ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

Λύσεις 3ης Σειράς Γραπτών Ασκήσεων για το μάθημα “Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα”

Δημήτριος Βασιλείου
03119830
7ο Εξάμηνο

Άσκηση 1: Υπολογισιμότητα

α). Στο πρόβλημα των Διοφαντικών εξισώσεων, έχουμε μια πολυωνυμική εξίσωση $P(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ και πρέπει να βρούμε αν υπάρχει ανάθεση ακεραίων τιμών στη n –άδα $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ η οποία ικανοποιεί την εξίσωση. Γνωρίζουμε ότι το πρόβλημα των Διοφαντικών εξισώσεων είναι μη επιλύσιμο, συνεπώς ο αλγόριθμος που ημιαποφασίζει για το πρόβλημα θα έχει την εξής μορφή:

- Αν το πρόβλημα έχει λύση ο αλγόριθμος, κάνοντας εξαντλητική αναζήτηση, θα τη βρει κάποια στιγμή.
- Αν το πρόβλημα δεν έχει λύση ο αλγόριθμος θα ψάχνει για πάντα, και δεν θα τερματίσει ποτέ.

Ουσιαστικά ο αλγόριθμος, δοθείσης μια Διοφαντικής εξίσωσης, θα δοκιμάζει εξαντλητικά όλες τις ακέραιες n –άδες $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ για να ελέγξει αν η εξίσωση ικανοποιείται. Αυτό που μένει να κάνουμε είναι να βρούμε μια διαδικασία με την οποία θα δοκιμάζουμε τις n –άδες, η οποία θα είναι μετρήσιμη, εξασφαλίζοντας με αυτόν τον τρόπο ότι οποιαδήποτε n –άδα θα δοκιμαστεί σε πεπερασμένο βήμα. Η διαδικασία απαρίθμησης που αναζητούμε είναι η εξής:

- Χωρίζουμε τις δοκιμές σε φάσεις.
- Στην πρώτη φάση, δοκιμάζουμε όλες τις n –άδες που έχουν άθροισμα απολύτων τιμών ίσο με 1.
- Στην δεύτερη φάση, δοκιμάζουμε όλες τις n –άδες που έχουν άθροισμα απολύτων τιμών ίσο με 2.

  .

  .

  .
- Στην $k - οστή$ φάση, δοκιμάζουμε όλες τις n –άδες που έχουν άθροισμα απολύτων τιμών ίσο με k.

Η διαδικασία αυτή είναι μετρήσιμη, συνεπώς θα δοκιμαστούν όλες οι n –άδες σε πεπερασμένο βήμα.

β). Έστω M ο αλγόριθμος που ορίσαμε στο προηγούμενο ερώτημα. Θεωρούμε ότι ο M περιγράφεται με μια DTM, M και παίρνει σαν είσοδο x μια διοφαντική εξίσωση.
Έστω τώρα ότι υπάρχει μια $DTM\ H$ που για την M και την είσοδο x αποφασίζει αν $M(x)$ τερματίζει ή όχι. Δηλαδή θα είναι:

$$H(M, x) = \begin{cases} YES, αν\ M(x)\ τερματίζει \\ NO, αν\ M(x)\ δεν\ τερματίζει \end{cases}$$

Με βάση την $DTM\ H$ κατασκευάζουμε μια νέα $DTM\ D$ ως εξής:

$$D(M) = \begin{cases} run\ forever, αν\ H(M, M)\ τερματίζει \\ halt, αν\ H(M, M)\ δεν\ τερματίζει \end{cases}$$

Δοκιμάζουμε την D με είσοδο το εαυτό της: Προκύπτει ότι $D(D)$ τερματίζει αν και μόνο αν $D(D)$ δεν τερματίζει, δηλαδή καταλήγουμε σε άτοπο.

Άσκηση 2: Πολυπλοκότητα – Αναγωγές

α). Συμβολίζουμε με Π_x το σύνολο των προβλημάτων που ανήκουν στη κλάση C. Άρα $\Pi_x{}'$ θα είναι το σύνολο των προβλημάτων που ανήκουν στη συμπληρωματική κλάση της C, C'.

- Έστω στιγμιότυπο $\sigma \in \Pi_x{}'$. Προφανώς, λόγω συμπληρωματικότητας, το $\sigma \notin \Pi_x$.

Άρα, θα είναι και $R(\sigma) \notin \Pi$ (αφού Π είναι C-πλήρες) και λόγω συμπληρωματικότητας, θα είναι $R(\sigma) \in \Pi'$.

-Έστω τώρα στιγμιότυπο $\sigma \notin \Pi_x{}'$. Λόγω συμπληρωματικότητας, θα είναι $\sigma \in \Pi_x$, που συνεπάγεται ότι $R(\sigma) \in \Pi$ και άρα $R(\sigma) \notin \Pi'$.

Με βάση τις δύο παραπάνω προτάσεις έχουμε καταλήξει ότι $\sigma \in \Pi_x{}' <=> R(\sigma) \in \Pi'$. Δηλαδή, κάθε πρόβλημα $\Pi_x{}'$ της κλάσης C' ανάγεται κατά R στο πρόβλημα Π', συνεπώς το Π' είναι coC-πλήρες ως προς την αναγωγή R.

β). Έστω $Taut$ το πρόβλημα $Tautology$. Το συμπληρωματικό πρόβλημα $Taut'$ απαντάει «ναι» αν ο δοσμένος τύπος προτασιακής λογικής είναι ψευδής. Για να το δείξουμε αυτό αρκεί να δοκιμάσουμε όλες τις αναθέσεις αληθοτιμών στις μεταβλητές του τύπου, κάτι το οποίο γίνεται σε εκθετικό χρόνο. Ωστόσο, δοθείσης μιας συγκεκριμένης ανάθεσης αληθοτιμών μπορούμε σε γραμμικό χρόνο να ελέγξουμε αν αυτή ικανοποιεί η όχι την πρόταση. Άρα $Taut' \in NP$, και έτσι $Taut \in \mathrm{co}NP$. Με βάση το ερώτημα (α), για να δείξουμε ότι το $Taut$ είναι $coNP - complete$, αρκεί να δείξουμε ότι το $Taut'$ είναι $NP - complete$. Εύκολα μπορούμε να δούμε ότι το $Taut'$ ανάγεται στο SAT. Δοθείσης μιας πρότασης φ σε προτασιακή λογική, η φ είναι ικανοποιήσιμη, αν και μόνο αν η άρνησή της δεν είναι ταυτολογία. Έτσι, δείξαμε ότι $SAT \leq_P Taut'$, συνεπώς το $Taut'$ είναι $NP - complete$ και τελικά το $Taut$ είναι $coNP - complete$.

γ). Έστω πρόβλημα $\Pi \in \mathrm{co}NP$ είναι $NP - complete$. Έστω επίσης A κάποιο πρόβλημα που ανήκει στην κλάση NP. Αφού Π είναι $NP - complete$ τότε υπάρχει αναγωγή πολυωνυμικού χρόνου R τέτοια ώστε $A \leq_R \Pi$ και αφού $\Pi \in \mathrm{co}NP$ τότε και $A \in \mathrm{co}NP$. Έτσι, δείξαμε ότι $NP \subseteq coNP$ (1). Έστω τώρα πρόβλημα B που ανήκει στην κλάση $coNP$. Άρα το B' ανήκει στην NP και με βάση την (1), και στην $coNP$. Αλλά αν $B' \in \mathrm{co}NP$ τότε $B \in NP$, άρα $coNP \subseteq NP$ (2). Με βάση τις (1) και (2) προκύπτει ότι $coNP = NP$.

δ). Αρχικά θα ανάγουμε το $3 - SAT$ στο $NAE - 4 - SAT$ το οποίο είναι σαν το $NAE - 3 - SAT$ αλλά με 4 literals σε κάθε όρο. Για να κάνουμε την αναγωγή αυτή θεωρούμε ένα στιγμιότυπο του $3 - SAT$ και αντιστοιχίζουμε κάθε όρο ως εξής:

$$(x \lor y \lor \mathrm{z}) \to (x \lor y \lor \mathrm{z} \lor \mathrm{s}) \land (\neg x \lor \neg y \lor \neg \mathrm{z} \lor \neg \mathrm{s})$$

Όπου x, y, z είναι μεταβλητές που ήδη υπάρχουν και το s είναι μια dummy μεταβλητή που εισάγουμε εμείς. Δεδομένης μιας ανάθεσης των x, y, z , όποια και αν είναι αυτή, μπορούμε να επιλέξουμε εμείς αν θα είναι $\mathrm{s} = true$ ή $\mathrm{s} = false$, ώστε σε κάθε έναν από τους όρους $(x \lor y \lor \mathrm{z} \lor \mathrm{s})$ και $(\neg x \lor \neg y \lor \neg \mathrm{z} \lor \neg \mathrm{s})$ ένα literal να είναι $true$ και ένα $false$, αλλά κάθε όρος να έχει «συνολικά» τιμή $true$.

Τώρα, θα ανάγουμε το $NAE - 4 - SAT$ στο $NAE - 3 - SAT$. Θεωρούμε ένα στιγμιότυπο του $NAE - 4 - SAT$ και αντιστοιχίζουμε κάθε όρο ως εξής:

$$(a \lor b \lor c \lor d) \to (s \lor a \lor b) \land (\neg s \lor c \lor d)$$

Ο όρος $(a \lor b \lor c \lor d)$ θα περιέχει τουλάχιστον μια τιμή $true$ και τουλάχιστον μια τιμή $false$.

- ➔ Αν και οι δύο όροι $true$, $false$ αντιστοιχίζονται στον ίδιο όρο του $NAE-3-SAT$ τότε επιλέγουμε το s κατάλληλα, ώστε ανάλογα με τις τιμές των c, d να ικανοποιείται και ο όρος $(s \lor a \lor b)$ και ο $(\neg s \lor c \lor d)$ κατά $NAE-3-SAT$.
- ➔ Αν οι δύο όροι $true, false$ αντιστοιχίζονται σε διαφορετικό όρο, τότε το s διαλέγεται ώστε τόσο το s όσο και το $\neg s$ να είναι αντίθετα από τον όρο με τον οποίο βρίσκονται μαζί στον ίδιο όρο. Αν δηλαδή $a = true$ και $c = false$, επιλέγουμε $s = false$.

Προφανώς, όλες οι παραπάνω αναγωγές γίνονται σε πολυωνυμικό χρόνο. Έτσι καταλήγουμε ότι $3-SAT \leq_P NAE-4-SAT \leq_P NAE-3-SAT$ και αφού το $3-SAT$ είναι $NP-\pi\lambda\acute{\eta}\rho\varepsilon\varsigma$ τότε ομοίως και το $NAE-3-SAT$ είναι $NP-\pi\lambda\acute{\eta}\rho\varepsilon\varsigma$.

Άσκηση 4: Πιθανοτικοί Αλγόριθμοι – Έλεγχος Ταξινόμησης

(α). Θεωρούμε τον πίνακα A με n στοιχεία ως εξής:
$A = [{}^{n}/_{4} + 2, {}^{n}/_{4} + 3, \dots, n-1, n, 1, 2, \dots, {}^{n}/_{4} + 1]$
Ο A δεν είναι σχεδόν ταξινομημένος, διότι για τα στοιχεία n και 1 δεν ισχύει η ιδιότητα $A[a_i - 1] \leq A[a_i] \leq A[a_i + 1]$. Ο αλγόριθμος επιλέγει τυχαία k θέσεις να ελέγξει, συνεπώς η πιθανότητα να επιλέξει το n ή το 1 είναι $(1 - {}^{2}/_{n})^k$. Είναι

$$(1 - {}^{2}/_{n})^k < 1 \rightarrow ln(1 - {}^{2}/_{n})^k < 0 \rightarrow (1 - {}^{2}/_{n})^k < e^{(1-{}^{2}/_{n})^k} < 10 \rightarrow$$

Αποδεικνύοντας ότι $k > f(n)$ συμπεραίνουμε τελικά ότι $k = \Omega(n)$.