ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

<u>3Η ΓΡΑΠΤΗ ΕΡΓΑΣΙΑ</u>

<u>Ονοματεπώνυμο:</u> Δημήτριος Βασιλείου
<u>ΑΜ:</u> el19830
<u>Εξάμηνο:</u> 4ο
<u>Σχολή:</u> ΗΜΜΥ

Θέμα 1:

1). Έχουμε επιλογή 200 φοιτητών οι οποίοι θα πάρουν το βιβλίο από 1000, χωρίς να παίζει ρόλο η σειρά επιλογής των φοιτητών ενώ κάθε φοιτητής επιλέγεται μία φορά. Άρα έχουμε συνδυασμούς χωρίς επανάληψη και συνεπώς η απάντηση είναι

C(1000, 200)= $\frac{1000!}{800!200!}$.

2). Επιλέγουμε αρχικά τους 200 φοιτητές που θα πάρουν Hunter. Μετά, από τους υπόλοιπους 1000-200=800 οι 250 θα πάρουν Rosen, από τους υπόλοιπους 800-250=550 οι 100 θα πάρουν Liu και από τους υπόλοιπους 550-100=450 οι 50 θα πάρουν Epp. Αντιμετωπίζουμε πρόβλημα συνδυασμών χωρίς επαναλήψεις, συνεπώς έχουμε συνολικά:

C(1000, 200)C(800, 250)C(550, 100)C(450, 50)= $\frac{1000!800!550!450!}{800!200!550!250!450!100!400!50!}$

= $\frac{1000!}{200!250!100!400!50!}$ τρόπους.

3). Ο 1ος φοιτητής επιλέγει βιβλίο με 4 τρόπους, ο 2ος με 4 τρόπους, ο 1000ος με 4 τρόπους αφού έχουμε 4 διαφορετικά βιβλία. Συνεπώς, έχουμε συνολικά 4^{1000} τρόπους.

4). Θα εφαρμόσουμε την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού. Οι τρόποι να διατεθούν τα βιβλία ώστε να μην δοθεί κανένα αντίτυπο ενός συγγραφέα(πχ Hunter) είναι 3^{1000}. Αφού έχουμε 4 συγγραφείς, οι τρόποι να διατεθούν τα βιβλία ώστε να μην δοθεί κανένα αντίτυπο ενός οποιουδήποτε συγγραφέα είναι $4*3^{1000}$. Σε αυτούς τους τρόπους έχουμε συμπεριλάβει το ενδεχόμενο να μην δοθούν αντίτυπα βιβλίων από 2 συγγραφείς. Οι τρόποι αυτοί είναι C(4, 2)*2^{1000}=6*2^{1000} τρόποι. Επίσης, έχουμε συμπεριλάβει το ενδεχόμενο να μην δοθούν αντίτυπα βιβλίων από 3 συγγραφείς. Οι τρόποι αυτοί είναι C(4, 3)*1^{1000} = 4 τρόποι. Συνολικά θα έχουμε
4^{1000} - (4*3^{1000} - 6*2^{1000} – 4) τρόπους.

5). Οι τρόποι να μοιράσουμε όλα τα βιβλία στα 4 σημεία είναι C(1000+4-1, 1000)=

C(1003, 1000)= $\frac{1003!}{1000!6}$ (διανομή 1000 ίδιων αντικειμένων σε 4 διακεκριμένες υποδοχές).

→ Θα βρούμε τώρα τους τρόπους να μοιράσουμε τα βιβλία έτσι ώστε σε ένα σημείο να έχουμε πάνω από 350 βιβλία. Αρχικά, με 4 τρόπους είναι δυνατό να έχουμε 351 βιβλία σε ένα σημείο. Μένει να μοιράσουμε τα υπόλοιπα 1000-351=649 στα 4 σημεία. Αυτό γίνεται με C(649+4-1, 649)= $\frac{652!}{649!6}$ τρόπους.

Συνεπώς, έχουμε συνολικά 4* $\frac{652!}{649!6}$ τρόπους να μοιράσουμε τα βιβλία έτσι ώστε ένα σημείο να έχει περισσότερα από 350 βιβλία.

→ Θα βρούμε τώρα τους τρόπους να μοιράσουμε τα βιβλία έτσι ώστε σε 2 σημεία να έχουμε πάνω από 350 βιβλία. Έχουμε C(4, 2)=6 τρόπους ώστε να έχουμε 351 βιβλία σε 2 σημεία. Μένει να μοιράσουμε τα υπόλοιπα 1000-2*351=298 βιβλία στα 4 σημεία. Αυτό γίνεται με C(298+4-1, 298)= $\frac{301!}{298!6}$. Συνεπώς, έχουμε συνολικά 6* $\frac{301!}{298!6}$ τρόπους να μοιράσουμε τα βιβλία έτσι ώστε δύο σημεία να έχουν περισσότερα από 350 βιβλία.

→ Από την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού οι τρόποι να μοιράσουμε τα βιβλία έτσι ώστε σε κανένα σημείο να μην έχουμε περισσότερα από 350 βιβλία είναι $\frac{1003!}{1000!6}$ -4* $\frac{652!}{649!6}$ + 6* $\frac{301!}{298!6}$.

6). Το πρόβλημα αποτελεί διατάξεις k διακεκριμένων αντικειμένων(1000 φοιτητές) σε n διακεκριμένες υποδοχές(4 σημεία διανομής) όπου παίζει ρόλο η σειρά στις υποδοχές. Συνεπώς οι συνολικοί τρόποι είναι:

$$\frac{(4+1000-1)!}{3!}=\frac{1003!}{3!} \quad .$$

7). Οι τρόποι να σταθούν οι 1000 φοιτητές στις 4 ουρές είναι $\frac{1003!}{3!}$ όπως υπολογίσαμε στο προηγούμενο ερώτημα.

→ Θα βρούμε τώρα τους τρόπους να διατάξουμε τους φοιτητές στα σημεία διανομής ώστε σε κάποιο σημείο να έχουμε πάνω από 350 φοιτητές(οπότε δεν θα πάρουν όλοι οι φοιτητές βιβλίο). Για κάποιο βιβλίο(πχ Hunter) βάζουμε στην ουρά 351 φοιτητές οι οποίοι επιλέγονται και διατάσσονται με P(1000, 351) τρόπους. Μένει να μοιράσουμε τους υπόλοιπους 1000-351=649 φοιτητές στα σημεία με την σειρά στα σημεία(υποδοχές) να παίζει ρόλο. Αυτό γίνεται με $\frac{(649+4-1)!}{(4-1)!}=\frac{652!}{3!}$ τρόπους. Εφόσον έχουμε 4 διαφορετικά βιβλία οι τρόποι να διατάξουμε τους φοιτητές στα σημεία ώστε σε κάποιο σημείο να έχουμε πάνω από 350 φοιτητές είναι 4* $\frac{652!}{3!}$ *P(1000, 351).

→ Θα βρούμε τώρα τους τρόπους να διατάξουμε τους φοιτητές στα σημεία διανομής ώστε σε 2 σημεία να έχουμε πάνω από 350 φοιτητές(οπότε σε αυτά τα σημεία δεν θα πάρουν όλοι οι φοιτητές βιβλίο). Οι τρόποι να επιλέξουμε τα 2 σημεία είναι C(4, 2)=6. Για το πρώτο βάζουμε στην ουρά 351 φοιτητές οι οποίοι επιλέγονται και διατάσσονται με P(1000, 351) τρόπους. Για το δεύτερο βιβλίο βάζουμε στην ουρά 351 φοιτητές οι οποίοι επιλέγονται και διατάσσονται με P(649, 351) τρόπους. Μένει να μοιράσουμε τους υπόλοιπους 649-351=298 φοιτητές στα σημεία με την σειρά στα σημεία(υποδοχές) να παίζει ρόλο. Αυτό γίνεται με $\frac{(298+4-1)!}{(4-1)!}=\frac{301!}{3!}$ τρόπους. Συνεπώς, οι τρόποι να διατάξουμε τους φοιτητές στα σημεία διανομής ώστε σε 2 σημεία να έχουμε πάνω από 350 φοιτητές είναι 6* $\frac{353!}{3!}$ *P(1000, 351)*P(649, 351).

→ Από την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού έχουμε συνολικά $\frac{1003!}{3!}$ - 4* $\frac{652!}{3!}$ *P(1000, 351) + 6* $\frac{301!}{3!}$ *P(1000, 351)*P(649, 351) τρόπους να διατάξουμε τους φοιτητές στα σημεία αναμονής.

Θέμα 2:

1). Μας ενδιαφέρει μόνο πόσα θέματα κάθε τύπου θα έχουμε σε κάθε αμφιθέατρο, συνεπώς αρκεί να βρούμε τους τρόπους με τους οποίους μπορούμε να μοιράσουμε τα θέματα του ενός τύπου στα 4 αμφιθέατρα. Τα υπόλοιπα θέματα, δηλαδή αυτά του άλλου τύπου, θα μοιραστούν με μοναδικό τρόπο στους υπόλοιπους φοιτητές. Παρατηρούμε ότι τα αμφιθέατρα 2, 3 έχουν από 35 φοιτητές το καθένα, όσα είναι και τα θέματα τύπου Β. Συνεπώς, μοιράζοντας τα θέματα τύπου Β στα αμφιθέατρα, στην χειρότερη περίπτωση θα "πέσουν" και τα 35 θέματα Β στο αμφιθέατρο 2 ή 3 οπότε τα 155 θέματα Α φτάνουν για να μοιραστούν στους υπόλοιπους φοιτητές. Αν όμως μοιράζαμε τα θέματα Α τότε στην χειρότερη περίπτωση θα "έπεφταν" 155 θέματα Α σε κάποιο αμφιθέατρο οπότε τα 35 θέματα Β που απομένουν δεν θα έφταναν για να μοιραστούν στους υπόλοιπους φοιτητές. Συνεπώς, θα μοιράσουμε τα θέματα τύπου Β. Το πρόβλημα υπάγεται στην κατηγορία συνδυασμών με επανάληψη, συνεπώς έχουμε συνολικά C(35+4-1, 35)= $\frac{38!}{3!35!}$ τρόπους.

2). Αρκεί να επιλέξουμε τους φοιτητές οι οποίοι θα πάρουν θέματα τύπου Α. Οι υπόλοιποι θα πάρουν τα θέματα τύπου Β. Αυτό γίνεται με C(190, 155)= $\frac{190!}{155!35!}$.

3). Το συμπληρωματικό του ενδεχομένου να μοιράσουμε τα θέματα Β στα αμφιθέατρα ώστε σε τουλάχιστον ένα από τα αμφιθέατρα 2, 3 να μην έχουμε θέματα Β είναι το εξής: Να μοιράσουμε τα θέματα Β στα αμφιθέατρα ώστε στα αμφιθέατρα 2, 3 να έχουμε τουλάχιστον ένα θέμα Β στο καθένα.
Οι συνολικοί τρόποι να μοιραστούν τα θέματα Β στα 4 αμφιθέατρα είναι πρόβλημα συνδυασμών με επανάληψη, συνεπώς είναι ίσοι με

C(35+4-1, 35)= $\frac{(35+3)!}{3!35!}=\frac{38!}{6*35!}=8436$.

Για να έχουμε τουλάχιστον ένα θέμα Β σε καθένα από τα αμφιθέατρα 2, 3 βάζουμε με μοναδικό τρόπο(αφού τα θέματα είναι ίδια) ένα θέμα Β στο αμφιθέατρο 2 και ένα στο 3. Απομένουν 33 βιβλία τα οποία πρέπει να μοιραστούν. Αυτά θα μοιραστούν όπως προηγουμένως καθώς πρόκειται για πρόβλημα συνδυασμών με επαναλήψεις. Άρα, μοιράζονται με C(33+4-1, 33)= $\frac{(33+3)!}{3!33!}=\frac{36!}{6*33!}=7140.$

Η πιθανότητα μοιράσουμε τα θέματα Β στα αμφιθέατρα ώστε στα αμφιθέατρα 2, 3 να έχουμε τουλάχιστον ένα θέμα Β στο καθένα, ισούται με 7140/8436≈0.846. Συνεπώς, η πιθανότητα να μοιράσουμε τα θέματα Β στα αμφιθέατρα ώστε σε τουλάχιστον ένα από τα αμφιθέατρα 2, 3 να μην έχουμε θέματα Β είναι, αφού τα 2 ενδεχόμενα είναι συμπληρωματικά, 1-0.846≈0.154.

4). Αρκεί να μετρήσουμε τους τρόπους με τους οποίους μπορούμε να μοιράσουμε τα θέματα τύπου Α στους φοιτητές(υπό τους περιορισμούς που έχουμε), καθώς όλοι οι υπόλοιποι φοιτητές θα πάρουν θέματα τύπου Β.

→ Για το αμφιθέατρο 1 θέλουμε να μοιράσουμε τουλάχιστον 15 θέματα τύπου Α σε 80 φοιτητές, συνεπώς κάθε φορά πρέπει να επιλέγουμε φοιτητές ίσους με τον αριθμό των θεμάτων που θα μοιράσουμε, από τους 80 φοιτητές. Το ακόλουθο άθροισμα περιγράφει τον τρόπο αυτό:

C(80, 15)x^{15}+C(80, 16)x^{16}+...+C(80, 80)x^{80} = C(80, 15)x^{15}+C(80, 16)x^{16}+...+x^{80}.

→ Για τα αμφιθέατρα 2,3 και 4 θέλουμε τουλάχιστον 10 θέματα και άρτιο πλήθος θεμάτων. Πάλι πρέπει να επιλέξουμε τους φοιτητές από τους συνολικούς κάθε αμφιθεάτρου, στους οποίους θα μοιράσουμε τα θέματα. Συνεπώς έχουμε τα ακόλουθα αθροίσματα:

αμφ2: C(35, 10)x^{10}+C(35, 12)x^{12}+...+C(35, 34)x^{34}

αμφ3: C(35, 10)x^{10}+C(35, 12)x^{12}+...+C(35, 34)x^{34}

αμφ4: C(40, 10)x^{10}+C(40, 12)x^{12}+...+x^{40}

→ Από τον κανόνα γινομένου, η γεννήτρια συνάρτηση είναι η ακόλουθη: {C(80, 15)x^{15}+C(80, 16)x^{16}+...+x^{80}}{C(35, 10)x^{10}+C(35, 12)x^{12}+...+C(35, 34)x^{34}}^{2}{C(40, 10)x^{10}+C(40, 12)x^{12}+...+x^{40}}. Ο όρος του οποίου ο συντελεστής δίνει τους διαφορετικούς τρόπους να μοιράσουμε τα θέματα(σύμφωνα με τους περιορισμούς που έχουμε) είναι ο x^{155} αφού έχουμε συνολικά 155 θέματα τύπου Α.

Θέμα 3:

1). Αρχικά σκεφτόμαστε ότι πρέπει να βρούμε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $z_1+z_2+z_3+...+z_k=100$, όπου κάθε z_i αντιστοιχεί στον αριθμό των φοιτητών της i-οστής αίθουσας. Όμως, εφόσον μας ενδιαφέρουν μόνο οι διαφορετικές κατανομές των φοιτητών, με αυτόν τον τρόπο θα μετρήσουμε τις ίδιες κατανομές πολλές φορές. Συνεπώς, μετασχηματίζουμε την εξίσωση, δίνοντας διαφορετική “αξία” σε κάθε z_i, ως εξής:

$z_1+2z_2+3z_3+...+100z_k=100$.

Η γεννήτρια συνάρτηση για την παραπάνω εξίσωση είναι η ακόλουθη: $(1+x+x^2+...x^{100})(1+x^2+x^4+...+x^{200})...(1+x^{100}+...+x^{10000})$. Οι τρόποι κατανομής των φοιτητών στις αίθουσες ισούνται με τον συντελεστή του x^{100}.

2). Θέλουμε οι αίθουσες που δεν είναι κενές να έχουν διαφορετικό αριθμό φοιτητών. Θεωρούμε μια τυχαία αίθουσα. Αυτή μπορεί να μην περιέχει κανένα φοιτητή, ωστόσο αν δεν είναι κενή πρέπει ο αριθμός φοιτητών που περιέχει να είναι διαφορετικός από αυτόν κάθε άλλης αίθουσας. Το ίδιο ισχύει για κάθε αίθουσα. Για παράδειγμα, η αίθουσα 1 μπορεί να έχει κανέναν φοιτητή ή μόνο έναν, η αίθουσα 2 μπορεί να έχει κανέναν φοιτητή ή μόνο 2,…, η 100η αίθουσα μπορεί να έχει κανέναν φοιτητή ή μόνο 100. Με αυτό το σκεπτικό έχουμε την ακόλουθη γεννήτρια συνάρτηση:
$(1+x)(1+x^2)...(1+x^{100})$. Λύση του προβλήματος δίνει ο συντελεστής του x^{100}.

Θέμα 4:
α).
1). Έχουμε πρόβλημα διατάξεων με επανάληψη(διανομή 500 διαφορετικών βιβλίων σε 8 διαφορετικά Ελληνικά Πανεπιστήμια), χωρίς να παίζει ρόλο η σειρά στις υποδοχές. Συνεπώς, χρειαζόμαστε εκθετική γεννήτρια συνάρτηση, αφού πρόκειται για πρόβλημα διατάξεων. Συνεπώς, με βάση τους περιορισμούς που έχουμε, η γεννήτρια συνάρτηση είναι η ακόλουθη:
$(x^{20}/20! + x^{21}/21! + … + x^{100}/100!)^8$.
Εφόσον έχουμε 500 βιβλία, λύση του προβλήματος είναι ο συντελεστής του $x^{500}/500!$
2). Εδώ έχει σημασία η σειρά με την οποία φτάνουν τα βιβλία στην βιβλιοθήκη. Κάθε σύνολο βιβλίων που φτάνει σε μία βιβλιοθήκη(έστω k βιβλία) μπορεί να διαταχθεί σε αυτή με k! τρόπους. Αυτό, ισχύει για κάθε βιβλιοθήκη. Συνεπώς, η γεννήτρια συνάρτηση είναι η ακόλουθη:
$(20!*x^{20}/20! + 21!*x^{21}/21! + … + 100!*x^{100}/100!)^8$.
Εφόσον έχουμε 500 βιβλία, λύση του προβλήματος είναι ο συντελεστής του $x^{500}/500!$

Θέμα 5:
Έστω $α_n$ το πλήθος των ζητούμενων συμβολοσειρών. Θα εξετάσουμε δύο περιπτώσεις, ανάλογα με τον τελευταίο(n-οστό) χαρακτήρα αυτών των συμβολοσειρών.
1. Αν ο n-οστός χαρακτήρας είναι a ή b, τότε στις προηγούμενες n-1 θέσεις δεν μπορούν να τοποθετηθούν οι χαρακτήρες c, d παρά μόνο οι a, b, e, f. Αυτό γίνεται με $2*4^{n-1}$ τρόπους, συνεπώς έχουμε και τόσες συμβολοσειρές σε αυτήν την περίπτωση.
2.Αν ο n-οστός χαρακτήρας είναι ένας εκ των c, d, e, f τότε δεν έχουμε κάποιον περιορισμό, συνεπώς η συμβολοσειρά μήκους n προκύπτει από αυτή μήκους n-1

βάζοντας απλώς στην τελευταία θέση c, d, e ή f. Αυτό γίνεται με $4\alpha_{n-1}$ τρόπους, συνεπώς έχουμε και τόσες συμβολοσειρές σε αυτήν την περίπτωση.

Τελικά το πλήθος των ζητούμενων συμβολοσειρών είναι
$\alpha_n = 4\alpha_{n-1} + 2*4^{n-1}$.
Θα λύσουμε τώρα αυτήν την αναδρομική σχέση με την μέθοδο των γεννητριών συναρτήσεων. Θεωρούμε ως A(x) την γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας α_n.
Προφανώς είναι $\alpha_0=1$, οπότε για $n\geq 1$ έχουμε:

$$\sum_{n=1}^{oo} a_n = \sum_{n=1}^{oo} 4a_{n-1} + 2\sum_{n=1}^{oo} 4^{n-1} \Rightarrow A(x) - \alpha_0 = 4xA(x) + \frac{2x}{1-4x} \Rightarrow$$

$$(1-4x)A(x) = 1 + \frac{2x}{1-4x} \Rightarrow (1-4x)A(x) = \frac{1-2x}{(1-4x)} \Rightarrow A(x) = \frac{1-2x}{(1-4x)^2} =$$

$$\frac{1}{2(1-4x)} + \frac{1}{2(1-4x)^2} \Rightarrow \alpha_n = \frac{1}{2}4^n + \frac{1}{2}(n+1)4^n \Rightarrow \alpha_n = \frac{1}{2}4^n(n+2) .$$