ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

2Η ΓΡΑΠΤΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Ονοματεπώνυμο: Δημήτριος Βασιλείου
ΑΜ: el19830
Εξάμηνο: 4ο
Σχολή: ΗΜΜΥ

Θέμα 1:

(α). Θα λύσουμε το πρόβλημα με την βοήθεια της αρχής του Περιστερώνα. Ως περιστέρια θεωρούμε τους n αριθμούς που επιλέγουμε από το σύνολο $\{1, 2, \ldots, 2^n-3, 2^n-2\}$. Ορίζουμε τις φωλιές με βάση το ακόλουθο σκεπτικό:
Κάθε φωλιά αποτελεί ένα υποσύνολο του $\{1, 2, \ldots, 2^n-3, 2^n-2\}$ αρχίζοντας από έναν αριθμό k και τελειώνοντας στον 2k. Η επόμενη φωλιά θα αρχίζει από τον 2k+1 και θα τελειώνει στον 2(2k+1) κ.ο.κ. Δηλαδή:
-Η πρώτη φωλιά είναι το υποσύνολο {1, 2} και περιέχει $2^1=2$ στοιχεία.
-Η δεύτερη είναι το {3,4,5,6} και περιέχει $2^2=4$ στοιχεία.
-Η τρίτη είναι το {7,8,9,10,11,12,13,14} και περιέχει $2^3=8$ στοιχεία.
…
…
-Η k-οστή φωλιά είναι το $\{(2^k-2)/2,\ldots, 2^k-2\}$ και περιέχει $2^k-2-(2^k-2)/2+1=2^k-2^{k-1}=2^{k-1}$ στοιχεία (1).
Θα δείξουμε με επαγωγή ότι οι φωλιές είναι n-1.

- Για n=2, έχουμε το σύνολο {1, 2} οπότε έχουμε μία φωλιά, ισχύει.
- Έστω ότι για n=k έχουμε k-1 φωλιές.
- Για n=k+1, έχουμε τις k-1 φωλιές από πριν και την φωλιά που αρχίζει από τον αριθμό $(2^{k+1}-2)/2=2^k-1$ και τελειώνει στον $2^{k+1}-2$, δηλαδή θα περιέχει $2^{k+1}-2-(2^k-1)+1=2^k$ στοιχεία, κάτι που συμφωνεί με την σχέση (1). Τελικά έχουμε k-1+1=k φωλιές.

Καταλήγουμε λοιπόν ότι έχουμε n αριθμούς τους οποίους μοιράζουμε σε n-1 φωλιές, οπότε 2 αριθμοί α, β(έστω χβγ α<β) θα πέσουν στην ίδια φωλιά. Με βάση τον τρόπο όπου είναι κατασκευασμένες οι φωλιές, καθώς το διπλάσιο του μικρότερου αριθμού κάθε φωλιάς ισούται με τον μέγιστο αριθμό της φωλιάς, θα ισχύει ότι β≤2α.

Θέμα 2:

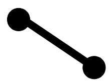
(α).Χρησιμοποιούμε μαθηματική επαγωγή στο πλήθος των κορυφών, έστω n.

- Για n=2 προφανώς υπάρχει τέτοια κορυφή s*.
- Έστω ότι για tournament T με n=k κορυφές υπάρχει τέτοια κορυφή s*.
- Για n=k+1: Προσθέτουμε μια νέα κορυφή έστω v, στο T. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

1.Αν υπάρχει ακμή (v, s*) ή ακμή της v προς κορυφή που έχει απόσταση 1 από την s*, τότε η s* συνεχίζει να έχει την ιδιότητα που θέλουμε.
2.Αν δεν ισχύει το 1, τότε αφού T είναι tournament οι ακμές θα έχουν αντίθετη φορά, δηλαδή υπάρχει η ακμή (s*, v) και κάθε κορυφή απόστασης 1 από την s* θα συνδέεται τώρα με την v. Εξετάζουμε τις κορυφές που έχουν απόσταση 2 από την s*. Αυτές, αναγκαστικά θα συνδέονται με κορυφές που έχουν απόσταση 1 από την s*, άρα θα έχουν απόσταση 2 από την v. Συνεπώς, σε αυτή την περίπτωση η v είναι η κορυφή με την ιδιότητα που θέλουμε.

(β).Θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής, θεωρώντας αρχικά την ειδική περίπτωση όπου το G(V, E) είναι δέντρο με n κορυφές. Έστω σύνολο $T \subseteq V$ με $|T|=2l \leq n$ για κάποιο $l \geq 1$.

- Για n=2 κορυφές είναι l=1 οπότε το T περιλαμβάνει και τις 2 κορυφές του γραφήματος και υπάρχει ένα μονοπάτι p_1 το οποίο έχει άκρα τις 2 κορυφές του γραφήματος, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα:



- Για n=k κορυφές: Έστω ότι υπάρχουν l μονοπάτια $p_1, p_2, \ldots, p_l$, στο G χωρίς κοινές ακμές μεταξύ τους στα οποία κάθε κορυφή του T εμφανίζεται ως άκρο ενός από αυτά.
- Για n=k+1 κορυφές: Προσθέτουμε στο δέντρο άλλη μία κορυφή, έστω v, η οποία θα είναι φύλλο. Είτε η v είναι “παιδί” ακμής $u \in T$ είτε όχι, δεν επηρεάζει το μονοπάτι, οπότε τα l μονοπάτια παραμένουν και συνεχίζει να ισχύει η ιδιότητα.

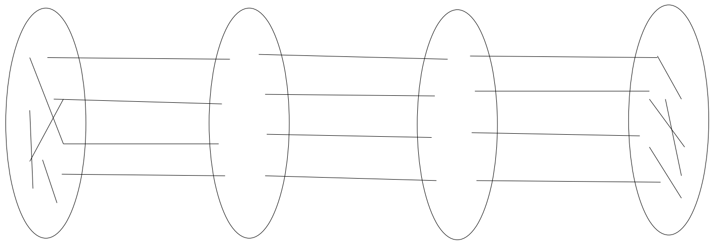
Θα γενικεύσουμε τώρα το συμπέρασμα και για οποιοδήποτε συνεκτικό γράφημα G με n κορυφές. Επειδή το G είναι συνεκτικό, θα υπάρχει σε αυτό συνεκτικό δέντρο G’. Το G’, επειδή είναι δέντρο και έχει n κορυφές, θα περιέχει σύνολο T με $|T|=2l \leq n$ και θα υπάρχουν σε αυτό l μονοπάτια $p_1, p_2, \ldots, p_l$ χωρίς κοινές ακμές μεταξύ τους στα οποία κάθε κορυφή του T εμφανίζεται ως άκρο ενός από αυτά, όπως αποδείξαμε προηγουμένως. Άρα, εφόσον $G' \subseteq G$ και τα G, G’ έχουν ίδιο αριθμό κορυφών, τα l αυτά μονοπάτια περιέχονται και στο G.

Θέμα 3:
Θεωρούμε G(V, E) με |V|=n.
Εφόσον το G είναι d-κανονικό τότε κάθε κορυφή $u \in V$ ενώνεται με d κορυφές. Θεωρούμε λοιπόν μία τυχαία κορυφή u την οποία τοποθετούμε σε κενό σύνολο K(το οποίο θα γίνει το Independent-set που ψάχνουμε). Είναι deg(u)=d, επομένως η επόμενη κορυφή v που θα βάλουμε στο K, για να αυτό είναι Independent-set, πρέπει να είναι μία από τις n-(d+1) κορυφές(δεν μπορεί να είναι η u, ούτε κάποια από τους γείτονες της u). Όταν λοιπόν το K έχει 2 κορυφές η τρίτη κορυφή που θα

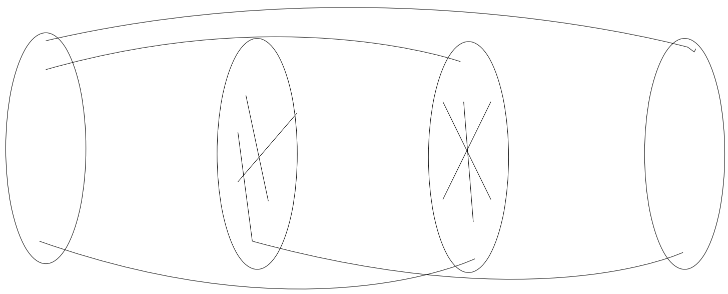
μπει πρέπει να είναι μία από τις n-(d+1)-(d+1)=n-2(d+1)(δεν μπορεί να είναι κάποια από τις προηγούμενες ούτε η v ούτε κάποια από τους d γείτονες της v).
Συνεχίζοντας καταλήγουμε ότι όταν η k-οστή κορυφή μπει στο K, θα έχουμε n-k(d+1) κορυφές διαθέσιμες για την (k+1)-οστή. Η διαδικασία σταματάει όταν δεν μπορούμε να προσθέσουμε άλλες ακμές, δηλαδή όταν n=k(d+1) οπότε k=n/(d+1).
Άρα το Independent-set K έχει τουλάχιστον n/(d+1) κορυφές.
Παραθέτουμε στην συνέχεια αλγόριθμο που βρίσκει το Independent set K σε γράφο G(V, E):

Επέλεξε τυχαία κορυφή u∈V
Πρόσθεσε την u σε σύνολο K
Όρισε σύνολο A με A={u}
Για κάθε γείτονα v της u
    A=A+{v}
Για κάθε κορυφή v∈(V-A)
    K=K+{v}
    A=A+{v}
    Για κάθε γείτονα w της v
        A=A+{w}
Τύπωσε το K

Θέμα 4:
(i). Θεωρούμε το γράφημα G με 4k κορυφές το οποίο χωρίζεται σε 4 υπογραφήματα εκ των οποίων καθένα έχει k κορυφές, διαδοχικά τα εξής: Κλίκα μεγέθους k(K_{k1}), ανεξάρτητο σύνολο μεγάλους k(I_{k2}), ανεξάρτητο σύνολο μεγέθους k(I_{k3}), κλίκα μεγέθους k(K_{k4}). Θεωρώντας κάθε υπογράφημα του G ως μια κορυφή και τις ακμές μεταξύ των υπογραφημάτων ως μια ακμή, παίρνουμε το γράφημα P_4.
Εξετάζουμε τυχαία κορυφή στο K_{k1}. Αφού K_{k1} είναι κλίκα αυτή θα ενώνεται με k-1 κορυφές στο K_{k1} και επίσης ενώνεται με όλες τις κορυφές του I_{k2}. Άρα deg(u)=2k-1 και το ίδιο ισχύει για κάθε κορυφή του K_{k1}. Με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε ότι για κάθε κορυφή u του K_{k4} θα ισχύει ότι deg(u)=2k-1.
Εξετάζουμε τώρα τυχαία κορυφή u στο I_{k2}. Η u έχει k γείτονες στο K_{k1} και k γείτονες στο I_{k3}, άρα deg(u)=2k και το ίδιο ισχύει για κάθε κορυφή του I_{k2}. Με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε ότι για κάθε u κορυφή του I_{k3} ισχύει ότι deg(u)=2k.
Καταλήγουμε λοιπόν ότι οι 2k κορυφές των K_{k1} και K_{k4} έχουν βαθμό 2k-1 ενώ οι 2k κορυφές των I_{k2} και I_{k3} έχουν βαθμό 2k. Συνεπώς, οι μισές κορυφές του G έχουν βαθμό 2k και οι άλλες μισές 2k-1.
Μένει να δείξουμε ότι το γράφημα είναι αυτοσυμπληρωματικό. Το γράφημα G έχει την παρακάτω μορφή:

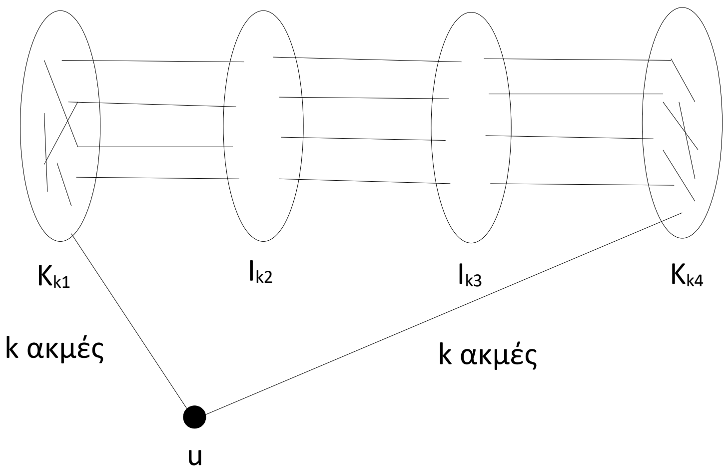


Το συμπληρωματικό γράφημα G’ θα έχει την ακόλουθη μορφή:

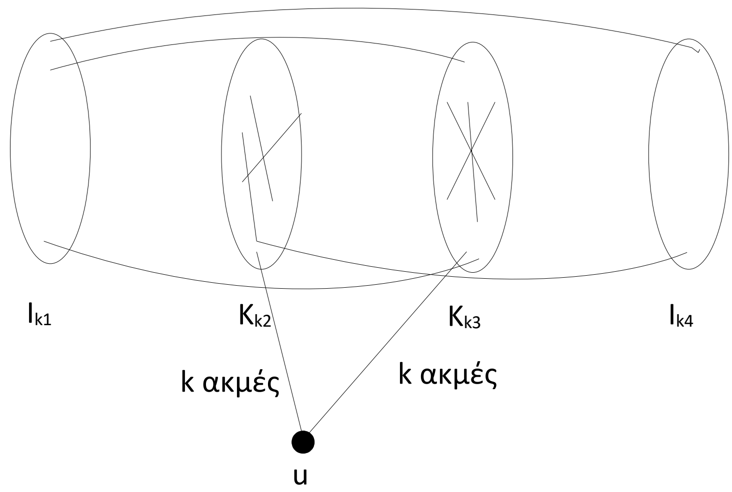


Όπως είναι αναμενόμενο, στο G’ οι κλίκες έγιναν ανεξάρτητα σύνολα και το αντίθετο. Βλέπουμε πως στο G όλες οι κορυφές κάθε κλίκας ενώνονται μεταξύ τους αλλά και με όλες τις κορυφές ενός ανεξάρτητου συνόλου, και όλες οι κορυφές κάθε ανεξάρτητου συνόλου ενώνονται με μία κλίκα και ένα ανεξάρτητο σύνολο. Αυτά συνεχίζουν να ισχύουν και στο G’ επομένως τα γραφήματα G, G’ είναι ισομορφικά. Συνεπώς το G είναι αυτοσυμπληρωματικό.

(ii). Θεωρούμε το γράφημα G του προηγούμενου ερωτήματος με την προσθήκη μίας νέας κορυφής u, σχηματίζοντας το νέο γράφημα G1. Η u συνδέεται με όλες τις κορυφές του K_{k1} και με όλες του K_{k4}. Συνεπώς, θα είναι deg(u)=2k. Επίσης, αφού κάθε κορυφή των K_{k1} και K_{k4} είχε στο G βαθμό 2k-1 και τώρα συνδέεται με την u, θα έχει στο G1 βαθμό 2k. Επίσης κάθε κορυφή των I_{k2} και I_{k3} εξακολουθεί να έχει βαθμό 2k στο G1, όπως είχε στο G, αφού δεν ενώνεται με την u. Συνεπώς το γράφημα G1 έχει 4k+1 κορυφές και αφού όλες έχουν βαθμό 2k είναι 2k-κανονικό.
Μένει να δείξουμε ότι το G1 είναι αυτοσυμπληρωματικό. Το γράφημα G1 έχει την παρακάτω μορφή:



Το συμπληρωματικό του, G1’ θα έχει την ακόλουθη μορφή:

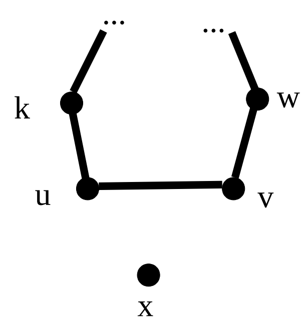


Όπως είναι αναμενόμενο, στο G1’ οι κλίκες έγιναν ανεξάρτητα σύνολα και το αντίστροφο. Βλέπουμε, πως στο G1 όλες οι κορυφές κάθε κλίκας ενώνονται μεταξύ τους αλλά και με όλες τις κορυφές ενός ανεξάρτητου συνόλου, και όλες οι κορυφές κάθε ανεξάρτητου συνόλου ενώνονται με μία κλίκα και ένα ανεξάρτητο σύνολο. Αυτά συνεχίζουν να ισχύουν και στο G1’. Επίσης, στο G1 η u συνδέεται με όλες τις κορυφές των 2 κλικών, κάτι το οποίο συνεχίζει να ισχύει και στο G1’. Τελικά τα γραφήματα G1, G1’ είναι ισομορφικά άρα το G1 είναι αυτοσυμπληρωματικό. Αποδείξαμε λοιπόν ότι υπάρχει αυτοσυμπληρωματικό γράφημα G1 με 4k+1 κορυφές που είναι 2k-κανονικό.

Θέμα 5:

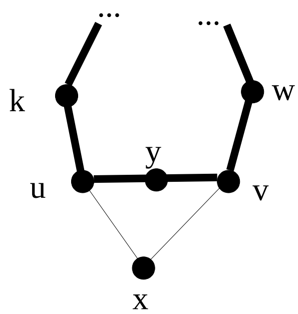
(α). Έστω ότι όλες οι κορυφές του G(V, E) είναι άρτιου βαθμού. Τότε το G έχει κύκλο Euler. Ακολουθώντας τον κύκλο Euler, προσανατολίζουμε το G με βάση την

κατεύθυνση όπου “οδεύει” ο κύκλος. Για παράδειγμα, έστω κορυφή u∈V, με deg(u)=k. Ο κύκλος θα φτάσει κάποια στιγμή στην u, και αν η u δεν είναι η αρχική-τελική κορυφή του κύκλου, θα ξαναφύγει από αυτή. Άρα, αφού ο κύκλος φτάνει στην u, έστω από κάποια προηγούμενη κορυφή v, βάζουμε βέλος από την u προς την v , συνεπώς ο έσω βαθμός της u αυξάνεται κατά 1. Επίσης, ο κύκλος αναγκαστικά θα βγει από την u και θα συνεχίσει σε μία κορυφή w, οπότε βάζουμε βέλος από την u προς την w, συνεπώς ο έξω βαθμός της u αυξάνεται κατά 1. Αφού λοιπόν κάθε πέρασμα του κύκλου από την u αυξάνει τον έσω βαθμό και τον έξω βαθμό κατά 1, ξεκινώντας και οι 2 από το μηδέν, θα είναι έσω-βαθμός(u)=έξω-βαθμός(u). Αν τώρα η u είναι αρχική-τελική κορυφή του κύκλου ισχύει το επιχείρημα που περιγράψαμε, με την διαφορά ότι όταν ξεκινάει ο κύκλος από την u, θα αυξηθεί ο έξω βαθμός της κατά 1 και όταν κλείσει ο κύκλος στην u και δεν προχωρήσει σε επόμενη κορυφή, θα αυξηθεί ο έσω βαθμός της u κατά 1. Όλες τις υπόλοιπες φορές που ο κύκλος θα περάσει από την u, έχουμε +1 αύξηση του έσω βαθμού και +1 αύξηση του έξω βαθμού. Συνεπώς αν όλες οι κορυφές είναι άρτιου βαθμού, ισχύει ότι ο έσω βαθμός κάθε κορυφής είναι ίσος με τον έξω.
Έστω τώρα ότι το G περιέχει κορυφές περιττού βαθμού. Αυτές αναγκαστικά θα είναι άρτιες στο πλήθος, επομένως μπορούμε να ενώσουμε ανά 2 μεταξύ τους τις κορυφές περιττού βαθμού, σχηματίζοντας ζευγάρια όπου κάθε κορυφή βρίσκεται σε ένα μόνο ζευγάρι. Έτσι, κάθε κορυφή περιττού βαθμού θα ενώνεται με μία άλλη περιττού βαθμού επομένως θα αποκτήσουν και οι 2 άρτιο βαθμό. Καταλήγουμε λοιπόν σε γράφημα όπου όλες οι κορυφές είναι άρτιου βαθμού. Όπως δείξαμε προηγουμένως, σε αυτό το γράφημα μπορούμε να προσανατολίσουμε τις ακμές με τρόπο ώστε για κάθε κορυφή ο έσω βαθμός να είναι ίσως με τον έξω. Αφού προσανατολίσουμε τις ακμές με αυτόν τον τρόπο, διαγράφουμε τις επιπλέον ακμές που προσθέσαμε μεταξύ των κορυφών περιττού βαθμού. Συνεπώς, σε κάθε κορυφή περιττού βαθμού θα μειωθεί είτε ο έσω είτε ο έξω βαθμός κατά 1 ανάλογα με την φορά της ακμής που διαγράφουμε. Άρα, για τις κορυφές περιττού βαθμού στο G ο έσω με τον έξω βαθμό θα διαφέρουν κατά 1 ενώ για αυτές άρτιου βαθμού στο G οι 2 βαθμού θα είναι ίσοι(εννοείται μετά τον προσανατολισμό των κορυφών). Τελικά, αποδείξαμε το ζητούμενο.
(β).
(i). Εφόσον το G-x έχει κύκλο Hamilton και οι u, v συνδέονται τότε ο κύκλος θα κάνει την διαδρομή kuvw όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Βάζοντας και την κορυφή x ο κύκλος θα ακολουθήσει την διαδρομή kuxvw. Συνεπώς και το G έχει κύκλο Hamilton.

(ii). Αν η v δεν συνδέεται με την u, για να έχει το G-x κύκλο Hamilton πρέπει να παρεμβάλλεται τουλάχιστον μία κορυφή y μεταξύ των u, v.



Στο παραπάνω σχήμα, το G-x έχει κύκλο Hamilton, ωστόσο το G δεν έχει. Συνεπώς, αν u, v δεν συνδέονται μεταξύ τους τότε το G δεν έχει απαραίτητα κύκλο Hamilton.

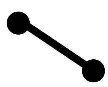
Θέμα 6:

(α). <u>Ευθύ:</u> Υπάρχει δέντρο T με n κορυφές και βαθμούς κορυφών d_1, d_2, …, d_n. Θα δείξουμε χρησιμοποιώντας επαγωγή ότι $d_1+d_2+…+d_n=2(n-1)$.

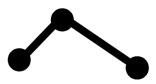
- Για n=2, $d_1=d_2=1$ άρα $d_1+d_2=2(2-1)=2$, ισχύει.
- Έστω ότι για n=k έχουμε πως $d_1+d_2+, …,+d_k=2(k-1)$.
- Για n=k+1, προσθέτουμε μια νέα κορυφή στο δέντρο, την (k+1)-οστή, η οποία αφού είναι φύλλο θα έχει βαθμό 1, δηλαδή $d_{k+1}=1$. Όμως, μία από τις προηγούμενες k κορυφές, έστω αυτή με δείκτη i θα έχει τώρα βαθμό d_i+1 αφού αυτή και μόνο αυτή θα είναι πατέρας της k+1 κορυφής. Άρα, θα είναι $d_1+d_2+…+(d_i+1)+…+d_k+d_{k+1}= 2(k-1)+1+1=2k=2[(k+1)-1]$. Άρα ο τύπος επαληθεύεται και για δέντρο με k+1 κορυφές, οπότε αποδείχτηκε το ζητούμενο.

<u>Αντίστροφο:</u> Αν για θετικούς ακέραιους d_1, d_2, …, d_n ισχύει ότι $d_1+d_2+…+d_n=2(n-1)$, θα δείξουμε χρησιμοποιώντας επαγωγή ότι υπάρχει δέντρο T με n κορυφές και βαθμούς κορυφών d_1, d_2, …, d_n.

- Για n=2 είναι $d_1+d_2=2$ άρα $d_1=d_2=1$. Στο ακόλουθο δέντρο T με 2 κορυφές, έχουν και οι 2 βαθμό 1, άρα ισχύει.



- Για n=3 είναι $d_1+d_2+d_3=2(3-1)=4$. Αφού $d_1+d_2=2$ θα είναι $d_3=2$, και $d_1=d_2=1$. Στο ακόλουθο δέντρο T με 3 κορυφές, οι 2 έχουν βαθμό 1 και η μία βαθμό 2, άρα ισχύει.



- Έστω ότι για n=k κορυφές ισχύει το ζητούμενο. Δηλαδή, αν $d_1+d_2+\ldots+d_k=2(k-1)$, υπάρχει δέντρο T με βαθμούς κορυφών $d_1, d_2, \ldots, d_k$.
- Για n=k+1 είναι $d_1+d_2+\ldots+d_k+d_{k+1}=2k$. Από την επαγωγική υπόθεση υπάρχει δέντρο T με βαθμούς κορυφών $d_1, d_2, \ldots, d_k$. Προσθέτουμε στο δέντρο T μία νέα κορυφή, την (k+1)-οστή η οποία έχει βαθμό 1 αφού είναι φύλο. Όμως, μία από τις προηγούμενες k κορυφές, έστω αυτή με δείκτη i θα έχει τώρα βαθμό d_i+1 αφού αυτή και μόνο αυτή θα είναι πατέρας της k+1 κορυφής. Άρα είναι $d_1+d_2+\ldots+(d_i+1)+\ldots+d_k+d_{k+1}=2k$ άρα $2(k-1)+1+d_{k+1}=2k$ οπότε $d_{k+1}=1$, δηλαδή το d_{k+1} ισούται με τον βαθμός της (k+1)-οστής κορυφής. Συνεπώς υπάρχει δέντρο με βαθμούς κορυφών $d_1, d_2, \ldots, d_k, d_{k+1}$ και αποδείξαμε το ζητούμενο.

(β). <u>Ευθύ:</u> Θεωρούμε απλό, μη κατευθυνόμενο συνεκτικό γράφημα γράφημα G(V, E, w) με θετικά βάρη w στις ακμές και τομή (S, V/S). Η ακμή $e \in E$ είναι η ελάχιστη μεταξύ αυτών που διασχίζουν την τομή. Έστω ΕΣΔ(G) το ΕΣΔ του G. Θα δείξουμε ότι η e είναι απαραίτητη για το ΕΣΔ(G).
Έστω το γράφημα G-e, δηλαδή το G με την αφαίρεση της e. Θεωρούμε την ίδια τομή (S, V/S). Αν δεν υπάρχει ακμή e’ που να διασχίζει την τομή, τότε δεν υπάρχει ΕΣΔ(G-e), δηλαδή μπορούμε να υποθέσουμε ότι το ΕΣΔ(G-e) έχει άπειρο βάρος. Άρα ΕΣΔ(G)<ΕΣΔ(G-e). Έστω ότι υπάρχει ακμή e’ που γεφυρώνει την τομή. Αφού η e είναι η ελάχιστη μεταξύ αυτών των ακμών, θα είναι $w(e)<w(e')$. Συνεπώς, εφόσον τα ΕΣΔ(G) και ΕΣΔ(G-e) διαφέρουν μόνο στην e θα είναι ΕΣΔ(G)<ΕΣΔ(G-e). Τελικά, e απαραίτητη για το ΕΣΔ(G).

<u>Αντίστροφο:</u> Θεωρούμε απλό, μη κατευθυνόμενο συνεκτικό γράφημα G(V, E, w) με θετικά βάρη w στις ακμές και έστω ακμή $e \in E$, η οποία είναι απαραίτητη στο G. Θα δείξουμε ότι υπάρχει τομή (S, V/S) του G τέτοια ώστε η e να είναι η μοναδική ακμή ελάχιστου βάρους που διασχίζει την e.
Έστω ότι δεν υπάρχει τέτοια τομή (S, V/S). Τότε για κάθε τομή (S, V/S) θα υπάρχει ακμή e’ με $w(e')=w(e)$. Το T(G-e) για να διασχίσει κάθε τέτοια τομή θα επιλέγει την ακμή e’ ενώ το T(G) θα επιλέγει την e. Άρα θα είναι T(G)=T(G-e) συνεπώς η e δεν είναι απαραίτητη, άτοπο.

Θέμα 7:

(α). Το γράφημα G έχει n κορυφές, m ακμές και f όψεις. Επίσης, αφού έχει κύκλους μήκους τουλάχιστον k, τότε θα ισχύει kf≤2m (1).

Επίσης, αφού το G είναι συνεκτικό θα είναι n+f=m+2 άρα f=m+2-n (2).

(1), (2) ⇒ k(m+2-n)≤2m ⇒ m(k-2)≤k(n-2) ⇒ m≤ $\frac{k}{k-2}(n-2)$.

(β).

(i). Θεωρούμε ότι το G(V, E) έχει n κορυφές και m ακμές. Εφόσον κάθε κορυφή του G έχει βαθμό 3, θα ισχύει όπως ξέρουμε από τη θεωρία ότι:

$\sum_{uEV} deg(u)=2m \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} 3=2m \Rightarrow 3n=2m$ (1).

Έχουμε επίσης ότι όλες οι όψεις του G έχουν βαθμό 5 ή 6. Έστω x όψεις βαθμού 5 και y βαθμού 6. Γνωρίζουμε ότι το δυικό γράφημα G* του G, έχει μία κορυφή για κάθε όψη του G και κάθε κορυφή του έχει τον βαθμό της αντίστοιχης όψης του G. Το G έχει συνολικά x+y όψεις εκ των οποίων οι x έχουν βαθμό 5 και οι y βαθμό 6, επομένως το G* έχει x κορυφές βαθμού 5 και y κορυφές βαθμού 6. Εφόσον τα G, G* έχουν ίδιο αριθμό ακμών m και με βάση την σχέση $\sum_{uEV} deg(u)=2m$ για το G*, προκύπτει ότι 5x+6y=2m (2).

Επίσης, αν f ο αριθμός των όψεων του G θα είναι f=x+y (3) και εφόσον G συνεκτικό ισχύει επίσης ότι n+f=m+2. Μέσω της (1) είναι 2m/3+f=m+2 ⇒ f=m/3 + 2 (4).

(3), (4) ⇒ m/3 + 2=x+y (5).

Καταλήγουμε στις εξισώσεις: 5x+6y=2m (2)

m/3 + 2=x+y (5)

Λύνουμε την (2) ως προς m και παίρνουμε m=(5x+6y)/2. Αντικαθιστώντας στην (5) και πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με 2 προκύπτει:

5x+6y+12=6x+6y ⇒ x=12. Άρα, οι όψεις βαθμού 5 στο G είναι 12.

(ii). Εφόσον οι κορυφές του G έχουν βαθμό τουλάχιστον 3, η (1) θα γίνει τώρα 3n≤2m. Η (4) θα γίνει τώρα f≥m/3 + 2, οπότε με βάση την (3) έχουμε x+y≥m/3 + 2. Η (2) παραμένει ως έχει, συνεπώς καταλήγουμε στις εξισώσεις:

5x+6y=2m (6)

x+y≥m/3 + 2 (7)

Λύνουμε την (6) ως προς m και παίρνουμε m=(5x+6y)/2. Αντικαθιστώντας στην (7) και πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με 2 προκύπτει:

6x+6y≥5x+6y+12 ⇒ x≥12. Άρα, οι όψεις βαθμού 5 στο G είναι τουλάχιστον 12.

Θέμα 8:

Ισχύει πως στο καρτεσιανό γινόμενο GxK_q περιέχονται αντίγραφα των G, K_q.

Δηλαδή, τα G και K_q "περιέχονται" στο GxK_q, συνεπώς θα ισχύει ότι $\chi(GxK_q)\geq\chi(G)$ και

$\chi(GxK_q) \geq \chi(K_q)$. Άρα προκύπτει ότι $\chi(GxK_q) \geq \max(\chi(G), \chi(K_q))$ και αφού ισχύει ότι $\chi(K_q)=q$ θα είναι τελικά $\chi(GxK_q) \geq \max(\chi(G), q)$. Μένει να δείξουμε ότι $\chi(GxK_q) \leq \max(\chi(G), q)$.