διαφορική εξίσωση,χρησιμοποιώντας την αντίστοιχη αρχική συνθήκη.
Έτσι έχουμε ότι :

$$\Psi_2(t,u_1,u_2)=u_2$$

Αντικαθιστώντας την συνάρτηση $\Psi_2(t,u_1,u_2)$ και χρησιμοποιώντας το παραπάνω λήμμα καταλήγουμε ότι, με χρήση των παραμέτρων
$A=\frac{n^2}{2}$, $B=n\,\rho\,u_2-\kappa$, $C=\frac{u_2}{2}-\frac{u_2^2}{2}$, η λύση της δεύτερης διαφορικής γράφεται στην μορφή :

$$\begin{aligned}
\Psi_1(t,u_1,u_2) &= -\frac{(u_2-u_2^2)\,(e^{\lambda t}-1)-\lambda[(e^{\lambda t}+1)+(\eta\rho u_2-\kappa)(e^{\lambda t}-1)]u_1}{\lambda(e^{\lambda t}+1)+(\kappa-\eta\,\rho\,u_2)(e^{\lambda\,t}-1)-\eta^2(e^{\lambda\,t}-1)u_1} && (3)\\
\lambda &= \sqrt{(\eta\,\rho\,u_2-\kappa)^2-u_2^2\eta^2+u_2\,\eta^2} && (4)
\end{aligned}$$

Με την βοήθεια της σχέσης * και ολοκληρώνοντας την πρώτη διαφορική εξίσωση , καταλήγουμε ότι η $\Phi(t,u_1,u_2)$ έχει την μορφή :

$$\Phi(t,u_1,u_2)=\frac{2\kappa\,\theta}{\eta^2}\,log\left(\frac{2\,\lambda\,e^{\left(\frac{\lambda\,+\kappa\,-\eta\,\rho\,u_2}{2}\right)t}}{\lambda(\,e^{\lambda t}+1)+(\kappa-\eta\,\rho\,u_2)\,(e^{\lambda\,t}-1)-\eta^2(e^{\lambda\,t}-1)\ u_1}\right)+r\,u_2\,t \quad (5)$$

Επομένως η ροπογεννήτρια συνάρτηση του μοντέλου του Heston είναι :

$$E_{v,x}[e^{u_1\,\mathrm{v_t}\,+\,u_2\,\mathrm{x_t}}]=e^{\Phi(t,u_1,u_2)\,+\,\Psi_1(t,u_1,u_2)\,v\,+\,\Psi_2(t,u_1,u_2)\,x} \quad (6)$$

3 Άσκηση 2

Στο κεφάλαιο αυτό θα εργαστούμε με τον μετασχηματισμό και την μέθοδο Fourier.Συγκεκριμένα θα υπολογίσουμε τον μετασχηματισμό Fourier για το ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης και θα αναζητήσουμε τις συνθήκες για τις οποίες ικανοποιείται η υπόθεση της μεθόδου Fourier.

3.1 Υπολογισμός μετασχηματισμού Fourier δικαιώματος πώλησης

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό 1.4 ,με $u \in \mathbb{C}$ ο μετασχηματισμό Fourier της f δίνεται από τον τύπο :

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(u) &= \int_{\mathbb{R}} e^{i\,u\,x}\, f(x)\, dx \iff \\
\widehat{f}(u) &= \int_{\mathbb{R}} e^{i\,u\,x}\, (K-e^x)^+\, dx \iff \\
\widehat{f}(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\,u\,x}\, (K-e^x)^+\, dx \iff \\
\widehat{f}(u) &= \int_{-\infty}^{lnK} e^{i\,u\,x}\, (K-e^x)^+\, dx + \int_{lnK}^{\infty} e^{i\,u\,x}\, (K-e^x)^+ dx \iff \\
\widehat{f}(u) &= \int_{-\infty}^{lnK} e^{i\,u\,x}\, (K-e^x)^+\, dx + 0 \iff \\
\widehat{f}(u) &= \int_{-\infty}^{lnK} e^{i\,u\,x}\, (K-e^x)\, dx \iff \\
\widehat{f}(u) &= K \int_{-\infty}^{lnK} e^{i\,u\,x}\, dx - \int_{-\infty}^{lnK} e^{(i\,u+1)x}\, dx \iff \\
\widehat{f}(u) &= K\, \frac{1}{iu}\; e^{i\,u\,x}\Big|_{-\infty}^{lnK} - \frac{1}{i\,u+1}\; e^{(i\,u+1)x}\Big|_{-\infty}^{lnK}
\end{aligned}$$

Προκειμένου η $\widehat{f}$ να είναι φραγμένη θα πρέπει το $\Im(u) < 0$.
Τότε η $\widehat{f}$ γράφεται στην μορφή:

$$\widehat{f}(u) = K^{i\,u\,+\,1} \left(\frac{1}{i\,u} - \frac{1}{i\,u+1} \right) \tag{7}$$

Η εξίσωση (7) θα χρησιμοποιηθεί κατά την εφαρμογή της μεθόδου Fourier.

3.2 Αναγκαιότητα κατασκευής της περιοριστικής συνάρτησης

Στο σημείο αυτό μπορούμε να δείξουμε ότι $f \notin L^1(\mathbb{R})$.
Πράγματι :

$$\begin{aligned}
\|f\| &= \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx \iff \\
\|f\| &= \int_{\mathbb{R}} |(K - e^x)^+|\, dx \iff \\
\|f\| &= \int_{\mathbb{R}} (K - e^x)^+\, dx \iff \\
\|f\| &= \int_{-\infty}^{\infty} (K - e^x)^+\, dx \iff \\
\|f\| &= \int_{-\infty}^{lnK} (K - e^x)^+\, dx + \int_{lnK}^{\infty} (K - e^x)^+\, dx \iff \\
\|f\| &= \int_{-\infty}^{lnK} (K - e^x)\, dx + 0 \iff \\
\|f\| &= \int_{-\infty}^{lnK} K\, dx - \int_{-\infty}^{lnK} e^x\, dx \iff \\
\|f\| &= K\, x|_{-\infty}^{lnK} - e^x|_{-\infty}^{lnK} = \infty
\end{aligned}$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα σε συνδυασμό με τις υποθέσεις του θεωρήματος Fourier μας αναγκάζει να κατασκευάσουμε την περιοριστική συνάρτηση f_R για το ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης.
Εφαρμόζοντας τώρα τον ορισμό 1.5 και αντικαθιστώντας όπου $f(x)$ το δικαίωμα πώλησης, έχουμε :

$$f_R(x) = (K - e^x)^+ e^{-Rx}$$

$$f_R(x) = \begin{cases} K\, e^{-Rx} - e^{(1-R)\,x} & x < lnK \\ 0 & x \geqslant lnK \end{cases}$$

<u>Παρατήρηση:</u>
<u>Προκειμένου</u> η ποσότητα $(K - e^x)^+ = max((K - e^x), 0) \neq 0$ θα πρέπει $K > e^x \iff x < lnK$

3.3 Εύρεση του διαστήματος I της μεθόδου Fourier

Έχοντας πλέον ορίσει την περιοριστική συνάρτηση f_R μεταβαίνουμε στην αναζήτηση των τιμών $R \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ικανοποιείται η υπόθεση του θεωρήματος 1.6 .
Αρχικά θα βρούμε $R \in \mathbb{R} : f_R \in L^1_{bc}(\mathbb{R}), \widehat{f}_R \in L^1(\mathbb{R})$,δηλαδή θα προσδιορίσουμε το σύνολο I της μεθόδου Fourier.

1. $f_R \in L^1_{bc}$
   Καθότι ψάχνουμε τα $\{R \in \mathbb{R} : f_R \in L^1_{bc}\}$, απαιτούμε η f_R να είναι συνεχής,φραγμένη και τέλος η $f_R \in L^1(\mathbb{R})$.

   - Συνέχεια

     Η συνέχεια της f_R προκύπτει άμεσα,καθώς η f_R είναι πράξη συνεχών συναρτήσεων.

   - Φραγή

     Για να είναι η f_R φραγμένη αρκεί:

     $$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} e^{-Rx} \to 0 \quad &\& \quad \lim_{x\to-\infty} e^{(1-R)x} \to 0 \iff \\ -R > 0 \quad &\& \quad 1-R > 0 \iff \\ R < 0 \quad &\& \quad R < 1 \iff R \in (-\infty, 0) \end{aligned}$$

   - $f_R \in L^1(\mathbb{R})$
     Για να ανήκει η f_R στο $L^1(\mathbb{R})$ θα πρέπει :

     $$\begin{aligned} \|f_R\|_1 &:= \int_{\mathbb{R}} |f_R(x)|\, dx < \infty \iff \\ \|f_R\|_1 &= \int_{\mathbb{R}} \left|(K-e^x)^+ e^{-Rx}\right| dx < \infty \iff \\ \|f_R\|_1 &= \int_{\mathbb{R}} \left|(K-e^x)^+\right| \left|e^{-Rx}\right| dx < \infty \iff \\ \|f_R\|_1 &= \int_{\mathbb{R}} (K-e^x)^+ e^{-Rx}\, dx < \infty \iff \\ \|f_R\|_1 &= \int_{-\infty}^{lnK} (K-e^x)^+ e^{-Rx}\, dx + \int_{lnK}^{\infty} (K-e^x)^+ e^{-Rx}\, dx < \infty \iff \\ \|f_R\|_1 &= \int_{-\infty}^{lnK} (K-e^x)\, e^{-Rx}\, dx + 0 < \infty \iff \\ \|f_R\|_1 &= \int_{-\infty}^{lnK} \left(K\, e^{-Rx} - e^{(1-R)x}\right) dx < \infty \\ \|f_R\|1 &= -\frac{K}{R}\, e^{-Rx}\Big|_{-\infty}^{lnK} - \frac{1}{1-R}\, e^{(1-R)x}\Big|_{-\infty}^{lnK} < \infty \end{aligned}$$

Για να ισχύει η τελευταία ανισότητα θα πρέπει:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} e^{-Rx} = 0 \quad &\& \quad \lim_{x\to-\infty} e^{(1-R)x} = 0 \iff \\
-R > 0 \quad &\& \quad 1 - R > 0 \iff \\
R < 0 \quad &\& \quad R < 1 \iff \\
R \quad &\in \quad (-\infty, 0)
\end{aligned}
$$

Επομένως συμπεραίνουμε ότι $f_R \in L^1_{bc}$ για $R \in (-\infty, 0)$

2. $\underline{\widehat{f}_R \in L^1(\mathbb{R})}$

Πρωτού προχωρήσουμε περαιτέρω αναφέρουμε ένα λήμμα που θα μας χρειαστεί παρακάτω:

Λήμμα 3.1. *[1]*
Έστω το σύνολο $H^1(\mathbb{R}) := \{g \in L^2(\mathbb{R}) : \exists\, \partial g \,\&\, \partial g \in L^2(\mathbb{R})\}$,όπου ως ∂g ορίζουμε την ασθενή παράγωγο της g.
Έστω ακόμα συνάρτηση $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Αν $h \in H^1(\mathbb{R})$ τότε $\hat{h} \in L^1(\mathbb{R})$.

Με βάση το παραπάνω λήμμα προκειμένου η $\hat{f}_R \in L^1(\mathbb{R})$ αρκεί η $f_R \in H^1(\mathbb{R})$. Με άλλα λόγια θα δείξουμε ότι η $f_R \in L^2(\mathbb{R})$ & $\partial f_R \in L^2(\mathbb{R})$

- $\underline{f_R \in L^2(\mathbb{R})}$

Για να ανήκει η f_R στο $L^2(\mathbb{R})$ θα πρέπει:

$$
\begin{aligned}
\|f_R\|_2 &:= \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |f_R(x)|^2 \, dx} < \infty \iff \\
\|f_R\|_2 &= \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |(K - e^x)^+ \, e^{-Rx}|^2 \, dx} < \infty \iff \\
\|f_R\|_2 &= \sqrt{\int_{\mathbb{R}} ((K - e^x)^+ \, e^{-Rx})^2 \, dx} < \infty \iff \\
\|f_R\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}} \left((K - e^x)^+ \, e^{-Rx}\right)^2 dx < \infty \iff \\
\|f_R\|_2^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left((K - e^x)^+ \, e^{-Rx}\right)^2 dx < \infty \iff \\
\|f_R\|_2^2 &= \int_{-\infty}^{lnK} \left((K - e^x)^+ \, e^{-Rx}\right)^2 dx + \int_{lnK}^{\infty} \left((K - e^x)^+ \, e^{-Rx}\right)^2 dx < \infty \iff \\
\|f_R\|_2^2 &= \int_{-\infty}^{lnK} \left((K - e^x) \, e^{-Rx}\right)^2 dx + 0 < \infty \iff
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\|f_R\|_2^2 &= \int_{-\infty}^{lnK} \left(K\,e^{-R\,x} - e^{(1-R)\,x}\right)^2\,dx < \infty \\
\|f_R\|_2^2 &= \int_{-\infty}^{lnK} \left(K^2\,e^{-2\,R\,x} + e^{2(1-R)\,x} - 2\,Ke^{(1-2\,R)\,x}\right)dx < \infty \\
\|f_R\|_2^2 &= -\frac{K^2}{2R}\,e^{-2\,R\,x}\Big|_{-\infty}^{lnK} + \frac{1}{2(1-R)}e^{2(1-R)\,x}\Big|_{-\infty}^{lnK} -2\,\frac{K}{1-2\,R}e^{(1-2\,R)\,x}\Big|_{-\infty}^{lnK} < \infty
\end{aligned}$$

Για να ισχύει η παραπάνω ανισότητα θα πρέπει :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} e^{-2\,R\,x} = 0 \quad &\& \quad \lim_{x\to-\infty} e^{2\,(1-R)\,x} = 0 \;\&\; \lim_{x\to-\infty} e^{(1-2\,R)\,x} = 0 \iff \\
-R > 0 \quad &\& \quad 1-R > 0 \;\&\; 1-2\,R > 0 \iff \\
R < 0 \quad &\& \quad R < 1 \;\&\; R < \frac{1}{2} \iff \\
R \quad &\in \quad (-\infty, 0)
\end{aligned}$$

Επομένως η $f_R \in L^2(\mathbb{R})$ για $R \in (-\infty, 0)$

- <u>$\partial f_R \in L^2(\mathbb{R})$</u>

Στο σημείο αυτό δίνουμε την μορφή της ασθενούς παράγωγου της f_R :

$$\partial f_R(x) = \begin{cases} -KRe^{-R\,x} - (1-R)\,e^{(1-R)\,x}, & x \leqslant lnK \\ 0, & x > lnK \end{cases}$$

Προκειμένου λοιπόν η ∂f_R να ανήκει στο $L^2(\mathbb{R})$ θα πρέπει:

$$\begin{aligned}
\|\partial f_R\|_2 &:= \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |\partial f_R(x)|^2\,dx} < \infty \iff \\
\|\partial f_R\|_2^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} |\partial f_R(x)|^2\,dx < \infty \iff \\
\|\partial f_R\|_2^2 &= \int_{-\infty}^{lnK} \left|-K\,R\,e^{-R\,x} - (1-R)\,e^{(1-R)\,x}\right|^2\,dx + 0 < \infty \iff \\
\|\partial f_R\|_2^2 &= \int_{-\infty}^{lnK} \left(K\,R\,e^{-R\,x} + (1-R)\,e^{(1-R)\,x}\right)^2\,dx < \infty \iff \\
\|\partial f_R\|_2^2 &= \int_{-\infty}^{lnK} \left(K^2\,R^2\,e^{-2R\,x} + (1-R)^2\,e^{2\,(1-R)\,x} + 2\,K\,R\,(1-R)\,e^{(1-2\,R)\,x}\right)\,dx < \infty \iff \\
\|\partial f_R\|_2^2 &= \int_{-\infty}^{lnK} K^2R^2\,e^{-2R\,x}dx + \int_{-\infty}^{lnK} (1-R)^2\,e^{2\,(1-R)\,x}dx + \int_{-\infty}^{lnK} 2\,KR\,(1-R)\,e^{(1-2\,R)x}\,dx < \infty \iff \\
\|\partial f_R\|_2^2 &= -\frac{1}{2\,R}\,K^2\,R^2\,e^{-2R\,x}\Big|_{-\infty}^{lnK} + \frac{1}{2\,(1-R)}(1-R)^2\;e^{2\,(1-R)\,x}\Big|_{-\infty}^{lnK} + \frac{2\,K\,R\,(1-R)}{1-2\,R}\;e^{(1-2\,R)x}\Big|_{-\infty}^{lnK} < \infty
\end{aligned}$$

Για να ισχύει η τελευταία ανισότητα θα πρέπει :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} e^{-2\,R\,x} = 0 \quad &\& \quad \lim_{x\to-\infty} e^{2\,(1-R)\,x} = 0 \;\&\; \lim_{x\to-\infty} e^{(1-2\,R)\,x} = 0 \iff \\
-R > 0 \quad &\& \quad 1 - R > 0 \;\&\; 1 - 2\,R > 0 \iff \\
R < 0 \quad &\& \quad R < 1 \;\&\; R < \frac{1}{2} \iff \\
R \quad &\in \quad (-\infty, 0)
\end{aligned}$$

Επομένως η $\partial f_R \in L^2(\mathbb{R})$ για $R \in (-\infty, 0)$,δηλαδή $\widehat{f}_R \in L^1(\mathbb{R})$ για $R \in (-\infty, 0)$
Έτσι τελικά το σύνολο I προκύπτει, ως η τομή των διάφορων συνόλων που βρήκαμε και έχει την μορφή :

$$I = \{R \in \mathbb{R} : f_R \in L^1_{bc}(\mathbb{R}) \;\&\; \hat{f}_R \in L^1(\mathbb{R})\} = (-\infty, 0)$$

3.4 Εύρεση του διαστήματος J της μεθόδου Fourier

Στη συνέχεια θα προσδιορίσουμε τις τιμές του $R \in \mathbb{R} : M_x(R) < \infty$, υπολογίζοντας έτσι το σύνολο J του θεωρήματος 1.6.
Η ροπογεννήτρια συνάρτηση του $\overrightarrow{x} = (v, x)$ στο $u = (u_1, u_2)$ δίνεται από το ορισμό 1.3.
Αφού οι λύσεις του μοντέλου του Heston (V, X) είναι Affine, η ροπογεννήτρια συνάρτηση αυτών δίνεται από την σχέση (6).
Στο σημείο αυτό κάνουμε την παραδοχή ότι η συνιστώσα u_1 που εμφανίζεται στην εξίσωση (6) είναι ίση με το 0 , κάτι που θα εξηγηθεί αναλυτικά στο επόμενο κεφάλαιο.
Κάνοντας την παραδοχή αυτή και θέτοντας όπου u_2 το R ,μπορούμε πλέον να υπολογίσουμε την $M_x(R)$, χρησιμοποιώντας την σχέση (6).Παρατηρώντας τώρα τις εξισώσεις (3) , (5) απαιτούμε για την παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$ να ισχύει :

$$\begin{aligned}
\lambda^2 &\geqslant 0 \iff \\
(\eta\,\rho\,R - \kappa)^2 - R^2\eta^2 + R\,\eta^2 &\geqslant 0 \iff \\
(\eta\,\rho\,R - \kappa)^2 + \eta^2\,(R - R^2) &\geqslant 0
\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας στην τελευταία σχέση τις τιμές των παραμέτρων που μας έχουν δοθεί $(\kappa = \eta = 1, \rho = -0.3)$ έχουμε :

$$\begin{aligned}
(-0.3\,R - 1)^2 + (R - R^2) &\geqslant 0 \iff \\
(0.3\,R + 1)^2 + (R - R^2) &\geqslant 0 \iff \\
0.09R^2 + 0.6\,R + 1 + R - R^2 &\geqslant 0 \iff \\
-0.91R^2 + 1.6\,R + 1 &\geqslant 0
\end{aligned}$$

Επιλύοντας το παραπάνω πολυώνυμο βρίσκουμε ότι $R_1 \approx 2.24, R_2 \approx -0.46$
Έτσι τελικά προκειμένου το υπόρριζο της παραμέτρου λ να είναι μεγαλύτερο ίσο του 0 θα πρέπει $R \in [-0.46, 2.24]$

Εφαρμόζοντας τώρα τον παραπάνω περιορισμό στην σχέση (6),μπορούμε να δείξουμε ότι :

$$M_x(R) < \infty,\ \forall R \in [-0.46, 2.24]$$

Έτσι τελικά , το διάστημα J είναι :

$$J = [-0.46, 2.24]$$

Έχοντας πλέον κατασκευάσει τα διαστήματα I, J , μπορούμε να υπολογίσουμε το διάστημα R ως την τομή αυτών.Συγκεκριμένα το R γράφεται στην μορφή :

$$R = [-0.46, 0)$$

Δηλαδή η υπόθεση του θεωρήματος 1.5 $(R \neq \varnothing)$ είναι αληθής.

4 Άσκηση 3

4.1 Θεωρία

Αφού έχουμε πλέον ικανοποιήσει τις υποθέσεις της μεθόδου Fourier,θα προχωρήσουμε στην εφαρμογή αυτής,για το ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης.Πρώτα όμως θα δικαιολογήσουμε μια παραδοχή που έγινε στο προηγούμενο κεφάλαιο και στην συνέχεια θα προσαρμόσουμε τις εξισώσεις (6), (7),ώστε να είναι άμεσα εφαρμόσιμες στην μέθοδο Fourier.

Από το κεφάλαιο 1 έχουμε δείξει πως η ροπογεννήτρια συνάρτηση των λύσεων του μοντέλου του Heston (V, X) υπολογίζεται από την εξίσωση (6) καθώς το ζεύγος αυτό αποτελεί διαδικασία Affine.Παρατηρώντας όμως την μορφή του δικαιώματος πώλησης είναι εμφανές πως το δικαίωμα είναι ανεξάρτητο από το v*olatility* $(V = (V_t)_{t\geqslant 0})$.

Για τον λόγο αυτό, προκειμένου να εφαρμόσουμε την μεθοδο Fourier για το συγκεκριμένο παράγωγο,χρησιμοποιώντας την σχέση (6),θα πρέπει να εξαλείψουμε την επιρροή της τυχαίας μεταβλητής V.Με άλλα λόγια θα πρέπει να θέσουμε $u_1 = 0$.

Έτσι τελικά η ροπογεννήτρια συνάρτηση για την διαδικασία $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$,παίρνει την μορφή:

$$M_{X_t}(u) = E_{v,x}[e^{u_2\,\mathrm{X_t}}] = e^{\Phi(t,0,u_2)\,+\,\Psi_1(t,0,u_2)\,v\,+\,\Psi_2(t,0,u_2)\,x}$$

Θέτοντας τώρα όπου u_2 το $R - i\,u$ και όπου t το T,έχουμε :

$$M_{X_T}(R-i\,u) = E_{v,x}[e^{(R-i\,u)\,\mathrm{X_T}}] = e^{\Phi(T,0,R-i\,u)\,+\,\Psi_1(T,0,R-i\,u)\,v\,+\,\Psi_2(T,0,R-i\,u)\,x} \tag{8}$$

Ακόμα,θέτοντας στην εξίσωση (7) όπου u το $u + i\,R$ έχουμε :

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(u+i\,R) &= K^{i\,(u+i\,R)+1}\left(\frac{1}{i\,(u+i\,R)} - \frac{1}{i\,(u+i\,R)+1}\right) \iff \\
\widehat{f}(z) &= K^{i\,z+1}\left(\frac{1}{i\,z} - \frac{1}{i\,z+1}\right) \iff \\
\widehat{f}(z) &= K^{i\,z+1}\left(\frac{1}{i\,z\,(i\,z+1)}\right) \iff \\
\widehat{f}(z) &= K^{i\,z+1}\left(\frac{1}{-z^2+i\,z}\right) \iff \\
\widehat{f}(z) &= -K^{i\,z+1}\left(\frac{1}{z^2-i\,z}\right) \qquad (9)
\end{aligned}$$

Οι σχέσεις (8) , (9) είναι άμεσα εφαρμόσιμες στην μέθοδο Fourier.

4.2 Αιτιολόγηση Κώδικα

Έχοντας πλέον κατασκευάσει τις εξισώσεις (8) , (9),μπορούμε να μεταβούμε στην αιτιολόγηση και την εφαρμογή του κώδικα ,που υλοποιεί την μεθόδο Fourier.
Ο κώδικάς αυτός κατασκευάστηκε με σκοπό τον αριθμητικό υπολογισμό του ολοκληρώματος $\int_{-\infty}^{\infty} M_{X_T}(R - i\,u)\,\widehat{f}(u + i\,R)\,du$ με τη βοήθεια της μεθόδου του τραπεζίου.

Καθότι όμως ο υπολογιστής έχει πεπερασμένη αριθμητική,για τον υπολογισμό του παραπάνω ολοκληρώματος θα περιοριστούμε σε ένα διάστημα της μορφής $[a, b]$.
Με πειραματικό τρόπο καταλήγουμε,ότι το διάστημα $[-80, 80]$ είναι ικανοποιητικό για την προσσέγγιση της μέσης τιμής.Συγκεκριμένα παρατηρούμε,πως αν επιχειρήσουμε να διευρύνουμε το διάστημα αυτό, η καινούργια εκτίμηση θα συμφωνεί με την παλιά σε ακρίβεια τεσσάρων δεκαδικών ψηφίων.

Έχοντας θεωρήσει τα παραπάνω και προκειμένου να χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο του τραπεζίου, θεωρούμε μια διαμέριση του διαστήματος $[-80, 80]$ της μορφής:

$$-80 = \mathrm{u}_1 < \mathrm{u}_2 < \cdots < \mathrm{u}_\mathrm{N} = 80$$

Με τον τρόπο αυτό μπορούμε να προσεγγίσουμε το ολοκλήρωμα:

$$\int_{\mathbb{R}} M_x(R - iu)\,\hat{f}(u + iR)\,du$$

Από την παράσταση:

$$\frac{h}{2}\,\Big(M_x(R - i\,u1)\widehat{f}(u1 + i\,R) + 2M_x(R - i\,u2)\widehat{f}(u2 + i\,R) + \ldots M_x(R - i\,uN)\widehat{f}(uN + i\,R)\Big) \quad **$$

Όπου με h συμβολίζουμε το βήμα της διαμέρισης.

Με βάση την ανάλυση που έχει προηγηθεί,η παράμετρος R της περιοριστικής συνάρτησης θα επιλεχθεί να έχει την τιμή $R = -0.1$ η οποία και βρίσκεται εντός του επιτρεπτού διαστήματος $\mathrm{R} = [-0.46, 0)$.
Σε ένα πρώτο στάδιο ορίζουμε τη μεταβλητή $integr\_estim$ η οποία θα αποθηκεύει την αριθμητική προσέγγιση του ζητούμενου ολοκληρώματος με το πέρας του κάθε βήματος, λαμβάνοντας υπόψη το άθροισμα των τιμών των προηγούμενων βημάτων.

Στη συνέχεια, αρχικοποιούμε τη στοχαστική διαδικασία X_t σύμφωνα με τη σχέση $x_0 = ln(s_0)$ και αποθηκεύουμε την παραγόμενη τιμή στη μεταβλητή x_in.
Στο επόμενο βήμα, ορίζουμε τις τιμές των a(αριστερό άκρο ολοκληρώματος) και R(παράμετρος περιοριστικής συνάρτησης) και υπολογίζουμε το βήμα της ομοιόμορφης διαμέρισης, μέσω του τύπου $\mathrm{h} = \dfrac{(\mathrm{b} - \mathrm{a})}{(\mathrm{N} - 1)}$, αποθηκεύοντας το στη μεταβλητή με όνομα step.

Προχωράμε τώρα στο βασικό τμήμα του κώδικά μας όπου υλοποιείται η αριθμητική μέθοδος του τραπεζίου μέσα σε ένα βρόγχο επανάληψης.Αρχικά, εισάγουμε δύο βοηθητικές παραμέτρους u2,z οι οποίες θα φέρουν τις τιμές $R - u_j\, i$ και $u_j + R\, i$ σε κάθε βήμα $j = 1, \ldots, N$.
Με τη βοήθεια της πρώτης μεταβλητής και χρησιμοποιώντας το συμβολισμό του λήμματος 2.1, κατασκευάζουμε τις παραμέτρους A,B,C και λ μέσω των οποίων προσδιορίζουμε τις συναρτήσεις φ,ψ1 και ψ2 στο αντίστοιχο βήμα ολοκλήρωσης.

Τότε η χαρακτηριστική συνάρτηση $M_{x_T}(R - iuj)$ θα δίνεται μέσω της σχέσης :

$$\mathrm{M = exp(fi + y1 * v\_in + y2 * x\_in)}$$

Με χρήση τώρα του τύπου για το μετασχηματισμό Fourier της $\mathrm{f(x) = (K - e^x)^+}$,μπορούμε να πάρουμε το $\widehat{f}(u_j + i\, R)$ το οποίο θα αποθηκεύσουμε στη μεταβλητή f_hat.

Προχωράμε τώρα σε ένα κρίσιμο σημείο του κώδικά μας.Όπως παρατηρούμε από τον τύπο **, η αριθμητική εκτίμηση της ολοκληρώσιμης ποσότητας διαφέρει στα δύο άκρα του διαστήματος σε σχέση με τα ενδιάμεσα σημεία καθώς δεν πολλαπλασιάζεται με 2.
Για να αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα αυτό και να εξοικονομήσουμε χώρο κατασκευάζουμε έναν υπό συνθήκη έλεγχο,ο οποίος διαφοροποιεί τον τύπο για τον αριθμητικό υπολογισμό του ολοκληρώματος, με βάση το αν βρισκόμαστε σε άκρο ή σε κάποιο ενδιάμεσο σημείο. Σε κάθε περίπτωση όμως η μεταβλητή integr_estim ενημερώνεται και λαμβάνει τη νέα της τιμή με βάση το άθροισμα των προηγούμενων εκτιμήσεων αλλά και τη νέα της τιμή στο αντίστοιχο βήμα μελέτης. Προφανώς στο τελικό βήμα του βρόγχου επανάληψης μετακινούμαστε στο επόμενο σημείο της διαμέρισης προσθέτοντας στη μεταβλητή u το βήμα step.

Με την ολοκλήρωση της διαδικασίας αυτής θα έχουμε μια αριθμητική εκτίμηση του ζητούμενου ολοκληρώματος, η οποία βρίσκεται αποθηκευμένη στη μεταβλητή integr_estim.
Το μόνο που απομένει για να πάρουμε την αναμενόμενη τιμή του ζητούμενου δικαιώματος, είναι αφού διαιρέσουμε την εκτίμηση που προσδιορίσαμε με τον όρο 2π να την εισάγουμε στη μεταβλητή price.Τέλος, προχωράμε σε μια μέτρηση του χρόνου εκτέλεσης της μεθόδου μας μέσω των εντολών tic()(στην αρχή του κώδικα) και toc()(στο τέλος του κώδικα).

4.3 Ανάλυση αποτελεσμάτων

Εφαρμόζοντας λοιπόν την μέθοδο Fourier για τις τιμές των παραμέτρων που μας έχουν δοθεί ($\kappa = \eta = 1$,$\theta = \upsilon = 0.09$, $\rho = -0.3$),με $N = 4000$ σημεία διαμέρισης και τιμή εξάσκησης K = 80 , 100, 120 στο διάστημα $[-80, 80]$ παίρνουμε τα παρακάτω αποτελέσματα:

K	Πραγματική τιμή	Προσεγγιστική τιμή
80	12.2724	12.2721
100	21.7896	21.7896
120	34.6139	34.6142

Καταρχάς αξίζει να σημειώσουμε πως η μέθοδος του Fourier για τον υπολογισμό μέσων τιμών είναι μια ντετερμινιστική μέθοδος και για το λόγο αυτό δεν έχει νόημα η κατασκευή ενός διαστήματος εμπιστοσύνης για να ελέγξουμε κατά πόσο αυτό περιέχει την πραγματική μας τιμή.

Συνεπώς αυτό που εξετάζουμε είναι η τιμή του απόλυτου σφάλματος, δηλαδή η απόλυτη τιμή της διαφοράς μεταξύ της πραγματικής και της προσεγγιστικής λύσης.Με βάση αυτό το σκεπτικό βλέπουμε πως και για τις τρεις τιμές K το σφάλμα αυτό είναι μικρότερο του 10^{-3} (μάλιστα για K=100 είναι μικρότερο του 10^{-4}),με αποτέλεσμα να οδηγούμαστε στο συμπέρασμα πως η μέθοδος Fourier συγκλίνει ικανοποιητικά στη ζητούμενη μέση τιμή.

5 Άσκηση 4

5.1 Σύγκριση Μεθόδων

Στο τελευταίο αυτό κεφάλαιο θα επικεντρωθούμε στην σύγκριση της μεθόδου Fourier με χρήση του κανόνα τραπεζίου και της μεθόδου Euler-Monte-Carlo.Συγκεκριμένα, θα ασχοληθούμε με τις διαφορές των δύο μεθόδων,ως προς τον υπολογιστικό χρόνο και την ακρίβεια υπολογισμού της τιμής αποπληρωμής του ευρωπαϊκού δικαιώματος πώλησης.

Επειδή η μέθοδος Euler-Monte-Carlo χρησιμοποιεί δύο παραμέτρους ενώ η μέθοδος Fourier μια ,θα θέσουμε την τιμή της παραμέτρου M αρκετά μεγάλη έτσι ώστε το σφάλμα ολοκλήρωσης να μπορεί να θεωρηθεί αμελητέο.Στη συνέχεια θα δώσουμε στην παράμετρο διακριτοποίησης N την ίδια τιμή και στις δύο μεθόδους.Δεδομένου ότι τόσο ο υπολογιστικός χρόνος όσο και η ταχύτητα σύγκλισης των δύο μεθόδων δεν επηρεάζονται από την τιμή εξάσκησης,θα συγκρίνουμε τις μεθόδους χρησιμοποιώντας μια από αυτές , έστω K=80.

Ακόμα επιλέγοντας τα σημεία διαμέρισης $N = 4000$ και για τις δύο μεθόδους ,με τις υπόλοιπες παραμέτρους όπως μας έχουν δοθεί ,καταλήγουμε στα παρακάτω αποτελέσματα:

- Ακρίβεια

Τιμή μεθόδου Fourier	Τιμή μεθόδου Euler-M-C	Πραγματική τιμή
12.2721	12.2847	12.2724

Όσον αφορά την ακρίβεια των δύο μεθόδων, παρατηρούμε ότι η μέθοδος Fourier είναι πιο ακριβής σε σχέση με την μεθόδο Euler-Monte-Carlo.Το συμπέρασμα αυτό είναι αναμενόμενο και διακαιολογείται από τους ρυθμούς σύγκλισης των δύο μεθόδων.
Συγκεκριμένα ,αφού ο ρυθμός σύγκλισης του κανόνα του τραπεζίου είναι 2 ,ενώ ο ρυθμός σύγκλισης του σχήματος Euler για το μοντέλο του Heston είναι 1(όπως έχει δειχθεί),περιμένουμε πως για τον ίδιο αριθμό σημείων διαμέρισης η πρώτη μέθοδος θα έχει μικρότερο απόλυτο σφάλμα.

- Υπολογιστικός Χρόνος

Υπολ.Χρόνος Fourier	Υπολ.Χρόνος Euler-M-C
0.0349 δευτ.	387.1705 δευτ.

Παρατηρούμε,πως η διαφορά των δύο μεθόδων ως προς τον υπολογιστικό χρόνο είναι εμφανής.
Το γεγονός αυτό όμως είναι αναμενόμενο ,καθώς κατά την υλοποίηση της μεθόδου Euler-Monte-Carlo χρησιμοποιείται εμφωλευμένος βρόγχος επανάληψης ,ο οποίος αυξάνει σημαντικά τον χρόνο εκτέλεσης.

Με βάση τα παραπάνω συμπεραίνουμε τελικά πως η μέθοδος του Fourier είναι αρκετά πιο αποδοτική, από την μέθοδο Euler-Monte-Carlo για το μοντέλο του Heston.

Αναφορές

[1] Bayer Cristian , Papapantoleon Antonis , Tempone Raul . *“Computational Finance“*. June 2018. `<http://mycourses.ntua.gr/courses/SEMFE1204/document/lecture.pdf>`

[2] Filipović Damir, Mayerhofer Eberhard. *“Affine Diffusion Processes :Theory and Application“*. SSRN Electronic Journal 8 (2009)