ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

Λύσεις $2^{ης}$ Σειράς Γραπτών Ασκήσεων για το μάθημα "*Τεχνητή Νοημοσύνη* "

Δημήτριος Βασιλείου
03119830
$8^{ο}$ Εξάμηνο

Άσκηση 1

1). $(p \Rightarrow \neg(p \lor q)) \Leftrightarrow ((r \land \neg q) \lor r)$

$(\neg(p \Rightarrow \neg(p \lor q)) \lor ((r \land \neg q) \lor r)) \land (\neg((r \land \neg q) \lor r) \lor (p \Rightarrow \neg(p \lor q)))$

Αναλύουμε πρώτα τον αριστερό όρο της σύζευξης:

$(\neg(p \Rightarrow \neg(p \lor q)) \lor ((r \land \neg q) \lor r)$
$\neg(\neg(p \Rightarrow \neg(p \lor q))) \lor ((r \land \neg q) \lor r)$
$(p \land (p \lor q)) \lor ((r \land \neg q) \lor r)$
$(p \lor ((r \land \neg q) \lor r)) \land ((p \lor q) \lor ((r \land \neg q) \lor r))$
$(p \lor (r \land (r \lor \neg q))) \land ((p \lor q) \lor (r \land (r \lor \neg q)))$
$((p \lor r) \land (p \lor (r \lor \neg q))) \land ((p \lor q \lor r) \land ((p \lor q) \lor (r \lor \neg q)))$
$(p \lor r) \land (p \lor r \lor \neg q) \land (p \lor r \lor q) \land (p \lor r)$
$(p \lor r) \land (p \lor r \lor \neg q) \land (p \lor r \lor q)$

Αναλύουμε τώρα τον δεξιό όρο της σύζευξης:

$\neg((r \land \neg q) \lor r) \lor (p \Rightarrow \neg(p \lor q))$
$(\neg(r \land \neg q) \land \neg r) \lor (\neg p \lor \neg(p \lor q))$
$((\neg r \lor q) \land \neg r) \lor (\neg p \lor (\neg p \land \neg q))$
$((\neg r \lor q) \land \neg r) \lor (\neg p \lor (\neg p \land \neg q))$
$(((\neg r \lor q) \land \neg r) \lor \neg p) \land ((\neg r \lor q) \land \neg r) \lor (\neg p \land \neg q))$
$((\neg r \lor q \lor \neg p) \land (\neg r \lor \neg p)) \land (((\neg p \lor \neg q) \lor (\neg r \lor \neg q)) \land (\neg p \lor \neg q \lor \neg r))$ ή
$(\neg r \lor q \lor \neg p) \land (\neg r \lor \neg p) \land (\neg p \lor \neg r) \land (\neg p \lor \neg q \lor \neg r)$

Τελικά, η πρόταση σε μορφή CNF είναι

$\{[p, r], [p, r, \neg q], [p, q, r], [\neg r, q, \neg p], [\neg r, \neg q], [\neg p, \neg r], [\neg p, \neg q, \neg r]\}$

2). $\forall x \forall y \exists z\, (\forall w (p(x, y) \Rightarrow q(w)) \lor (p(y, z) \Rightarrow \neg q(w)))$

$\forall x \forall y \exists z\, (\forall w (\neg p(x, y) \lor q(w)) \lor (\neg p(y, z) \lor \neg q(w)))$
$\forall x \forall y\, (\forall w (\neg p(x, y) \lor q(w)) \lor (\neg p(y, f(x, y) \lor \neg q(w)))$
$\forall x \forall y\, \forall w ((\neg p(x, y) \lor q(w)) \lor (\neg p(y, f(x, y) \lor \neg q(w)))$
$\neg p(x, y) \lor q(w)) \lor \neg p(y, f(x, y) \lor \neg q(w)$
$\{[\neg p(x, y) \lor q(w)) \lor \neg p(y, f(x, y) \lor \neg q(w)]\}$

Άσκηση 2

Θεωρούμε ως domain το $\Delta^I = \{a, b\}$ και $p^I = \{(a,b),(b,a)\}$ και $q^I = \{(a),(b)\}$. Παρατηρούμε ότι για την ερμηνεία που δώσαμε, αληθεύουν τα κατηγορήματα $p(a,b), p(b,a), q(a), q(b)$ της γνώσης. Επίσης, παρατηρούμε ότι η τελευταία πρόταση της γνώσης, δηλαδή η

$\forall x. \forall y. \exists z. (\forall w. (p(x,z) \Rightarrow q(w)) \lor (p(y,z) \Rightarrow \neg q(w)))$

είναι ταυτολογία για την συγκεκριμένη ερμηνεία. Δηλαδή, η ερμηνεία αυτή ικανοποιεί κάθε αξίωμα της γνώσης, συνεπώς είναι μοντέλο για τη γνώση.

Άσκηση 3

$p(a,b)$

$p(b,a)$

$q(a)$

$\neg q(b)$

$\forall x \forall y \exists z [\forall w (p(z,x) \Rightarrow q(w)) \lor (p(y,z) \Rightarrow \neg q(w))]$

Φέρνουμε την τελευταία πρόταση σε μορφή CNF

$\forall x \forall y \exists z [\forall w (\neg p(z,x) \lor q(w)) \lor (\neg p(y,z) \lor \neg q(w))]$

$\forall x \forall y [\forall w (\neg p(f(x,y),x) \lor q(w)) \lor (\neg p(y,f(x,y)) \lor \neg q(w))]$

$\neg p(f(x,y),x) \lor q(w) \lor \neg p(y,f(x,y)) \lor \neg q(w)$

$[\neg p(f(x,y),x), q(w), \neg p(y,f(x,y)), \neg q(w)]$

Άρα σε CNF η K γράφεται ως εξής:

$[p(a,b)]$ (1)

$[p(b,a)]$ (2)

$[q(a)]$ (3)

$[\neg q(b)]$ (4)

$[\neg p(f(x,y),x), q(w), \neg p(y,f(x,y)), \neg q(w)]$ (5)

- Για την αντικατάσταση t_1: $f(x,y)=b$, $x=a$, από (2),(5) παίρνουμε $[q(w), \neg p(y,b), \neg q(w)]$ (6)
- Για t_2: $w=a$, από (3),(5) είναι: $[\neg p(f(x,y),x), q(a), \neg p(y,f(x,y))]$ (7)
- Για t_3: $w=b$, από (4),(5) είναι $[\neg p(f(x,y),x), \neg p(y,f(x,y)), \neg q(b)]$ (8)
- Για t_4: $w=a$, από (6),(7) είναι: $[\neg p(f(x,y),x), \neg p(y,f(x,y)), q(a), \neg p(y,b)]$
- ~~Για t_4: w=a από (6),(7)~~

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο και εξετάζοντας όλες τις δομές, δεν θα παραχθεί η κενή λίστα [], συνεπώς η K βγαίνει συνεπής

Άσκηση 4

Αναλύουμε αρχικά την πρώτη πρόταση:
$\forall x(\exists y\, p(x,y)\ \Rightarrow\ q(a))$
$\forall x(\neg\exists y\, p(x,y) \vee q(a))$
$\forall x(\forall y\, \neg p(x,y) \vee q(a))$
$\forall x \forall y(\neg p(x,y) \vee q(a))$
$\left(\forall x \forall y\, \neg p(x,y)\right) \vee q(a)$ (1), αφού το $q(a)$ είναι ανεξάρτητο από τα x, y.

Αναλύουμε την δεύτερη πρόταση:
$(\forall x \exists y\, p(x,y))\ \Rightarrow\ q(a)$
$(\neg(\forall x\left(\exists y\, p(x,y)\right) \vee\ q(a)$
$(\exists x \neg\exists y\, p(x,y)) \vee\ q(a)$
$\left(\exists x\, \forall \neg y\, p(x,y)\right) \vee\ q(a)$ (2)

Από τις (1), (2) παρατηρούμε ότι αν βρεθεί ερμηνεία που ικανοποιεί την πρώτη πρόταση, τότε αναγκαστικά θα ικανοποιείται και η δεύτερη αφού για κάθε x και για κάθε y θα ισχύει $\neg p(x,y)$, συνεπώς υπάρχει x τέτοιο ώστε να ισχύει $\neg p(x,y)$. Άρα δεν υπάρχει ερμηνεία που να ικανοποιεί την πρώτη και να μην ικανοποιεί τη δεύτερη πρόταση.

Άσκηση 5

1). Βασικοί όροι του προγράμματος είναι οι a, b, c, d, e, f. Παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει καμία συνάρτηση στο πρόγραμμα, συνεπώς για το σύμπαν Herbrand θα είναι
$UP = \{a, b, c, d, e, f\}$
Επίσης, για τη βάση Herbrand, έχουμε:

$$BP = \{parent(i,j), sibling(i,j), grandparent(i,j), cousin(i,j), father(i,j), mother(i,j), \mu\varepsilon\ (i,j) \in \{a,b,c,d,e,f\} \times \{a,b,c,d,e,f\}\}$$

2).

Εκτέλεση με forward chaining

Δίνουμε αριθμούς στις σχέσεις για ευκολία:
$parent(x,y) \leftarrow father(x,y).$ (1)
$parent(x,y) \leftarrow mother(x,y).$ (2)
$sibling(y,z) \leftarrow parent(y,x), parent(z,x).$ (3)
$sibling(x,y) \leftarrow sibling(y,x).$ (4)
$grandparent(x,z) \leftarrow parent(x,y), parent(y,z).$ (5)
$cousin(y,z) \leftarrow grandparent(y,x), grandparent(z,x).$ (6)
$mother(a,b) \leftarrow.$ (7)
$father(b,c) \leftarrow.$ (8)
$mother(d,b) \leftarrow.$ (9)
$mother(e,c) \leftarrow.$ (10)
$mother(f,b) \leftarrow.$ (11)

$mother(a,b) \xrightarrow{(2)} parent(a,b)$

$\xrightarrow{(5)} grandparent(a,c)$

$father(b,c) \xrightarrow{(2)} parent(b,c)$

-

$father(b,c) \xrightarrow{(2)} parent(b,c)$

$\xrightarrow{(5)} grandparent(f,c)$

$mother(f,b) \xrightarrow{(2)} parent(f,b)$

-

$father(b,c) \xrightarrow{(2)} parent(b,c)$

$\xrightarrow{(5)} grandparent(d,c)$

$mother(d,b) \xrightarrow{(2)} parent(d,b)$

-

$grandparent(a,c)$

$\xrightarrow{(6)} cousin(a,f)$

$grandparent(f,c)$

$grandparent(a,c)$

$\xrightarrow{(6)} cousin(a,d)$

$grandparent(d,c)$

-

$grandparent(f,c)$

$\xrightarrow{(6)} cousin(f,d)$

$grandparent(d,c)$

Με βάση τα παραπάνω βλέπουμε ότι είναι $cousin(a,e) = True$ ενώ $cousin(a,f) = False$

Θα ελέγξουμε τώρα για το ερώτημα $sibling(a,e)$. Είναι:

$mother(a,b) \xrightarrow{(2)} parent(a,b)$

$\xrightarrow{(3)} sibling(a,d)$

$mother(d,b) \xrightarrow{(2)} parent(b,c)$

-

$mother(a,b) \xrightarrow{(2)} parent(a,b)$

$\xrightarrow{(3)} sibling(f,c)$

$mother(f,b) \xrightarrow{(2)} parent(f,b)$

-

$mother(f,b) \xrightarrow{(2)} parent(f,b)$

$\xrightarrow{(3)} sibling(f,d)$

$mother(d,b) \xrightarrow{(2)} parent(d,b)$

-

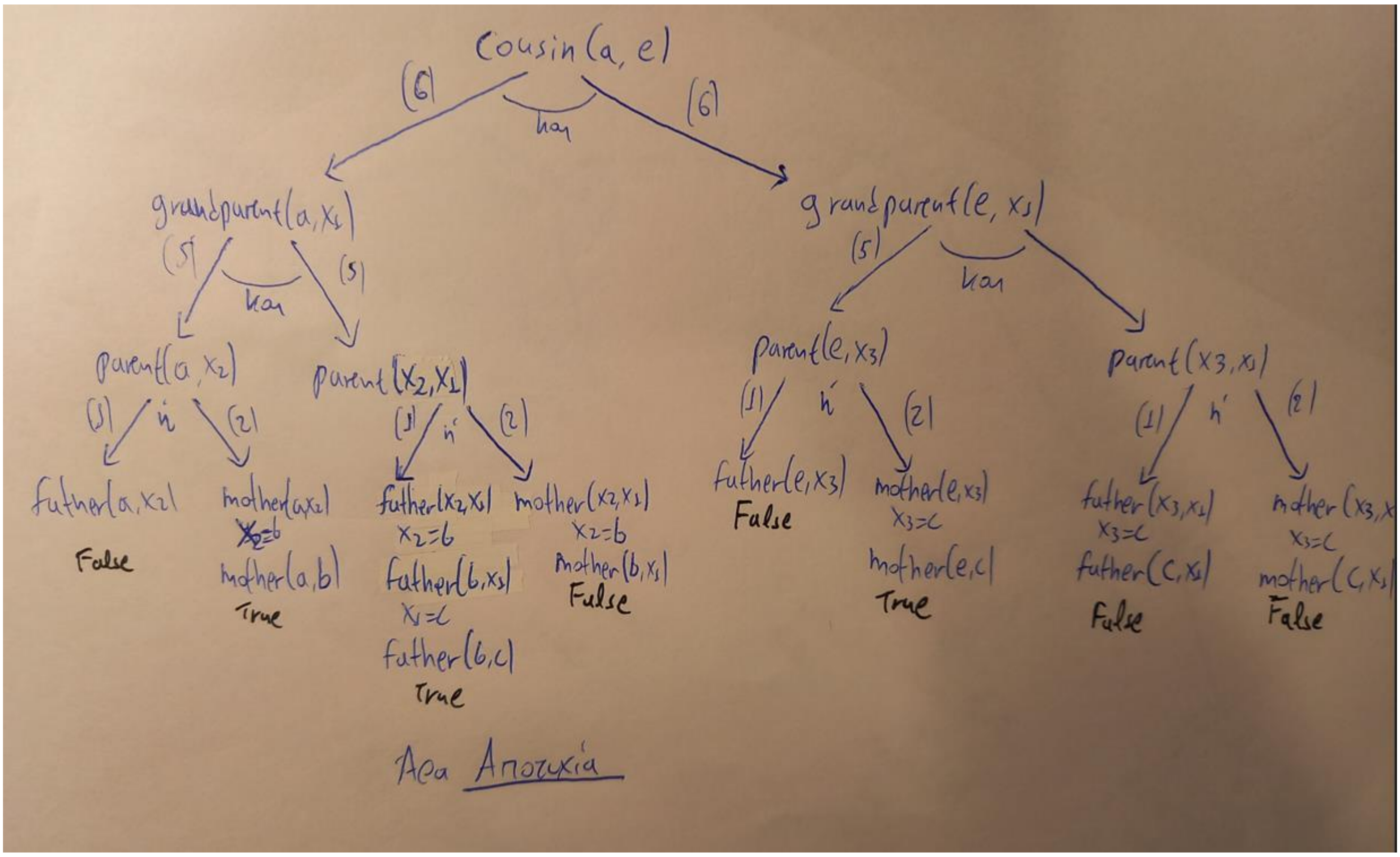
$father(b,c) \xrightarrow{(2)} parent(b,c)$

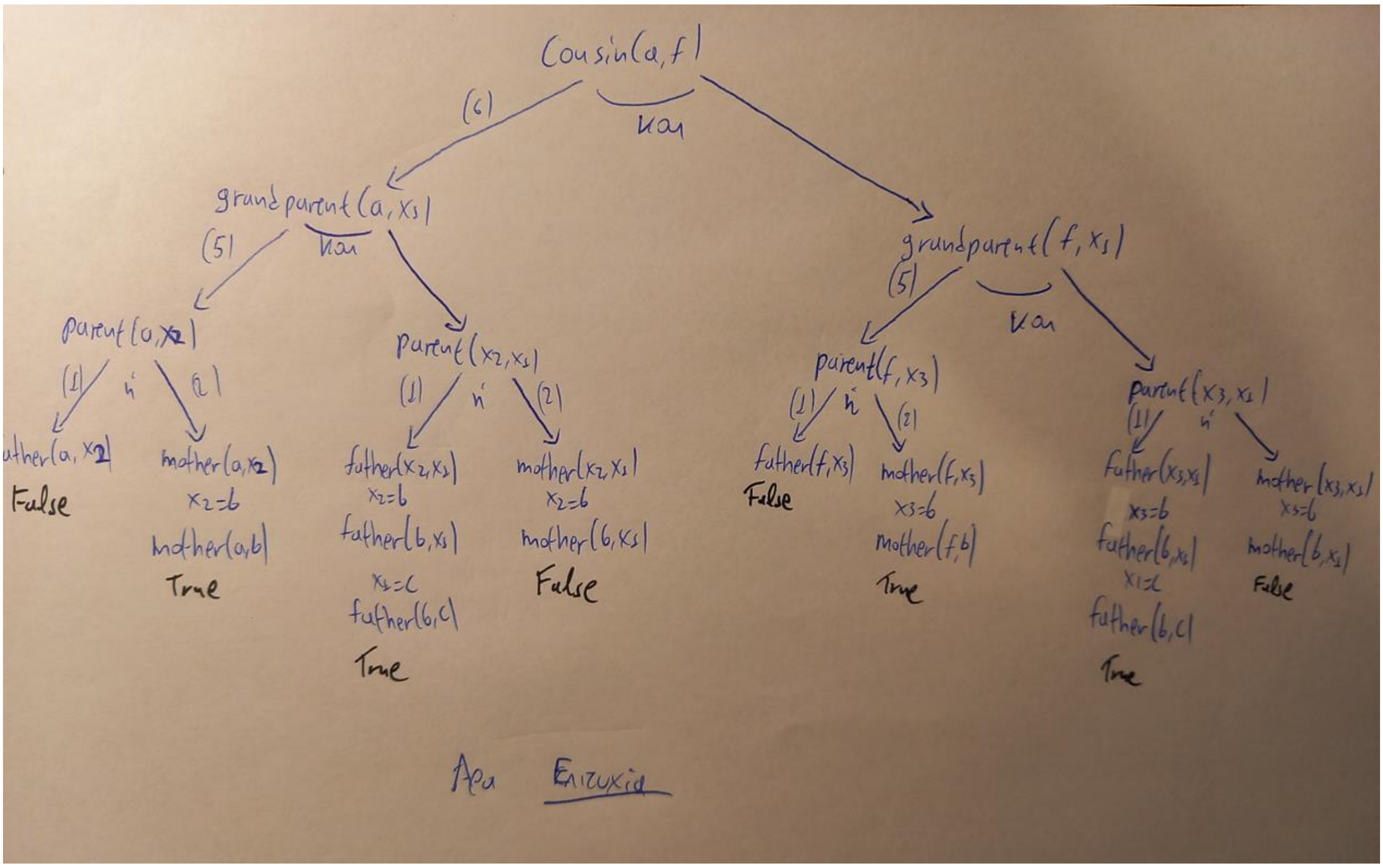
$\xrightarrow{(3)} sibling(b,e)$

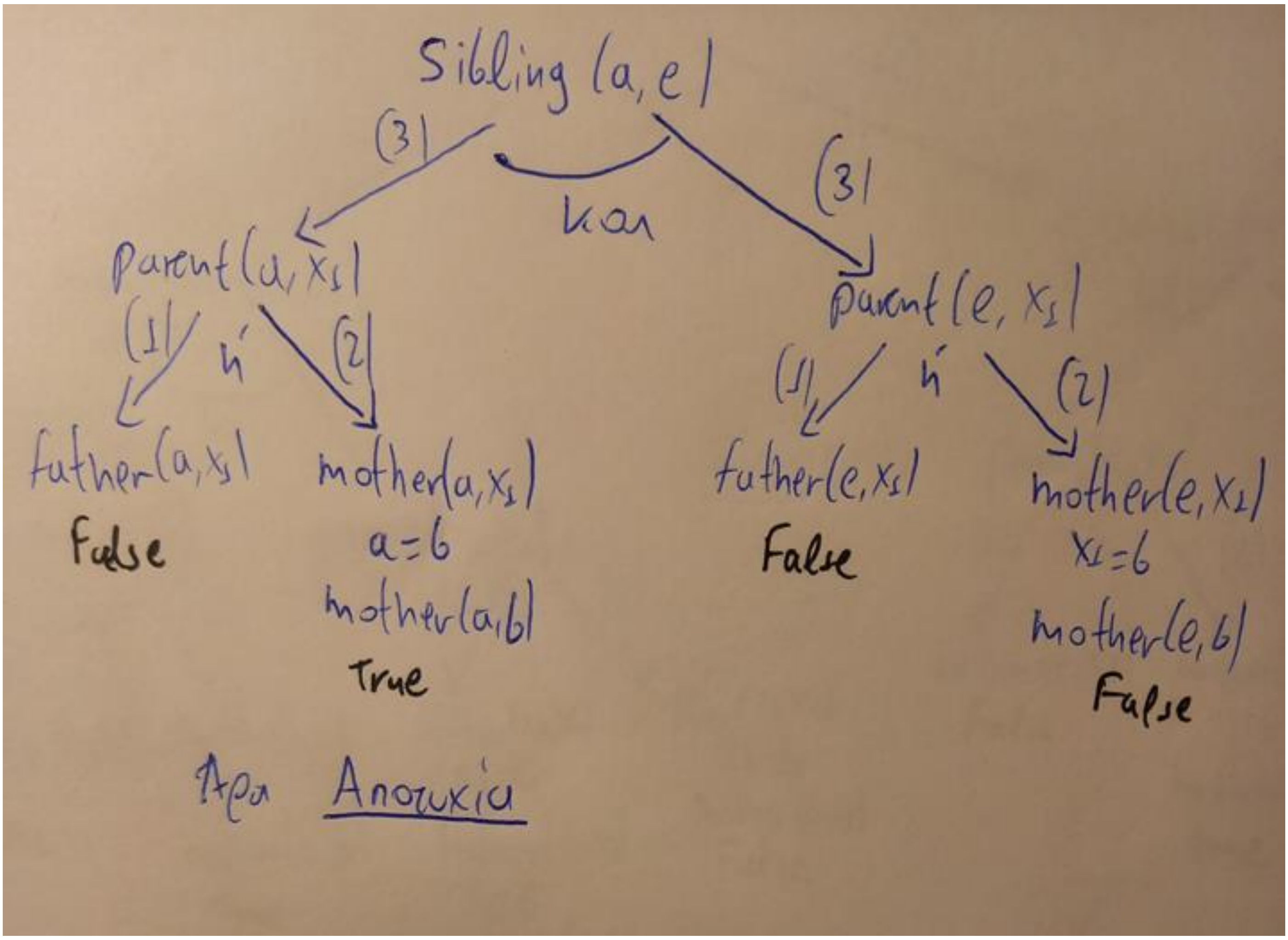
$mother(e,c) \xrightarrow{(2)} parent(e,c)$

Τελικά προκύπτει ότι $sibling(a,e) = False$.

Εκτέλεση με backward chaining







3). Παρατηρούμε ότι η απάντηση στα ερωτήματα δεν είναι αυτή που περιμένουμε διαισθητικά, διότι έχουμε $sibling(a, d) = True, cousin(a, d) = True$ καθώς και $sibling(f, d) = True, cousin(f, d) = True$, ενώ δεν γίνεται δύο άτομα που είναι ξαδέρφια να είναι και αδέρφια.

Για να γίνουν διαισθητικά ορθότερες οι απαντήσεις σε ερωτήματα τέτοιου τύπου αρκεί να τροποποιήσουμε την πρόταση (3) του λογικού προγράμματος ως εξής:

$sibling(y, z) \leftarrow parent(y, x), parent(z, x), \neg cousin(y, z).$

ώστε να αποφύγουμε το ενδεχόμενο δύο ξαδέρφια να είναι και αδέρφια.

Άσκηση 6

Θεωρούμε πως για τα βάρη, αρχικά ισχύει $\boldsymbol{w}_1{}^{(0)} = (0, \dots, 0)$ και $\boldsymbol{w}_2{}^{(0)} = (0, \dots, 0)$ και πως τα στιγμιότυπα προς ταξινόμηση έρχονται με την ίδια σειρά στους δύο αλγορίθμους. Επίσης, θεωρούμε πως τα στοιχεία $\boldsymbol{x_i}$ έχουν διάσταση $k > 0$.

Έστω $(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{y}_i)$ το πρώτο στιγμιότυπο που θα ταξινομήσει λάθος ο αλγόριθμος (1) και αυτό γίνεται στον γύρο t . Προφανώς, το $\boldsymbol{w}_1$ δεν αλλάζει οπότε θα είναι $\boldsymbol{w}_1{}^{(\boldsymbol{t})} = \boldsymbol{w}_1{}^{(0)} = (0, \dots, 0)$ και στον γύρο $t + 1$ θα γίνει $\boldsymbol{w}_1{}^{(\boldsymbol{t}+1)} = \boldsymbol{w}_1{}^{(\boldsymbol{t})} + y_i \boldsymbol{x_i} = y_i \boldsymbol{x_i} = (y_i x_{i1}, y_i x_{i2}, \dots, y_i x_{ik})(A)$. Επίσης, αφού το $(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{y_i})$ ταξινομήθηκε λανθασμένα, τότε θα ισχύει $y_i < \boldsymbol{w}_1{}^{(\boldsymbol{t})}, \boldsymbol{x_i} > \leq 0$.

Για τον αλγόριθμο (2), παρατηρούμε ότι η συνθήκη για την οποία έχει ταξινομηθεί λάθος ένα στιγμιότυπο, είναι ίδια με αυτή του αλγορίθμου (1), συνεπώς ο αλγόριθμος (2) θα ταξινομήσει λάθος πρώτη φορά ένα στοιχείο, στον ίδιο γύρο που θα το κάνει ο αλγόριθμος (1), δηλαδή στον γύρο t. Προφανώς, όμοια με τον (1), θα είναι $\boldsymbol{w}_2{}^{(\boldsymbol{t})} = \boldsymbol{w}_2{}^{(0)} = (0, \dots, 0)$ και στον γύρο $t + 1$ θα γίνει
$\boldsymbol{w}_2{}^{(\boldsymbol{t}+1)} = \boldsymbol{w}_2{}^{(\boldsymbol{t})} + \eta y_i \boldsymbol{x_i} = \eta y_i \boldsymbol{x_i} = (\eta y_i x_{i1}, \eta y_i x_{i2}, \dots, \eta y_i x_{ik})(B)$.

Από τις σχέσεις $(A), (B)$ καταλήγουμε ότι $\boldsymbol{w}_1{}^{(\boldsymbol{t}+1)} = \frac{\boldsymbol{w}_2{}^{(\boldsymbol{t}+1)}}{\eta}$.

Στον γύρο $t + 1$ ο αλγόριθμος (1) θα ταξινομήσει ένα στοιχείο $(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{y}_i)$ στην ίδια κλάση με αυτή που θα το ταξινομήσει ο αλγόριθμος (2), διότι ισχύει:

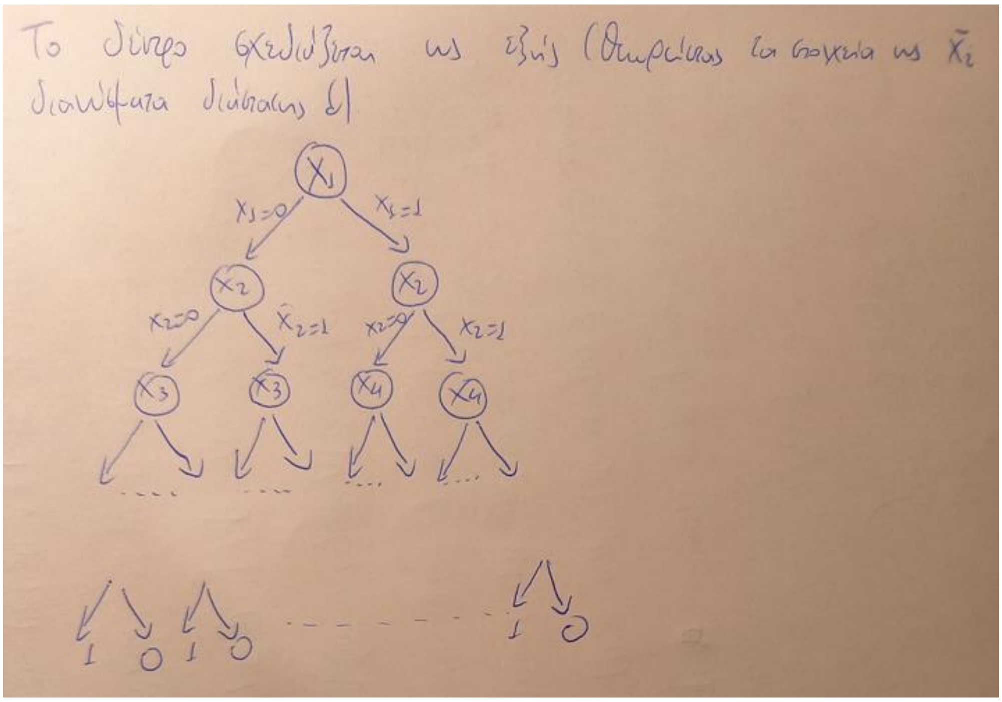
$$y_i < \boldsymbol{w}_1{}^{(\boldsymbol{t}+1)}, \boldsymbol{x_i} > = y_i \sum_{j=1}^{k} y_i \, x_{ij} x_{ij}$$

$$y_i < \boldsymbol{w}_2{}^{(\boldsymbol{t}+1)}, \boldsymbol{x_i} > = y_i \sum_{j=1}^{k} \eta y_1 \, x_{i1} x_{i1} = \eta y_i \sum_{j=1}^{k} y_1 \, x_{i1} x_{i1}$$

Τα δύο αποτελέσματα είναι ομόσημα αφού $\eta > 0$, οπότε οι δύο αλγόριθμοι θα ταξινομήσουν το στοιχείο στην ίδια κλάση. Επαγωγικά, συμπεραίνουμε ότι αυτό ισχύει για όλα τα στοιχεία, δηλαδή ο αλγόριθμος (1) ταξινομεί στην ίδια κλάση με τον αλγόριθμο (2) για κάθε στοιχείο. Συνεπώς η σχέση για τα τελικά βάρη $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2$ θα είναι $\boldsymbol{w}_1 = \frac{w_2}{\eta}$. Επίσης, οι δύο αλγόριθμοι θα εκτελέσουν ίδιο αριθμό βημάτων, ανεξάρτητο του η.

Άσκηση 7

1).

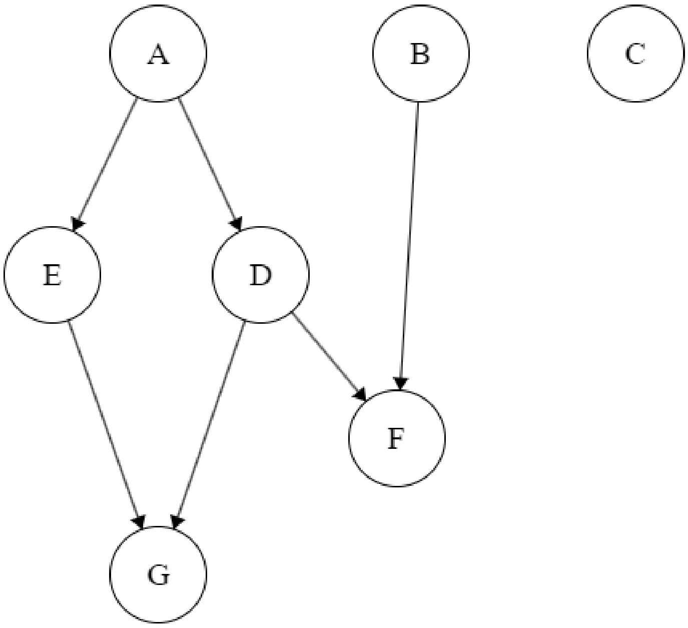


2). Γνωρίζουμε ότι το βάθος ενός δέντρου απόφασης δεν μπορεί να ξεπερνάει το πλήθος των χαρακτηριστικών των στιγμιότυπων του δέντρου. Αφού το δέντρο λαμβάνει ως είσοδο διανύσματα διάστασης d, τότε και το μέγιστο βάθος του είναι d + 1 (d επίπεδα και ένα το επίπεδο των φύλων).

3). Συμβολίζουμε τις εισόδους ως $x_i = \{0, 1\}^d$ δηλαδή διανύσματα διάστασης d όπου κάθε διάσταση παίρνει τιμή 0 ή 1. Από το ερώτημα (2) γνωρίζουμε ότι το μέγιστο βάθος του δέντρου απόφασης είναι d + 1 (d επίπεδα και ένα το επίπεδο των φύλων), συνεπώς μπορούμε να υποθέσουμε ότι το «μέγιστο» δέντρο έχει 2^d φύλλα. Για κάθε είσοδο x_i μπορούμε να βρούμε ένα μοναδικό μονοπάτι στο δέντρο το οποίο να δίνει την ετικέτα y_i. Συνεπώς, το δέντρο κατακερματίζει το σύνολο $C = (x_1, x_2, \ldots, x_{2^d})$. Θεωρούμε το σύνολο $C' = (x_1, x_2, \ldots, x_{2^d}, x_{2^{d+1}})$. Από τη στιγμή που υπάρχουν 2^d μονοπάτια που οδηγούν σε φύλα, τότε προφανώς δύο είσοδοι x_u, x_v θα «μοιράζονται» το ίδιο μονοπάτι. Συνεπώς, το δέντρο δεν κατακερματίζει το C' καθώς και κανένα σύνολο με πληθικότητα μεγαλύτερη από 2^d. Συνεπώς, η VC-διάσταση του δέντρου είναι 2^d.

Άσκηση 8

1). Έχουμε το ακόλουθο δίκτυο πίστης:



2). Είναι
$J(<A,B,C,D,E,F>) = P(A)\,P(B)\,P(C|A,B)\,P(D|B)\,P(E|C,D)\,P(F|E)$

3) Χρειαζόμαστε τις εξής πιθανότητες για να προσδιορίσουμε πλήρως το δίκτυο πίστης:

- $P(A)$
- $P(B)$
- $P(C|A,B),\ P(C|\neg A,B), P(C|A,\neg B), P(C|\neg A,\neg B)$
- $P(D|\,B),\ P(D|\neg B)$
- $P(E|C,D),\ P(E|\neg C,D), P(E|C,\neg D), P(E|\neg C,\neg D)$
- $P(F|\,E),\ P(F|\neg E)$

Τελικά, χρειαζόμαστε συνολικά 14 πιθανότητες.