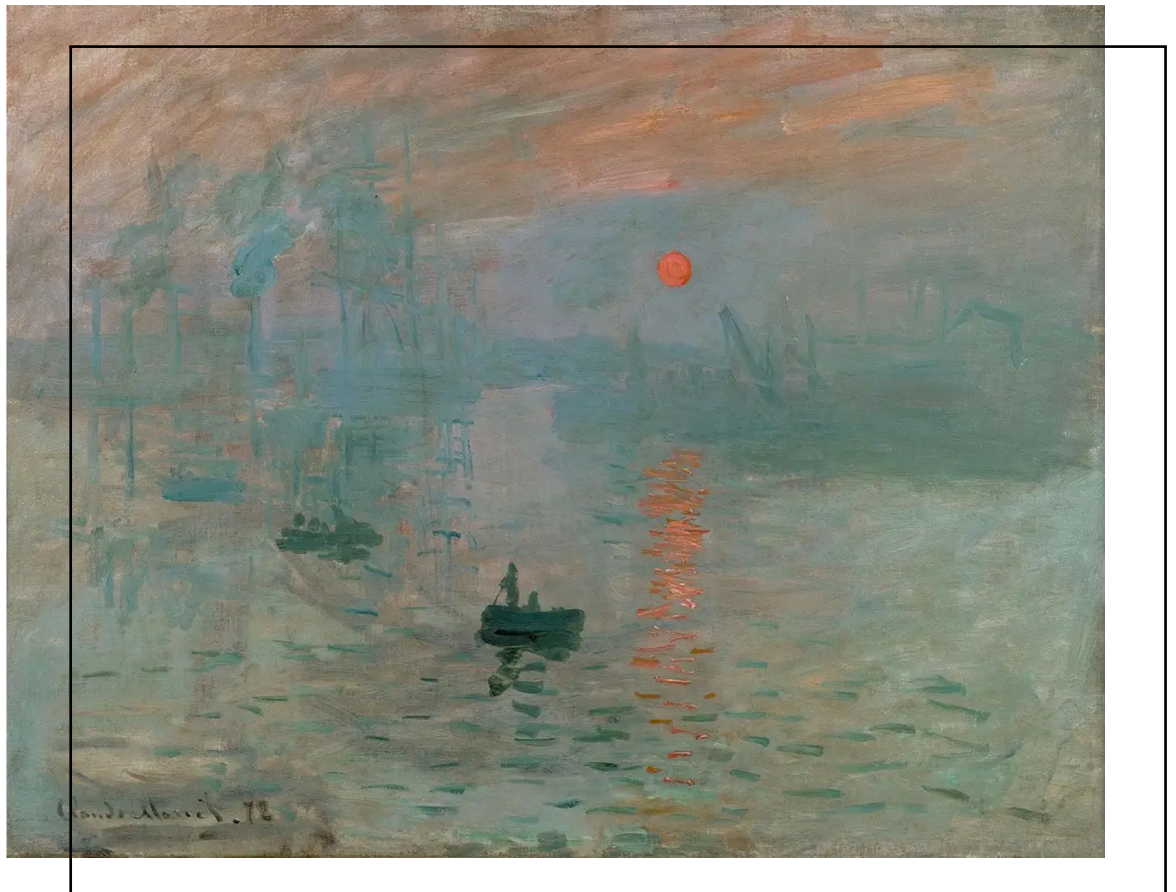


# 02

## Lista de Exercícios

### Introdução a Física de Hádrons

Lucas R. Ximenes  
11917239





## Q. 01

### Funcional gerador de um campo escalar livre

---

O funcional gerador de um campo escalar livre é escrito como

$$Z_0[J] = N \int \exp \left\{ i \int \left[ \frac{1}{2} \left( \xi \vec{K}_x \xi + \xi J + \bar{\phi} \vec{K}_x \xi + \bar{\phi} J \right) + J \bar{\phi} + J \xi \right] d^4 x \right\} [D\xi]$$

após uma expansão do campo original  $\phi$  em torno de sua configuração clássica  $\bar{\phi}$  e sua correspondente flutuação  $\xi$ ,  $\phi = \bar{\phi} + \xi$ . O operador  $\vec{K}_x$  é o de Klein-Gordon,  $\vec{K}_x = (\partial^2 + m^2)_x$ . Obtenha

$$Z_0[J] = N' \exp \left[ -\frac{i}{2} \int J(x) \Delta(x-y) J(y) d^4 x d^4 y \right]$$

---

Na expressão original do problema, podemos identificar que o termo  $\frac{1}{2} \xi \vec{K}_x \xi$  é um termo quadrático em  $\xi$ , a soma dos termos  $\frac{1}{2} \xi J + \frac{1}{2} \bar{\phi} \vec{K}_x \xi + J \xi$  é um termo linear em  $\xi$  e os termos restantes independem dessa variável, o que sugere uma integração gaussiana em  $\xi$ .

- Assumir que  $\vec{K}_x$  é uma matriz diagonal
- Discretizar os campos pra usar a expressão da aula 7/8 (eu acho)
- Fazer uma mudança de variável conveniente
- Integrar em  $[D\xi]$

## Q. 02

### Integração com números de Grassman

---

A integral de trajetória para férmions envolve o cálculo, no limite do contínuo, da integral discretizada

$$I(A) = \int \prod_{i=1}^N \exp \left( \sum_{j,k=1}^N \bar{\theta}_j A_{jk} \theta_k \right) d\theta_i d\bar{\theta}_i = \det(A)$$

Mostre explicitamente o resultado acima para  $N = 3$ , e depois, generalize para um  $N$  arbitrário.

---



- Usar  $N = 3$  dá diretamente o resultado, só fazer as contas certinho considerando as propriedades dos números de Grassman
- Assumindo que vale pra  $N$ , provar que vale pra  $N + 1$  pode ser o procedimento mais simples de se fazer

## Q. 03

### Relações de campos de gauges não-abelianos

No caso de um campo de gauge não-abeliano, mostre explicitamente que

$$(a) [D_\mu, D_\nu]\Phi = -igF_{\mu\nu}\Phi.$$

$$(b) F'_{\mu\nu}\Phi' = UF_{\mu\nu}\Phi.$$

em que  $\Phi$  é um vetor coluna de campos de bósons escalares que satisfaz a simetria de gauge do grupo, e  $U = \exp[T_a\theta_a(x)]$ , sendo  $T_a$  os geradores do grupo.

(a) Usando o gauge  $D_\mu\Phi = (\partial_\mu - ig\mathbf{A}_\mu)\Phi$ , onde  $\mathbf{A}_\mu = A_\mu^a T^a$  e  $T^a$  são os geradores do grupo, temos

$$\begin{aligned} [D_\mu, D_\nu]\Phi &= D_\mu(D_\nu\Phi) - D_\nu(D_\mu\Phi) \\ &= D_\mu(\partial_\nu\Phi - ig\mathbf{A}_\nu\Phi) - D_\nu(\partial_\mu\Phi - ig\mathbf{A}_\mu\Phi) \\ &= (\partial_\mu - ig\mathbf{A}_\mu)(\partial_\nu\Phi - ig\mathbf{A}_\nu\Phi) - (\partial_\nu - ig\mathbf{A}_\nu)(\partial_\mu\Phi - ig\mathbf{A}_\mu\Phi) \\ &= \partial_\mu\partial_\nu\Phi - ig\mathbf{A}_\mu(\partial_\nu\Phi) - ig\partial_\mu(\mathbf{A}_\nu\Phi) - g^2\mathbf{A}_\mu\mathbf{A}_\nu\Phi - \partial_\nu\partial_\mu\Phi + ig\mathbf{A}_\nu(\partial_\mu\Phi) + \\ &\quad + ig\partial_\nu(\mathbf{A}_\mu\Phi) + g^2\mathbf{A}_\nu\mathbf{A}_\mu\Phi \\ &= -ig\mathbf{A}_\mu(\partial_\nu\Phi) - ig(\partial_\mu\mathbf{A}_\nu)\Phi - ig\mathbf{A}_\nu(\partial_\mu\Phi) - g^2\mathbf{A}_\mu\mathbf{A}_\nu\Phi + ig\mathbf{A}_\nu(\partial_\mu\Phi) + ig(\partial_\nu\mathbf{A}_\mu)\Phi + \\ &\quad + ig\mathbf{A}_\mu(\partial_\nu\Phi) + g^2\mathbf{A}_\nu\mathbf{A}_\mu\Phi \\ &= -ig(\partial_\mu\mathbf{A}_\nu - \partial_\nu\mathbf{A}_\mu)\Phi - g^2(\mathbf{A}_\mu\mathbf{A}_\nu - \mathbf{A}_\nu\mathbf{A}_\mu)\Phi \\ &= -ig(\partial_\mu\mathbf{A}_\nu - \partial_\nu\mathbf{A}_\mu - ig[\mathbf{A}_\mu, \mathbf{A}_\nu])\Phi \end{aligned}$$

Como na teoria de gauge não-abeliana o tensor eletromagnético é dado por

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu\mathbf{A}_\nu - \partial_\nu\mathbf{A}_\mu - ig[\mathbf{A}_\mu, \mathbf{A}_\nu]$$

temos

$$[D_\mu, D_\nu]\Phi = -igF_{\mu\nu}\Phi \quad (3.1)$$



(b) Por estarmos em uma teoria de gauge não-abeliana,  $\mathbf{A}_\mu$  se transforma como

$$\mathbf{A}'_\mu = U \mathbf{A}_\mu U^{-1} - \frac{i}{g} (\partial_\mu U) U^{-1}$$

e o tensor eletromagnético da teoria é dado por

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathbf{A}_\nu - \partial_\nu \mathbf{A}_\mu - ig[\mathbf{A}_\mu, \mathbf{A}_\nu]$$

Portanto, transformar esse tensor vai ser

$$\begin{aligned} F'_{\mu\nu} &= \partial_\mu \mathbf{A}'_\nu - \partial_\nu \mathbf{A}'_\mu - ig[\mathbf{A}'_\mu, \mathbf{A}'_\nu] \\ &= \partial_\mu \left[ \underbrace{U \mathbf{A}_\nu U^{-1} - \frac{i}{g} (\partial_\nu U) U^{-1}}_{\mathbb{J}_{\mu\nu}} \right] - \partial_\nu \left[ \underbrace{U \mathbf{A}_\mu U^{-1} - \frac{i}{g} (\partial_\mu U) U^{-1}}_{\mathbb{K}_{\mu\nu}} \right] - \underbrace{ig(\mathbf{A}'_\mu \mathbf{A}'_\nu - \mathbf{A}_\nu \mathbf{A}'_\mu)}_{\mathbb{L}_{\mu\nu}} \\ &= \mathbb{J}_{\mu\nu} - \mathbb{K}_{\mu\nu} - \mathbb{L}_{\mu\nu} \end{aligned}$$

Expandindo cada termo separadamente, temos

$$\begin{aligned} \mathbb{J}_{\mu\nu} &= \partial_\mu (U \mathbf{A}_\nu U^{-1}) - \frac{i}{g} \partial_\mu [(\partial_\nu U) U^{-1}] \\ &= (\partial_\mu U) \mathbf{A}_\nu U^{-1} + U (\partial_\mu \mathbf{A}_\nu) U^{-1} + U \mathbf{A}_\nu (\partial_\mu U^{-1}) - \frac{i}{g} (\partial_\mu \partial_\nu U) U^{-1} - \frac{i}{g} (\partial_\nu U) (\partial_\mu U^{-1}) \end{aligned}$$

Podemos substituir a derivada  $\partial_\mu U^{-1}$  a partir do seguinte raciocínio: sabendo que  $U^{-1}U = \mathbb{1}$ , podemos derivar ambos os lados da equação, de modo que

$$\begin{aligned} \partial_\mu (U^{-1}U) &= \partial_\mu \mathbb{1} \\ (\partial_\mu U^{-1})U + U^{-1}(\partial_\mu U) &= 0 \\ (\partial_\mu U^{-1})U &= -U^{-1}(\partial_\mu U) \\ \partial_\mu U^{-1} &= -U^{-1}(\partial_\mu U)U^{-1} \end{aligned}$$

Portanto, podemos reescrever  $\mathbb{J}_{\mu\nu}$  como

$$\begin{aligned} \mathbb{J}_{\mu\nu} &= (\partial_\mu U) \mathbf{A}_\nu U^{-1} + U (\partial_\mu \mathbf{A}_\nu) U^{-1} - U \mathbf{A}_\nu U^{-1} (\partial_\mu U) U^{-1} - \frac{i}{g} (\partial_\mu \partial_\nu U) U^{-1} + \\ &\quad + \frac{i}{g} (\partial_\nu U) U^{-1} (\partial_\mu U) U^{-1} \end{aligned}$$

No caso de  $\mathbb{K}_{\mu\nu}$ , basta substituir  $\mu \leftrightarrow \nu$  em  $\mathbb{J}_{\mu\nu}$ , ou seja,

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_{\mu\nu} &= (\partial_\nu U) \mathbf{A}_\mu U^{-1} + U (\partial_\nu \mathbf{A}_\mu) U^{-1} - U \mathbf{A}_\mu U^{-1} (\partial_\nu U) U^{-1} - \frac{i}{g} (\partial_\nu \partial_\mu U) U^{-1} + \\ &\quad + \frac{i}{g} (\partial_\mu U) U^{-1} (\partial_\nu U) U^{-1} \end{aligned}$$



Por fim, no caso de  $\mathbb{L}_{\mu\nu}$ , temos

$$\begin{aligned}\mathbb{L}_{\mu\nu} &= ig \left[ U \mathbf{A}_\mu U^{-1} - \frac{i}{g} (\partial_\mu U) U^{-1} \right] \left[ U \mathbf{A}_\nu U^{-1} - \frac{i}{g} (\partial_\nu U) U^{-1} \right] - ig \left[ U \mathbf{A}_\nu U^{-1} - \frac{i}{g} (\partial_\nu U) U^{-1} \right] \times \\ &\quad \times \left[ U \mathbf{A}_\mu U^{-1} - \frac{i}{g} (\partial_\mu U) U^{-1} \right] \\ &= ig \left[ U \mathbf{A}_\mu \mathbf{A}_\nu U^{-1} - \frac{i}{g} U \mathbf{A}_\mu U^{-1} (\partial_\nu U) U^{-1} - \frac{i}{g} (\partial_\mu U) \mathbf{A}_\nu U^{-1} - \frac{1}{g^2} (\partial_\mu U) U^{-1} (\partial_\nu U) U^{-1} \right] - \\ &\quad - ig \left[ U \mathbf{A}_\nu \mathbf{A}_\mu U^{-1} - \frac{i}{g} U \mathbf{A}_\nu U^{-1} (\partial_\mu U) U^{-1} - \frac{i}{g} (\partial_\nu U) \mathbf{A}_\mu U^{-1} - \frac{1}{g^2} (\partial_\nu U) U^{-1} (\partial_\mu U) U^{-1} \right]\end{aligned}$$

Colocando tudo junto, temos

$$\begin{aligned}F'_{\mu\nu} &= (\partial_\mu U) \mathbf{A}_\nu U^{-1} + U (\partial_\mu \mathbf{A}_\nu) U^{-1} - U \mathbf{A}_\nu U^{-1} (\partial_\mu U) U^{-1} - \frac{i}{g} (\partial_\mu \partial_\nu U) U^{-1} + \\ &\quad + \frac{i}{g} (\partial_\nu U) U^{-1} (\partial_\mu U) U^{-1} - (\partial_\nu U) \mathbf{A}_\mu U^{-1} - U (\partial_\nu \mathbf{A}_\mu) U^{-1} + U \mathbf{A}_\mu U^{-1} (\partial_\nu U) U^{-1} + \\ &\quad + \frac{i}{g} (\partial_\nu \partial_\mu U) U^{-1} - \frac{i}{g} (\partial_\mu U) U^{-1} (\partial_\nu U) U^{-1} - ig U \mathbf{A}_\mu \mathbf{A}_\nu U^{-1} - U \mathbf{A}_\mu U^{-1} (\partial_\nu U) U^{-1} - \\ &\quad - (\partial_\mu U) \mathbf{A}_\nu U^{-1} + \frac{i}{g} (\partial_\mu U) U^{-1} (\partial_\nu U) U^{-1} + ig U \mathbf{A}_\nu \mathbf{A}_\mu U^{-1} + U \mathbf{A}_\nu U^{-1} (\partial_\mu U) U^{-1} + \\ &\quad + (\partial_\nu U) \mathbf{A}_\mu U^{-1} - \frac{i}{g} (\partial_\nu U) U^{-1} (\partial_\mu U) U^{-1} \\ &= U (\partial_\mu \mathbf{A}_\nu) U^{-1} - U (\partial_\nu \mathbf{A}_\mu) U^{-1} - ig U (\mathbf{A}_\mu \mathbf{A}_\nu - \mathbf{A}_\nu \mathbf{A}_\mu) U^{-1} \\ &= U (\partial_\mu \mathbf{A}_\nu - \partial_\nu \mathbf{A}_\mu - ig [\mathbf{A}_\mu, \mathbf{A}_\nu]) U^{-1} \\ &= U F_{\mu\nu} U^{-1}\end{aligned}$$

Portanto, como  $\Phi' = U \Phi U^{-1}$  e  $U^{-1} U = \mathbb{1}$ , temos

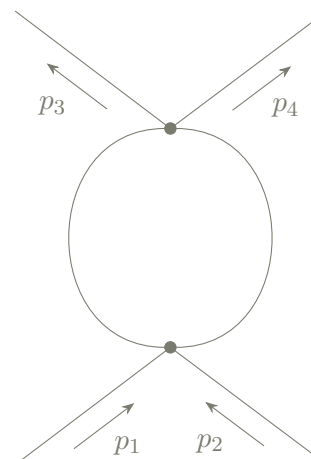
$$F'_{\mu\nu} \Phi' = U F_{\mu\nu} U^{-1} U \Phi = U F_{\mu\nu} \Phi \quad (3.2)$$

## Q. 04 Teoria $\lambda\phi^4$





Na teoria  $\lambda\phi^4$  calcule, em regularização dimensional, com todos os detalhes necessários (incluindo a expansão em torno de  $\epsilon \rightarrow 0$ , com  $D = 4 - 2\epsilon$ ), a integral do diagrama de Feynman da figura ao lado.



- 
- Aula 6 + Aula 11, o diagrama é do canal-t, bem determinado então
  - O diagrama depende dos momentos externos apenas através da variável  $t$

## Q. 05

### Regras de Feynman da QCD

---

Utilizando as regras de Feynman da QCD, mostre que o diagrama de 1 loop (auto-energia) do propagador do quark difere do correspondente ao elétron na QED por um fator multiplicativo  $C_F = \sum_a T_a^2$ . Obs: não é necessário calcular a integração de loop.

---

- Os diagramas de 1 loop do propagador do quark (esquerda) de do elétron (direita) são



- O fato de não precisar calcular a integração de loop indica que existe algum truque pra obter a resposta.



## Q. 06 Espalhamento elástico elétron-múon

Calcule explicitamente a contração  $L^{\alpha\beta}W_{\alpha\beta}$  no espalhamento elástico elétron-múon. Obs: despreze a massa do elétron comparada a outras escalas de energia, assumidas muito maiores.

- Aparentemente é só abrir as contas com as expressões da aula 15

## Q. 07 Amplitude DVCS

Vimos que a amplitude DVCS (deeply-virtual Compton scattering) é dada por

$$T_{\mu\nu} = i \int e^{iqz} \langle p | T \{ J_\mu(z) J_\nu(0) \} | p \rangle d^4z$$

- (a) Partindo da expressão acima, mostre que  $\text{Im}[T_{\alpha\beta}] = \pi W_{\alpha\beta}$ , ou seja, que a parte imaginária da amplitude DVCS é proporcional ao tensor hadrônico do espalhamento inelástico profundo.
- (b) Usando um conjunto completo de estados intermediários entre as correntes eletromagnéticas, argumente por quê

$$\int e^{iqz} \langle p | J_\mu(0) J_\nu(z) | p \rangle$$

é igual a zero. **Dica:** obtenha uma função delta de Dirac e conservação do quadri-momento total.

## Q. 08 Cálculo de diagramas de Feynman

Utilizando as regras de Feynman da QCD (aula 13), calcule os diagramas de Feynman abaixo, que contribuem para o processo  $e^+(k_1)e^-(k_2) \rightarrow \bar{q}(p_1)q(p_2)$ . No segundo diagrama, o glúon emitido



possui momento muito baixo (*soft glúon*). Mostre que os dois diagramas são infinitos, explique a origem desses infinitos, e como lidar com eles para obter um resultado físico consistente.

