ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΝΑΜΟΝΗΣ
1Η ΟΜΑΔΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

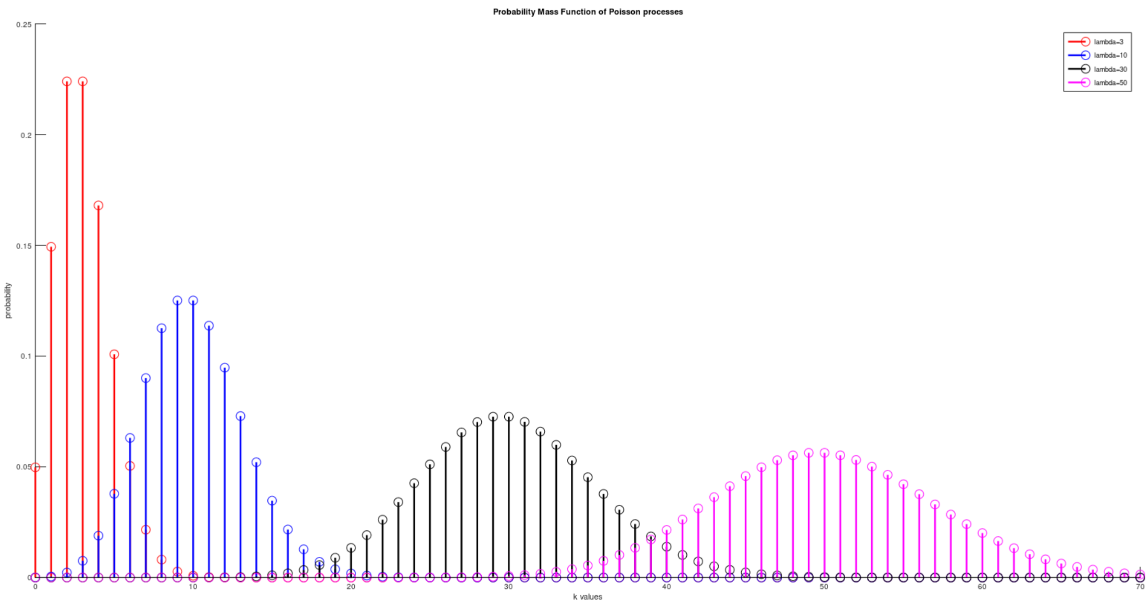
Ονοματεπώνυμο: Δημήτριος Βασιλείου
Α.Μ: el19830
Εξάμηνο: 6ο
Σχολή: ΗΜΜΥ

Κατανομή Poisson:

Α). Μια τυχαία μεταβλητή Z με πεδίο τιμών S = {0, 1, 2, ...} ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λ και συνάρτηση μάζας πιθανότητας

P(Z=k) = $e^{\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ για k ϵ S. Συμβολίζουμε Z ~ Poisson(λ). Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η συνάρτηση μάζας πιθανότητας των κατανομών Poisson με παραμέτρους λ = {3, 10, 30, 50}. Οι τιμές στον οριζόντιο άξονα είναι από 0 μέχρι 70.

Ο



κώδικας που χρησιμοποιήσαμε είναι ο ακόλουθος:

```
# TASK: In a common diagram, design the Probability Mass Function of Poisson processes
# with lambda parameters 3, 10, 30, 50. In the horizontal axes, choose k parameters
# between 0 and 70.

k = 0:1:70;
lambda = [3, 10, 30, 50];

for i = 1 : columns(lambda)
  poisson(i, :) = poisspdf(k, lambda(i));
endfor

colors = "rbkm";
figure(1);
hold on;
for i = 1 : columns(lambda)
  stem(k, poisson(i, :), colors(i), "linewidth", 1.2);
endfor
hold off;

title("Probability Mass Function of Poisson processes");
xlabel("k values");
ylabel("probability");
legend("lambda=3", "lambda=10", "lambda=30", "lambda=50");
```

Παρατηρούμε πως καθώς η παράμετρος λ αυξάνεται, η διακύμανση αυξάνεται, ενώ το "ύψος" της κατανομής μειώνεται. Αυτό συμβαίνει, διότι το άθροισμα όλως των σημείων μιας διακριτής κατανομής ισούται με την μονάδα.

Β). Η μέση τιμή μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής Χ με σύνολο τιμών S και πυκνότητα P(x) ορίζεται ως: μ = E(X) = $\sum xP(x)$ για x ϵ S. Γνωρίζουμε ότι η μέση τιμής της κατανομής Poisson ισούται με λ.

Η διακύμανση μια διακριτής τυχαίας μεταβλητής Χ με μέση τιμή μ είναι $\sigma^2 = Var(X) = E[(X-\mu)^2]$. Ισχύει επίσης ότι $\sigma^2 = Var(X) = E(X^2) - \mu^2$. Για την κατανομή Poisson ισχύει ότι $\sigma^2 = Var(X) = \lambda$. Επιλέγουμε την κατανομή Poisson με παράμετρο λ = 30. Η μέση τιμή και η διακύμανση φαίνονται παρακάτω:

```
mean value of Poisson with lambda 30 is
mean_value = 30.000
Variance of Poisson with lambda 30 is
variance = 30.000
```

Παρατηρούμε ότι τόσο η μέση τιμή όσο και η διακύμανση της κατανομής Poisson ισούνται με την τιμή της παραμέτρου λ.

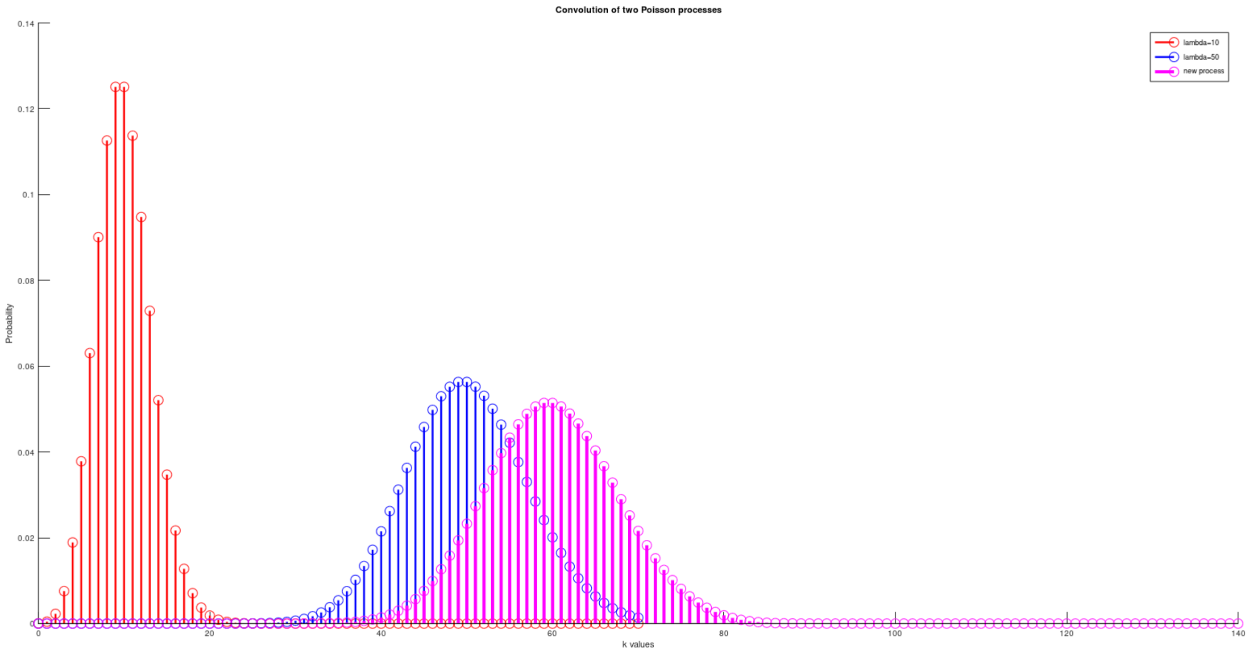
Ο κώδικας που χρησιμοποιήσαμε φαίνεται παρακάτω:

```
# TASK: regarding the poisson process with parameter lambda 30, compute its mean
# value and variance

index = find(lambda == 30);
chosen = poisson(index, :);
mean_value = 0;
for i=0:(columns(poisson(index, :)) - 1)
  mean_value = mean_value + i .* poisson(index,i+1);
endfor

display("mean value of Poisson with lambda 30 is");
display(mean_value);

second_moment = 0;
for i = 0 : (columns(poisson(index, :)) - 1)
  second_moment = second_moment + i .* i .* poisson(index, i + 1);
endfor

variance = second_moment - mean_value .^ 2;
display("Variance of Poisson with lambda 30 is");
display(variance);
```

Γ). Έστω δύο τυχαίες μεταβλητές Χ, Υ που ακολουθούν κατανομή Poisson λ1, λ2 αντίστοιχα. Τότε και το άθροισμα αυτών ακολουθεί επίσης κατανομή Poisson με παράμετρο λ1 + λ2. Επιλέγουμε τις κατανομές Poisson με παραμέτρους λ = 10 και λ = 50. Η νέα κατανομή θα ακολουθεί και αυτή κατανομή Poisson με παράμετρο λ' = 60. Για να ισχύει ωστόσο αυτό, πρέπει οι δύο αρχικές κατανομές Poisson να είναι ανεξάρτητες, δηλαδή να ισχύει ότι:

P(X = x και Y = y) = P(X = x) * P(Y = y), για κάθε x ϵ Sx, y ϵ Sy.

Σχεδιάζουμε τις τρεις κατανομές σε κοινό διάγραμμα:



Ο κώδικας που χρησιμοποιήσαμε φαίνεται παρακάτω:

```
# TASK: consider the convolution of the Poisson distribution with lambda 10 with
# the Poisson distribution with lambda 30.

first = find(lambda == 10);
second = find(lambda == 50);
poisson_first = poisson(first, :);
poisson_second = poisson(second, :);

composed = conv(poisson_first, poisson_second);
new_k = 0 : 1 : (2 * 70);

figure(2);
hold on;
stem(k, poisson_first(:), colors(1), "linewidth", 1.2);
stem(k, poisson_second(:), colors(2), "linewidth", 1.2);
stem(new_k, composed, "mo", "linewidth", 2);
hold off;
title("Convolution of two Poisson processes");
xlabel("k values");
ylabel("Probability");
legend("lambda=10", "lambda=50", "new process");
```

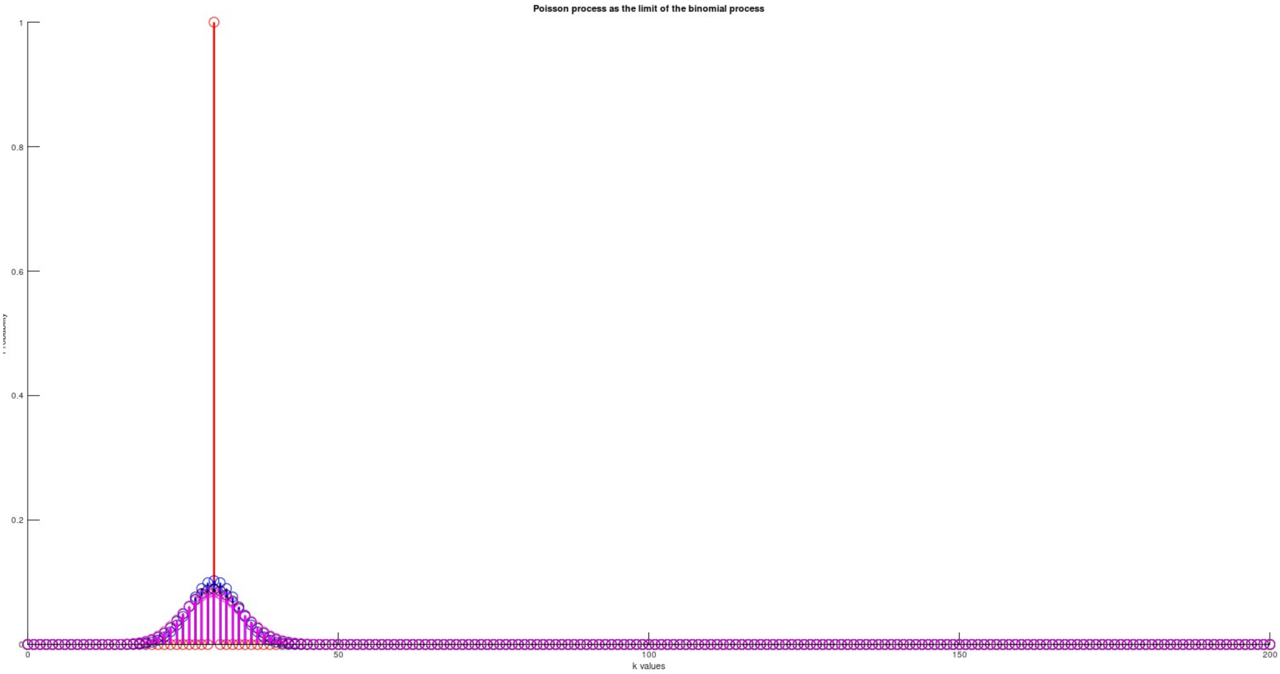
Δ). Έστω πως μια τυχαία μεταβλητή Y έχει κατανομή Διων(N, p) με παραμέτρους N, p που ικανοποιούν τις εξής συνθήκες:

- το N είναι αρκετά "μεγάλο", δηλαδή N > 100
- το p είναι αρκετά "μικρό", δηλαδή p < 1/25
- το γινόμενο Np είναι της τάξης του 1.

Τότε η κατανομή Y μπορεί να προσεγγιστεί από την κατανομή μιας τυχαίας μεταβλητής Z ~ Poisson(λ) με λ = Np υπό την έννοια ότι:

$P(Y = k) \approx P(Z = k) = e^{\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!}$, για κάθε k = 0, 1, 2, …

Εμείς παίρνουμε λ = 30 και τιμές του N για 30, 60, 90, 120, 150 μειώνοντας ταυτόχρονα το p της διωνυμικής ώστε το γινόμενο Np = λ = 30 να είναι σταθερό.



Ο κώδικας που χρησιμοποιήσαμε φαίνεται παρακάτω:

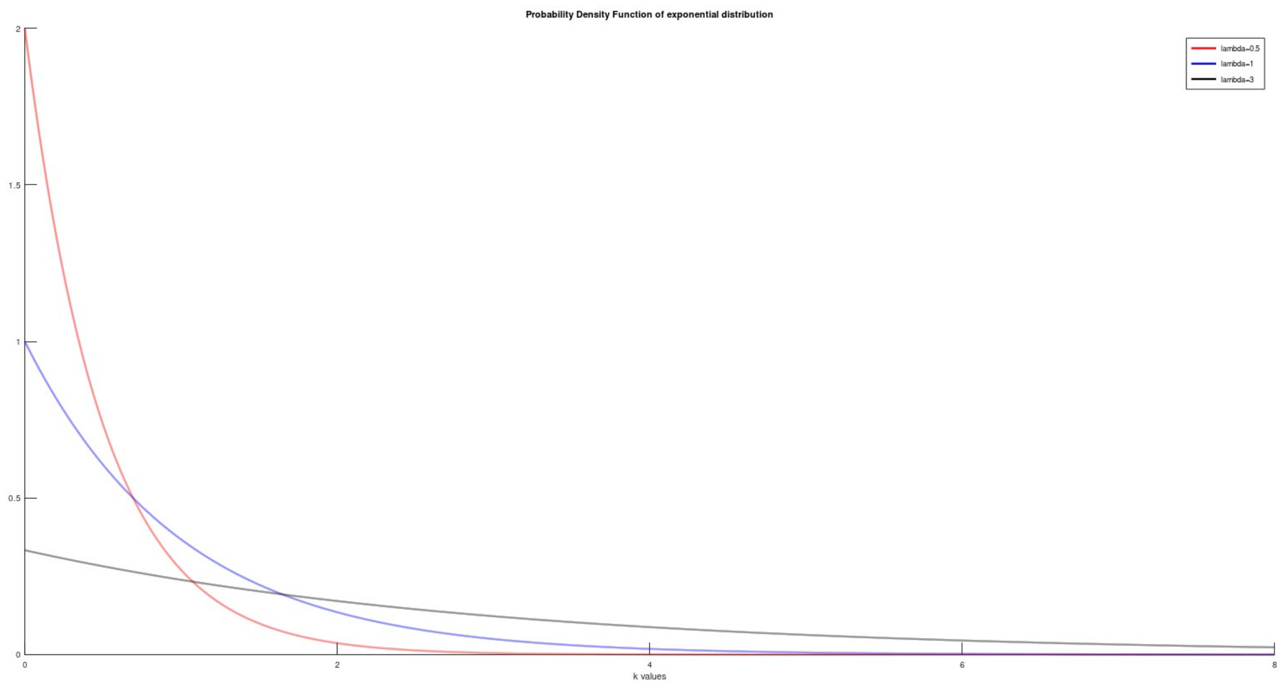
```
# TASK: show that Poisson process is the limit of the binomial distribution.
k = 0 : 1 : 200;
# Define the desired Poisson Process
lambda = 30;
i = 1 : 1 : 5;
n = lambda .* i;
p = lambda ./ n;

figure(3);
title("Poisson process as the limit of the binomial process");
xlabel("k values");
ylabel("Probability");
hold on;
for i = 1 : 4
  binomial = binopdf(k, n(i), p(i));
  stem(k, binomial, colors(i), 'linewidth', 1.2);
endfor
hold off;
```

Εκθετική Κατανομή:

Α). Μια συνεχής κατανομή Χ έχει εκθετική κατανομή με παράμετρο λ > 0 αν έχει σύνολο τιμών το S = [0, ∞] και πυκνότητα:

$f(x)=\frac{1}{\lambda}e^{(-x/\lambda)}, για\ x\geq 0$ και $f(x)=0\ για\ x<0$. Συμβολίζουμε Χ ~ Exp(λ).

Σχεδιάζουμε την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των εκθετικών κατανομών με μέσους όρους 1/λ = {0.5, 1, 3}.



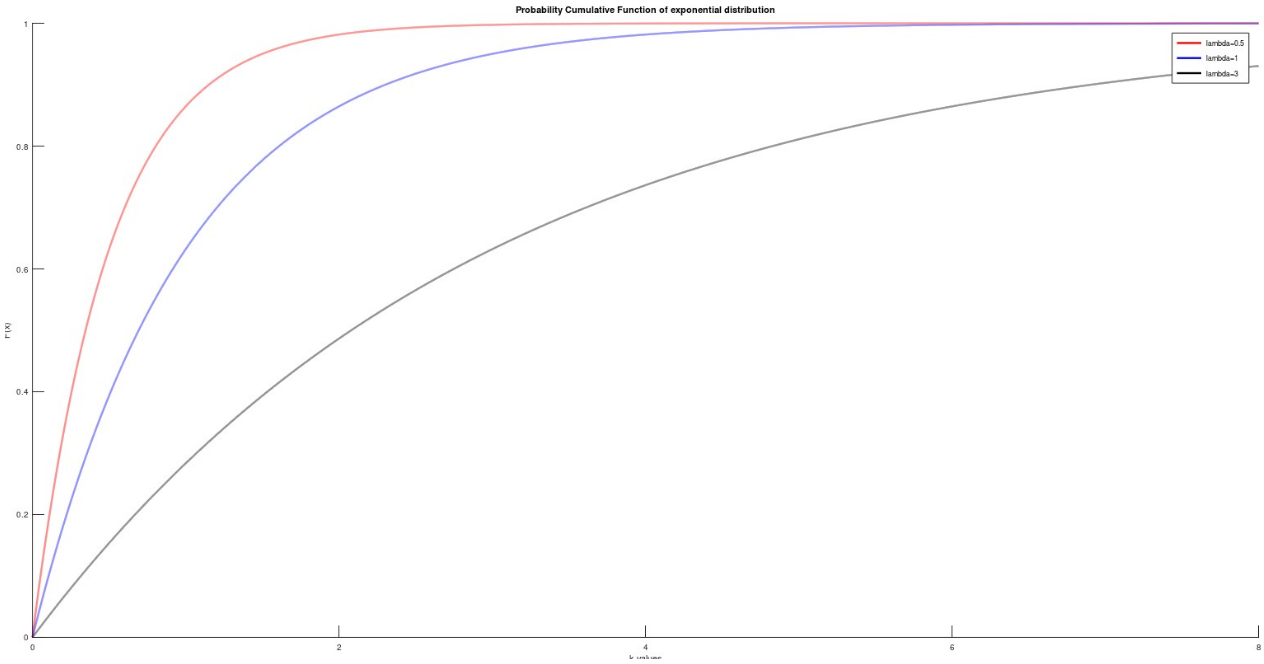
Ο κώδικας που χρησιμοποιήσαμε είναι ο ακόλουθος:

```
#A: Probability Density Function of exponential distributions

k = 0:0.0001:8;
lambda = [0.5, 1, 3];

for i = 1 : columns(lambda)
  exp(i, :) = exppdf(k, lambda(i));
endfor

colors = "rbk";
figure(1);
hold on;

for i = 1 : columns(lambda)
  plot(k, exp(i, :), colors(i), "linewidth", 1.2);
endfor
hold off;

title("Probability Density Function of exponential distribution");
xlabel("k values");
ylabel("f(x)");
legend("lambda=0.5", "lambda=1", "lambda=3");
```

B). Για την εκθετική κατανομή η συνάρτηση κατανομής είναι η ακόλουθη:

$F(x)=1-e^{(-x/\lambda)}, για\ x \geq 0$ και $F(x)=0\ για\ x<0.$

Χρησιμοποιώντας την συνάρτηση του Octave expcdf σχεδιάζουμε την συνάρτηση κατανομής των εκθετικών κατανομών που μας δίνονται.



Ο κώδικας που χρησιμοποιήσαμε είναι ο ακόλουθος:

```
#B: Cumulative Distribution Function of exponential distributions
for i = 1 : columns(lambda)
  exp(i, :) = expcdf(k, lambda(i));
endfor

colors = "rbk";
figure(2);
hold on;

for i = 1 : columns(lambda)
  plot(k, exp(i, :), colors(i), "linewidth", 1.2);
endfor
hold off;

title("Probability Cumulative Function of exponential distribution");
xlabel("k values");
ylabel("F(x)");
legend("lambda=0.5", "lambda=1", "lambda=3");
```

Γ). Έστω μία τυχαία μεταβλητή X ~ Exp(λ). Η X έχει την ιδιότητα απώλειας μνήμης, δηλαδή για κάθε a, b > 0 ισχύει P(X ≥a + b| X ≥ a) = P(X ≥ b). Υπολογίζουμε τις πιθανότητες
P(X > 30000) και P(X > 50000 | X > 20000). Για τον υπολογισμό των δύο πιθανοτήτων χρησιμοποιούμε τον ακόλουθο συλλογισμό:
P(X > 30000) = $1-P(X \leq 30000) = 1-F(30000)$.

P(X > 50000 | X > 20000) =

$$\frac{P(X>50000, X>20000)}{P(X>20000)} = \frac{P(X>50000)}{P(X>20000)} = \frac{1-P(X \leq 50000)}{1-P(X \leq 20000)} = \frac{1-F(50000)}{1-F(20000)}$$

ώστε να χρησιμοποιήσουμε την συνάρτηση κατανομής expcdf για τους υπολογισμούς.

```
P(X > 30000) =
first = 0.8869
P(X > 50000 | X > 20000) =
second = 0.8869
```

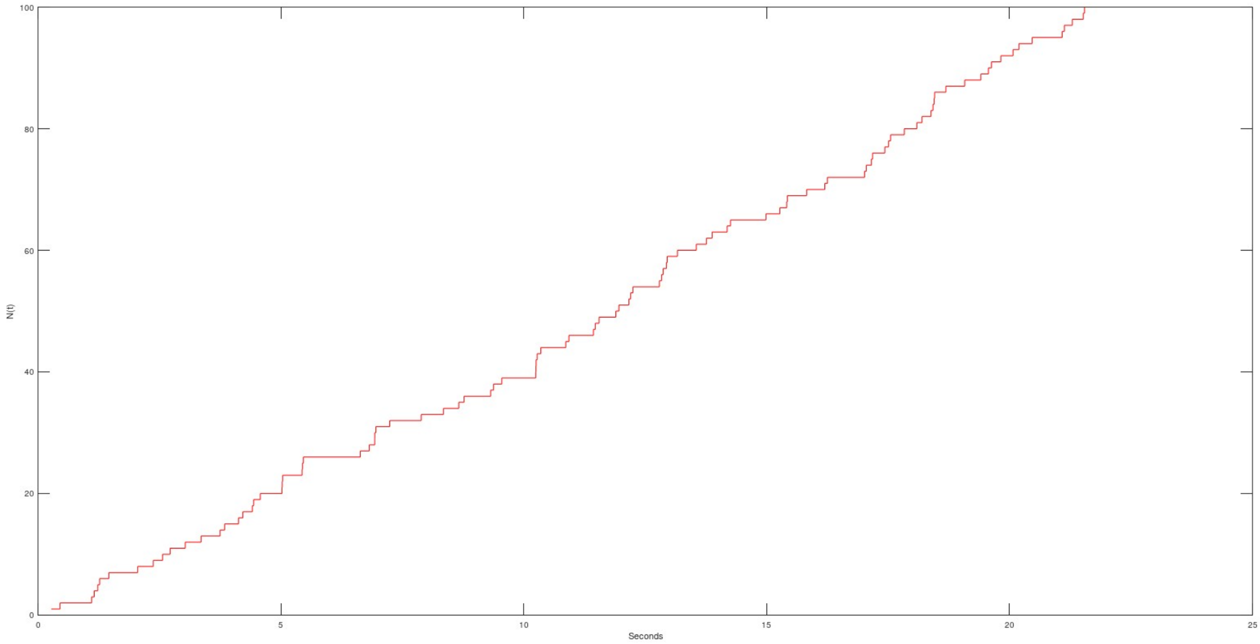
Παρατηρούμε ότι οι δύο πιθανότητες είναι ίσες, εξαιτίας της ιδιότητας απώλειας μνήμης.
Ο κώδικας που χρησιμοποιήσαμε φαίνεται παρακάτω:

```
#Γ: Lack of memory
k = 0:0.00001:8;
F = expcdf(k, 2.5);
first = 1 - F(30000);
second = (1 - F(50000)) ./ (1 - F(20000));
display("P(X > 30000) = ");
display(first);

display("P(X > 50000 | X > 20000) = ");
display(second);
```

<u>Διαδικασία Καταμέτρησης Poisson:</u>

A). Γνωρίζουμε πως οι χρόνοι που μεσολαβούν ανάμεσα στην εμφάνιση δύο διαδοχικών γεγονότων Poisson ακολουθούν εκθετική κατανομή με παράμετρο 1/λ.

Με την συνάρτηση exprnd() δημιουργούμε 100 τυχαία γεγονότα που ακολουθούν εκθετική κατανομή με παράμετρο 1/λ = 0,2. Κάθε x(i) αντιστοιχεί σε ένα χρονικό διάστημα μεταξύ 2 διαδοχικών γεγονότων. Χρησιμοποιούμε ένα for loop ώστε να αντιστοιχίσουμε σε κάθε x(i) την χρονική στιγμή που συμβαίνει το i-οστό γεγονός. Στο ίδιο for loop δημιουργούμε έναν πίνακα y όπου σε κάθε y(i) αντιστοιχεί ο αριθμός των γεγονότων που έχουν συμβεί μέχρι την χρονική στιγμή i . Για να δούμε τον αριθμό των γεγονότων που έχουν συμβεί κάθε χρονική στιγμή χρησιμοποιούμε την συνάρτηση stairs. Προκύπτει το ακόλουθο διάγραμμα:

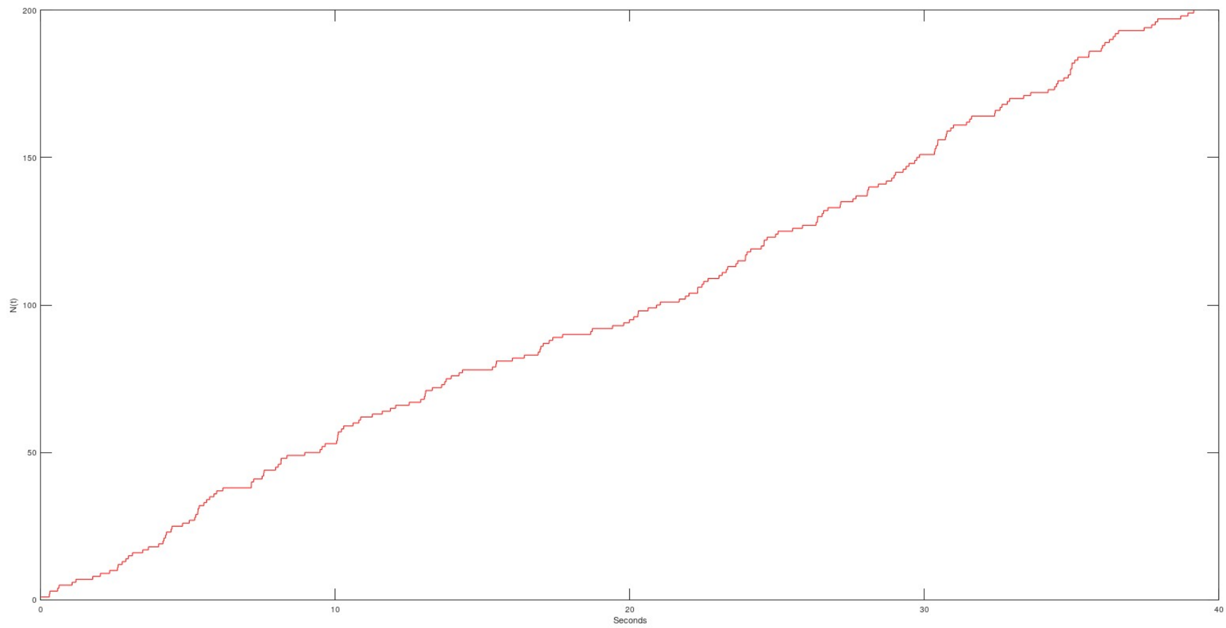


Ο κώδικας που χρησιμοποιήσαμε είναι ο ακόλουθος:

```
#A
x = exprnd(0.2, 1, 100);
y = ones(100,1);
for i=1:99
   x(i+1) = x(i+1) + x(i);
   y(i+1) = y(i+1) + y(i);
endfor

figure(1);
stairs(x, y, color = 'r');
xlabel("Seconds");
ylabel("N(t)");
```

B). Ο αριθμός γεγονότων σε ένα χρονικό παράθυρο ΔΤ = t1 – t2 ακολουθεί κατανομή Poisson με μέσο αριθμό γεγονότων λΔΤ, όπου λ ο μέσος αριθμός γεγονότων στην μονάδα του χρόνου(sec).
Για να βρούμε το λ προσεγγιστικά, διαιρούμε τον συνολικό αριθμό γεγονότων με την χρονική στιγμή στην οποία αυτά καταγράφηκαν(δηλαδή το διάστημα μέχρι την καταγραφή τους από την στιγμή 0).

(i) Διαδικασία καταμέτρησης Poisson 200 γεγονότων:

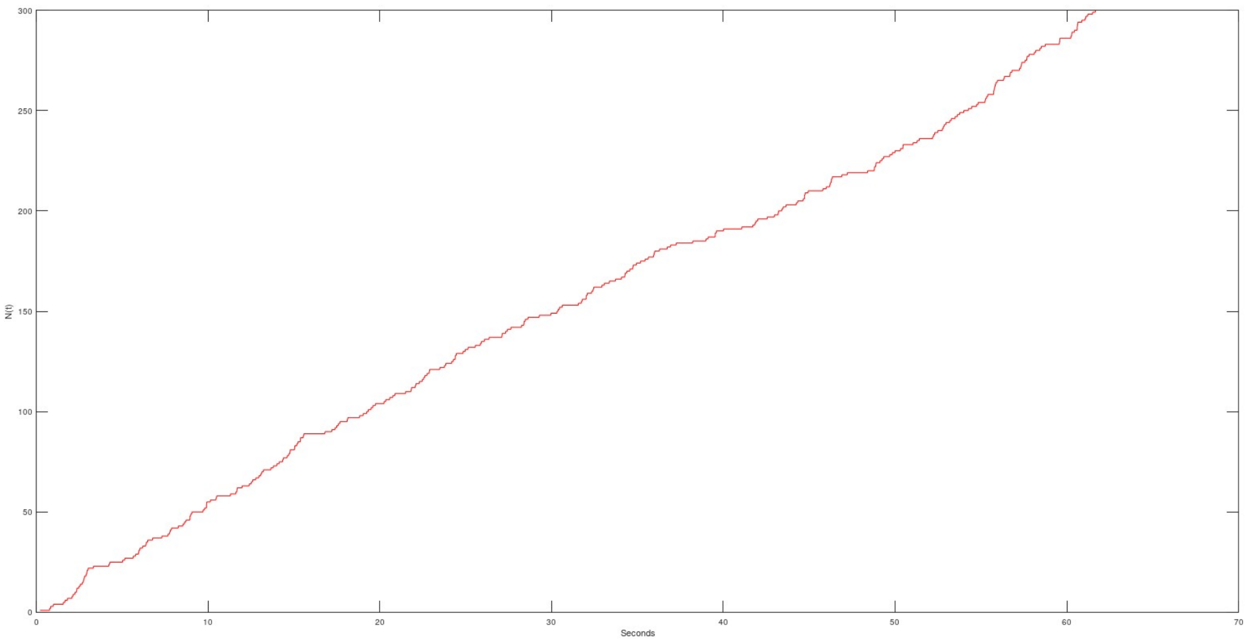


Παραθέτουμε τον κώδικα και το output:

```
#B
#i N = 200
x = exprnd(0.2, 1, 200);
y = ones(200, 1);
for i=1:199
   x(i+1) = x(i+1) + x(i);
   y(i+1) = y(i+1) + y(i);
endfor

figure(2);
stairs(x, y, color = 'r');
xlabel("Seconds");
ylabel("N(t)");
display("λ = ");
display(200/x(200));
```

```
λ =
5.1085
```

(ii) Διαδικασία καταμέτρησης Poisson 300 γεγονότων:

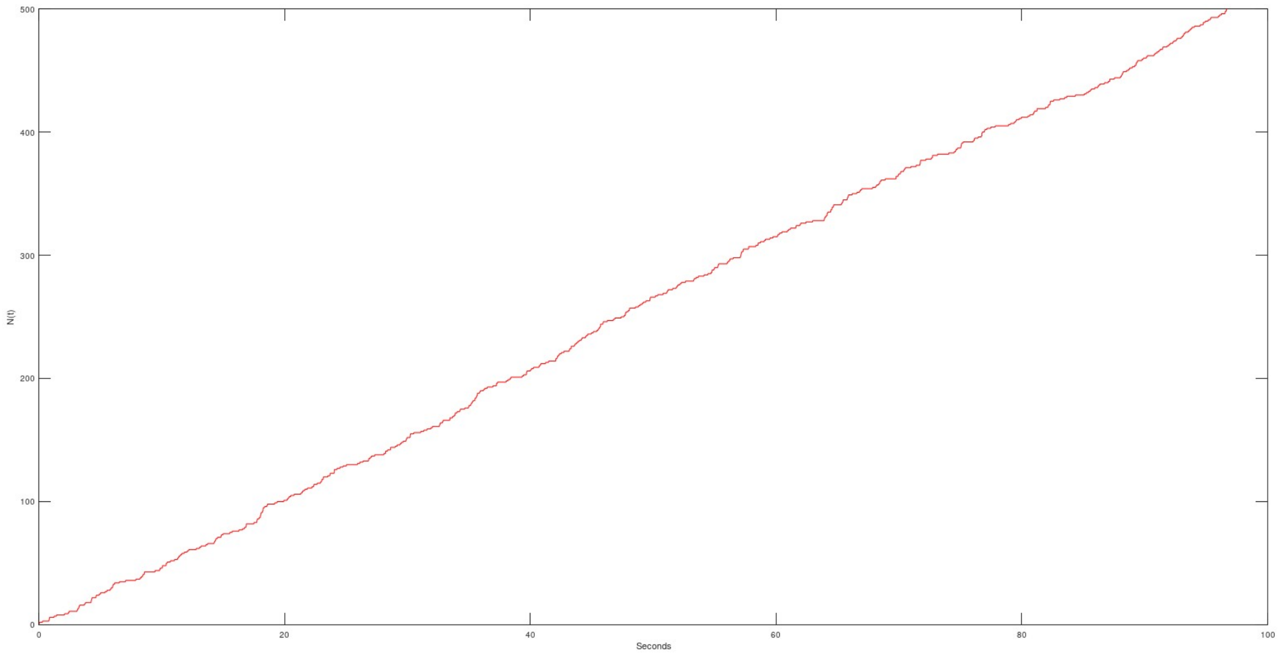


Παραθέτουμε τον κώδικα και το output:

```
#ii N = 300
x = exprnd(0.2, 1, 300);
y = ones(300, 1);
for i=1:299
   x(i+1) = x(i+1) + x(i);
   y(i+1) = y(i+1) + y(i);
endfor

figure(3);
stairs(x, y, color = 'r');
xlabel("Seconds");
ylabel("N(t)");
display("λ = ");
display(300/x(300));
```

```
λ =
4.8645
```

(iii) Διαδικασία καταμέτρησης Poisson 500 γεγονότων:

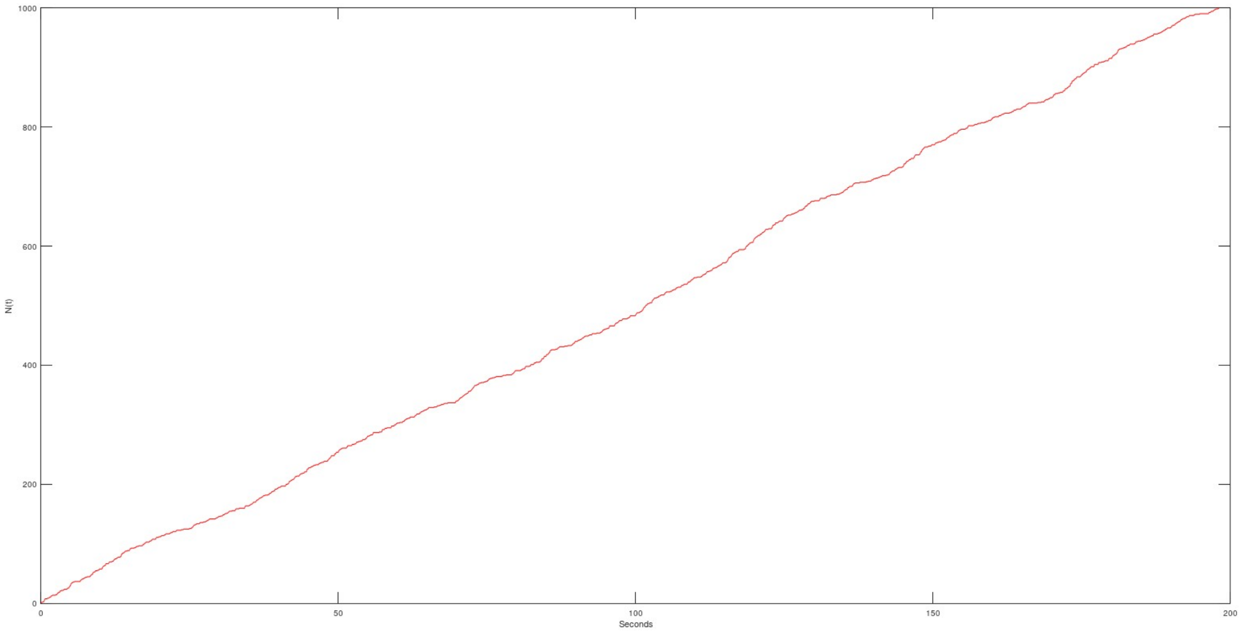


Παραθέτουμε τον κώδικα και το output:

```
#iii N = 500
x = exprnd(0.2, 1, 500);
y = ones(500, 1);
for i=1:499
   x(i+1) = x(i+1) + x(i);
   y(i+1) = y(i+1) + y(i);
endfor

figure(4);
stairs(x, y, color = 'r');
xlabel("Seconds");
ylabel("N(t)");
display("λ = ");
display(500/x(500));
```

```
λ =
5.1731
```

(iv) Διαδικασία καταμέτρησης Poisson 1000 γεγονότων:

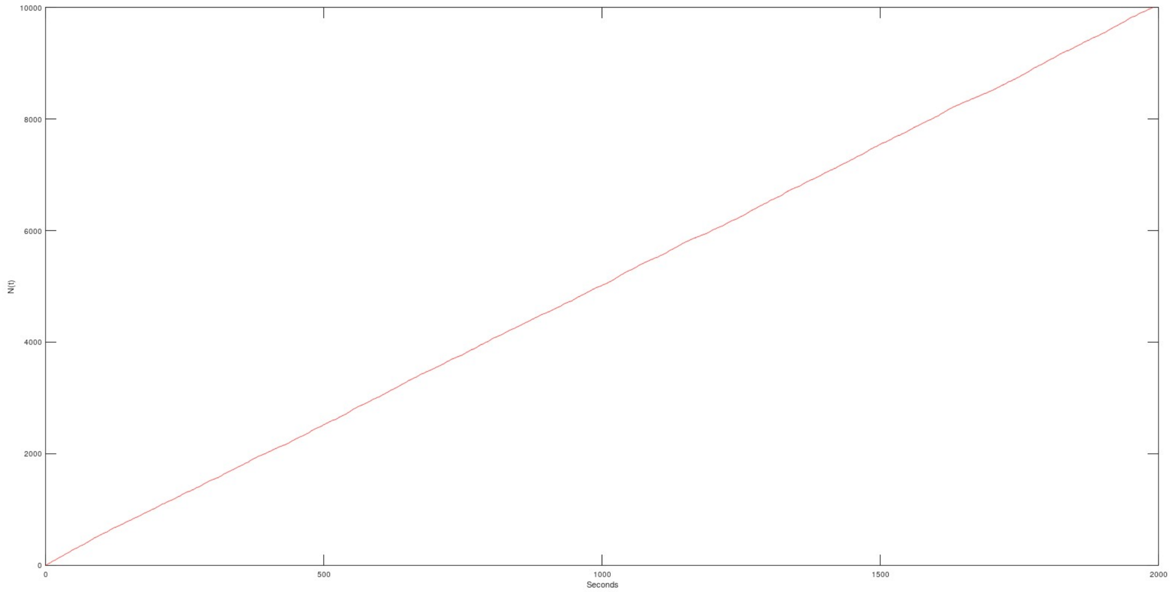


Παραθέτουμε τον κώδικα και το output:

```
#iv N = 1000
x = exprnd(0.2, 1, 1000);
y = ones(1000, 1);
for i=1:999
   x(i+1) = x(i+1) + x(i);
   y(i+1) = y(i+1) + y(i);
endfor

figure(5);
stairs(x, y, color = 'r');
xlabel("Seconds");
ylabel("N(t)");
display("λ = ");
display(1000/x(1000));
```

```
λ =
5.0476
```

(v) Διαδικασία καταμέτρησης Poisson 10000 γεγονότων:



Παραθέτουμε τον κώδικα και το output:

```
#v N = 10000
x = exprnd(0.2, 1, 10000);
y = ones(10000, 1);
for i=1:9999
   x(i+1) = x(i+1) + x(i);
   y(i+1) = y(i+1) + y(i);
endfor

figure(6);
stairs(x, y, color = 'r');
xlabel("Seconds");
ylabel("N(t)");
display("λ = ");
display(10000/x(10000));
```

```
λ =
5.0259
```

Παρατηρούμε πως όσο αυξάνεται ο αριθμός των γεγονότων, το λ προσεγγίζει την τιμή 5.