ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

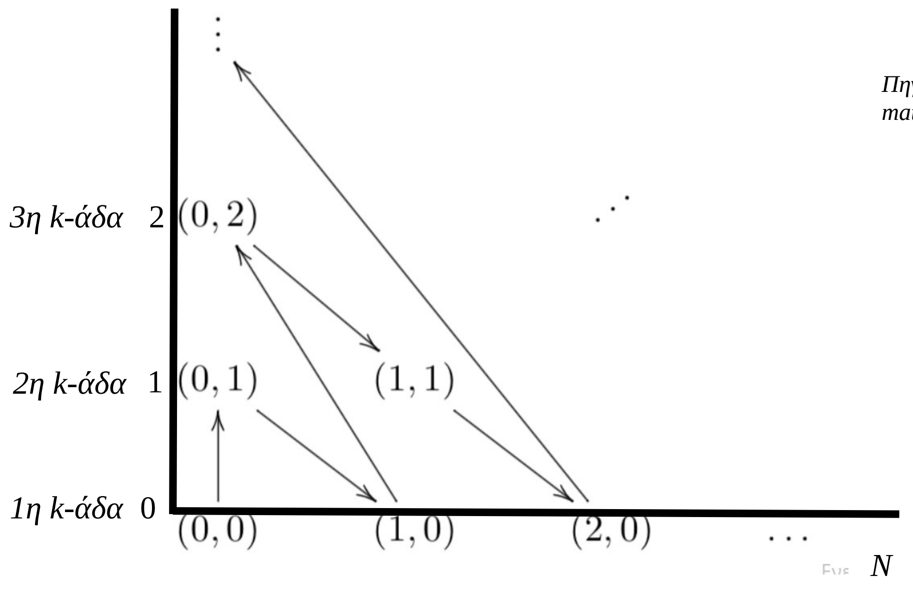
<u>1Η ΓΡΑΠΤΗ ΕΡΓΑΣΙΑ</u>

<u>Ονοματεπώνυμο:</u> Δημήτριος Βασιλείου
<u>Α.Μ:</u> el19830
<u>Εξάμηνο:</u> 4ο
<u>Σχολή:</u> ΗΜΜΥ

Θέμα 1:

(α). Θεωρούμε το σύνολο P_d, το οποίο περιλαμβάνει όλες τις πολυωνυμικές συναρτήσεις τυχαίου βαθμού d. Αρχικά, θα δείξουμε ότι το σύνολο P_d είναι μετρήσιμο. Δεδομένου ότι κάθε πολυώνυμο βαθμού d μπορεί να χαρακτηρισθεί από μία διαταγμένη (d+1)-άδα $\{a_d, a_{d-1}, \ldots, a_0\}$ φυσικών, τότε το πλήθος των πολυωνύμων βαθμού d θα ισούται με N^{d+1}=NxNx...xN, d+1 φορές (π.χ. η 3-άδα (3, 4, 2) χαρακτηρίζει μοναδικά το πολυώνυμο 2ου βαθμού $3x^2+4x+2$, ενώ το NxNxN, περιέχει όλα τα πολυώνυμα 2ου βαθμού).
Αρκεί δηλαδή να δείξουμε ότι το N^n είναι μετρήσιμο. Θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής.

- Για n=1, ισχύει προφανώς αφού N μετρήσιμο.
- Έστω ότι για n=k, N^k μετρήσιμο.
- Για n=k+1: Ισχύει ότι $N^{k+1}=N^k$xN, δηλαδή τα στοιχεία του N^{k+1}, τα οποία αποτελούν διατεταγμένες (k+1)-άδες, προκύπτουν αν σε κάθε k-άδα προσθέσουμε σε κάποια συγκεκριμένη θέση (εδώ θεωρούμε στην αρχή, αφού οι k+1 θέσεις δηλώνουν βαθμό πολυωνύμου k-οστού βαθμού, οπότε ο συντελεστής a_k πρέπει να προηγείται του a_{k-1}) κάθε φυσικό αριθμό. Από επαγωγική υπόθεση έχουμε ότι N^k μετρήσιμο, οπότε υπάρχει 1-1 αντιστοίχιση κάθε στοιχείου του N^k στο N. Επομένως, θεωρώντας στον κάθετο άξονα του ακόλουθου διαγράμματος τα στοιχεία του N^k αντιπροσωπευμένα από τον μοναδικό φυσικό στον οποίο αντιστοιχεί το καθένα, και στον οριζόντιο αυτά του N, "μετράμε" τα στοιχεία του N^{k+1} με τον τρόπο που περιγράφεται στο παρακάτω σχήμα:



Πηγή εικόνας: math.stackexchange.com

Πχ το στοιχείο (1, 2) αντιστοιχεί στην (k+1)-άδα που σχηματίζεται αν στην 2η k-άδα (όποια κι αν είναι αυτή, ανάλογα με την αρίθμηση που έχουμε υποθέσει ότι υπάρχει) προσθέσουμε στην αρχή το 2. Σχηματικά: $2, \underbrace{a_{k-1}, a_{k-2}, \ldots a_0}_{k}$, $\underbrace{2, a_{k-1}, a_{k-2}, \ldots a_0}_{k+1}$

Με αυτό τον τρόπο "καλύπτουμε" όλες τις (k+1)-άδες φυσικών.

Τελικά P_d είναι μετρήσιμο. Μένει να δείξουμε ότι το $P=U_{d\in N}P_d$ είναι μετρήσιμο. Πράγματι, εφόσον για κάθε d στο N το σύνολο P_d είναι μετρήσιμο, τότε και η ένωση τους είναι επίσης μετρήσιμο σύνολο, καθώς γνωρίζουμε ότι η ένωση άπειρων μετρήσιμων συνόλων είναι επίσης μετρήσιμο σύνολο.

Αρχικά, θα δείξουμε ότι το σύνολο S των συναρτήσεων f:N→N είναι μη μετρήσιμο. Έστω ότι το σύνολο είναι μετρήσιμο. Τότε υπάρχει αρίθμηση όλων των συναρτήσεων, έστω $\{f_1, f_2, \ldots, f_m, \ldots\}$. Ορίζουμε την συνάρτηση g:N→N ως $g(n)=1+f_n(n)$ η οποία ανήκει στο σύνολο των συναρτήσεων, συνεπώς πρέπει να εμφανίζεται στην αρίθμηση. Είναι:

- $g\neq f_1$, γιατί $g(1)=1+ f_1(1)\neq f_1(1)$.
- Επίσης για κάθε $m\in N$ είναι $g(m)=1+f_m(m)\neq f_m(m)$, άρα $g\neq f_m$ για κάθε m.
  Καταλήγουμε σε άτοπο, διότι η g δεν εμφανίζεται στην αρίθμηση.

Θεωρούμε ως K το σύνολο των συναρτήσεων f:N→ N που δεν είναι πολυωνυμικές. Προφανώς, ισχύει S=KUP. Έστω ότι K μετρήσιμο. Τότε, αφού S=KUP και K, P μετρήσιμα, θα είναι και S μετρήσιμο, διότι η ένωση μετρήσιμων συνόλων είναι επίσης μετρήσιμη. Καταλήγουμε σε άτοπο, διότι όπως δείξαμε προηγουμένως, το σύνολο S δεν είναι μετρήσιμο, συνεπώς K μη μετρήσιμο.

(β). Αρχικά, θα δείξουμε ότι τα προβλήματα απόφασης είναι μη αριθμήσιμα άπειρα. Έστω ότι τα προβλήματα απόφασης είναι αριθμήσιμα. Τότε αυτά μπορούν να απαριθμηθούν ως $\{\Pi_o, \Pi_1, \Pi_2, \ldots\}$. Εφόσον, κάθε πρόβλημα απόφασης στους φυσικούς περιγράφεται από το σύνολο των φυσικών τους οποίους αν δώσουμε ως είσοδο η απάντηση είναι "ναι", μπορούμε να ορίσουμε το πρόβλημα D, ως
$D=\{k\in N: k \notin \Pi_k)$. Παρατηρούμε ότι:

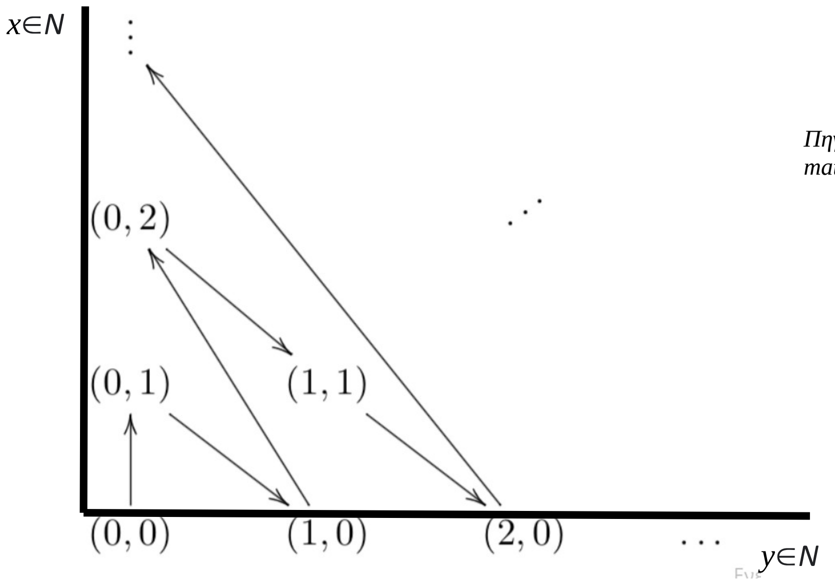
- Το D διαφέρει από το Π_o, γιατί το 0 ανήκει μόνο σε ένα εκ των D, Π_o.
- Το D διαφέρει από το Π_m για κάθε $m\in N$, γιατί το m ανήκει μόνο σε ένα εκ των D, Π_m.

Καταλήγουμε σε άτοπο, διότι το D δεν υπάρχει στην αρίθμηση των προβλημάτων, συνεπώς τα προβλήματα απόφασης είναι μη αριθμήσιμα άπειρα.

Τα προβλήματα απόφασης τα οποία έχουν λύση μπορούν να αναπαρασταθούν ως προγράμματα σε C++. Συνεπώς, κάθε τέτοιο πρόγραμμα αντιστοιχεί σε ένα πρόβλημα. Όμως, τα προγράμματα σε C++, καθώς είναι πεπερασμένες ακολουθίες συμβολοσειρών, είναι αριθμήσιμα. Άρα, τα προβλήματα απόφασης που έχουν λύση είναι αριθμήσιμα.

Θεωρούμε ως P το σύνολο των υπολογιστικών προβλημάτων, S το σύνολο αυτών που έχουν λύση και N το σύνολο αυτών που δεν έχει λύση. Προφανώς είναι P=SUN. Έστω ότι N είναι αριθμήσιμο. Τότε αφού P=SUN και S, N αριθμήσιμα θα είναι και P αριθμήσιμο. Καταλήγουμε σε άτοπο, συνεπώς το σύνολο N των υπολογιστικών προβλημάτων που δεν έχει λύση είναι μη αριθμήσιμο.

(γ). Εφόσον το υποβρύχιο κινείται με ταχύτητα y μέτρα ανά λεπτό και ξεκινάει από θέση x, τότε αν γνωρίζουμε τα x και y, η θέση που πρέπει να στοχεύσουμε είναι z=x+y, γιατί ένα λεπτό μετά από την εκκίνησή του από τη θέση x, θα βρεθεί στην θέση x+y, στην οποία έχουμε ρίξει την τορπίλη. Ξεκινάμε ρίχνοντας μία τορπίλη σε κάποια θέση z=x+y, μετά από ένα λεπτό άλλη τορπίλη σε διαφορετική θέση κ.ο.κ. με τέτοιο τρόπο ώστε να ρίξουμε μία τορπίλη σε κάθε θέση z=x+y για κάθε x, y. Πρέπει να δείξουμε ότι μόλις "φτάσουμε" σε κάποιο ζεύγος (x, y) το οποίο αντιστοιχεί στην πιθανή αρχική θέση και ταχύτητα του υποβρυχίου έχουμε ρίξει πεπερασμένο αριθμό τορπιλών και έχουμε βυθίσει το υποβρύχιο. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι το σύνολο NxN, το οποίο αντιστοιχεί σε όλα τα ζεύγη (x, y) είναι μετρήσιμο. Η σειρά στην οποία θα μετρηθεί το ζεύγος (x, y) ισούται με τον αριθμό τορπιλών που χρειάζονται για να βυθιστεί το υποβρύχιο, έχοντας ξεκινήσει από θέση x με ταχύτητα y. Θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο αρίθμησης φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, όπου
αριθμός τορπιλών=f(x, y)=(1/2)[$(x+y)^2$+3x+y] + 1



Πηγή εικόνας: math.stackexchange.com

Για παράδειγμα, το στοιχείο (0, 2) δηλώνει πως αν το υποβρύχιο έχει ξεκινήσει από την θέση 0 με ταχύτητα 2, θα χρειαστούμε για να το βυθίσουμε αριθμό τορπιλών ίσο με την σειρά αρίθμησης του (0, 2), δηλαδή τορπίλες=f(0, 2)=4. Με αυτό τον τρόπο, για οποιονδήποτε συνδυασμό, αρχικής θέσης-ταχύτητας, δηλαδή για οποιοδήποτε ζεύγος (x, y)∈NxN, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε πεπερασμένο αριθμό τορπιλών για να βυθιστεί το υποβρύχιο, δηλαδή πεπερασμένο βήμα αρίθμησης.

Θέμα 2:

(α).

(i). Ορίζουμε τύπους p, q ώστε p=A είναι ιππότης, q=B είναι ιππότης.

Δήλωση A: $(p\wedge q)$

Δήλωση B: $(\neg p)$

Επειδή οι A, B λένε την αλήθεια ανν είναι ιππότες, πρέπει να ισχύει η πρόταση $\phi=((p\wedge q)\leftrightarrow p)\wedge(\neg p\leftrightarrow q)$.

Κατασκευάζουμε τον ακόλουθο πίνακα αληθείας:

p	*q*	$((p\wedge q)\leftrightarrow p)\wedge(\neg p\leftrightarrow q)$
Ψ	Ψ	Ψ
Ψ	**A**	**A**
A	Ψ	Ψ
A	A	Ψ

Βλέπουμε ότι στην γραμμή που αληθεύει η πρόταση φ, ότι τελικά ο A είναι απατεώνας και ο B ιππότης.

(ii). Ορίζουμε τύπους c, d ώστε c=C είναι ιππότης, d=D είναι ιππότης.

Δήλωση C: $(\neg c\wedge\neg d)$

Επειδή ο C λέει την αλήθεια ανν είναι ιππότης πρέπει να ισχύει η πρόταση $\phi=(\neg c\wedge\neg d)\leftrightarrow c$. Κατασκευάζουμε πίνακα αληθείας:

c	*d*	$(\neg c\wedge\neg d)\leftrightarrow c$
Ψ	Ψ	Ψ
Ψ	**A**	**A**
A	Ψ	Ψ
A	A	Ψ

Τελικά, c απατεώνας και d ιππότης.

(iii). Ορίζουμε τύπους e, f ώστε e=E είναι ιππότης, f=F είναι ιππότης.

Δήλωση E: $\neg f$

Δήλωση F: $\neg e$

Επειδή οι E, F λένε την αλήθεια ανν είναι ιππότες, πρέπει να ισχύει η πρόταση $\phi=(\neg f\leftrightarrow e)\wedge(\neg e\leftrightarrow f)$. Κατασκευάζουμε πίνακα αληθείας:

e	*f*	$(\neg f\leftrightarrow e)\wedge(\neg e\leftrightarrow f)$
Ψ	Ψ	Ψ
Ψ	**A**	**A**

Α	**Ψ**	**Α**
Α	Α	Ψ

Επειδή η φ πρέπει να είναι αληθής, συμπεραίνουμε πως μόνο ένας εκ των e, f είναι απατεώνας.

(iv). Ορίζουμε τύπους g, h ώστε g=G είναι ιππότης, h=H είναι ιππότης.
→ Έστω ότι ο G απαντάει "ναι". Τότε δηλώνει ότι $g \vee h$. Επειδή όμως ο g λέει την αλήθεια ανν είναι ιππότης πρέπει να ισχύει η πρόταση $\varphi = (g \vee h) \leftrightarrow g$.
Κατασκευάζουμε πίνακα αληθείας:

g	*h*	*(g∨h)↔g*
Ψ	**Ψ**	**Α**
Ψ	Α	Ψ
Α	**Ψ**	**Α**
Α	**Α**	**Α**

Βλέπουμε πως όταν αληθεύει η φ δεν μπορούμε να αποφανθούμε για το τι είναι ο καθένας εκ των g, h.

→ Έστω ότι ο G απαντάει "όχι". Τότε δηλώνει ότι $\neg(g \vee h)$. Επειδή όμως ο g λέει την αλήθεια ανν είναι ιππότης πρέπει να ισχύει η πρόταση $\varphi = \neg(g \vee h) \leftrightarrow g$. Ο πίνακας αληθείας θα είναι συμπληρωματικός με τον από πάνω στην στήλη του τύπου φ, οπότε ο φ αληθεύει όταν g=Ψ και h=Α. Συνεπώς ο g είναι απατεώνας και ο h ιππότης και αφού μπορούμε να αποφανθούμε με σιγουριά για τους g, h τότε ο G όντως απάντησε "όχι".

(β).

- Για n=0 είναι $\sigma_o = \varphi \to \varphi$ που είναι αληθής άρα και ικανοποιήσιμος.
- Για οποιοδήποτε n είναι $\sigma_n = \sigma_{n-1} \to \varphi$. Αν φ αληθής τότε και σ_n αληθής ανεξάρτητα από την τιμή του σ_{n-1}.
  Συνεπώς ο σ_n είναι ικανοποιήσιμος για κάθε $n \geq 0$.

Βρήκαμε ότι σ_n αληθεύει για κάθε $n \geq 0$ αν φ αληθής. Υποθέτουμε τώρα ότι φ ψευδής. Θα δείξουμε ότι για άρτια n ο σ_n είναι ταυτολογία, με επαγωγή.

- Για n=0 είναι $\sigma_o = \varphi \to \varphi$ που είναι αληθής.
- Έστω ότι για n=2k, σ_{2k} αληθής.
- Για n=k+1 είναι $\sigma_{2k+2} = \sigma_{2k+1} \to \varphi = (\sigma_{2k} \to \varphi) \to \varphi$.
  -Για φ=Α, έχουμε δείξει ότι για κάθε n, σ_n αληθής άρα και σ_{2k+2} είναι αληθής.
  -Για φ=Ψ, προκύπτει ότι $\sigma_{2k} \to \varphi$ ψευδής(αφού λόγω επαγωγικής υπόθεσης σ_{2k} αληθής), οπότε σ_{2k+2} αληθής.

Τελικά για άρτια n ο τύπος είναι ταυτολογία. Θα δείξουμε τώρα ότι είναι ταυτολογία μόνο για τα άρτια n, δηλαδή ότι για περιττά n δεν είναι ταυτολογία. Πράγματι, έστω τυχαίο περιττό n=2k+1 με $\sigma_{2k+1}=\sigma_{2k}\rightarrow\varphi$. Ισχύει ότι σ_{2k} αληθής οπότε για φ ψευδής προκύπτει σ_{2k+1} ψευδής.

Έστω τυχαίο περιττό n=2k-1. Αφού σ_{2k-1} ικανοποιήσιμος και σ_{2k} ταυτολογία(βλ. παραπάνω) θα ισχύει ότι $\sigma_{2k-1} \models \sigma_{2k}$, διότι όλες οι αποτιμήσεις που ικανοποιούν τον σ_{2k-1} ικανοποιούν και τον σ_{2k}. Συνεπώς, για περιττά n αληθεύει ότι $\sigma_n \models \sigma_{n+1}$.

(γ).

(i). Η 100στή πρόταση λέει ότι οι 100 προτάσεις στη λίστα είναι ψευδείς, που σημαίνει ότι αν είναι αληθής, είναι και η ίδια είναι ψευδής, άτοπο. Συνεπώς, η 100στή πρόταση είναι ψευδής άρα δεν είναι και οι εκατό προτάσεις ψευδείς, δηλαδή υπάρχει τουλάχιστον μία αληθής πρόταση στις υπόλοιπες 99. Βλέπουμε όμως πως επειδή κάθε πρόταση αναιρεί κάθε άλλη, μόνο μία μπορεί να είναι αληθής και οι υπόλοιπες ψευδείς. Τελικά, η πρόταση 99 είναι αληθής και όλες οι υπόλοιπες ψευδείς.

(ii). Η 100στή πρόταση λέει ότι τουλάχιστον 100 από τις προτάσεις στη λίστα είναι ψευδείς. Αφού οι προτάσεις είναι 100, βρίσκουμε όπως στο (i) ότι η 100στή είναι ψευδής. Τότε όμως, αληθεύει η 1η, καθώς υπάρχει μία ψευδής πρόταση, η 100. Εξετάζουμε την πρόταση 99. Αν αυτή είναι αληθής σημαίνει ότι υπάρχουν τουλάχιστον 99 προτάσεις ψευδείς, άτοπο γιατί 1 αληθής και 99 αληθής οπότε ο μέγιστος αριθμός ψευδών προτάσεων είναι 98, άρα 99 ψευδής. Τώρα έχουμε 2 ψευδείς προτάσεις, την 99 και την 100 συνεπώς και η πρόταση 2 είναι αληθής. Συνεχίζοντας με την ίδια λογική καταλήγουμε ότι οι προτάσεις 1-50 είναι αληθείς, ενώ οι 51-100 ψευδείς.

(iii). Η 99στή πρόταση λέει ότι τουλάχιστον 99 από τις προτάσεις στη λίστα είναι ψευδείς. Αφού οι προτάσεις είναι 99, βρίσκουμε όπως στο (i) ότι η 99στή είναι ψευδής. Τότε όμως, αληθεύει η 1η, καθώς υπάρχει μία ψευδής πρόταση, η 99. Εξετάζουμε την πρόταση 98. Αν αυτή είναι αληθής σημαίνει ότι υπάρχουν τουλάχιστον 98 προτάσεις ψευδείς, άτοπο γιατί 1 αληθής και 98 αληθής οπότε ο μέγιστος αριθμός ψευδών προτάσεων είναι 97, άρα 98 ψευδής. Τώρα έχουμε 2 ψευδείς προτάσεις, την 98 και την 99 συνεπώς και η πρόταση 2 είναι αληθής. Συνεχίζοντας με την ίδια λογική εξετάζουμε την πρόταση 50, έχοντας μέχρι στιγμής ότι οι προτάσεις 51-99 είναι ψευδείς και οι 1-49 αληθείς. Αν 50 αληθής σημαίνει ότι υπάρχουν τουλάχιστον 50 προτάσεις ψευδείς, άτοπο γιατί έχουμε 49 ψευδείς προτάσεις(51-99) και τις υπόλοιπες αληθείς. Αν 50 ψευδής, σημαίνει πως δεν υπάρχουν τουλάχιστον 50 ψευδείς προτάσεις το οποίο είναι άτοπο, γιατί 49 προτάσεις(51-99) είναι ψευδείς και αφού υποθέσαμε ότι και 50 ψευδής, έχουμε 50 ψευδείς προτάσεις. Καταλήγουμε λοιπόν σε αντίφαση.

(δ).

1. Ισχύει ότι $T|=\phi$ άρα από το θεώρημα πληρότητας της προτασιακής λογικής θα είναι και $T\vdash\phi$. Γνωρίζουμε όμως ότι για να αποδείξουμε το φ από κάποιες υποθέσεις πρέπει οι υποθέσεις αυτές να είναι πεπερασμένες, διότι η απόδειξη είναι πεπερασμένη διαδικασία. Συνεπώς υπάρχει T_o πεπερασμένο με $T_o\subseteq T$ ώστε $T_o\vdash\phi$ οπότε και $T_o|=\phi$ (από θεώρημα εγκυρότητας της προτασιακής λογικής).

2. T μη ικανοποιήσιμο, άρα ισχύει για κάθε τύπο φ ότι $T|=\phi$. Τότε, σύμφωνα με το (1) υπάρχει πεπερασμένο $T_o\subseteq T$ ώστε $T_o|=\phi$. Έστω ότι T_o ικανοποιήσιμο. Τότε για τύπο φ που είναι αντίφαση θα ισχύει $T_o|=\phi$ το οποίο είναι άτοπο αφού T_o ικανοποιήσιμο και φ αντίφαση. Συνεπώς το T_o είναι μη ικανοποιήσιμο.

Θέμα 3:

(α).

1. $\forall x(P(x)\rightarrow\exists y(M(y)\wedge T(x,y))$

2. $\forall x\forall y\forall z[P(x)\wedge P(y)\wedge M(z)\wedge T(x,z)\wedge T(y,z)\wedge x\neq y\rightarrow L(x,y)]$

3. $\exists x\exists y[P(x)\wedge P(y)\wedge x\neq y\rightarrow\forall z[M(z)\wedge T(x,z)\leftrightarrow T(y,z)\wedge M(z)]]$

4. $\exists x[P(x)\wedge\exists z\exists y[M(y)\wedge M(z)\wedge T(x,y)\wedge T(x,z)\wedge y\neq z)\wedge\forall k[M(k)\wedge T(x,k)\rightarrow k=y\vee k=z]]$

5. $\forall x(P(x)\wedge\exists y(M(y)\wedge T(x,y))\wedge\exists z(M(z)\wedge T(x,z))\wedge z\neq y\rightarrow\exists k(M(k)\wedge T(x,k)\wedge\forall u(P(u)\wedge L(u,x)$
$\rightarrow T(u,k)))$

(β).

Ορίζουμε τον προτασιακό τύπο $\phi=\forall x\forall y(Q(x, y)\leftrightarrow\neg Q(x, y))$ ο οποίος είναι πάντα ψευδής, διότι $Q(x, y)\leftrightarrow\neg Q(x, y)$ είναι αντίφαση. Ορίζουμε επίσης τον προτασιακό τύπο $\psi=\exists x\forall y Q(x, y)$. Άρα, έχουμε την πρόταση $\phi\rightarrow\psi$. Επειδή φ αντίφαση, η πρόταση είναι πάντα αληθής, επομένως είναι λογικά έγκυρη.

Θέμα 4:

(α).

1. Ορίζουμε ως $\phi1= \forall xP(x, x)$, $\phi2=\forall x\forall y(P(x, y)\rightarrow\forall z(P(x ,z)\vee P(z, y)))$ και $\phi3=\forall x\forall y(P(x, y)\vee P(y, x))$.

Συνεπώς $\phi=\phi1\wedge\phi2\rightarrow\phi3$. Έχουμε:

- Αν $\phi1\wedge\phi2$ ψευδής τότε η συνεπαγωγή είναι αληθής, άρα φ έγκυρη.
- Αν $\phi1\wedge\phi2$ αληθής τότε φ1 αληθής(1) και φ2 αληθής(2). Από (2) φ2 αληθής για κάθε x,y οπότε και για x=y(με x τυχαίο) φ2 αληθής. Άρα, για x=y ο φ2 γίνεται $P(x, x)\rightarrow\forall z(P(x, z)\vee P(z, x))$, που είναι αληθής(3). Όμως αφού από (1) $P(x, x)$ αληθής και ισχύει και η (3) πρέπει ο τύπος $\forall z(P(x, z)\vee P(z, x))$ να είναι αληθής.

Εφόσον το x είναι τυχαίο, καταλήγουμε ότι ισχύει το συμπέρασμα δηλαδή $\forall x\forall z(P(x, z)\lor P(z, x))$ ή $\forall x\forall y(P(x, y)\lor P(y, x))$. Άρα και πάλι η συνεπαγωγή είναι έγκυρη.

Τελικά φ έγκυρη.

2.Ορίζουμε ως $\psi 1= \forall xP(x, x)(1)$, $\psi 2=\forall x\forall y(P(x, y)\rightarrow\forall z(P(x, z)\lor P(z, y)))(2)$ και $\psi 3=\exists x\forall yP(x, y)(3)$. Συνεπώς $\psi=\psi 1\land\psi 2\rightarrow\psi 3$. ΄Εστω ερμηνεία Α με $|A|=n$. Θα δείξουμε ότι η ψ αληθεύει για κάθε n, χρησιμοποιώντας την μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής.

- Για n=1 προφανώς αληθεύει.
- Έστω ότι αληθεύει για n=k, δηλαδή το συμπέρασμα είναι αληθές, που σημαίνει ότι υπάρχει "ελάχιστο" στοιχείο, έστω x_{min}.
- Για n=k+1: Προσθέτουμε στο σύμπαν μας άλλο ένα στοιχείο, έστω α, οπότε αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει και τώρα ελάχιστο στοιχείο, είτε το x_{min} είτε κάποιο άλλο.
  → Αν $\psi 1\land\psi 2$ ψευδής, τότε το συμπέρασμα αληθεύει $\forall y$ άρα και για y=α. Συνεπώς x_{min} ελάχιστο στοιχείο.
  → Αν $\psi 1\land\psi 2$ αληθής, τότε ψ1 αληθής και ψ2 αληθής οπότε: Η ψ1 για x=α δίνει ότι P(α, α) αληθής(4) και η ψ2 για x=y=α δίνει ότι $P(\alpha, \alpha)\rightarrow\forall z(P(\alpha, z)\lor P(z, \alpha))$. Όμως, από (4) και θέτοντας $z=x_{min}$ παίρνουμε ότι $P(\alpha, x_{min})\lor P(x_{min}, \alpha)$ αληθής.
    → Αν $P(x_{min}, \alpha)$ τότε το x_{min} παραμένει ελάχιστο στοιχείο, οπότε ψ αληθής.
    → Αν $P(\alpha, x_{min})$ (οπότε αναγκαστικά $P(x_{min}, \alpha)$ ψευδής(*)) πρέπει να δείξουμε ότι το α είναι ελάχιστο στοιχείο, δηλαδή ότι $\forall xP(\alpha, x)$. Η ψ2 για $x= x_{min}$, y=x με $x\neq\alpha$ τυχαίο και z=α δίνει ότι $P(x_{min}, x)\rightarrow P(x_{min}, \alpha)\lor P(\alpha, x)$, το οποίο είναι αληθές αφού ψ2 αληθής. Ισχύει ότι $P(x_{min}, x)$ αληθής, αφού x_{min} ελάχιστο στοιχείο για όλα τα x εκτός του α, όπως ξέρουμε από την επαγωγική υπόθεση. Επίσης $P(x_{min}, \alpha)$ ψευδής(από (*)), οπότε πρέπει P(α, x) να είναι αληθής. Δηλαδή καταλήξαμε ότι $P(\alpha, x_{min})$ και P(α, x) αληθείς οπότε το α είναι ελάχιστο στοιχείο.

Τελικά, κάθε ερμηνεία σε πεπερασμένο σύμπαν αποτελεί μοντέλο της ψ.

3. Ορίζουμε ερμηνεία Α, με $|A|=R$ και $P(x,y) = x\leq y$. Με αυτήν την ερμηνεία, η πρόταση ψ δηλώνει ότι αν στο σύμπαν ισχύει η ανακλαστική ιδιότητα(ισχύει στο R) και αν για οποιουσδήποτε αριθμούς $x,y\in R$ με $x\leq y$ ισχύει ότι για κάθε $z\in R$ θα είναι $x\leq z$ ή $z\leq y$(ισχύει στο R) τότε υπάρχει ελάχιστο στοιχείο στο σύμπαν. Οι υποθέσεις είναι αληθείς, ωστόσο το συμπέρασμα είναι ψευδές, καθώς δεν υπάρχει ελάχιστο στοιχείο στους πραγματικούς αριθμούς. Συνεπώς, για την ερμηνεία που ορίσαμε η ψ δεν είναι έγκυρη.

(β).

1. Η ξ μπορεί να γραφεί ως εξής:

$\xi = \neg\forall x(P(x, x) \rightarrow \forall y(P(x, y) \vee P(y, x))) \vee \exists x \forall y P(x, y)$
Από την ερμηνεία της σχέσης P βλέπουμε πως δεν υπάρχει "ελάχιστο" στοιχείο οπότε η πρόταση $\exists x \forall y P(x, y)$ είναι ψευδής. Άρα η ξ απλοποιείται και γίνεται $\xi = \neg\forall x(P(x, x) \rightarrow \forall y(P(x, y) \vee P(y, x)))$. Όμως για x=a, b, c είναι P(x,x)=ψευδής και $\forall y P(x, y) \vee P(y, x))$=ψευδής, όπως προκύπτει από την ερμηνεία της P. Συνεπώς ο τύπος $\forall x(P(x, x) \rightarrow \forall y(P(x, y) \vee P(y, x))$ είναι αληθής, και η άρνησή του, δηλαδή η πρόταση ξ είναι ψευδής.

2. Όμοια με το 1, ο τύπος $\exists x \forall y P(x, y)$ είναι ψευδής με βάση την ερμηνεία της P, γιατί δεν υπάρχει "ελάχιστο" στοιχείο, συνεπώς $\xi = \neg\forall x(P(x, x) \rightarrow \forall y(P(x, y) \vee P(y, x)))$.
Για x=a, b, c είναι P(x, x)=αληθής, γιατί η P είναι ανακλαστική, όμως $\forall y(P(x, y) \vee P(y, x))$=ψευδής, όπως προκύπτει από την ερμηνεία της P, συνεπώς $\forall x(P(x, x) \rightarrow \forall y(P(x,y) \vee P(y, x)))$=ψευδής, άρα ξ αληθής.

3. Το συμπέρασμα $\exists x \forall y P(x, y)$ είναι αληθές, γιατί από την ερμηνεία της σχέσης P βλέπουμε πως το α είναι "ελάχιστο" στοιχείο. Συνεπώς, η ξ είναι αληθής.

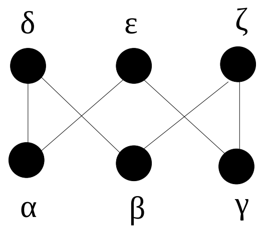
4. Έχουμε την ερμηνεία A με |A|=N και P(x, y)= "ο x διαιρεί τον y". Το συμπέρασμα $\exists x \forall y P(x, y)$ δηλώνει, με βάση την P, ότι υπάρχει ένας φυσικός, ο οποίος διαιρεί όλους τους άλλους. Ο ισχυρισμός αυτός είναι αληθής, γιατί το x=1 έχει αυτή την ιδιότητα. Συνεπώς ξ αληθής.

Θέμα 5:
(α). Είναι $R^{-1} = \{(\beta, \alpha) : (\alpha, \beta) \in R\}$ ή $R^{-1} = \{(\alpha, \beta) : (\beta, \alpha) \in R\}$(1)
Επίσης $R \cap R^{-1} = \{\alpha, \beta: (\alpha, \beta) \in R$ και $(\alpha, \beta) \in R^{-1}\}$. Με βάση τον ορισμό (1) της R^{-1}, θα είναι $R \cap R^{-1} = \{\alpha, \beta: (\alpha, \beta) \in R$ και $(\beta, \alpha) \in R\}$.
→ Η $R \cap R^{-1}$ είναι ανακλαστική, αφού $(\alpha, \alpha) \in R \cap R^{-1}$ σημαίνει ότι $(\alpha, \alpha) \in R$ που ισχύει επειδή R ανακλαστική.
→ Επίσης, είναι εξ' ορισμού συμμετρική, γιατί αν $(\alpha, \beta) \in R \cap R^{-1}$ σημαίνει ότι $(\alpha, \beta) \in R$ και $(\beta, \alpha) \in R$ άρα και $(\beta, \alpha) \in R \cap R^{-1}$.
→ Εξετάζουμε αν είναι μεταβατική:

- Αν $(\alpha,\beta) \in R \cap R^{-1}$ σημαίνει ότι $(\alpha, \beta) \in R$(2) και $(\beta, \alpha) \in R$(3).
- Αν $(\beta, \gamma) \in R \cap R^{-1}$ σημαίνει ότι $(\beta, \gamma) \in R$(4) και $(\gamma, \beta) \in R$(5).
- Για να είναι μεταβατική πρέπει $(\alpha, \gamma) \in R \cap R^{-1}$, δηλαδή $(\alpha, \gamma) \in R$ και $(\gamma, \alpha) \in R$.
  Αφού R μεταβατική, από (2), (4) έχουμε ότι $(\alpha, \gamma) \in R$ και από (3), (5) ότι $(\gamma, \alpha) \in R$.
  Τελικά, $R \cap R^{-1}$ είναι μεταβατική.

Συνεπώς, αφού η $R \cap R^{-1}$ είναι ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική, είναι σχέση ισοδυναμίας.

(β). Το ζητούμενο διάγραμμα Hasse είναι το ακόλουθο:



(γ). Για να είναι η R σχέση διάταξης πρέπει να είναι ανακλαστική, αντισυμμετρική και μεταβατική. Θεωρούμε n=4 και m=8 με n, m ∈ N. Είναι (4, 8)∈R και (8, 4)∈R γιατί όλοι οι πρώτοι παράγοντες του 4(2, 2) είναι και πρώτοι παράγοντες του 8(2, 2, 2) και αντίστροφα. Όμως είναι 4≠8, δηλαδή δεν ισχύει η αντισυμμετρική ιδιότητα, συνεπώς η R δεν είναι σχέση διάταξης.