

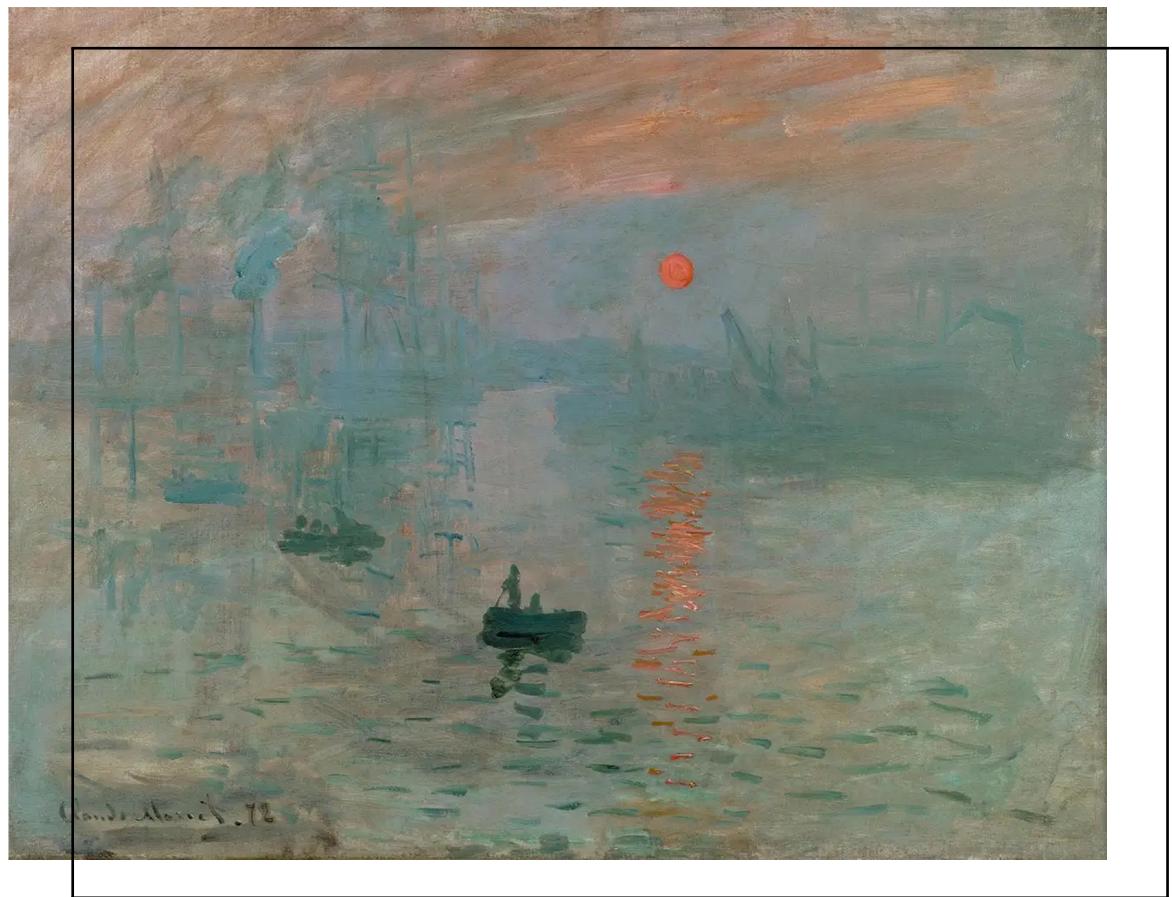
01

01

Lista de Exercícios

Introdução a Física de Hádrons

Lucas R. Ximenes
11917239





Q. 01

Campo de Klein-Gordon

A (densidade de) lagrangiana livre de uma partícula escalar neutra de massa m é dada por

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_0\partial^\mu\phi_0 - \frac{1}{2}m^2\phi_0^2$$

Usando o truque

$$\partial_\mu\phi_0\partial^\mu\phi_0 = g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi_0\partial_\beta\phi_0$$

e o princípio da mínima ação, $\delta S = 0$, mostre que o campo livre ϕ_0 satisfaz a equação de Klein-Gordon.

Para determinar a ação, integramos a densidade de lagrangiana em d^4x , de modo que

$$S = \int \mathcal{L}_0 d^4x$$

Fazendo uma variação na ação δS , como a densidade de lagrangiana $\mathcal{L}_0 \equiv \mathcal{L}_0(\phi_0, \partial_\mu\phi_0)$, a variação fica

$$\delta S = \int \left[\frac{\delta\mathcal{L}_0}{\delta\phi_0} \delta\phi_0 + \frac{\delta\mathcal{L}_0}{\delta(\partial_\mu\phi_0)} \delta(\partial_\mu\phi_0) \right] d^4x$$

Note que

$$\partial_\mu \left[\frac{\delta\mathcal{L}_0}{\delta(\partial_\mu\phi_0)} \delta\phi_0 \right] = \partial_\mu \left[\frac{\delta\mathcal{L}_0}{\delta(\partial_\mu\phi_0)} \right] \delta\phi_0 + \frac{\delta\mathcal{L}_0}{\delta(\partial_\mu\phi_0)} \partial_\mu(\delta\phi_0)$$

Como uma variação δ pode permitir com uma derivada parcial ∂_μ , temos

$$\partial_\mu \left[\frac{\delta\mathcal{L}_0}{\delta(\partial_\mu\phi_0)} \delta\phi_0 \right] = \partial_\mu \left[\frac{\delta\mathcal{L}_0}{\delta(\partial_\mu\phi_0)} \right] \delta\phi_0 + \frac{\delta\mathcal{L}_0}{\delta(\partial_\mu\phi_0)} \delta(\partial_\mu\phi_0)$$

Portanto podemos substituir a variação da ação por

$$\begin{aligned} \delta S &= \int \left\{ \frac{\delta\mathcal{L}_0}{\delta\phi_0} \delta\phi_0 - \partial_\mu \left[\frac{\delta\mathcal{L}_0}{\delta(\partial_\mu\phi_0)} \right] \delta\phi_0 + \partial_\mu \left[\frac{\delta\mathcal{L}_0}{\delta(\partial_\mu\phi_0)} \delta\phi_0 \right] \right\} d^4x \\ &= \int \left\{ \frac{\delta\mathcal{L}_0}{\delta\phi_0} - \partial_\mu \left[\frac{\delta\mathcal{L}_0}{\delta(\partial_\mu\phi_0)} \right] \right\} \delta\phi_0 d^4x + \int \partial_\mu \left[\frac{\delta\mathcal{L}_0}{\delta(\partial_\mu\phi_0)} \delta\phi_0 \right] d^4x \end{aligned}$$



O último termo desta expressão é uma derivada total em todo o espaço-tempo, de modo que ao impormos que nos limites assintóticos o campo desaparece, concluímos que a integração vai dar zero, restando apenas

$$\delta S = \int \left\{ \frac{\delta \mathcal{L}_0}{\delta \phi_0} - \partial_\mu \left[\frac{\delta \mathcal{L}_0}{\delta (\partial_\mu \phi_0)} \right] \right\} \delta \phi_0 \, d^4x$$

O princípio de mínima ação $\delta S = 0$ fornece

$$\delta S = \int \left\{ \frac{\delta \mathcal{L}_0}{\delta \phi_0} - \partial_\mu \left[\frac{\delta \mathcal{L}_0}{\delta (\partial_\mu \phi_0)} \right] \right\} \delta \phi_0 \, d^4x = 0$$

que deve ser satisfeita para qualquer variação $\delta \phi_0$ do campo, logo impomos que o argumento dentro das chaves $\{\dots\}$ é igual a zero, gerando a equação de Euler-Lagrange:

$$\frac{\delta \mathcal{L}_0}{\delta \phi_0} - \partial_\mu \left[\frac{\delta \mathcal{L}_0}{\delta (\partial_\mu \phi_0)} \right] = 0$$

Calculando o primeiro termo com base na densidade de lagrangiana, temos

$$\frac{\delta \mathcal{L}_0}{\delta \phi_0} = \frac{\delta}{\delta \phi_0} \left(-\frac{1}{2} m^2 \phi_0^2 \right) = -\frac{1}{2} m^2 (2\phi_0) = -m^2 \phi_0$$

em que apenas o segundo termo da lagrangiana vai ser relevante, pois o primeiro depende apenas das derivadas do campo. Para o segundo termo da equação de Euler-Lagrange, apenas o primeiro termo da lagrangiana vai ser relevante, de modo que

$$\begin{aligned} \partial_\mu \left[\frac{\delta \mathcal{L}_0}{\delta (\partial_\mu \phi_0)} \right] &= \partial_\mu \left[\frac{\delta}{\delta (\partial_\mu \phi_0)} \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi_0 \partial^\mu \phi_0 \right) \right] = \partial_\mu \left[\frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta (\partial_\mu \phi_0)} (g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi_0 \partial_\beta \phi_0) \right] \\ &= \partial_\mu \left\{ \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \left[\frac{\delta (\partial_\alpha \phi_0)}{\delta (\partial_\mu \phi_0)} \partial_\beta \phi_0 + \partial_\alpha \phi_0 \frac{\delta (\partial_\beta \phi_0)}{\delta (\partial_\mu \phi_0)} \right] \right\} \end{aligned}$$

Sabendo então que

$$\frac{\delta (\partial_\alpha \phi_0)}{\delta (\partial_\mu \phi_0)} = \delta_\alpha^\mu \quad \& \quad \frac{\delta (\partial_\beta \phi_0)}{\delta (\partial_\mu \phi_0)} = \delta_\beta^\mu$$

obtemos

$$\begin{aligned} \partial_\mu \left[\frac{\delta \mathcal{L}_0}{\delta (\partial_\mu \phi_0)} \right] &= \partial_\mu \left[\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\delta_\alpha^\mu \partial_\beta \phi_0 + \delta_\beta^\mu \partial_\alpha \phi_0) \right] = \partial_\mu \left[\frac{1}{2} (g^{\mu\beta} \partial_\beta \phi_0 + g^{\alpha\mu} \partial_\alpha \phi_0) \right] \\ &= \partial_\mu \left[\frac{1}{2} (\partial^\mu \phi_0 + \partial^\mu \phi_0) \right] = \partial_\mu \partial^\mu \phi_0 \end{aligned}$$

Juntando então os resultados na equação de Euler-Lagrange:

$$-m^2 \phi_0 - \partial_\mu \partial^\mu \phi_0 = 0$$

Concluindo que o campo livre ϕ_0 satisfaz a equação de Klein-Gordon

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi_0 = 0 \tag{1.1}$$



Q. 02

Operadores de criação e aniquilação de um campo livre

Em termos de $f_k(x) = \exp(-ikx)/\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}$ em que $\omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{|\mathbf{k}|^2 + m^2}$, a quantização de um campo escalar neutro pode ser expressa em termos dos operadores de criação e aniquilação via

$$\phi_0(x) = \int \frac{1}{(2\pi)^3} \left[a(\mathbf{k}) f_k(x) + a^\dagger(\mathbf{k}) f_k^*(x) \right] d^3k$$

(a) Partindo da equação acima, obtenha as relações

$$a_0(\mathbf{k}) = i \int f_k^*(x) \overset{\leftrightarrow}{\partial}_0 \phi_0(x) d^3x \quad \& \quad a_0^\dagger(\mathbf{k}) = -i \int f_k(x) \overset{\leftrightarrow}{\partial}_0 \phi_0(x) d^3x$$

(b) Demonstre que tanto $a_0(\mathbf{k})$ quanto $a_0^\dagger(\mathbf{k})$ são independentes do tempo.

Antes de determinar os operadores de criação e aniquilação, podemos calcular o momento canonicamente conjugado $\pi_0(x)$ do campo livre $\phi_0(x)$:

$$\pi_0 = \frac{\delta \mathcal{L}_0}{\delta \dot{\phi}_0} = \frac{\delta}{\delta \dot{\phi}_0} \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi_0 \partial^\mu \phi_0 - \frac{1}{2} m^2 \phi_0^2 \right) = \frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta \dot{\phi}_0} \left[\dot{\phi}_0^2 - \nabla \phi_0 \cdot \nabla \phi_0 - m^2 \phi_0^2 \right] = \dot{\phi}_0$$

Portanto

$$\pi_0(x) = \int \frac{1}{(2\pi)^3} \left[a_0(\mathbf{k}) \partial_0 f_k(x) + a_0^\dagger(\mathbf{k}) \partial_0 f_k^*(x) \right] d^3k$$

onde

$$\frac{\partial f_k(x)}{\partial t} = \sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}} \frac{\partial}{\partial t} (e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = -i\omega_{\mathbf{k}} \sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}} e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = -i\omega_{\mathbf{k}} f_k(x) \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial f_k^*(x)}{\partial t} = \sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}} \frac{\partial}{\partial t} (e^{+i\omega_{\mathbf{k}}t}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = +i\omega_{\mathbf{k}} \sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}} e^{i\omega_{\mathbf{k}}t-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = +i\omega_{\mathbf{k}} f_k^*(x) \quad (2.2)$$

Concluindo que

$$\pi_0(x) = \int \frac{i\omega_{\mathbf{k}}}{(2\pi)^3} \left[-a_0(\mathbf{k}) f_k(x) + a_0^\dagger(\mathbf{k}) f_k^*(x) \right] d^3k$$

(a) Para determinar os operadores, podemos pensar em escrevê-los em função dos campos livres $\phi_0(x)$ e $\pi_0(x)$, onde para isso fazemos uma transformada de Fourier inversa no espaço nestes campos. No caso do campo $\phi_0(x)$, temos

$$\int \phi_0(x) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3x = \int \left\{ \int \frac{1}{(2\pi)^3} \left[a_0(\mathbf{k}') f_{k'}(x) + a_0^\dagger(\mathbf{k}') f_{k'}^*(x) \right] d^3k' \right\} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3x$$



Expandindo $f_k(x)$, a expressão fica

$$\begin{aligned} \int \phi_0(x) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3x &= \iint \frac{1}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\mathbf{k}'}}} \left[a_0(\mathbf{k}') e^{-i\omega_{\mathbf{k}'} t + i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}} + a_0^\dagger(\mathbf{k}') e^{i\omega_{\mathbf{k}'} t - i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}} \right] e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3k' d^3x \\ &= \iint \frac{e^{-i\omega_{\mathbf{k}'} t}}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\mathbf{k}'}}} \left[a_0(\mathbf{k}') e^{i(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{x}} + a_0^\dagger(\mathbf{k}') e^{2i\omega_{\mathbf{k}'} t} e^{-i(\mathbf{k}' + \mathbf{k}) \cdot \mathbf{x}} \right] d^3x d^3k' \end{aligned}$$

Podemos separar as integrais em d^3x , de modo que

$$\int \phi_0(x) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3x = \int \frac{e^{-i\omega_{\mathbf{k}'} t}}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\mathbf{k}'}}} \left[a_0(\mathbf{k}') \int e^{i(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{x}} d^3x + a_0^\dagger(\mathbf{k}') e^{2i\omega_{\mathbf{k}'} t} \int e^{-i(\mathbf{k}' + \mathbf{k}) \cdot \mathbf{x}} d^3x \right] d^3k'$$

Note então que as integrais em d^3x são, juntamente com o fator $1/(2\pi)^3$, distribuições delta de Dirac em 3 dimensões, tal que

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{\pm i(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{x}} d^3x &= \delta^3(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \\ \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{\pm i(\mathbf{k}' + \mathbf{k}) \cdot \mathbf{x}} d^3x &= \delta^3(\mathbf{k}' + \mathbf{k}) \end{aligned}$$

Sendo assim, obtemos

$$\int \phi_0(x) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3x = \int \frac{e^{-i\omega_{\mathbf{k}'} t}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}'}}} \left[a_0(\mathbf{k}') \delta^3(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) + a_0^\dagger(\mathbf{k}') e^{2i\omega_{\mathbf{k}'} t} \delta^3(\mathbf{k}' + \mathbf{k}) \right] d^3k'$$

Podemos notar também que $\omega_{-\mathbf{k}} = \sqrt{|-\mathbf{k}|^2 + m^2} = \omega_{\mathbf{k}}$, logo ao performar a integral obtemos

$$\begin{aligned} \int \phi_0(x) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3x &= \frac{e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \left[a_0(\mathbf{k}) + a_0^\dagger(-\mathbf{k}) e^{2i\omega_{-\mathbf{k}} t} \right] \\ &= \frac{e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \left[a_0(\mathbf{k}) + a_0^\dagger(\mathbf{k}) e^{2i\omega_{\mathbf{k}} t} \right] \end{aligned}$$

No caso do momento conjugado, temos

$$\begin{aligned} \int \pi_0(x) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3x &= \int \left\{ \int \frac{i\omega_{\mathbf{k}'}}{(2\pi)^3} \left[-a_0(\mathbf{k}') f_k(x) + a_0^\dagger(\mathbf{k}') f_{k'}^*(x) \right] d^3k' \right\} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3x \\ &= \iint \frac{i\omega_{\mathbf{k}'} e^{-i\omega_{\mathbf{k}'} t}}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\mathbf{k}'}}} \left[-a_0(\mathbf{k}') e^{i(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{x}} + a_0^\dagger(\mathbf{k}') e^{2i\omega_{\mathbf{k}'} t} e^{-i(\mathbf{k}' + \mathbf{k}) \cdot \mathbf{x}} \right] d^3x d^3k' \\ &= -i \int \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{k}'}}{2}} e^{-i\omega_{\mathbf{k}'} t} \left[a_0(\mathbf{k}') \delta^3(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) - a_0^\dagger(\mathbf{k}') e^{2i\omega_{\mathbf{k}'} t} \delta^3(\mathbf{k}' + \mathbf{k}) \right] d^3k' \\ &= -i \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2}} e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t} \left[a_0(\mathbf{k}) - a_0^\dagger(-\mathbf{k}) e^{2i\omega_{-\mathbf{k}} t} \right] \\ &= -i \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2}} e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t} \left[a_0(\mathbf{k}) - a_0^\dagger(-\mathbf{k}) e^{2i\omega_{\mathbf{k}} t} \right] \end{aligned}$$



Com estes resultados, podemos obter as formas

$$\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}} e^{i\omega_{\mathbf{k}} t} \int \phi_0(x) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d^3x = a_0(\mathbf{k}) + a_0^\dagger(-\mathbf{k}) e^{2i\omega_{\mathbf{k}} t}$$

$$i\sqrt{\frac{2}{\omega_{\mathbf{k}}}} e^{i\omega_{\mathbf{k}} t} \int \pi_0(x) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d^3x = a_0(\mathbf{k}) - a_0^\dagger(-\mathbf{k}) e^{2i\omega_{\mathbf{k}} t}$$

A exponencial $e^{i\omega_{\mathbf{k}} t}$ pode se juntar à $e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}$ sob a forma e^{ikx} , pois a integral está sendo feita apenas em d^3x , de modo que as equações ficam

$$\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}} \int \phi_0(x) e^{ikx} d^3x = a_0(\mathbf{k}) + a_0^\dagger(-\mathbf{k}) e^{2i\omega_{\mathbf{k}} t}$$

$$i\sqrt{\frac{2}{\omega_{\mathbf{k}}}} \int \pi_0(x) e^{ikx} d^3x = a_0(\mathbf{k}) - a_0^\dagger(-\mathbf{k}) e^{2i\omega_{\mathbf{k}} t}$$

Somando as duas equações:

$$2a_0(\mathbf{k}) = i\sqrt{\frac{2}{\omega_{\mathbf{k}}}} \int \pi_0(x) e^{ikx} d^3x + \sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}} \int \phi_0(x) e^{ikx} d^3x$$

Temos então

$$\begin{aligned} a_0(\mathbf{k}) &= \frac{i}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \int \pi_0(x) e^{ikx} d^3x + \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2}} \int \phi_0(x) e^{ikx} d^3x \\ &= \frac{i}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \int \partial_0 \phi_0(x) e^{ikx} d^3x + \frac{\omega_{\mathbf{k}}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \int \phi_0(x) e^{ikx} d^3x \\ &= i \int \partial_0 \phi_0(x) f_k^*(x) d^3x + \omega_{\mathbf{k}} \int \phi_0(x) f_k^*(x) d^3x \end{aligned}$$

Usando a (2.2),

$$-i\partial_0 f_k^*(x) = \omega_{\mathbf{k}} f_k^*(x)$$

O que modifica a forma do operador na forma

$$\begin{aligned} a_0(\mathbf{k}) &= i \int \partial_0 \phi_0(x) f_k^*(x) d^3x - i \int \phi_0(x) \partial_0 f_k^*(x) d^3x \\ &\stackrel{|}{=} i \int [f_k^*(x) \partial_0 \phi_0(x) - \partial_0 f_k^*(x) \phi_0(x)] d^3x \end{aligned}$$

Pela notação

$$A \overset{\leftrightarrow}{\partial}_0 B = A(\partial_0 B) - (\partial_0 A)B$$

Podemos concluir que o operador de aniquilação $a_0(\mathbf{k})$ admite ser escrito sob a forma

$$a_0(\mathbf{k}) = i \int f_k^*(x) \overset{\leftrightarrow}{\partial}_0 \phi_0(x) d^3x \quad (2.3)$$



Como estamos considerando um campo $\phi_0(x)$ real, temos $\phi_0^\dagger(x) = \phi_0(x)$, portanto ao calcular $a_0^\dagger(\mathbf{k})$, trocaremos $i \mapsto -i$ e $f_k^*(x) \mapsto f_k(x)$, concluindo que

$$a_0^\dagger(\mathbf{k}) = -i \int f_k(x) \overset{\leftrightarrow}{\partial}_0 \phi(x) d^3x \quad (2.4)$$

(b) Calculando a derivada de $a_0(\mathbf{k})$ em relação ao tempo, temos que como a integral é feita apenas nas coordenadas espaciais, a derivação pode comutar com a integral, de modo que

$$\begin{aligned} \partial_0 a_0(\mathbf{k}) &= i \int \partial_0 \left[f_k^*(x) \overset{\leftrightarrow}{\partial}_0 \phi_0(x) \right] d^3x \\ &= i \int \partial_0 \left[f_k^*(x) \partial_0 \phi_0(x) - \partial_0 f_k^*(x) \phi_0(x) \right] d^3x \\ &= i \int \left[\partial_0 f_k^*(x) \partial_0 \phi_0(x) + f_k^*(x) \partial_0^2 \phi_0(x) - \partial_0^2 f_k^*(x) \phi_0(x) - \partial_0 f_k^*(x) \partial_0 \phi_0(x) \right] d^3x \\ &= i \int \left[f_k^*(x) \partial_0^2 \phi_0(x) - \partial_0^2 f_k^*(x) \phi_0(x) \right] d^3x \end{aligned}$$

A derivada temporal de segunda ordem em f_k^* explicitamente fica

$$\partial_0^2 f_k^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \partial_0^2 e^{ikx} = \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} (i\omega_{\mathbf{k}})^2 e^{ikx} = -\omega_{\mathbf{k}}^2 f_k^*(x) \quad (2.5)$$

ou seja

$$\partial_0 a_0(\mathbf{k}) = i \int f_k^*(x) (\partial_0^2 + \omega_{\mathbf{k}}^2) \phi_0(x) d^3x$$

Como $\omega_{\mathbf{k}}^2 = |\mathbf{k}|^2 + m^2$, reescrevemos

$$\partial_0 a_0(\mathbf{k}) = i \int f_k^*(x) (\partial_0^2 + |\mathbf{k}|^2 + m^2) \phi_0(x) d^3x$$

Note que

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left[f_k^*(x) \overset{\leftrightarrow}{\nabla} \phi_0(x) \right] &= \nabla \cdot \left[f_k^*(x) \nabla \phi_0(x) - \nabla f_k^*(x) \phi_0(x) \right] \\ &= \nabla f_k^*(x) \cdot \nabla \phi_0(x) + f_k^*(x) \nabla^2 \phi_0(x) - \nabla^2 f_k^*(x) \phi_0(x) - \nabla f_k^*(x) \cdot \nabla \phi_0(x) \\ &= f_k^*(x) \nabla^2 \phi_0(x) - \nabla^2 f_k^*(x) \phi_0(x) \end{aligned}$$

onde

$$\nabla^2 f_k^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \nabla^2 e^{ikx} = \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} (-i\mathbf{k}) \cdot (-i\mathbf{k}) e^{ikx} = -|\mathbf{k}|^2 f_k^*(x)$$

Portanto

$$\nabla \cdot \left[f_k^*(x) \overset{\leftrightarrow}{\nabla} \phi_0(x) \right] = f_k^*(x) \nabla^2 \phi_0(x) + |\mathbf{k}|^2 f_k^*(x) \phi_0(x)$$



Como o lado esquerdo desta equação é uma derivada total no espaço, temos que dentro de uma integral em d^3x esse termo vai pra zero pela hipótese do campo desaparecer nos limites assintóticos, de modo que podemos fazer a substituição

$$|\mathbf{k}|^2 f_k^*(x) \phi_0(x) \mapsto -f_k^*(x) \nabla^2 \phi_0(x)$$

dentro da integral em $\partial_0 a_0(\mathbf{k})$, logo

$$\begin{aligned} \partial_0 a_0(\mathbf{k}) &= i \int f_k^*(x) (\partial_0^2 - \nabla^2 + m^2) \phi_0(x) d^3x \\ &\stackrel{|}{=} i \int f_k^*(x) (\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi_0(x) d^3x \end{aligned}$$

E como $\phi_0(x)$ é um campo livre, equação de Klein-Gordon é satisfeita, $(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi_0(x) = 0$, concluindo que

$$\partial_0 a_0(\mathbf{k}) = 0 \Rightarrow a_0(\mathbf{k}) \text{ é independente do tempo} \quad (2.6)$$

O raciocínio para $a_0^\dagger(\mathbf{k})$ é idêntico, de modo que a alteração pode ser visualizada por

$$\begin{aligned} \partial_0 a_0(\mathbf{k}) &\mapsto \partial_0 a_0^\dagger(\mathbf{k}) \\ i \int f_k^*(x) (\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi_0(x) d^3x &\mapsto -i \int f_k(x) (\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi_0(x) d^3x \end{aligned}$$

Portanto

$$\partial_0 a_0^\dagger(\mathbf{k}) = 0 \Rightarrow a_0^\dagger(\mathbf{k}) \text{ é independente do tempo} \quad (2.7)$$



Q. 03

Propagador de um campo livre

O propagador de uma partícula escalar neutra pode ser obtida via a seguinte receita:

$$\mathcal{L}_0 \Rightarrow \frac{1}{2} \phi_0 M \phi_0 + \partial_\mu [\dots], \quad \tilde{\Delta}(k) \stackrel{\partial_\mu \rightarrow -ik_\mu}{=} [M]^{-1}$$

Mostre que:

- (a) $\tilde{\Delta}(k) = 1/(k^2 - m^2 + i\varepsilon)$, em que ε é um parâmetro infinitesimal que previne a singularidade do propagador em $k^2 = m^2$.
- (b) No espaço de coordenadas o propagador é escrito como

$$i\Delta(x-y) = i \int \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik(x-y)}}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} d^4k$$

Mostre que a integral abaixo define a função degrau de Heaviside

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \frac{e^{-ik_0 z_0}}{k_0^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2 + i\varepsilon} dk_0 = -i\Theta(z_0) \frac{e^{-i\omega_{\mathbf{k}} z_0}}{2\omega_{\mathbf{k}}} - i\Theta(-z_0) \frac{e^{i\omega_{\mathbf{k}} z_0}}{2\omega_{\mathbf{k}}}$$

- (c) A partir do resultado acima, obtenha a relação

$$i\Delta(x-y) = \int \frac{1}{(2\pi)^3} [\Theta(x_0 - y_0) f_k(x) f_k^*(y) + \Theta(y_0 - x_0) f_k(y) f_k^*(x)] d^3k$$

em que fixamos $k_0 = \omega_{\mathbf{k}}$.

Nota: Este resultado corresponde ao propagador clássico, com os campos ainda não quantizados. Após a segunda quantização o propagador assume a forma

$$i\Delta(x-y) = \langle 0 | T\{\phi_0(x)\phi_0(y)\} | 0 \rangle$$

em que

$$T\{\phi_0(x)\phi_0(y)\} = \begin{cases} \phi_0(x)\phi_0(y) & , \text{ se } x_0 > y_0 \\ \phi_0(y)\phi_0(x) & , \text{ se } y_0 > x_0 \end{cases}$$

- (a) Considerando a lagrangiana livre de uma partícula escalar neutra de massa m , podemos escrever que

$$\partial_\mu(\phi_0 \partial^\mu \phi_0) = \partial_\mu \phi_0 \partial^\mu \phi_0 + \phi_0 \partial_\mu \partial^\mu \phi_0$$



ou seja

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_0 &= \frac{1}{2} \partial_\mu (\phi_0 \partial^\mu \phi_0) - \frac{1}{2} \phi_0 \partial_\mu \partial^\mu \phi_0 - \frac{1}{2} \phi_0 m^2 \phi_0 \\ &= \frac{1}{2} \partial_\mu (\phi_0 \partial^\mu \phi_0) + \frac{1}{2} \phi_0 (-\partial_\mu \partial^\mu - m^2) \phi_0\end{aligned}$$

Como o primeiro termo é uma derivada total, ao calcularmos a ação com \mathcal{L}_0 , vamos ter a integral em todo o espaço-tempo de uma derivada total, e como sempre assumimos que um campo desaparece nos infinitos, esta integração vai se anular, de tal forma que

$$S_0 = \int \frac{1}{2} \phi_0 (-\partial_\mu \partial^\mu - m^2) \phi_0 d^4x$$

Temos então uma lagrangiana equivalente à \mathcal{L}_0 da forma

$$\mathcal{L}'_0 = \frac{1}{2} \phi_0 (-\partial_\mu \partial^\mu - m^2) \phi_0$$

Sendo $(-\partial_\mu \partial^\mu - m^2)$ um operador dentro da lagrangiana, o propagador associado a ele, $\Delta(x - y)$, vai ser uma função de Green de dois pontos desse operador, ou seja, satisfaz a equação

$$(-\partial_\mu \partial^\mu - m^2) \Delta(x - y) = \delta^4(x - y)$$

Considerando uma transformada de Fourier no propagador, temos

$$\Delta(x - y) = \int \frac{1}{(2\pi)^4} \tilde{\Delta}(k) e^{-ik(x-y)} d^4k$$

Então

$$\begin{aligned}(-\partial_\mu \partial^\mu - m^2) \int \frac{1}{(2\pi)^4} \tilde{\Delta}(k) e^{-ik(x-y)} d^4k &= \delta^4(x - y) \\ \int \frac{1}{(2\pi)^4} \tilde{\Delta}(k) [\partial_\mu \partial^\mu e^{-ik(x-y)} - m^2 e^{-ik(x-y)}] d^4k &= \int \frac{1}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} d^4k \\ \int \frac{1}{(2\pi)^4} \tilde{\Delta}(k) (k^2 - m^2) e^{-ik(x-y)} d^4k &= \end{aligned}$$

Comparando os dois lados da equação, obtemos que

$$\tilde{\Delta}(k) = \frac{1}{k^2 - m^2}$$

Porém, possuímos 2 singularidades nesta expressão, que ocorrem quando $k^2 = m^2$, que equivale a $k_0^2 - |\mathbf{k}|^2 = m^2$, ou seja $k_0 = \pm \sqrt{|\mathbf{k}|^2 + m^2} = \pm \omega_{\mathbf{k}}$. Pela existência dessas singularidades que ocorrem no eixo real, adicionamos ao denominador uma quantidade no eixo imaginário $+i\varepsilon$ para regularizar a função, em que $\varepsilon > 0$ e $\epsilon \rightarrow 0$, concluindo que



$$\tilde{\Delta}(k) = \frac{1}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \quad (3.1)$$

(b) Sabendo a forma do propagador no espaço de coordenadas, podemos separar a parte espacial da temporal de modo que

$$i\Delta(x-y) = i \int \frac{1}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} d^3k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \frac{e^{-ik_0(x_0-y_0)}}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} dk_0$$

Podemos modificar o denominador da segunda integral de modo que $k^2 - m^2 = k_0^2 - |\mathbf{k}|^2 - m^2 = k_0^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2$ e denotar por $z_0 := x_0 - y_0$, resultando então em

$$i\Delta(x-y) = i \int \frac{1}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} d^3k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \frac{e^{-ik_0 z_0}}{k_0^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2 + i\varepsilon} dk_0$$

Nesta forma, temos que os polos se encontram em $k_0 = \pm\sqrt{\omega_{\mathbf{k}}^2 - i\varepsilon}$, que como ε é muito pequeno, podemos aproximar

$$k_0 \approx \pm \left(\omega_{\mathbf{k}} - \frac{i\varepsilon}{2\omega_{\mathbf{k}}} \right)$$

No plano complexo, o polo em $k_0 = \omega_{\mathbf{k}} - \frac{i\varepsilon}{2\omega_{\mathbf{k}}} = \kappa_1$ pertence ao semiplano inferior $\Im[k_0] < 0$ e o polo $k_0 = -\omega_{\mathbf{k}} + \frac{i\varepsilon}{2\omega_{\mathbf{k}}} = \kappa_2$ pertence ao semiplano superior $\Im[k_0] > 0$. Ao considerarmos que a integração está sendo feita no plano complexo, temos que k_0 possui parte real e imaginária, portanto

$$k_0 = \Re[k_0] + i\Im[k_0]$$

Com isso, a exponencial $e^{-ik_0 z_0}$ é da forma

$$e^{-ik_0 z_0} = e^{-i(\Re[k_0] - i\Im[k_0])z_0}$$

implicando que para $z_0 > 0$ a exponencial decai no semiplano inferior e para $z_0 < 0$ decai no semiplano superior. Definindo a função

$$f(k_0) = \frac{e^{-ik_0 z_0}}{k_0^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2 + i\varepsilon} = \frac{e^{-ik_0 z_0}}{(k_0 - \kappa_1)(k_0 - \kappa_2)}$$

temos que o resíduo de $f(k_0)$ no polo $k_0 = \kappa_1$ ($z_0 > 0$)

$$\text{Res}(f, \kappa_1) = \lim_{k_0 \rightarrow \kappa_1} (k_0 - \kappa_1) f(k_0) = \frac{e^{-i\kappa_1 z_0}}{\kappa_1 - \kappa_2} = \frac{e^{-i(\omega_{\mathbf{k}} - \frac{i\varepsilon}{2\omega_{\mathbf{k}}})z_0}}{2\omega_{\mathbf{k}}} = \frac{e^{-i\omega_{\mathbf{k}} z_0}}{2\omega_{\mathbf{k}}} e^{-\frac{\varepsilon z_0}{2\omega_{\mathbf{k}}}}$$

Como $\varepsilon \rightarrow 0$, podemos aproximar a segunda exponencial para 1, de modo que

$$\text{Res}(f, \kappa_1) \approx \frac{e^{-i\omega_{\mathbf{k}} z_0}}{2\omega_{\mathbf{k}}}$$



Calculado o resíduo, temos para $z_0 > 0$, ao orientar a integral no sentido horário, que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ik_0 z_0}}{k_0^2 - \omega_k^2 + i\varepsilon} dk_0 = -2\pi i \cdot \text{Res}(f, \kappa_1) = -\frac{2\pi i}{2\omega_k} e^{-i\omega_k z_0}$$

Já no polo $k_0 = \kappa_2$ ($z_0 < 0$):

$$\text{Res}(f, \kappa_2) = \lim_{k_0 \rightarrow \kappa_2} (k_0 - \kappa_2) f(k_0) = \frac{e^{-i\kappa_2 z_0}}{\kappa_2 - \kappa_1} = \frac{e^{-i(-\omega_k + \frac{i\varepsilon}{2\omega_k}) z_0}}{-2\omega_k} = -\frac{e^{i\omega_k z_0}}{2\omega_k} e^{\frac{\varepsilon z_0}{2\omega_k}}$$

em que podemos tomar novamente $\varepsilon \rightarrow 0$ e aproximar

$$\text{Res}(f, \kappa_2) \approx -\frac{e^{i\omega_k z_0}}{2\omega_k}$$

Então para $z_0 < 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ik_0 z_0}}{k_0^2 - \omega_k^2 + i\varepsilon} dk_0 = 2\pi i \cdot \text{Res}(f, \kappa_2) = -\frac{2\pi i}{2\omega_k} e^{i\omega_k z_0}$$

Para considerar tanto $z_0 > 0$ quanto $z_0 < 0$ na integração, adicionamos a cada parte uma função de Heaviside: $\Theta(z_0)$ para $z_0 > 0$ e $\Theta(-z_0)$ para $z_0 < 0$, concluindo que

$$\int \frac{1}{2\pi} \frac{e^{-ik_0 z_0}}{k_0^2 - \omega_k^2 + i\varepsilon} dk_0 = -i\Theta(z_0) \frac{e^{-i\omega_k z_0}}{2\omega_k} - i\Theta(-z_0) \frac{e^{i\omega_k z_0}}{2\omega_k} \quad (3.2)$$

(c) Com o resultado (3.2), podemos escrever o propagador sob a forma

$$i\Delta(x - y) = i \int \frac{1}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} d^3 k \left[-i\Theta(z_0) \frac{e^{-i\omega_k z_0}}{2\omega_k} - i\Theta(-z_0) \frac{e^{i\omega_k z_0}}{2\omega_k} \right]$$

em que como $z_0 = x_0 - y_0$ e não há dependência em \mathbf{k} , podemos inserir o termo entre colchetes $[\dots]$ dentro da integral tal que

$$\begin{aligned} i\Delta(x - y) &= \int \frac{1}{(2\pi)^3} \left[\Theta(x_0 - y_0) \frac{e^{-i\omega_k(x_0 - y_0) + i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})}}{2\omega_k} + \Theta(y_0 - x_0) \frac{e^{i\omega_k(x_0 - y_0) + i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})}}{2\omega_k} \right] d^3 k \\ &= \int \frac{1}{(2\pi)^3} \left[\Theta(x_0 - y_0) \frac{e^{-i\omega_k(x_0 - y_0) + i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})}}{2\omega_k} + \Theta(y_0 - x_0) \frac{e^{-i\omega_k(y_0 - x_0) + i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})}}{2\omega_k} \right] d^3 k \end{aligned}$$

Fazendo a mudança $\mathbf{k} \mapsto -\mathbf{k}$ no segundo termo (essa transformação mantém a integral invariante), temos

$$\begin{aligned} i\Delta(x - y) &= \int \frac{1}{(2\pi)^3} \left[\Theta(x_0 - y_0) \frac{e^{-i\omega_k(x_0 - y_0) + i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})}}{2\omega_k} + \Theta(y_0 - x_0) \frac{e^{-i\omega_k(y_0 - x_0) + i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x})}}{2\omega_k} \right] d^3 k \\ &= \int \frac{1}{(2\pi)^3} \left[\Theta(x_0 - y_0) \frac{e^{-i\omega_k x_0 + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}}{\sqrt{2\omega_k}} \frac{e^{i\omega_k y_0 - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{y}}}{\sqrt{2\omega_k}} + \Theta(y_0 - x_0) \frac{e^{-i\omega_k y_0 + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{y}}}{\sqrt{2\omega_k}} \frac{e^{i\omega_k x_0 - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}}{\sqrt{2\omega_k}} \right] d^3 k \end{aligned}$$



Concluindo que

$$i\Delta(x - y) = \int \frac{1}{(2\pi)^3} [\Theta(x_0 - y_0) f_k(x) f_k^*(y) + \Theta(y_0 - x_0) f_k(y) f_k^*(x)] d^3k \quad (3.3)$$



Q. 04

Ordenamento normal de um campo livre

O ordenamento normal dos campos no mesmo ponto do espaço-tempo evita o surgimento de certas singularidades, como a chamada “energia do ponto zero” da hamiltoniana de um dado sistema. Define-se $\phi_0(x) = \phi_0^+(x) + \phi_0^-(x)$ tais que

$$\phi_0^+(x) = \int \frac{1}{(2\pi)^3} a(\mathbf{k}) f_k(x) d^3k \quad (\text{freq. positiva}),$$

$$\phi_0^-(x) = \int \frac{1}{(2\pi)^3} a^\dagger(\mathbf{k}) f_k^*(x) d^3k \quad (\text{freq. negativa}).$$

O produto normal de dois campos move os termos de frequência positiva para a direita, e os termos de frequência negativa, à esquerda. Partindo da hamiltoniana de uma partícula livre,

$$H = \int \frac{1}{2} \left[\pi_0^2 + (\nabla \phi_0)^2 + m^2 \phi_0^2 \right] d^3x$$

mostre que seu ordenamento normal elimina a energia de ponto zero, ou seja,

$$:H: = \int \frac{1}{(2\pi)^3} \omega_{\mathbf{k}} a^\dagger(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}) d^3k$$

Partindo da hamiltoniana de uma partícula livre, podemos separá-la em 3 integrais, de modo que

$$H = \frac{1}{2} \left[\int \pi_0^2 d^3x + \int (\nabla \phi_0)^2 d^3x + \int m^2 \phi_0^2 d^3x \right] = \frac{1}{2} (I_1 + I_2 + I_3)$$

O primeiro termo vai ficar

$$\begin{aligned} I_1 &= - \iiint \frac{\omega_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}'}}{(2\pi)^6} \left[a_0(\mathbf{k}) f_k(x) - a_0^\dagger(\mathbf{k}) f_k^*(x) \right] \left[a_0(\mathbf{k}') f_{k'}(x) - a_0^\dagger(\mathbf{k}') f_{k'}^*(x) \right] d^3k d^3k' d^3x \\ &= - \iiint \frac{\omega_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}'}}{(2\pi)^6} \left[a_0(\mathbf{k}) a_0(\mathbf{k}') f_k(x) f_{k'}(x) - a_0(\mathbf{k}) a_0^\dagger(\mathbf{k}') f_k(x) f_{k'}^*(x) - \right. \\ &\quad \left. - a_0^\dagger(\mathbf{k}) a_0(\mathbf{k}') f_k^*(x) f_{k'}(x) + a_0^\dagger(\mathbf{k}) a_0^\dagger(\mathbf{k}') f_k^*(x) f_{k'}^*(x) \right] d^3k d^3k' d^3x \end{aligned}$$

Lembrando da forma de $f_k(x)$, temos que os produtos entre estas funções são

$$f_k(x) f_{k'}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}} \sqrt{2\omega_{\mathbf{k}'}}} e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} e^{-i\omega_{\mathbf{k}'}t + i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}} = \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}} \sqrt{2\omega_{\mathbf{k}'}}} e^{-i(\omega_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{k}'})t} e^{i(\mathbf{k} + \mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}}$$



$$\begin{aligned}
f_k(x)f_{k'}^*(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}'}}} e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} e^{i\omega_{\mathbf{k}'}t-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}} = \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}'}}} e^{-i(\omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{k}'})t} e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} \\
f_k^*(x)f_{k'}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}'}}} e^{i\omega_{\mathbf{k}}t-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} e^{-i\omega_{\mathbf{k}'}t+i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}} = \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}'}}} e^{i(\omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{k}'})t} e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} \\
f_k^*(x)f_{k'}^*(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}'}}} e^{i\omega_{\mathbf{k}}t-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} e^{i\omega_{\mathbf{k}'}t-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}} = \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}'}}} e^{i(\omega_{\mathbf{k}}+\omega_{\mathbf{k}'})t} e^{-i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}}
\end{aligned}$$

Note então que as integrais em d^3x podem ser feitas apenas nos produtos de $f_k(x)$, pois os operadores de criação e aniquilação independem de \mathbf{x} , logo, junto com um fator $1/(2\pi)^3$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(2\pi)^3} \int f_k(x)f_{k'}(x) d^3x &= \frac{e^{-i(\omega_{\mathbf{k}}+\omega_{\mathbf{k}'})t}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}'}}} \int \frac{1}{(2\pi)^3} e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} d^3x = \frac{e^{-i(\omega_{\mathbf{k}}+\omega_{\mathbf{k}'})t}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}'}}} \delta^3(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \\
\frac{1}{(2\pi)^3} \int f_k(x)f_{k'}^*(x) d^3x &= \frac{e^{-i(\omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{k}'})t}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}'}}} \int \frac{1}{(2\pi)^3} e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} d^3x = \frac{e^{-i(\omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{k}'})t}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}'}}} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \\
\frac{1}{(2\pi)^3} \int f_k^*(x)f_{k'}(x) d^3x &= \frac{e^{i(\omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{k}'})t}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}'}}} \int \frac{1}{(2\pi)^3} e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} d^3x = \frac{e^{i(\omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{k}'})t}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}'}}} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \\
\frac{1}{(2\pi)^3} \int f_k^*(x)f_{k'}^*(x) d^3x &= \frac{e^{i(\omega_{\mathbf{k}}+\omega_{\mathbf{k}'})t}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}'}}} \int \frac{1}{(2\pi)^3} e^{-i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} d^3x = \frac{e^{i(\omega_{\mathbf{k}}+\omega_{\mathbf{k}'})t}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}'}}} \delta^3(\mathbf{k} + \mathbf{k}')
\end{aligned}$$

Então a integral de π_0^2 fica

$$I_1 = - \iint \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{\omega_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}'}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}'}}} \left[a_0(\mathbf{k})a_0(\mathbf{k}')e^{-i(\omega_{\mathbf{k}}+\omega_{\mathbf{k}'})t}\delta^3(\mathbf{k} + \mathbf{k}') - a_0(\mathbf{k})a_0^\dagger(\mathbf{k}')e^{-i(\omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{k}'})t}\delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') - a_0^\dagger(\mathbf{k})a_0(\mathbf{k}')e^{i(\omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{k}'})t}\delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') + a_0^\dagger(\mathbf{k})a_0^\dagger(\mathbf{k}')e^{i(\omega_{\mathbf{k}}+\omega_{\mathbf{k}'})t}\delta^3(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \right] d^3k d^3k'$$

Realizando a integração em d^3k' , e usando que $\omega_{\mathbf{k}} = \omega_{-\mathbf{k}}$ por construção, temos

$$I_1 = - \int \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2} \left[a_0(\mathbf{k})a_0(-\mathbf{k})e^{-2i\omega_{\mathbf{k}}t} - a_0(\mathbf{k})a_0^\dagger(\mathbf{k}) - a_0^\dagger(\mathbf{k})a_0(\mathbf{k}) + a_0^\dagger(\mathbf{k})a_0^\dagger(-\mathbf{k})e^{2i\omega_{\mathbf{k}}t} \right] d^3k$$

Antes de performar a segunda integral da hamiltoniana, temos

$$\begin{aligned}
\nabla\phi_0 &= \int \frac{1}{(2\pi)^3} \left[a_0(\mathbf{k}) \frac{e^{-i\omega_{\mathbf{k}}}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \nabla(e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}) + a_0^\dagger(\mathbf{k}) \frac{e^{i\omega_{\mathbf{k}}t}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \nabla(e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}) \right] d^3k \\
&\stackrel{|}{=} \int \frac{i\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left[a_0(\mathbf{k})f_k(x) - a_0^\dagger(\mathbf{k})f_k^*(x) \right] d^3k
\end{aligned}$$



Sendo assim

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \iiint \frac{-\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}'}{(2\pi)^6} \left[a_0(\mathbf{k}) f_k(x) - a_0^\dagger(\mathbf{k}) f_k^*(x) \right] \left[a_0(\mathbf{k}') f_{k'}(x) - a_0^\dagger(\mathbf{k}') f_{k'}^*(x) \right] d^3 k d^3 k' d^3 x \\
 &= \iiint \frac{-\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}'}{(2\pi)^6} \left[a_0(\mathbf{k}) a_0(\mathbf{k}') f_k(x) f_{k'}(x) - a_0(\mathbf{k}) a_0^\dagger(\mathbf{k}') f_k(x) f_{k'}^*(x) - \right. \\
 &\quad \left. - a_0^\dagger(\mathbf{k}) a_0(\mathbf{k}') f_k^*(x) f_{k'}(x) + a_0^\dagger(\mathbf{k}) a_0^\dagger(\mathbf{k}') f_k^*(x) f_{k'}^*(x) \right] d^3 k d^3 k' d^3 x \\
 &= \iint \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{-\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}'}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}} \sqrt{2\omega_{\mathbf{k}'}}} \left[a_0(\mathbf{k}) a_0(\mathbf{k}') e^{-i(\omega_{\mathbf{k}}+\omega_{\mathbf{k}'})t} \delta^3(\mathbf{k} + \mathbf{k}') - \right. \\
 &\quad \left. - a_0(\mathbf{k}) a_0^\dagger(\mathbf{k}') e^{-i(\omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{k}'})t} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') - a_0^\dagger(\mathbf{k}) a_0(\mathbf{k}') e^{i(\omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{k}'})t} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') + \right. \\
 &\quad \left. + a_0^\dagger(\mathbf{k}) a_0^\dagger(\mathbf{k}') e^{i(\omega_{\mathbf{k}}+\omega_{\mathbf{k}'})t} \delta^3(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \right] d^3 k d^3 k'
 \end{aligned}$$

Fazendo então a integral em $d^3 k'$, temos que as duas distribuições $\delta^3(\mathbf{k} + \mathbf{k}')$ que ocorrem vão mudar o sinal do produto escalar $\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}'$, deixando todos os termos dentro dos colchetes $[\dots]$ negativos e com isso cancelando o sinal negativo fora dos colchetes, tal que

$$I_2 = \int \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{|\mathbf{k}|^2}{2\omega_{\mathbf{k}}} \left[a_0(\mathbf{k}) a_0(-\mathbf{k}) e^{-2i\omega_{\mathbf{k}}t} + a_0(\mathbf{k}) a_0^\dagger(\mathbf{k}) + a_0^\dagger(\mathbf{k}) a_0(\mathbf{k}) + a_0^\dagger(\mathbf{k}) a_0^\dagger(-\mathbf{k}) e^{2i\omega_{\mathbf{k}}t} \right] d^3 k$$

Por fim, o último termo da hamiltoniana vai se desenvolver por

$$\begin{aligned}
 I_3 &= \iiint \frac{m^2}{(2\pi)^6} \left[a_0(\mathbf{k}) f_k(x) + a_0^\dagger(\mathbf{k}) f_k^*(x) \right] \left[a_0(\mathbf{k}') f_{k'}(x) + a_0^\dagger(\mathbf{k}') f_{k'}^*(x) \right] d^3 k d^3 k' d^3 x \\
 &= \iiint \frac{m^2}{(2\pi)^6} \left[a_0(\mathbf{k}) a_0(\mathbf{k}') f_k(x) f_{k'}(x) + a_0(\mathbf{k}) a_0^\dagger(\mathbf{k}') f_k(x) f_{k'}^*(x) + \right. \\
 &\quad \left. + a_0^\dagger(\mathbf{k}) a_0(\mathbf{k}') f_k^*(x) f_{k'}(x) + a_0^\dagger(\mathbf{k}) a_0^\dagger(\mathbf{k}') f_k^*(x) f_{k'}^*(x) \right] d^3 k d^3 k' d^3 x \\
 &= \iint \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{m^2}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}} \sqrt{2\omega_{\mathbf{k}'}}} \left[a_0(\mathbf{k}) a_0(\mathbf{k}') e^{-i(\omega_{\mathbf{k}}+\omega_{\mathbf{k}'})t} \delta^3(\mathbf{k} + \mathbf{k}') + \right. \\
 &\quad \left. + a_0(\mathbf{k}) a_0^\dagger(\mathbf{k}') e^{-i(\omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{k}'})t} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') + a_0^\dagger(\mathbf{k}) a_0(\mathbf{k}') e^{i(\omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{k}'})t} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') + \right. \\
 &\quad \left. + a_0^\dagger(\mathbf{k}) a_0^\dagger(\mathbf{k}') e^{i(\omega_{\mathbf{k}}+\omega_{\mathbf{k}'})t} \delta^3(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \right] d^3 k d^3 k'
 \end{aligned}$$

Concluindo que

$$I_3 = \int \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{m^2}{2\omega_{\mathbf{k}}} \left[a_0(\mathbf{k}) a_0(-\mathbf{k}) e^{-2i\omega_{\mathbf{k}}t} + a_0(\mathbf{k}) a_0^\dagger(\mathbf{k}) + a_0^\dagger(\mathbf{k}) a_0(\mathbf{k}) + a_0^\dagger(\mathbf{k}) a_0^\dagger(-\mathbf{k}) e^{2i\omega_{\mathbf{k}}t} \right] d^3 k$$

Podemos perceber que em I_2 e I_3 a única diferença está nas constantes que acompanham os operadores, de modo que

$$I_2 + I_3 = \int \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{|\mathbf{k}|^2 + m^2}{2\omega_{\mathbf{k}}} [\dots] d^3 k$$



Mas sabemos que $\omega_{\mathbf{k}}^2 = |\mathbf{k}|^2 + m^2$, portanto

$$I_2 + I_3 = \int \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2} [\dots] d^3 k$$

Logo a hamiltoniana pode ser reescrita por

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2} \left[-a_0(\mathbf{k})a_0(-\mathbf{k})e^{-2i\omega_{\mathbf{k}}t} + a_0(\mathbf{k})a_0^\dagger(\mathbf{k}) + a_0^\dagger(\mathbf{k})a_0(\mathbf{k}) - a_0^\dagger(\mathbf{k})a_0^\dagger(-\mathbf{k})e^{2i\omega_{\mathbf{k}}t} + \right. \\ &\quad \left. + a_0(\mathbf{k})a_0(-\mathbf{k})e^{-2i\omega_{\mathbf{k}}t} + a_0(\mathbf{k})a_0^\dagger(\mathbf{k}) + a_0^\dagger(\mathbf{k})a_0(\mathbf{k}) + a_0^\dagger(\mathbf{k})a_0^\dagger(-\mathbf{k})e^{2i\omega_{\mathbf{k}}t} \right] d^3 k \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{(2\pi)^3} \omega_{\mathbf{k}} \left[a_0(\mathbf{k})a_0^\dagger(\mathbf{k}) + a_0^\dagger(\mathbf{k})a_0(\mathbf{k}) \right] d^3 k \end{aligned}$$

O que nos dá a forma

$$H = \int \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2} \left[a_0(\mathbf{k})a_0^\dagger(\mathbf{k}) + a_0^\dagger(\mathbf{k})a_0(\mathbf{k}) \right] d^3 k$$

Sabendo que o comutador $[a_0(\mathbf{k}), a_0^\dagger(\mathbf{k}')]= (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$, usamos isso para reescrever a hamiltoniana sob a forma

$$\begin{aligned} H &= \int \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2} \left[(2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}) + 2a_0^\dagger(\mathbf{k})a_0(\mathbf{k}) \right] d^3 k \\ &= \int \frac{1}{(2\pi)^3} \omega_{\mathbf{k}} a_0^\dagger(\mathbf{k})a_0(\mathbf{k}) d^3 k + \int \frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2} \delta^3(0) d^3 k \end{aligned}$$

O segundo termo é infinito, de modo que para contornar este problema e manter apenas o termo convergente, impomos na hamiltoniana o ordenamento normal que vai fazer com que todos os operadores de criação de partículas estejam à esquerda dos operadores de aniquilação, eliminando por consequência as divergências indesejadas, ou seja

$$:H: = \int \frac{1}{(2\pi)^3} \omega_{\mathbf{k}} a_0^\dagger(\mathbf{k})a_0(\mathbf{k}) d^3 k \quad (4.1)$$



Q. 05

Espinores de Dirac

Partindo das formas explícitas dos espinores de Dirac abaixo transcritos,

$$u(\mathbf{p}, s) = \frac{1}{\sqrt{E_p + m}} \begin{bmatrix} (E_p + m)\chi_s \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}\chi_s \end{bmatrix} \quad \& \quad v(\mathbf{p}, s) = \frac{1}{\sqrt{E_p + m}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}\chi_s \\ (E_p + m)\chi_s \end{bmatrix}$$

obtenha as seguintes relações:

- (a) $\bar{u}(\mathbf{p}, s)u(\mathbf{p}, s) = -\bar{v}(\mathbf{p}, s)v(\mathbf{p}, s) = 2m$
 - (b) $\left[\Lambda^+(\mathbf{p}) \right]_{\alpha\beta} = \frac{1}{2m} \sum_s u_\alpha(\mathbf{p}, s) \bar{u}_\beta(\mathbf{p}, s) = \frac{1}{2m} (\not{p} + m)_{\alpha\beta}$
 - (c) $\left[\Lambda^-(\mathbf{p}) \right]_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2m} \sum_s v_\alpha(\mathbf{p}, s) \bar{v}_\beta(\mathbf{p}, s) = \frac{1}{2m} (-\not{p} + m)_{\alpha\beta}$
-

(a) Expandindo o produto $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}$, temos

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) = \sigma_1 p_1 + \sigma_2 p_2 + \sigma_3 p_3 = \begin{bmatrix} p_3 & p_1 - ip_2 \\ p_1 + ip_2 & -p_3 \end{bmatrix}$$

O que nos dá também

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})^\dagger = \begin{bmatrix} p_3 & p_1 - ip_2 \\ p_1 + ip_2 & -p_3 \end{bmatrix} = (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})$$

A quantidade χ_s é um vetor coluna tal que $\chi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\chi_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Com isso, impomos que o produto $\chi_s^\dagger \chi_{s'} = \delta_{ss'}$. A forma explícita do espinor $\bar{u}(\mathbf{p}, s)$ é

$$\bar{u}(\mathbf{p}, s) = u^\dagger(\mathbf{p}, s) \gamma^0 = \frac{1}{\sqrt{E_p + m}} \begin{bmatrix} (E_p + m)\chi_s^\dagger & -\chi_s^\dagger (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})^\dagger \end{bmatrix}$$

Portanto,

$$\bar{u}(\mathbf{p}, s)u(\mathbf{p}, s') = \frac{1}{E_p + m} \left[(E_p + m)^2 \chi_s^\dagger \chi_{s'} - \chi_s^\dagger (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})^\dagger (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) \chi_s \right]$$



O produto

$$\begin{aligned}
 (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})^\dagger (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) &= \begin{bmatrix} p_3 & p_1 - ip_2 \\ p_1 + ip_2 & -p_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_3 & p_1 - ip_2 \\ p_1 + ip_2 & -p_3 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 & 0 \\ 0 & p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} |\mathbf{p}|^2 & 0 \\ 0 & |\mathbf{p}|^2 \end{bmatrix} \\
 &= |\mathbf{p}|^2 \mathbb{1}_{2 \times 2}
 \end{aligned}$$

E como $E_{\mathbf{p}}^2 = |\mathbf{p}|^2 + m^2$, temos

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})^\dagger (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) = (E_{\mathbf{p}}^2 - m^2) \mathbb{1}_{2 \times 2} = (E_{\mathbf{p}} + m)(E_{\mathbf{p}} - m) \mathbb{1}_{2 \times 2}$$

Segue que

$$\begin{aligned}
 \bar{u}(\mathbf{p}, s) u(\mathbf{p}, s') &= \frac{1}{E_{\mathbf{p}} + m} \left[(E_{\mathbf{p}} + m)^2 \delta_{ss'} - (E_{\mathbf{p}} + m)(E_{\mathbf{p}} - m) \chi_s^\dagger \mathbb{1}_{2 \times 2} \chi_s \right] \\
 &= (E_{\mathbf{p}} + m) \delta_{ss'} - (E_{\mathbf{p}} - m) \delta_{ss'} \\
 &= 2m \delta_{ss'}
 \end{aligned}$$

Concluindo que

$$\bar{u}(\mathbf{p}, s) u(\mathbf{p}, s) = 2m \quad (5.1)$$

Agora a forma explicita de $\bar{v}(\mathbf{p}, s)$ é

$$\bar{v}(\mathbf{p}, s) = v^\dagger(\mathbf{p}, s) \gamma^0 = \frac{1}{\sqrt{E_{\mathbf{p}} + m}} \left[\chi_s^\dagger (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})^\dagger - (E_{\mathbf{p}} + m) \chi_s^\dagger \right]$$

Portanto

$$\begin{aligned}
 \bar{v}(\mathbf{p}, s) v(\mathbf{p}, s') &= \frac{1}{E_{\mathbf{p}} + m} \left[\chi_s^\dagger (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})^\dagger (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) \chi_{s'} - (E_{\mathbf{p}} + m)^2 \chi_s^\dagger \chi_{s'} \right] \\
 &= \frac{1}{E_{\mathbf{p}} + m} \left[(E_{\mathbf{p}} + m)(E_{\mathbf{p}} - m) \delta_{ss'} - (E_{\mathbf{p}} + m)^2 \delta_{ss'} \right] \\
 &= (E_{\mathbf{p}} - m) \delta_{ss'} - (E_{\mathbf{p}} + m) \delta_{ss'} \\
 &= -2m \delta_{ss'}
 \end{aligned}$$

Concluindo que

$$-\bar{v}(\mathbf{p}, s) v(\mathbf{p}, s) = 2m \quad (5.2)$$



(b) Usando a definição do projetor, temos

$$\begin{aligned}
 [\Lambda^+(\mathbf{p})]_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2m} \sum_s u_\alpha(\mathbf{p}, s) \bar{u}_\beta(\mathbf{p}, s) \\
 &= \frac{1}{2m(E_\mathbf{p} + m)} \sum_s \left[\begin{array}{c} (E_\mathbf{p} + m)\chi_s \\ (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})\chi_s \end{array} \right]_\alpha \left[\begin{array}{cc} (E_\mathbf{p} + m)\chi_s^\dagger & -\chi_s^\dagger(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})^\dagger \end{array} \right]_\beta \\
 &= \frac{1}{2m(E_\mathbf{p} + m)} \sum_s \left[\begin{array}{cc} (E_\mathbf{p} + m)^2\chi_s\chi_s^\dagger & -(E_\mathbf{p} + m)\chi_s\chi_s^\dagger(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})^\dagger \\ (E_\mathbf{p} + m)(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})\chi_s\chi_s^\dagger & -(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})\chi_s\chi_s^\dagger(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})^\dagger \end{array} \right]_{\alpha\beta}
 \end{aligned}$$

Note que

$$\chi_1\chi_1^\dagger = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} [1 \ 0] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \& \quad \chi_2\chi_2^\dagger = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [0 \ 1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Implicando que quando somarmos em s , estaremos somando estas duas matrizes, gerando a identidade $\mathbb{1}_{2\times 2}$, portanto o projetor fica

$$\begin{aligned}
 [\Lambda^+(\mathbf{p})]_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2m(E_\mathbf{p} + m)} \left[\begin{array}{cc} (E_\mathbf{p} + m)^2\mathbb{1}_{2\times 2} & -(E_\mathbf{p} + m)\mathbb{1}_{2\times 2}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})^\dagger \\ (E_\mathbf{p} + m)(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})\mathbb{1}_{2\times 2} & -(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})\mathbb{1}_{2\times 2}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})^\dagger \end{array} \right]_{\alpha\beta} \\
 &= \frac{1}{2m} \left[\begin{array}{cc} (E_\mathbf{p} + m)\mathbb{1}_{2\times 2} & -\mathbb{1}_{2\times 2}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})^\dagger \\ (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})\mathbb{1}_{2\times 2} & -\mathbb{1}_{2\times 2}(E_\mathbf{p} - m) \end{array} \right]_{\alpha\beta} \\
 &= \frac{1}{2m} \left[\begin{array}{cc} E_\mathbf{p}\mathbb{1}_{2\times 2} & -(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})\mathbb{1}_{2\times 2} \\ (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})\mathbb{1}_{2\times 2} & -E_\mathbf{p}\mathbb{1}_{2\times 2} \end{array} \right]_{\alpha\beta} + \frac{1}{2m} \left[\begin{array}{cc} m\mathbb{1}_{2\times 2} & 0 \\ 0 & m\mathbb{1}_{2\times 2} \end{array} \right]_{\alpha\beta}
 \end{aligned}$$

Como $p_0 = E_\mathbf{p}$, a forma explícita deste projetor é

$$\begin{aligned}
 [\Lambda^+(\mathbf{p})]_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2m} \left[\begin{array}{cccc} p_0 & 0 & -p_3 & -p_1 + ip_2 \\ 0 & p_0 & -p_1 - ip_2 & p_3 \\ p_3 & p_1 - ip_2 & -p_0 & 0 \\ p_1 + ip_2 & -p_3 & 0 & -p_0 \end{array} \right]_{\alpha\beta} + \frac{1}{2m} \left[\begin{array}{cccc} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m \end{array} \right]_{\alpha\beta} \\
 &= \frac{1}{2m} (\gamma^0 p_0 + \gamma^1 p_1 + \gamma^2 p_2 + \gamma^3 p_3)_{\alpha\beta} + \frac{1}{2m} (m)_{\alpha\beta} \\
 &= \frac{1}{2m} (\gamma^\mu p_\mu + m)_{\alpha\beta}
 \end{aligned}$$

Concluindo que

$$[\Lambda^+(\mathbf{p})]_{\alpha\beta} = \frac{1}{2m} \sum_s u_\alpha(\mathbf{p}, s) \bar{u}_\beta(\mathbf{p}, s) = \frac{1}{2m} (\psi + m)_{\alpha\beta} \quad (5.3)$$



(c) Novamente, usando a forma explícita do projetor, temos

$$\begin{aligned}
[\Lambda^-(\mathbf{p})]_{\alpha\beta} &= -\frac{1}{2m} \sum_s v_\alpha(\mathbf{p}, s) \bar{v}_\beta(\mathbf{p}, s) \\
&= \frac{1}{2m(E_\mathbf{p} + m)} \sum_s \left[\frac{(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) \chi_s}{(E_\mathbf{p} + m) \chi_s} \right]_\alpha \left[\chi_s^\dagger (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})_\beta^\dagger \quad -(E_\mathbf{p} + m) \chi_s^\dagger \right]_\beta \\
&= -\frac{1}{2m(E_\mathbf{p} + m)} \sum_s \left[\frac{(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) \chi_s \chi_s^\dagger (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})^\dagger}{(E_\mathbf{p} + m) \chi_s \chi_s^\dagger (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})^\dagger} \quad -(E_\mathbf{p} + m)(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) \chi_s \chi_s^\dagger } \right. \\
&\quad \left. -(E_\mathbf{p} + m)^2 \chi_s \chi_s^\dagger \right]_{\alpha\beta} \\
&= -\frac{1}{2m} \begin{bmatrix} \mathbb{1}_{2 \times 2}(E_\mathbf{p} - m) & -(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) \mathbb{1}_{2 \times 2} \\ \mathbb{1}_{2 \times 2}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) & -(E_\mathbf{p} + m) \mathbb{1}_{2 \times 2} \end{bmatrix}_{\alpha\beta} \\
&= -\frac{1}{2m} \begin{bmatrix} E_\mathbf{p} \mathbb{1}_{2 \times 2} & -(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) \mathbb{1}_{2 \times 2} \\ (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) \mathbb{1}_{2 \times 2} & -E_\mathbf{p} \mathbb{1}_{2 \times 2} \end{bmatrix}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2m} \begin{bmatrix} -m \mathbb{1}_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & -m \mathbb{1}_{2 \times 2} \end{bmatrix}_{\alpha\beta} \\
&= -\frac{1}{2m} \begin{bmatrix} p_0 & 0 & -p_3 & -p_1 + ip_2 \\ 0 & p_0 & -p_1 - ip_2 & p_3 \\ p_3 & p_1 - ip_2 & -p_0 & 0 \\ p_1 + ip_2 & -p_3 & 0 & -p_0 \end{bmatrix}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2m} \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m \end{bmatrix}_{\alpha\beta} \\
&= \frac{1}{2m} (-\gamma^0 p_0 + \gamma^1 p_1 + \gamma^2 p_2 + \gamma^3 p_3)_{\alpha\beta} + \frac{1}{2m} (m)_{\alpha\beta} \\
&= \frac{1}{2m} (-\gamma^\mu p_\mu + m)_{\alpha\beta}
\end{aligned}$$

Concluindo que

$$[\Lambda^-(\mathbf{p})]_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2m} \sum_s v_\alpha(\mathbf{p}, s) \bar{v}_\beta(\mathbf{p}, s) = \frac{1}{2m} (-\not{p} + m)_{\alpha\beta} \quad (5.4)$$



Q. 06

Operadores de um campo espinorial

Usando as definições

$$U_k^s(x) = \frac{\tilde{U}_k^s(x)}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} = u(\mathbf{k}, s) \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} \quad V_k^s(x) = \frac{\tilde{V}_k^s(x)}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} = v(\mathbf{k}, s) \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}}$$

$$\psi(x) = \int \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_s \left[b_s(\mathbf{k}) U_k^s(x) + d_s^\dagger(\mathbf{k}) V_k^s(x) \right] d^3k$$

obtenha

$$b_s(\mathbf{k}) = \int \bar{U}_k^s(x) \gamma^0 \psi(x) d^3x \quad \& \quad d_s(\mathbf{k}) = \int \bar{\psi}(x) \gamma^0 V_k^s(x) d^3x$$

sendo $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ e $E_{\mathbf{k}} = \sqrt{|\mathbf{k}|^2 + m^2}$. (Obs.: em unidades naturais, $E_{\mathbf{k}} = \omega_{\mathbf{k}}$).

Com as definições fornecidas, podemos escrever o campo $\psi(x)$ sob a forma

$$\psi(x) = \int \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{s'} \left[b_{s'}(\mathbf{k}') u(\mathbf{k}', s') \frac{e^{-ik'x}}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}'}}} + d_{s'}^\dagger(\mathbf{k}') v(\mathbf{k}', s') \frac{e^{ik'x}}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}'}}} \right] d^3k'$$

e portanto

$$\psi^\dagger(x) = \int \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{s'} \left[b_{s'}^\dagger(\mathbf{k}') u^\dagger(\mathbf{k}', s') \frac{e^{ik'x}}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}'}}} + d_{s'}(\mathbf{k}') v^\dagger(\mathbf{k}', s') \frac{e^{-ik'x}}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}'}}} \right] d^3k'$$

Tendo $\psi(x)$ e $\psi^\dagger(x)$, vamos aplicar $u^\dagger(\mathbf{k}, s)$ pela esquerda do campo $\psi(x)$ (fazemos isso, pois $\psi(x)$ é um vetor devidos à presença dos espinores, então ao aplicar $u^\dagger(\mathbf{k}, s)$, teremos um “número”, o que faz com que as contas possam ser feitas de forma padrão) de modo que

$$u^\dagger(\mathbf{k}, s) \psi(x) = \int \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{s'} \left[b_{s'}(\mathbf{k}') u^\dagger(\mathbf{k}, s) u(\mathbf{k}', s') \frac{e^{-ik'x}}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}'}}} + d_{s'}^\dagger(\mathbf{k}) u^\dagger(\mathbf{k}, s) v(\mathbf{k}', s') \frac{e^{ik'x}}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}'}}} \right] d^3k'$$



Calculando uma transformada de Fourier inversa no espaço desta quantidade, temos

$$\begin{aligned}
 \int u^\dagger(\mathbf{k}, s) \psi(x) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3x &= \iint \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{s'} \left[b_{s'}(\mathbf{k}') u^\dagger(\mathbf{k}, s) u(\mathbf{k}', s') \frac{e^{-iE_{\mathbf{k}'}t+i(\mathbf{k}'-\mathbf{k})\cdot\mathbf{x}}}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}'}}} + \right. \\
 &\quad \left. + d_{s'}^\dagger(\mathbf{k}') u^\dagger(\mathbf{k}, s) v(\mathbf{k}', s') \frac{e^{iE_{\mathbf{k}'}t-i(\mathbf{k}'+\mathbf{k})\cdot\mathbf{x}}}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}'}}} \right] d^3k' d^3x \\
 &= \iint \frac{e^{-iE_{\mathbf{k}'}t}}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{k}'}}} \sum_{s'} \left[b_{s'}(\mathbf{k}') u^\dagger(\mathbf{k}, s) u(\mathbf{k}', s') e^{i(\mathbf{k}'-\mathbf{k})\cdot\mathbf{x}} + \right. \\
 &\quad \left. + d_{s'}^\dagger(\mathbf{k}') u^\dagger(\mathbf{k}, s) v(\mathbf{k}', s') e^{2iE_{\mathbf{k}'}t} e^{-i(\mathbf{k}'+\mathbf{k})\cdot\mathbf{x}} \right] d^3k' d^3x
 \end{aligned}$$

As integrações em d^3x vão nos dar distribuições delta de Dirac, de modo que

$$\begin{aligned}
 \int u^\dagger(\mathbf{k}, s) \psi(x) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3x &= \int \frac{e^{-iE_{\mathbf{k}'}t}}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}'}}} \sum_{s'} \left[b_{s'}(\mathbf{k}') u^\dagger(\mathbf{k}, s) u(\mathbf{k}', s') \delta^3(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) + \right. \\
 &\quad \left. + d_{s'}^\dagger(\mathbf{k}') u^\dagger(\mathbf{k}, s) v(\mathbf{k}', s') e^{2iE_{\mathbf{k}'}t} \delta^3(\mathbf{k}' + \mathbf{k}) \right] d^3k'
 \end{aligned}$$

Como $E_{\mathbf{k}} = E_{-\mathbf{k}}$ por construção, temos pela integração em d^3k' :

$$\int u^\dagger(\mathbf{k}, s) \psi(x) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3x = \frac{e^{-iE_{\mathbf{k}'}t}}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}'}}} \sum_{s'} \left[b_{s'}(\mathbf{k}) u^\dagger(\mathbf{k}, s) u(\mathbf{k}, s') + d_{s'}^\dagger(-\mathbf{k}) u^\dagger(\mathbf{k}, s) v(-\mathbf{k}, s') e^{2iE_{\mathbf{k}'}t} \right]$$

Considerando a forma explícita dos espinores, o produto entre $u^\dagger(\mathbf{k}, s)$ e $u(\mathbf{k}, s')$ vai resultar em

$$\begin{aligned}
 u^\dagger(\mathbf{k}, s) u(\mathbf{k}, s') &= \frac{1}{E_{\mathbf{k}} + m} \left[(E_{\mathbf{k}} + m)^2 \chi_s^\dagger \chi_{s'} + \chi_s^\dagger (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})^\dagger (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) \chi_{s'} \right] \\
 &= \frac{1}{E_{\mathbf{k}} + m} \left[(E_{\mathbf{k}} + m)^2 \delta_{ss'} + (E_{\mathbf{k}} + m)(E_{\mathbf{k}} - m) \delta_{ss'} \right] \\
 &= (E_{\mathbf{k}} + m) \delta_{ss'} + (E_{\mathbf{k}} - m) \delta_{ss'} \\
 &= 2E_{\mathbf{k}} \delta_{ss'}
 \end{aligned}$$

Usando agora a forma explícita para $v(-\mathbf{k}, s')$, teremos

$$\begin{aligned}
 u^\dagger(\mathbf{k}, s) v(-\mathbf{k}, s') &= \frac{1}{E_{\mathbf{k}} + m} \left\{ (E_{\mathbf{k}} + m) \chi_s^\dagger [\boldsymbol{\sigma} \cdot (-\mathbf{k})] \chi_{s'} + (E_{-\mathbf{k}} + m) (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k}) \chi_s^\dagger \chi_{s'} \right\} \\
 &= -(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k}) \chi_s^\dagger \chi_{s'} + (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k}) \chi_s^\dagger \chi_{s'} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Portanto, a integral que estávamos calculando resulta em

$$\int u^\dagger(\mathbf{k}, s) \psi(x) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3x = \frac{e^{-iE_{\mathbf{k}'}t}}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}'}}} \sum_{s'} b_{s'}(\mathbf{k}) 2E_{\mathbf{k}} \delta_{ss'} = \sqrt{2E_{\mathbf{k}}} e^{-iE_{\mathbf{k}'}t} b_s(\mathbf{k})$$



Isolando $b_s(\mathbf{k})$, obtemos

$$\begin{aligned} b_s(\mathbf{k}) &= \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} e^{iE_{\mathbf{k}}t} \int u^\dagger(\mathbf{k}, s) \psi(x) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3x \\ &= \int u^\dagger(\mathbf{k}, s) \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} \psi(x) d^3x \end{aligned}$$

Podemos ainda manipular o argumento da integral adicionando uma matriz identidade entre o espinor $u^\dagger(\mathbf{k}, s)$ e o campo $\psi(x)$, onde essa matriz identidade pode ser escrita por $I = (\gamma^0)^2$, de modo que

$$u^\dagger(\mathbf{k}, s) \psi(x) = u^\dagger(\mathbf{k}, s) \gamma^0 \gamma^0 \psi(x) = \bar{u}(\mathbf{k}, s) \gamma^0 \psi(x)$$

Ou seja, o argumento da integral fica, com base na definição de $U_k^s(x)$ dada no enunciado:

$$\bar{u}(\mathbf{k}, s) \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} \gamma^0 \psi(x) = \bar{U}_k^s(x) \gamma^0 \psi(x)$$

Concluindo que

$$b_s(\mathbf{k}) = \int \bar{U}_k^s(x) \gamma^0 \psi(x) d^3x \quad (6.1)$$

Aplicando agora $v(\mathbf{k}, s)$ pela direita do campo $\psi^\dagger(x)$, pelo mesmo motivo do caso anterior, temos

$$\psi^\dagger(x) v(\mathbf{k}, s) = \int \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{s'} \left[b_{s'}^\dagger(\mathbf{k}') u^\dagger(\mathbf{k}', s') v(\mathbf{k}, s) \frac{e^{ik'x}}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}'}}} + d_{s'}(\mathbf{k}') v^\dagger(\mathbf{k}', s') v(\mathbf{k}, s) \frac{e^{-ik'x}}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}'}}} \right] d^3 k'$$

Fazendo também uma transformada de Fourier inversa no espaço, temos

$$\begin{aligned} \int \psi^\dagger(x) v(\mathbf{k}, s) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3x &= \iint \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{s'} \left[b_{s'}^\dagger(\mathbf{k}') u^\dagger(\mathbf{k}', s') v(\mathbf{k}, s) \frac{e^{iE_{\mathbf{k}}t - i(\mathbf{k}' + \mathbf{k})\cdot\mathbf{x}}}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}'}}} + \right. \\ &\quad \left. + d_{s'}(\mathbf{k}') v^\dagger(\mathbf{k}', s') v(\mathbf{k}, s) \frac{e^{-iE_{\mathbf{k}'}t + i(\mathbf{k}' - \mathbf{k})\cdot\mathbf{x}}}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}'}}} \right] d^3 k' d^3 x \\ &= \iint \frac{e^{-iE_{\mathbf{k}}t}}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{k}'}}} \sum_{s'} \left[b_{s'}^\dagger(\mathbf{k}') u^\dagger(\mathbf{k}', s') v(\mathbf{k}, s) e^{2iE_{\mathbf{k}'}t} e^{-i(\mathbf{k}' + \mathbf{k})\cdot\mathbf{x}} + \right. \\ &\quad \left. + d_{s'}(\mathbf{k}') v^\dagger(\mathbf{k}', s') v(\mathbf{k}, s) e^{i(\mathbf{k}' - \mathbf{k})\cdot\mathbf{x}} \right] d^3 k' d^3 x \end{aligned}$$

Integrando em d^3x teremos o surgimento das deltas de Dirac tal que

$$\begin{aligned} \int \psi^\dagger(x) v(\mathbf{k}, s) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3x &= \int \frac{e^{-iE_{\mathbf{k}}t}}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{k}'}}} \sum_{s'} \left[b_{s'}^\dagger(\mathbf{k}') u^\dagger(\mathbf{k}', s') v(\mathbf{k}, s) e^{2iE_{\mathbf{k}'}t} \delta^3(\mathbf{k}' + \mathbf{k}) \right. \\ &\quad \left. + d_{s'}(\mathbf{k}') v^\dagger(\mathbf{k}', s') v(\mathbf{k}, s) \delta^3(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \right] d^3 k' d^3 x \end{aligned}$$



E levando novamente em consideração que $E_{\mathbf{k}} = E_{-\mathbf{k}}$, ao realizarmos a integração em d^3k' , temos

$$\int \psi^\dagger(x)v(\mathbf{k}, s)e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3x = \frac{e^{-iE_{\mathbf{k}}t}}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} \sum_{s'} \left[b_{s'}^\dagger(-\mathbf{k})u^\dagger(-\mathbf{k}, s')v(\mathbf{k}, s)e^{2iE_{\mathbf{k}}t} + d_{s'}(\mathbf{k})v^\dagger(\mathbf{k}, s')v(\mathbf{k}, s) \right]$$

Dado que encontramos $u^\dagger(\mathbf{k}, s)v(-\mathbf{k}, s')$, podemos simplesmente trocar $\mathbf{k} \leftrightarrow -\mathbf{k}$ e $s \leftrightarrow s'$, de modo que o resultado se mantém, ou seja

$$u^\dagger(-\mathbf{k}, s')v(\mathbf{k}, s) = 0$$

Já para o segundo produto de spinores, basta considerar a forma explícita, tal que

$$\begin{aligned} v^\dagger(\mathbf{k}, s')v(\mathbf{k}, s) &= \frac{1}{E_{\mathbf{k}} + m} \left[(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k})^\dagger \chi_{s'}^\dagger \chi_s (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k}) + (E_{\mathbf{k}} + m)^2 \chi_{s'}^\dagger \chi_s \right] \\ &\stackrel{|}{=} \frac{1}{E_{\mathbf{k}} + m} \left[(E_{\mathbf{k}} + m)(E_{\mathbf{k}} - m)\delta_{s's} + (E_{\mathbf{k}} + m)^2 \delta_{s's} \right] \\ &\stackrel{|}{=} (E_{\mathbf{k}} - m)\delta_{s's} + (E_{\mathbf{k}} + m)\delta_{s's} \\ &\stackrel{|}{=} 2E_{\mathbf{k}}\delta_{s's} \end{aligned}$$

Portanto

$$\int \psi^\dagger(x)v(\mathbf{k}, s)e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3x = \frac{e^{-iE_{\mathbf{k}}t}}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} \sum_{s'} d_{s'}(\mathbf{k})2E_{\mathbf{k}}\delta_{s's} = \sqrt{2E_{\mathbf{k}}}e^{-iE_{\mathbf{k}}t}d_s(\mathbf{k})$$

Isolando $d_s(\mathbf{k})$, temos

$$\begin{aligned} d_s(\mathbf{k}) &= \frac{e^{iE_{\mathbf{k}}t}}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} \int \psi^\dagger(x)v(\mathbf{k}, s)e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3x \\ &\stackrel{|}{=} \int \psi^\dagger(x)v(\mathbf{k}, s) \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} d^3x \end{aligned}$$

Inserindo a identidade $I = (\gamma^0)^2$ entre $\psi^\dagger(x)$ e $v(\mathbf{k}, s)$, podemos reescrever o integrando por

$$\psi^\dagger(x)v(\mathbf{k}, s) \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} = \psi^\dagger(x)\gamma^0\gamma^0v(\mathbf{k}, s) \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} = \bar{\psi}(x)\gamma^0V_k^s(x)$$

Concluindo que

$$d_s(\mathbf{k}) = \int \bar{\psi}(x)\gamma^0V_k^s(x) d^3x \quad (6.2)$$



Q. 07

Píons

Píons são mésons escalares com uma simetria de isospin do grupo $SU(2)$, o mesmo grupo da álgebra de momento angular. Seus campos podem ser escritos na chamada **representação cartesiana**, tal que $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$, ou na chamada **representação esférica**, em que $\pi_0 = \pi_3$ e $\pi^\pm = (\pi_1 \mp i\pi_2)/\sqrt{2}$. Os geradores do grupo são as matrizes de Pauli agrupadas como componentes de um isovetor $\tau = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$. Considere a lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} \left\langle \partial_\mu \Phi^\dagger \partial^\mu \Phi \right\rangle - \frac{m^2}{4} \left\langle \Phi^\dagger \Phi \right\rangle$$

em que $\Phi = \tau \cdot \pi$ e $\langle A \rangle$ denota o traço da matriz A no espaço (2×2) de isospin.

- (a) Na representação esférica, mostre que a lagrangiana acima reproduz as lagrangianas livres de um campo escalar neutro (π_0) e de um campo escalar carregado (π^\pm).
 - (b) Na representação cartesiana, obtenha a corrente de Noether associada à simetria de isospin. Dica: considere a transformação $U(\theta) = \exp(-i\tau \cdot \theta)$, com θ um vetor de componentes infinitesimais no espaço de isospin, aplicada à matriz Φ : $\Phi' = U\Phi$.
-

(a) Podemos representar as componentes de π por

$$\pi_1 = \frac{\pi^+ + \pi^-}{\sqrt{2}} \quad & \quad \pi_2 = \frac{i(\pi^- - \pi^+)}{\sqrt{2}} \quad & \quad \pi_3 = \pi_0$$

Dessa forma, o campo $\Phi = \tau \cdot \sigma$ pode ser representado matricialmente

$$\begin{aligned} \Phi &= \tau_1 \pi_1 + \tau_2 \pi_2 + \tau_3 \pi_3 \\ &= \tau_1 \left(\frac{\pi^+ + \pi^-}{\sqrt{2}} \right) + \tau_2 \left[\frac{i(\pi^- - \pi^+)}{\sqrt{2}} \right] + \tau_3 \pi_0 \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \left(\frac{\pi^+ + \pi^-}{\sqrt{2}} \right) + \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \left[\frac{i(\pi^- - \pi^+)}{\sqrt{2}} \right] + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \pi_0 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & \pi^+ + \pi^- \\ \pi^+ + \pi^- & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & \pi^- - \pi^+ \\ -\pi^- + \pi^+ & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \pi_0 & 0 \\ 0 & -\pi_0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \pi_0 & \sqrt{2}\pi^- \\ \sqrt{2}\pi^+ & -\pi_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_3 & \pi_1 + i\pi_2 \\ \pi_1 - i\pi_2 & \pi_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Portanto

$$\Phi^\dagger = \begin{bmatrix} \pi_0^* & \sqrt{2}(\pi^+)^* \\ \sqrt{2}(\pi^-)^* & -\pi_0^* \end{bmatrix}$$



Pela forma definida de π^\pm , é fácil ver que $(\pi^-)^* = \pi^+$ e $(\pi^+)^* = \pi^-$, logo

$$\Phi^\dagger = \begin{bmatrix} \pi_0^* & \sqrt{2}\pi^- \\ \sqrt{2}\pi^+ & -\pi_0^* \end{bmatrix}$$

Segue que

$$\begin{aligned} \partial_\mu \Phi^\dagger \partial^\mu \Phi &= \begin{bmatrix} \partial_\mu \pi_0^* & \sqrt{2} \partial_\mu \pi^- \\ \sqrt{2} \partial_\mu \pi^+ & -\partial_\mu \pi_0^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial^\mu \pi_0 & \sqrt{2} \partial^\mu \pi^- \\ \sqrt{2} \partial^\mu \pi^+ & -\partial^\mu \pi_0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \partial_\mu \pi_0^* \partial^\mu \pi_0 + 2 \partial_\mu \pi^- \partial^\mu \pi^+ & \sqrt{2} \partial_\mu \pi_0^* \partial^\mu \pi^- - \sqrt{2} \partial_\mu \pi^- \partial^\mu \pi_0 \\ \sqrt{2} \partial_\mu \pi^+ \partial^\mu \pi_0 - \sqrt{2} \partial_\mu \pi_0^* \partial^\mu \pi^2 & 2 \partial_\mu \pi^+ \partial^\mu \pi^- + \partial_\mu \pi_0^* \partial^\mu \pi_0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Calculando o traço desta matriz:

$$\begin{aligned} \langle \partial_\mu \Phi^\dagger \partial^\mu \Phi \rangle &= \partial_\mu \pi_0^* \partial^\mu \pi_0 + 2 \partial_\mu \pi^- \partial^\mu \pi^+ + 2 \partial_\mu \pi^+ \partial^\mu \pi^- + \partial_\mu \pi_0^* \partial^\mu \pi_0 \\ &= 2 \partial_\mu \pi_0^* \partial^\mu \pi_0 + 2 \partial_\mu \pi^- \partial^\mu \pi^+ + 2 \partial_\mu \pi^+ \partial^\mu \pi^- \end{aligned}$$

Fazendo o mesmo procedimento para $\Phi^\dagger \Phi$, temos

$$\begin{aligned} \Phi^\dagger \Phi &= \begin{bmatrix} \pi_0^* & \sqrt{2}\pi^- \\ \sqrt{2}\pi^+ & -\pi_0^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_0 & \sqrt{2}\pi^- \\ \sqrt{2}\pi^+ & -\pi_0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \pi_0^* \pi_0 + 2 \pi^- \pi^+ & \sqrt{2} \pi_0^* \pi^- - \sqrt{2} \pi^- \pi_0 \\ \sqrt{2} \pi^+ \pi_0 - \sqrt{2} \pi_0^* \pi^+ & 2 \pi^+ \pi^- + \pi_0^* \pi_0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} \langle \Phi^\dagger \Phi \rangle &= \pi_0^* \pi_0 + 2 \pi^- \pi^+ + 2 \pi^+ \pi^- + \pi_0^* \pi_0 \\ &= 2 \pi_0^* \pi_0 + 2 \pi^- \pi^+ + 2 \pi^+ \pi^- \end{aligned}$$

A lagrangiana fica então

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{4} (2 \partial_\mu \pi_0^* \partial^\mu \pi_0 + 2 \partial_\mu \pi^- \partial^\mu \pi^+ + 2 \partial_\mu \pi^+ \partial^\mu \pi^-) - \frac{m^2}{4} (2 \pi_0^* \pi_0 + 2 \pi^- \pi^+ + 2 \pi^+ \pi^-) \\ &= \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \pi_0^* \partial^\mu \pi_0 - \frac{m^2}{2} \pi_0^* \pi_0 \right] + \left[\left(\frac{1}{2} \partial_\mu \pi^- \partial^\mu \pi^+ + \frac{1}{2} \partial_\mu \pi^+ \partial^\mu \pi^- \right) - \frac{m^2}{2} (\pi^- \pi^+ + \pi^+ \pi^-) \right] \end{aligned}$$

Sabendo que $\pi_0(x)$ é um campo real, temos que $\pi_0^* = \pi_0$, o que nos permite escrever o primeiro $[\dots]$ da lagrangiana sob a forma de uma lagrangiana livre de um campo escalar neutro para π_0 :

$$\mathcal{L}_{\pi_0} = \frac{1}{2} \partial_\mu \pi_0 \partial^\mu \pi_0 - \frac{1}{2} m^2 \pi_0^2 \quad (7.1)$$

No segundo $[\dots]$, identificamos que $\partial_\mu \pi^- \partial^\mu \pi^+ = \partial_\mu \pi^+ \partial^\mu \pi^-$ e $\pi^- \pi^+ = \pi^+ \pi^-$, nos permitindo escrever uma lagrangiana de campo escalar carregado



$$\mathcal{L}_{\pi^\pm} = \partial_\mu \pi^+ \partial^\mu \pi^- - m^2 \pi^+ \pi^- \quad (7.2)$$

(b) A lagrangiana original pode ser reescrita após calcularmos os traços. O primeiro traço da lagrangiana fica, lembrando que $\Phi^\dagger = \Phi = \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi}$:

$$\begin{aligned} \left\langle \partial_\mu \Phi^\dagger \partial^\mu \Phi \right\rangle &= \left\langle \partial_\mu (\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi}) \partial^\mu (\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi}) \right\rangle = \left\langle \sum_{a,b} \partial_\mu (\tau_a \pi_a) \partial^\mu (\tau_b \pi_b) \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{a,b} \tau_a \tau_b (\partial_\mu \pi_a) (\partial^\mu \pi_b) \right\rangle = \sum_{a,b} \langle \tau_a \tau_b \rangle (\partial_\mu \pi_a) (\partial^\mu \pi_b) \end{aligned}$$

As matrizes de Pauli satisfazem a propriedade $\langle \tau_a \tau_b \rangle = 2\delta_{ab}$, portanto

$$\left\langle \partial_\mu \Phi^\dagger \partial^\mu \Phi \right\rangle = 2 \sum_{a,b} \delta_{ab} (\partial_\mu \pi_a) (\partial^\mu \pi_b) = 2 (\partial_\mu \pi_a) (\partial^\mu \pi_a) = 2 (\partial_\mu \boldsymbol{\pi}) \cdot (\partial^\mu \boldsymbol{\pi})$$

O segundo traço da lagrangiana fica

$$\begin{aligned} \left\langle \Phi^\dagger \Phi \right\rangle &= \langle (\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi}) (\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi}) \rangle = \left\langle \sum_{a,b} \tau_a \pi_a \tau_b \pi_b \right\rangle = \sum_{a,b} \pi_a \pi_b \langle \tau_a \tau_b \rangle \\ &= 2 \sum_{a,b} \pi_a \pi_b \delta_{ab} = 2 \pi_a \pi_a = 2 (\boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\pi}) \end{aligned}$$

A lagrangiana na representação cartesiana pode ser escrita então por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \boldsymbol{\pi}) \cdot (\partial^\mu \boldsymbol{\pi}) - \frac{m^2}{2} (\boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\pi})$$

Considerando uma transformação $U(\boldsymbol{\theta}) = \exp(-i\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\theta})$, com $\boldsymbol{\theta}$ um vetor de componentes infinitesimais no espaço de isospin, podemos aproximar

$$U(\boldsymbol{\theta}) \approx \mathbb{1}_{2 \times 2} - i\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\theta}$$

Sendo Φ uma matriz 2×2 hermitiana e de traço nulo, ele é um elemento da álgebra de Lie $\mathfrak{su}(2)$, cujos elementos se transformam como $A' = UAU^{-1}$, para uma transformação unitária U em $SU(2)$, então como $U^\dagger(\boldsymbol{\theta}) = U^{-1}(\boldsymbol{\theta})$ é um elemento de $SU(2)$, uma transformação equivalente à do enunciado que mantém o campo invariante é $\Phi' = U(\boldsymbol{\theta})\Phi U^\dagger(\boldsymbol{\theta})$. Usar esta transformação ao invés de apenas $\Phi' = U(\boldsymbol{\theta})\Phi$ é possível, pois ambas vão gerar a mesma variação dos campos π_j (basta utilizar a forma $\Phi = \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi}$ em $\delta\Phi$ e identificar a parte que representa a variação nos campos π_j), a única diferença seria o fato de $U(\boldsymbol{\theta})\Phi$ não manter a hermiticidade e o traço nulo ao determinar $\delta\Phi$, logo, utilizo a transformação padrão de elementos de uma álgebra de Lie $\mathfrak{su}(2)$ apenas por buscar manter essas duas propriedades em $\delta\Phi$. Portanto

$$\begin{aligned} \Phi' &= U(\boldsymbol{\theta})\Phi U^\dagger(\boldsymbol{\theta}) = [\Phi - i(\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\theta})\Phi][\mathbb{1}_{2 \times 2} + i(\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\theta})] \\ &\stackrel{|}{=} \Phi + i\Phi(\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\theta}) - i(\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\theta})\Phi + \mathcal{O}(\boldsymbol{\theta}^2) \\ &\stackrel{|}{=} \Phi + i[\Phi, (\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\theta})] + \mathcal{O}(\boldsymbol{\theta}^2) \end{aligned}$$



Ignorando os termos quadráticos em θ por ele ter componentes infinitesimais, temos que a variação do campo nos dá

$$\delta\Phi = i \sum_a [\Phi, \tau_a] \theta_a = i \sum_{a,b} [\tau_b, \tau_a] \theta_a \pi_b$$

As matrizes de Pauli por serem geradores de uma álgebra de Lie satisfazem a relação de comutação

$$[\tau_a, \tau_b] = \sum_c 2i\epsilon_{abc}\tau_c$$

ou seja

$$\delta\Phi = -2 \sum_{a,b,c} \epsilon_{bac} \tau_c \theta_a \pi_b = 2 \sum_{a,b,c} \epsilon_{abc} \tau_c \theta_a \pi_b$$

Podemos considerar que

$$\delta\Phi = \delta \left(\sum_c \tau_c \pi_c \right) = \sum_c \tau_c \delta \pi_c = 2 \sum_{a,b,c} \epsilon_{abc} \tau_c \theta_a \pi_b$$

Então a variação do campo fica

$$\delta\pi_c = 2 \sum_{a,b} \epsilon_{abc} \theta_a \pi_b$$

Para obter a corrente de Noether, consideramos a simetria global em θ_k , de tal forma que para $k = 1, 2, 3$, temos

$$J_k^\mu = \sum_c \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \pi_c)} \frac{\delta\pi_c}{\delta\theta_k}$$

O segundo termo é facilmente obtido, tal que

$$\frac{\delta\pi_c}{\delta\theta_k} = 2 \sum_{a,b} \epsilon_{abc} \delta_{ak} \pi_b = 2 \sum_b \epsilon_{kbc} \pi_b$$

Já o primeiro

$$\begin{aligned} \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \pi_c)} &= \frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta(\partial_\mu \pi_c)} \left[\sum_d \partial_\nu \pi_d \partial^\nu \pi_d \right] = \frac{1}{2} \sum_d \left[\frac{\delta(\partial_\nu \pi_d)}{\delta(\partial_\mu \pi_c)} \partial^\nu \pi_d + \partial_\nu \pi_d g^{\nu\beta} \frac{\delta(\partial_\beta \pi_d)}{\delta(\partial_\mu \pi_c)} \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_d \left[\delta_\nu^\mu \delta_{cd} \partial^\nu \pi_d + \partial_\nu \pi_d g^{\nu\beta} \partial_\beta^\mu \delta_{cd} \right] = \frac{1}{2} \sum_d [\delta_{cd} \partial^\mu \pi_d + \partial^\mu \pi_d \delta_{cd}] \\ &= \frac{1}{2} [\partial^\mu \pi_c + \partial^\mu \pi_c] = \partial^\mu \pi_c \end{aligned}$$

Logo

$$J_k^\mu = 2 \sum_c \partial^\mu \pi_c \sum_b \epsilon_{kbc} \pi_b = 2 \sum_{b,c} \epsilon_{kbc} \pi_b \partial^\mu \pi_c$$

Juntando todas as componentes k , concluímos que a corrente de Noether é

$$J^\mu = 2\boldsymbol{\pi} \times \partial^\mu \boldsymbol{\pi} \quad (7.3)$$



Q. 08

Redução LSZ (bóson–bóson)

Considere a redução LSZ de um espalhamento com dois bósons escalares, tanto no estado inicial, quanto no estado final. A primeira redução fornece

$${}_{\text{out}}\langle \mathbf{p}'_1 \mathbf{p}'_2 | \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \rangle_{\text{in}} = "1" + (iZ^{-1/2}) \int {}_{\text{out}}\langle \mathbf{p}'_1 \mathbf{p}'_2 | \phi(x_1) | \mathbf{p}_2 \rangle_{\text{in}} \overset{\leftarrow}{K}_{x_1} \tilde{f}_{p_1}(x_1) d^4 x_1$$

Conclua a segunda redução (em quaisquer estados bosônicos remanescentes), demonstrando a necessidade de se introduzir o operador de ordenamento temporal.

Continuando a redução LSZ para o estado bosônico $|\mathbf{p}_2\rangle_{\text{in}}$, temos

$$|\mathbf{p}_2\rangle_{\text{in}} = \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}_2}} a^\dagger(\mathbf{p}_2) |\mathbf{0}\rangle_{\text{in}}$$

que pela convergência fraca nos permite escrever

$$|\mathbf{p}_2\rangle_{\text{in}} = Z^{-1/2} \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}_2}} \lim_{t_2 \rightarrow -\infty} a^\dagger(\mathbf{p}_2, t_2) |\mathbf{0}\rangle_{\text{in}}$$

Logo, definindo $A := {}_{\text{out}}\langle \mathbf{p}'_1 \mathbf{p}'_2 | \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \rangle_{\text{in}}$, obtemos

$$A = "1" + i(Z^{-1/2})^2 \lim_{t_2 \rightarrow -\infty} \int {}_{\text{out}}\langle \mathbf{p}'_1 \mathbf{p}'_2 | \phi(x_1) \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}_2}} a^\dagger(\mathbf{p}_2, t_2) |\mathbf{0}\rangle_{\text{in}} \overset{\leftarrow}{K}_{x_1} \tilde{f}_{p_1}(x_1) d^4 x_1$$

Podemos fazer uma substituição considerando uma integral de $-\infty$ a $+\infty$ de uma derivada total no tempo t_2 , isto é

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \partial_0 \left[{}_{\text{out}}\langle \mathbf{p}'_1 \mathbf{p}'_2 | \cdots a^\dagger(\mathbf{p}_2, t_2) |\mathbf{0}\rangle_{\text{in}} \right] dt_2 &= \lim_{t_2 \rightarrow +\infty} \left[{}_{\text{out}}\langle \mathbf{p}'_1 \mathbf{p}'_2 | \cdots a^\dagger(\mathbf{p}_2, t_2) |\mathbf{0}\rangle_{\text{in}} \right] - \\ &\quad - \lim_{t_2 \rightarrow -\infty} \left[{}_{\text{out}}\langle \mathbf{p}'_1 \mathbf{p}'_2 | \cdots a^\dagger(\mathbf{p}_2, t_2) |\mathbf{0}\rangle_{\text{in}} \right] \end{aligned}$$

Notemos então que

$$Z^{-1/2} \lim_{t_2 \rightarrow +\infty} {}_{\text{out}}\langle \mathbf{p}'_1 \mathbf{p}'_2 | \phi(x_1) \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}_2}} a^\dagger(\mathbf{p}_2, t_2) |\mathbf{0}\rangle_{\text{in}} = {}_{\text{out}}\langle \mathbf{p}'_1 \mathbf{p}'_2 | \phi(x_1) \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}_2}} a^\dagger(\mathbf{p}_2) |\mathbf{0}\rangle_{\text{in}}$$

e isto vai ser diferente de zero apenas se $|\mathbf{p}_2\rangle_{\text{in}}$ for igual a pelo menos um dos estados ${}_{\text{out}}\langle \mathbf{p}'_1 |$ ou ${}_{\text{out}}\langle \mathbf{p}'_2 |$ de modo que isso vai contribuir apenas para o processo de 1 partícula inicial transformando-se em 1 partícula final, o que torna-se irrelevante para o processo onde temos 2 partículas iniciais transformando-se em 2 partículas finais que estamos interessados, de modo que podemos fazer

$$Z^{-1/2} \lim_{t_2 \rightarrow +\infty} {}_{\text{out}}\langle \mathbf{p}'_1 \mathbf{p}'_2 | \phi(x_1) \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}_2}} a^\dagger(\mathbf{p}_2, t_2) |\mathbf{0}\rangle_{\text{in}} \mapsto "1"$$



Fazendo a substituição dentro do que estamos interessados, ficamos com

$$A = "1" - i(Z^{-1/2})^2 \iint_{-\infty}^{\infty} \partial_0 \left[{}_{\text{out}} \langle \mathbf{p}'_1 \mathbf{p}'_2 | \phi(x_1) \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}_2}} a^\dagger(\mathbf{p}_2, t_2) |\mathbf{0}\rangle_{\text{in}} \right] \overleftarrow{K}_{x_1} \tilde{f}_{p_1}(x_1) dt_2 d^4 x_1$$

Como a derivação é feita apenas em t_2 , o único termo dependente desta variável é $a^\dagger(\mathbf{p}_2, t_2)$, portanto, expandindo explicitamente o operador interpolante, temos

$$\begin{aligned} \partial_0 a^\dagger(\mathbf{p}_2, t_2) &= \partial_0 \left[-i \int f_{p_2}(x_2) \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi(x_2) d^3 x_2 \right] \\ &= -i \int \partial_0 \left[f_{p_2}(x_2) \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi(x_2) \right] d^3 x_2 \end{aligned}$$

No exercício 2.(b), calculamos esta mesma derivada, porém consideramos o campo $\phi_0(x)$, que é um campo livre, porém $\phi(x_2)$ é um campo interpolante e não necessariamente satisfaz a equação de Klein-Gordon, de modo que

$$\partial_0 a^\dagger(\mathbf{p}_2, t_2) = -i \int f_{p_2}(x_2) (\partial_\mu \partial^\mu + m^2)_{x_2} \phi(x_2) d^3 x_2$$

Sendo então

$$\phi(x_2) \overleftarrow{K}_{x_2} = (\partial_\mu \partial^\mu + m^2)_{x_2} \phi(x_2)$$

Podemos escrever que

$$A = "1" + (iZ^{-1/2})^2 \iiint_{-\infty}^{\infty} {}_{\text{out}} \langle \mathbf{p}'_1 \mathbf{p}'_2 | \phi(x_1) \phi(x_2) |\mathbf{0}\rangle_{\text{in}} \overleftarrow{K}_{x_1} \tilde{f}_{p_1}(x_1) \overleftarrow{K}_{x_2} \tilde{f}_{p_2}(x_2) dt_2 d^3 x_2 d^4 x_1$$

Ou seja

$$A = "1" + (iZ^{-1/2})^2 \int {}_{\text{out}} \langle \mathbf{p}'_1 \mathbf{p}'_2 | \phi(x_1) \phi(x_2) |\mathbf{0}\rangle_{\text{in}} \overleftarrow{K}_{x_1} \overleftarrow{K}_{x_2} \tilde{f}_{p_1}(x_1) \tilde{f}_{p_2}(x_2) d^4 x_1 d^4 x_2$$

Continuando agora a redução para ${}_{\text{out}} \langle \mathbf{p}'_1 \mathbf{p}'_2 |$, temos pela convergência fraca

$${}_{\text{out}} \langle \mathbf{p}'_1 \mathbf{p}'_2 | = Z^{-1/2} \lim_{\tau_2 \rightarrow +\infty} {}_{\text{out}} \langle \mathbf{p}'_1 | a(\mathbf{p}'_2, \tau_2) \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}'_2}}$$

O que fornece a expressão

$$\begin{aligned} A &= "1" + i^2 (Z^{-1/2})^3 \lim_{\tau_2 \rightarrow \infty} \int {}_{\text{out}} \langle \mathbf{p}'_1 | a(\mathbf{p}'_2, \tau_2) \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}'_2}} \phi(x_1) \phi(x_2) |\mathbf{0}\rangle_{\text{in}} \times \\ &\quad \times \overleftarrow{K}_{x_1} \overleftarrow{K}_{x_2} \tilde{f}_{p_1}(x_1) \tilde{f}_{p_2}(x_2) d^4 x_1 d^4 x_2 \end{aligned}$$

Usando novamente uma integração de $-\infty$ a $+\infty$ em uma derivada total no tempo, mas agora em relação à τ_2 , teremos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \partial_0 \left[{}_{\text{out}} \langle \mathbf{p}'_1 | a(\mathbf{p}'_2, \tau_2) \cdots |\mathbf{0}\rangle_{\text{in}} \right] d\tau_2 &= \lim_{\tau_2 \rightarrow +\infty} \left[{}_{\text{out}} \langle \mathbf{p}'_1 | a(\mathbf{p}'_2, \tau_2) \cdots |\mathbf{0}\rangle_{\text{in}} \right] - \\ &\quad - \lim_{\tau_2 \rightarrow -\infty} \left[{}_{\text{out}} \langle \mathbf{p}'_1 | a(\mathbf{p}'_2, \tau_2) \cdots |\mathbf{0}\rangle_{\text{in}} \right] \end{aligned}$$



Neste caso, o termo de interação que não nos interessa vai ser

$$Z^{-1/2} \lim_{\tau_2 \rightarrow -\infty} {}_{\text{out}}\langle \mathbf{p}'_1 | a(\mathbf{p}'_2, \tau_2) \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}'_2}} \phi(x_1) \phi(x_2) |\mathbf{0}\rangle_{\text{in}} = Z^{-1/2} {}_{\text{out}}\langle \mathbf{p}'_1 | a(\mathbf{p}'_2) \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}'_2}} \phi(x_1) \phi(x_2) |\mathbf{0}\rangle_{\text{in}}$$

por um motivo análogo ao anterior, portanto inserimos este termo em “1”. Com a substituição pela integral, temos então

$$\begin{aligned} A = & \text{“1”} + i^2 (Z^{-1/2})^3 \iint_{-\infty}^{\infty} \partial_0 \left[{}_{\text{out}}\langle \mathbf{p}'_1 | a(\mathbf{p}'_2, \tau_2) \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}'_2}} \phi(x_1) \phi(x_2) |\mathbf{0}\rangle_{\text{in}} \right] \times \\ & \times \overleftarrow{K}_{x_1} \overleftarrow{K}_{x_2} \tilde{f}_{p_1}(x_1) \tilde{f}_{p_2}(x_2) d\tau_2 d^4x_1 d^4x_2 \end{aligned}$$

Dado que a derivada ∂_0 é feita em τ_2 , ela vai ser aplicada apenas em $a(\mathbf{p}'_2, \tau_2)$, que explicitamente se escreve

$$\partial_0 a(\mathbf{p}'_2, \tau_2) = i \int \partial_0 \left[f_{p'_2}^*(y_2) \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi(y_2) \right] d^3y_2$$

que levando em conta que $\phi(y_2)$ é um campo interpolante e não satisfaz necessariamente a equação de Klein-Gordon, o desenvolvimento do exercício 2.(b) nos fornece

$$\partial_0 a(\mathbf{p}'_2, \tau_2) = i \int f_{p'_2}^*(y_2) (\partial_\mu \partial^\mu + m^2)_{y_2} \phi(y_2) d^3y_2$$

Sendo então

$$\overrightarrow{K}_{y_2} \phi(y_2) = (\partial_\mu \partial^\mu + m^2)_{y_2} \phi(y_2)$$

Escrevemos

$$\begin{aligned} A = & \text{“1”} + (iZ^{-1/2})^3 \iiint_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}_{p'_2}^*(y_2) \overrightarrow{K}_{y_2} {}_{\text{out}}\langle \mathbf{p}'_1 | \phi(y_2) \phi(x_1) \phi(x_2) |\mathbf{0}\rangle_{\text{in}} \times \\ & \times \overleftarrow{K}_{x_1} \overleftarrow{K}_{x_2} \tilde{f}_{p_1}(x_1) \tilde{f}_{p_2}(x_2) d\tau_2 d^3y_2 d^4x_1 d^4x_2 \end{aligned}$$

ou seja

$$\begin{aligned} A = & ; \text{“1”} + (iZ^{-1/2})^3 \int \tilde{f}_{p'_2}^*(y_2) \overrightarrow{K}_{y_2} {}_{\text{out}}\langle \mathbf{p}'_1 | \phi(y_2) \phi(x_1) \phi(x_2) |\mathbf{0}\rangle_{\text{in}} \times \\ & \times \overleftarrow{K}_{x_1} \overleftarrow{K}_{x_2} \tilde{f}_{p_1}(x_1) \tilde{f}_{p_2}(x_2) d^4y_2 d^4x_1 d^4x_2 \end{aligned}$$

Tendo feito o procedimento para ${}_{\text{out}}\langle \mathbf{p}'_2 |$, a extensão para ${}_{\text{out}}\langle \mathbf{p}'_1 |$ torna-se imediata, tal que

$$\begin{aligned} A = & \text{“1”} + (iZ^{-1/2})^4 \int \tilde{f}_{p'_1}^*(y_1) \tilde{f}_{p'_2}^*(y_2) \overrightarrow{K}_{y_1} \overrightarrow{K}_{y_2} {}_{\text{out}}\langle \mathbf{0} | \phi(y_1) \phi(y_2) \phi(x_1) \phi(x_2) |\mathbf{0}\rangle_{\text{in}} \times \\ & \times \overleftarrow{K}_{x_1} \overleftarrow{K}_{x_2} \tilde{f}_{p_1}(x_1) \tilde{f}_{p_2}(x_2) d^4y_1 d^4y_2 d^4x_1 d^4x_2 \end{aligned}$$

Analizando então apenas ${}_{\text{out}}\langle \mathbf{0} | \phi(y_1) \phi(y_2) \phi(x_1) \phi(x_2) |\mathbf{0}\rangle_{\text{in}}$, temos que pensar do fato de que todos os campos interpolantes são combinações de operadores de criação e aniquilação interpolantes, de modo que a ocorrência de operadores $a^\dagger(\mathbf{p}, \infty)$ podem ser problemáticos quando estiverem à direita,



pois indicaria uma aniquilação do vácuo inicial $|\mathbf{0}\rangle_{\text{in}}$, de modo que queremos colocar estes operadores à esquerda a fim de ser aplicado a ${}_{\text{out}}\langle \mathbf{0}|$ e criar um estado do tipo ${}_{\text{out}}\langle \mathbf{p}|$, um argumento análogo ocorre ao pensarmos na ocorrência de operadores $a(\mathbf{p}, -\infty)$, pois se estes estiverem à esquerda, haveria uma indicação de aniquilação do vácuo final ${}_{\text{out}}\langle \mathbf{0}|$, então queremos que esse tipo de operador fique à direita para criar estados do tipo $|\mathbf{p}\rangle_{\text{in}}$ ao serem aplicados ao vácuo inicial $|\mathbf{0}\rangle_{\text{in}}$. Estas ocorrências aparecem com o fato de trocarmos os limites por integrais em derivadas totais e ignorarmos os termos desconexos. Para evitar estes problemas, temos a necessidade de utilizar o operador de ordenamento temporal $T\{\dots\}$ nos campos, concluindo que a redução LSZ completa é dada por

$$\begin{aligned} {}_{\text{out}}\langle \mathbf{p}'_1 \mathbf{p}'_2 | \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \rangle_{\text{in}} &= "1" + (iZ^{-1/2})^4 \int \tilde{f}_{p'_1}^*(y_1) \tilde{f}_{p'_2}^*(y_2) \vec{K}_{y_1} \vec{K}_{y_2} \times \\ &\times {}_{\text{out}}\langle \mathbf{0} | T\{\phi(y_1)\phi(y_2)\phi(x_1)\phi(x_2)\} |\mathbf{0}\rangle_{\text{in}} \overset{\leftarrow}{K}_{x_1} \overset{\leftarrow}{K}_{x_2} \tilde{f}_{p_1}(x_1) \tilde{f}_{p_2}(x_2) d^4y_1 d^4y_2 d^4x_1 d^4x_2 \end{aligned} \quad (8.1)$$



Q. 09

Redução LSZ (férnion–anti-férnion)

Considere o espalhamento entre um férnion e um anti-férnion. A normalização do campo interpolante com relação ao campo livre inicial é dada por

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} {}_{\text{out}}\langle \beta | \psi_\mu(t) | \alpha \rangle_{\text{in}} = Z^{1/2} {}_{\text{out}}\langle \beta | \psi_\mu^{\text{in}}(t) | \alpha \rangle_{\text{in}}$$

Com as mesmas convenções do exercício 6, derive a redução LSZ para este processo:

$$\begin{aligned} {}_{\text{out}}\langle \mathbf{q}_1 \bar{\mathbf{q}}_1 | \mathbf{p}_1 \bar{\mathbf{p}}_1 \rangle_{\text{in}} &= "1" + (-iZ^{-1/2})^2 (iZ^{-1/2})^2 \int \bar{U}_{q_1}^s(y_1) \vec{F}_{y_1} \bar{V}_{\bar{p}_1}^s(\bar{x}_1) \vec{F}_{\bar{x}_1} \times \\ &\times {}_{\text{out}}\langle 0 | T\{\bar{\psi}(\bar{y}_1)\psi(y_1)\bar{\psi}(x_1)\psi(\bar{x}_1)\} | 0 \rangle_{\text{in}} \overset{\leftarrow}{F}_{x_1} \tilde{U}_{p_1}^s(x_1) \overset{\leftarrow}{F}_{\bar{y}_1} \tilde{V}_{\bar{q}_1}^s(\bar{y}_1) d^4 x_1 d^4 \bar{x}_1 d^4 y_1 d^4 \bar{y}_1 \end{aligned}$$

sendo $\vec{F}_{y_1} = (i\cancel{\partial} - m)_{y_1}$.

A convergência fraca nos dá a normalização do campo interpolante em relação ao campo livre inicial, de modo que podemos escrever

$$|\mathbf{p}_1 \bar{\mathbf{p}}_1\rangle_{\text{in}} = Z_2^{-1/2} \lim_{t_1 \rightarrow -\infty} \sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}} b_s^\dagger(\mathbf{p}_1, t_1) |\bar{\mathbf{p}}_1\rangle_{\text{in}}$$

Definindo então $A := {}_{\text{out}}\langle \mathbf{q}_1 \bar{\mathbf{q}}_1 | \mathbf{p}_1 \bar{\mathbf{p}}_1 \rangle_{\text{in}}$, temos

$$A = Z_2^{-1/2} \lim_{t_1 \rightarrow -\infty} {}_{\text{out}}\langle \mathbf{q}_1 \bar{\mathbf{q}}_1 | \sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}} b_s^\dagger(\mathbf{p}_1, t_1) |\bar{\mathbf{p}}_1\rangle_{\text{in}}$$

Considerando então uma integral em dt_1 de uma derivada total temporal também em t_1 , escrevemos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \partial_0 \left[{}_{\text{out}}\langle \mathbf{q}_1 \bar{\mathbf{q}}_1 | \sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}} b_s^\dagger(\mathbf{p}_1, t_1) |\bar{\mathbf{p}}_1\rangle_{\text{in}} \right] dt_1 &= \lim_{t_1 \rightarrow \infty} \left[{}_{\text{out}}\langle \mathbf{q}_1 \bar{\mathbf{q}}_1 | \sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}} b_s^\dagger(\mathbf{p}_1, t_1) |\bar{\mathbf{p}}_1\rangle_{\text{in}} \right] - \\ &- \lim_{t_1 \rightarrow -\infty} \left[{}_{\text{out}}\langle \mathbf{q}_1 \bar{\mathbf{q}}_1 | \sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}} b_s^\dagger(\mathbf{p}_1, t_1) |\bar{\mathbf{p}}_1\rangle_{\text{in}} \right] \end{aligned}$$

Note então que

$$Z_2^{-1/2} \lim_{t_1 \rightarrow \infty} \left[{}_{\text{out}}\langle \mathbf{q}_1 \bar{\mathbf{q}}_1 | \sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}} b_s^\dagger(\mathbf{p}_1, t_1) |\bar{\mathbf{p}}_1\rangle_{\text{in}} \right]$$

será não nulo apenas para casos irrelevantes, onde 1 férnion de momento \mathbf{p}_1 se transforma em um outro férnion de momento \mathbf{q}_1 ou um anti-férnion de momento $\bar{\mathbf{q}}_1$, que não é o caso de interesse, logo fazemos este termo ser “1”. Portanto

$$A = "1" - Z_2^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \partial_0 \left[{}_{\text{out}}\langle \mathbf{q}_1 \bar{\mathbf{q}}_1 | \sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}} b_s^\dagger(\mathbf{p}_1, t_1) |\bar{\mathbf{p}}_1\rangle_{\text{in}} \right] dt_1$$



onde essa derivada só se aplica no operador $b_s^\dagger(\mathbf{p}_1, t_1)$, sendo então a quantidade que precisamos calcular. Sabendo a forma de $b_s(\mathbf{k})$, conforme (6.1), fica claro que

$$b_s^\dagger(\mathbf{p}_1, t_1) = \int \bar{\psi}(x_1) \gamma^0 U_{p_1}^s(x_1) d^3x_1$$

Segue que a derivada em relação à t_1 nos dá

$$\partial_0 b_s^\dagger(\mathbf{p}_1, t_1) = \int [\partial_0 \bar{\psi}(x_1)] \gamma^0 U_{p_1}^s(x_1) d^3x_1 + \int \bar{\psi}(x_1) \gamma^0 [\partial_0 U_{p_1}^s(x_1)] d^3x_1$$

Notemos que $U_{p_1}^s(x_1)$ satisfaz a equação de Dirac, tal que

$$(i\cancel{\partial} - m) U_{p_1}^s(x_1) = 0$$

portanto

$$i\gamma^0 \partial_0 U_{p_1}^s(x_1) + i\gamma^k \partial_k U_{p_1}^s(x_1) - m U_{p_1}^s(x_1) = 0$$

o que nos dá, multiplicando tudo por $-i$ e isolando o termo de interesse

$$\begin{aligned} \gamma^0 \partial_0 U_{p_1}^s(x_1) &= -im U_{p_1}^s(x_1) - \gamma^k \partial_k U_{p_1}^s(x_1) \\ &= -im U_{p_1}^s(x_1) - \gamma^k (ip_k) U_{p_1}^s(x_1) \end{aligned}$$

Então a segunda integral pode ser substituída, de modo que

$$\partial_0 b_s^\dagger(\mathbf{p}_1, t_1) = \int [\partial_0 \bar{\psi}(x_1) \gamma^0] U_{p_1}^s(x_1) d^3x_1 + \int \bar{\psi}(x_1) [-im - i\gamma^k p_k] U_{p_1}^s(x_1) d^3x_1$$

Em uma integração por partes no segundo termo, consideramos que o campo desaparece nos limites assintóticos, e obtemos

$$\begin{aligned} \partial_0 b_s^\dagger(\mathbf{p}_1, t_1) &= \int [\partial_0 \bar{\psi}(x_1) \gamma^0 + \partial_k \bar{\psi}(x_1) \gamma^k - i\bar{\psi}(x_1) m] U_{p_1}^s(x_1) d^3x_1 \\ &= i \int [-i\partial_0 \bar{\psi}(x_1) \gamma^0 - i\partial_k \bar{\psi}(x_1) \gamma^k - \bar{\psi}(x_1) m] U_{p_1}^s(x_1) d^3x_1 \\ &= i \int [-i\partial_\mu \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu - \bar{\psi}(x_1) m] U_{p_1}^s(x_1) d^3x_1 \end{aligned}$$

Sendo então

$$-i\partial_\mu \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu - \bar{\psi}(x_1) m = \bar{\psi}(x_1) (-i\cancel{\partial} - m)_{x_1} = \bar{\psi}(x_1) \overset{\leftarrow}{F}_{x_1}$$

obtemos que

$$\partial_0 b_s^\dagger(\mathbf{p}_1, t_1) = i \int \bar{\psi}(x_1) \overset{\leftarrow}{F}_{x_1} U_{p_1}^s(x_1) d^3x_1$$

Portanto

$$A = "1" - iZ_2^{-1/2} \iint_{-\infty}^{\infty} {}_{\text{out}} \langle \mathbf{q}_1 \bar{\mathbf{q}}_1 | \bar{\psi}(x_1) | \bar{\mathbf{p}}_1 \rangle_{\text{in}} \overset{\leftarrow}{F}_{x_1} \sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}} U_{p_1}^s(x_1) d^3x_1 dt_1$$



Como $\tilde{U}_{p_1}^s(x_1) = \sqrt{2E_{\bar{\mathbf{p}}_1}} U_{p_1}^s(x_1)$ (exercício 6), concluindo que a primeira redução fica

$$A = "1" - iZ_2^{-1/2} \int_{\text{out}} \langle \mathbf{q}_1 \bar{\mathbf{q}}_1 | \bar{\psi}(x_1) | \bar{\mathbf{p}}_1 \rangle_{\text{in}} \overleftarrow{F}_{x_1} \tilde{U}_{p_1}^s(x_1) d^4x_1$$

Seguindo com a redução, podemos escrever

$$|\bar{\mathbf{p}}_1\rangle_{\text{in}} = Z_2^{-1/2} \lim_{\bar{t}_1 \rightarrow -\infty} \sqrt{2E_{\bar{\mathbf{p}}_1}} d_s^\dagger(\bar{\mathbf{p}}_1, \bar{t}_1) |\mathbf{0}\rangle_{\text{in}}$$

Portanto

$$A = "1" - i(Z_2^{-1/2})^2 \lim_{\bar{t}_1 \rightarrow -\infty} \int_{\text{out}} \langle \mathbf{q}_1 \bar{\mathbf{q}}_1 | \bar{\psi}(x_1) \sqrt{2E_{\bar{\mathbf{p}}_1}} d_s^\dagger(\bar{\mathbf{p}}_1, \bar{t}_1) |\mathbf{0}\rangle_{\text{in}} \overleftarrow{F}_{x_1} \tilde{U}_{p_1}^s(x_1) d^4x_1$$

Usando novamente o argumento de uma integração em uma derivada total, mas agora \bar{t}_1 , temos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \partial_0 \left[\int_{\text{out}} \langle \mathbf{q}_1 \bar{\mathbf{q}}_1 | \cdots d_s^\dagger(\bar{\mathbf{p}}_1, \bar{t}_1) |\mathbf{0}\rangle_{\text{in}} \right] d\bar{t}_1 &= \lim_{\bar{t}_1 \rightarrow \infty} \int_{\text{out}} \langle \mathbf{q}_1 \bar{\mathbf{q}}_1 | \cdots d_s^\dagger(\bar{\mathbf{p}}_1, \bar{t}_1) |\mathbf{0}\rangle_{\text{in}} - \\ &\quad - \lim_{\bar{t}_1 \rightarrow -\infty} \int_{\text{out}} \langle \mathbf{q}_1 \bar{\mathbf{q}}_1 | \cdots d_s^\dagger(\bar{\mathbf{p}}_1, \bar{t}_1) |\mathbf{0}\rangle_{\text{in}} \end{aligned}$$

O limite de $\bar{t}_1 \rightarrow \infty$ vai gerar um termo desconexo (não relevante para interação que estamos interessados), tal que o adicionamos a “1” e ficamos com

$$A = "1" - i(Z_2^{-1/2})^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\text{out}} \langle \mathbf{q}_1 \bar{\mathbf{q}}_1 | \bar{\psi}(x_1) \sqrt{2E_{\bar{\mathbf{p}}_1}} \partial_0 d_s^\dagger(\bar{\mathbf{p}}_1, \bar{t}_1) |\mathbf{0}\rangle_{\text{in}} \overleftarrow{F}_{x_1} \tilde{U}_{p_1}^s(x_1) d\bar{t}_1 d^4x_1$$

Sabendo a forma explícita de $d_s(\mathbf{k})$, conforme (6.2), podemos escrever seu hermitiano conjugado interpolante sob a forma

$$d_s^\dagger(\bar{\mathbf{p}}_1, \bar{t}_1) = \int \bar{V}_{\bar{p}_1}^s(\bar{x}_1) \gamma^0 \psi(\bar{x}_1) d^3\bar{x}_1$$

Logo a derivada em $d\bar{t}_1$ se expande na forma

$$\partial_0 d_s^\dagger(\bar{\mathbf{p}}_1, \bar{t}_1) = \int [\partial_0 \bar{V}_{\bar{p}_1}^s(\bar{x}_1)] \gamma^0 \psi(\bar{x}_1) d^3\bar{x}_1 + \int \bar{V}_{\bar{p}_1}^s(\bar{x}_1) \gamma^0 [\partial_0 \psi(\bar{x}_1)] d^3\bar{x}_1$$

Notemos que $\bar{V}_{\bar{p}_1}^s(\bar{x}_1)$ satisfaz a equação de Dirac adjunta, isto é

$$\bar{V}_{\bar{p}_1}^s(\bar{x}_1) (-i \not{\partial} - m)_{\bar{x}_1} = 0$$

que expandindo assume a forma

$$-i \partial_0 \bar{V}_{\bar{p}_1}^s(\bar{x}_1) \gamma^0 - i \partial_k \bar{V}_{\bar{p}_1}^s(\bar{x}_1) \gamma^k - m \bar{V}_{\bar{p}_1}^s(\bar{x}_1) = 0$$

Multiplicando tudo por i e isolando um termo de interesse, temos

$$\begin{aligned} \partial_0 \bar{V}_{\bar{p}_1}^s(\bar{x}_1) \gamma^0 &= im \bar{V}_{\bar{p}_1}^s(\bar{x}_1) - \partial_k \bar{V}_{\bar{p}_1}^s(\bar{x}_1) \gamma^k \\ &\stackrel{|}{=} im \bar{V}_{\bar{p}_1}^s(\bar{x}_1) - ip_k \bar{V}_{\bar{p}_1}^s(\bar{x}_1) \gamma^k \\ &\stackrel{|}{=} \bar{V}_{\bar{p}_1}^s(\bar{x}_1) (im - ip_k \gamma^k) \end{aligned}$$



Portanto

$$\partial_0 d_s^\dagger(\bar{\mathbf{p}}_1, \bar{t}_1) = \int \bar{V}_{\bar{p}_1}^s(\bar{x}_1) \left(im - ip_k \gamma^k \right) \psi(\bar{x}_1) d^3 \bar{x}_1 + \int \bar{V}_{\bar{p}_1}^s(\bar{x}_1) \gamma^0 \partial_0 \psi(\bar{x}_1) d^3 \bar{x}_1$$

A partir de uma integração por partes, transformamos o primeiro termo, de modo que

$$\begin{aligned} \partial_0 d_s^\dagger(\bar{\mathbf{p}}_1, \bar{t}_1) &= \int \bar{V}_{\bar{p}_1}^s(\bar{x}_1) \left(im + \gamma^k \partial_k \right) \psi(\bar{x}_1) d^3 \bar{x}_1 + \int \bar{V}_{\bar{p}_1}^s(\bar{x}_1) \gamma^0 \partial_0 \psi(\bar{x}_1) d^3 \bar{x}_1 \\ &\stackrel{|}{=} \int \bar{V}_{\bar{p}_1}^s(\bar{x}_1) \left(\gamma^0 \partial_0 + \gamma^k \partial_k + im \right) \psi(\bar{x}_1) d^3 \bar{x}_1 \\ &= -i \int \bar{V}_{\bar{p}_1}^s(\bar{x}_1) (i \gamma^\mu \partial_\mu - m)_{\bar{x}_1} \psi(\bar{x}_1) d^3 \bar{x}_1 \end{aligned}$$

Sendo então

$$(i \not{\partial} - m)_{\bar{x}_1} \psi(\bar{x}_1) = \vec{F}_{\bar{x}_1} \psi(\bar{x}_1)$$

obtemos

$$\partial_0 d_s^\dagger(\bar{\mathbf{p}}_1, \bar{t}_1) = -i \int \bar{V}_{\bar{p}_1}^s(\bar{x}_1) \vec{F}_{\bar{x}_1} \psi(\bar{x}_1) d^3 \bar{x}_1$$

Portanto

$$\begin{aligned} A = "1" + (i Z_2^{-1/2}) (-i Z_2^{-1/2}) &\int \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{2 E_{\bar{\mathbf{p}}_1}} \bar{V}_{\bar{p}_1}^s(\bar{x}_1) \vec{F}_{\bar{x}_1} \psi(\bar{x}_1) \text{out} \langle \mathbf{q}_1 \bar{\mathbf{q}}_1 | \bar{\psi}(x_1) \psi(\bar{x}_1) | \mathbf{0} \rangle_{\text{in}} \times \\ &\times \vec{F}_{x_1} \tilde{U}_{p_1}^s(x_1) d\bar{t}_1 d^3 \bar{x}_1 d^4 x_1 \end{aligned}$$

Como $\tilde{V}_{\bar{p}_1}^s = \sqrt{2 E_{\bar{\mathbf{p}}_1}} \bar{V}_{\bar{p}_1}^s(\bar{x}_1)$, obtemos

$$\begin{aligned} A = "1" + (i Z_2^{-1/2}) (-i Z_2^{-1/2}) &\int \tilde{V}_{\bar{p}_1}^s(\bar{x}_1) \vec{F}_{\bar{x}_1} \psi(\bar{x}_1) \text{out} \langle \mathbf{q}_1 \bar{\mathbf{q}}_1 | \bar{\psi}(x_1) \psi(\bar{x}_1) | \mathbf{0} \rangle_{\text{in}} \times \\ &\times \vec{F}_{x_1} \tilde{U}_{p_1}^s(x_1) d^4 \bar{x}_1 d^4 x_1 \end{aligned}$$

Considerando agora os estados finais, temos

$$\text{out} \langle \mathbf{q}_1 \bar{\mathbf{q}}_1 | = Z_2^{-1/2} \lim_{\bar{\tau}_1 \rightarrow \infty} \text{out} \langle \mathbf{q}_1 | d_s(\bar{\mathbf{q}}_1, \bar{\tau}_1) \sqrt{2 E_{\bar{q}_1}}$$

Com isso

$$\begin{aligned} A = "1" + (i Z_2^{-1/2}) (-i Z_2^{-1/2}) Z_2^{-1/2} &\lim_{\bar{\tau}_1 \rightarrow \infty} \int \tilde{V}_{\bar{p}_1}^s(\bar{x}_1) \vec{F}_{\bar{x}_1} \psi(\bar{x}_1) \text{out} \langle \mathbf{q}_1 | d_s(\bar{\mathbf{q}}_1, \bar{\tau}_1) \sqrt{2 E_{\bar{q}_1}} \times \\ &\times \bar{\psi}(x_1) \psi(\bar{x}_1) | \mathbf{0} \rangle_{\text{in}} \vec{F}_{x_1} \tilde{U}_{p_1}^s(x_1) d^4 \bar{x}_1 d^4 x_1 \end{aligned}$$

Fazendo outra vez a substituição por uma integração de uma derivada total no tempo, tal que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \partial_0 \left[\text{out} \langle \mathbf{q}_1 | d_s(\bar{\mathbf{q}}_1, \bar{\tau}_1) \cdots | \mathbf{0} \rangle_{\text{in}} \right] d\bar{\tau}_1 &= \lim_{\bar{\tau}_1 \rightarrow \infty} \text{out} \langle \mathbf{q}_1 | d_s(\bar{\mathbf{q}}_1, \bar{\tau}_1) \cdots | \mathbf{0} \rangle_{\text{in}} - \\ &- \lim_{\bar{\tau}_1 \rightarrow -\infty} \text{out} \langle \mathbf{q}_1 | d_s(\bar{\mathbf{q}}_1, \bar{\tau}_1) \cdots | \mathbf{0} \rangle_{\text{in}} \end{aligned}$$



Neste caso, o termo com o limite $\bar{\tau}_1 \rightarrow \infty$ será irrelevante para o tipo de interação que estamos interessados, de modo a inserirmos em “1” e portanto

$$A = “1” + (iZ_2^{-1/2})(-iZ_2^{-1/2})Z_2^{-1/2} \iint_{-\infty}^{\infty} \bar{V}_{\bar{p}_1}^s(\bar{x}_1) \vec{F}_{\bar{x}_1} \psi(\bar{x}_1)_{\text{out}} \langle \mathbf{q}_1 | \partial_0 d_s(\bar{\mathbf{q}}_1, \bar{\tau}_1) \sqrt{2E_{\bar{q}_1}} \times \\ \times \bar{\psi}(x_1) \psi(\bar{x}_1) |\mathbf{0}\rangle_{\text{in}} \overleftarrow{F}_{x_1} \tilde{U}_{p_1}^s(x_1) d\bar{\tau}_1 d^4 \bar{x}_1 d^4 x_1$$

Calculando então a derivada do operador $d_s(\bar{\mathbf{q}}_1, \bar{\tau}_1)$ com base na forma explícita (6.2), temos

$$\partial_0 d_s(\bar{\mathbf{q}}_1, \bar{\tau}_1) = \int [\partial_0 \bar{\psi}(\bar{y}_1)] \gamma^0 V_k^s(\bar{y}_1) d^3 \bar{y}_1 + \int \bar{\psi}(\bar{y}_1) \gamma^0 [\partial_0 V_k^s(\bar{y}_1)] d^3 \bar{y}_1$$

Essa derivada é similar à $\partial_0 b_s^\dagger(\mathbf{p}_1, t_1)$, de modo podemos seguir o mesmo raciocínio e obter

$$\partial_0 d_s(\bar{\mathbf{q}}_1, \bar{\tau}_1) = i \int \bar{\psi}(\bar{y}_1) \overleftarrow{F}_{\bar{y}_1} V_{\bar{q}_1}^s(\bar{y}_1) d^3 \bar{y}_1$$

Considerando então $\tilde{V}_{\bar{q}_1}^s(\bar{y}_1) = \sqrt{2E_{\bar{q}_1}} V_{\bar{q}_1}^s(\bar{y}_1)$, temos

$$A = “1” + (iZ_2^{-1/2})^2 (-iZ_2^{-1/2}) \int \bar{V}_{\bar{p}_1}^s(\bar{x}_1) \vec{F}_{\bar{x}_1} \langle \mathbf{q}_1 | \bar{\psi}(\bar{y}_1) \bar{\psi}(x_1) \psi(\bar{x}_1) \psi(x_1) |\mathbf{0}\rangle_{\text{in}} \times \\ \times \overleftarrow{F}_{x_1} \tilde{U}_{p_1}^s(x_1) \overleftarrow{F}_{\bar{y}_1} \tilde{V}_{\bar{q}_1}^s(\bar{y}_1) d^4 \bar{y}_1 d^4 \bar{x}_1 d^4 x_1$$

Com todo o procedimento feito até então, fica simples induzir a redução para $_{\text{out}} \langle \mathbf{q}_1 |$ tal que

$$A = “1” + (iZ_2^{-1/2})^2 (-iZ_2^{-1/2})^2 \int \bar{U}_{\bar{q}_1}^s(y_1) \vec{F}_{y_1} \bar{V}_{\bar{p}_1}^s(\bar{x}_1) \vec{F}_{\bar{x}_1} \langle \mathbf{0} | \psi(y_1) \bar{\psi}(\bar{y}_1) \bar{\psi}(x_1) \psi(\bar{x}_1) |\mathbf{0}\rangle_{\text{in}} \times \\ \times \overleftarrow{F}_{x_1} \tilde{U}_{p_1}^s(x_1) \overleftarrow{F}_{\bar{y}_1} \tilde{V}_{\bar{q}_1}^s(\bar{y}_1) d^4 y_1 d^4 \bar{y}_1 d^4 \bar{x}_1 d^4 x_1$$

Olhando somente para o termo $_{\text{out}} \langle \mathbf{0} | \psi(y_1) \bar{\psi}(\bar{y}_1) \bar{\psi}(x_1) \psi(\bar{x}_1) |\mathbf{0}\rangle_{\text{in}}$ vemos a necessidade da inclusão do operador de ordenamento temporal $T\{\dots\}$ para evitar que operadores de aniquilação se apliquem no vácuo, argumento equivalente ao feito no exercício 8, portanto a redução LSZ para um espalhamento férmiton–anti-férmiton é dada por

$$_{\text{out}} \langle \mathbf{q}_1 \bar{\mathbf{q}}_1 | \mathbf{p}_1 \bar{\mathbf{p}}_1 \rangle_{\text{in}} = “1” + (-iZ^{-1/2})^2 (iZ^{-1/2})^2 \int \bar{U}_{q_1}^s(y_1) \vec{F}_{y_1} \bar{V}_{\bar{p}_1}^s(\bar{x}_1) \vec{F}_{\bar{x}_1} \times \\ \times \langle \text{out} | T\{\bar{\psi}(\bar{y}_1) \psi(y_1) \bar{\psi}(x_1) \psi(\bar{x}_1)\} | 0 \rangle_{\text{in}} \overleftarrow{F}_{x_1} \tilde{U}_{p_1}^s(x_1) \overleftarrow{F}_{\bar{y}_1} \tilde{V}_{\bar{q}_1}^s(\bar{y}_1) d^4 x_1 d^4 \bar{x}_1 d^4 y_1 d^4 \bar{y}_1 \quad (9.1)$$



Q. 10

Relações úteis com operadores hamiltonianos

A partir dos fatos abaixo,

$$(a) \frac{d}{dt}[U(t)U^{-1}(t)] = 0$$

$$(b) \text{ Campo interpolante } \phi(\mathbf{r}, t) = U^{-1}(t)\phi_{\text{in}}(\mathbf{r}, t)U(t)$$

$$(c) \frac{\partial}{\partial t}\phi(\mathbf{r}, t) = i[\hat{H}(\phi, \pi), \phi(\mathbf{r}, t)] \quad \frac{\partial}{\partial t}\phi_{\text{in}}(\mathbf{r}, t) = i[\hat{H}_0(\phi_{\text{in}}, \pi_{\text{in}}), \phi_{\text{in}}(\mathbf{r}, t)],$$

mostre que

$$\dot{U}U^{-1} + i\hat{H}(\phi_{\text{in}}, \pi_{\text{in}}) = i\hat{H}_0(\phi_{\text{in}}, \pi_{\text{in}}) \quad \& \quad i\frac{\partial U(t)}{\partial t} = \hat{H}_{\text{int}}(\phi_{\text{in}}, \pi_{\text{in}})U(t)$$

Considere a primeira propriedade do item (c), de modo que utilizando o campo interpolante do item (b) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}[U^{-1}\phi_{\text{in}}U] \\ &= \dot{U}^{-1}\phi_{\text{in}}U + U^{-1}\dot{\phi}_{\text{in}}U + U^{-1}\phi_{\text{in}}\dot{U} \end{aligned}$$

A propriedade (a) nos dá

$$\frac{d}{dt}[UU^{-1}] = \dot{U}U^{-1} + U\dot{U}^{-1} = 0$$

Logo

$$\dot{U}U^{-1} = -U\dot{U}^{-1}$$

Como $U^{-1}U = \mathbb{1}$, podemos aplicar U^{-1} pela esquerda, ficando com

$$\dot{U}^{-1} = -U^{-1}\dot{U}U^{-1}$$

Portanto

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} &= -U^{-1}\dot{U}U^{-1}\phi_{\text{in}}U + U^{-1}\frac{\partial \phi_{\text{in}}}{\partial t}U + U^{-1}\phi_{\text{in}}\dot{U} \\ &= -U^{-1}\dot{U}\phi + U^{-1}\frac{\partial \phi_{\text{in}}}{\partial t}U + U^{-1}U\phi U^{-1}\dot{U} \\ &= -U^{-1}\dot{U}\phi + U^{-1}\frac{\partial \phi_{\text{in}}}{\partial t}U + \phi U^{-1}\dot{U} \end{aligned}$$



Pela propriedade (c), temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi_{\text{in}}}{\partial t} &= i \left[\hat{H}_0(\phi_{\text{in}}, \pi_{\text{in}}), \phi_{\text{in}} \right] \\ &= i \hat{H}_0(\phi_{\text{in}}, \pi_{\text{in}}) \phi_{\text{in}} - i \phi_{\text{in}} \hat{H}_0(\phi_{\text{in}}, \pi_{\text{in}}) \\ &= i \hat{H}_0(\phi_{\text{in}}, \pi_{\text{in}}) U \phi U^{-1} - i U \phi U^{-1} \hat{H}_0(\phi_{\text{in}}, \pi_{\text{in}})\end{aligned}$$

Como precisamos calcular $U^{-1} \frac{\partial \phi_{\text{in}}}{\partial t} U$,

$$\begin{aligned}U^{-1} \frac{\partial \phi_{\text{in}}}{\partial t} U &= U^{-1} i \hat{H}_0(\phi_{\text{in}}, \pi_{\text{in}}) U \phi U^{-1} U - U^{-1} i U \phi U^{-1} \hat{H}_0(\phi_{\text{in}}, \pi_{\text{in}}) U \\ &= U^{-1} i \hat{H}_0(\phi_{\text{in}}, \pi_{\text{in}}) U \phi - i \phi U^{-1} \hat{H}_0(\phi_{\text{in}}, \pi_{\text{in}}) U \\ &= \left[U^{-1} i \hat{H}(\phi_{\text{in}}, \pi_{\text{in}}) U, \phi \right]\end{aligned}$$

Considerando que $\hat{H}(\phi, \pi)$ é polinomial nos campos ϕ e π , podemos assumir que vale a igualdade $\hat{H}(\phi, \pi) = U^{-1} \hat{H}(\phi_{\text{in}}, \pi_{\text{in}}) U$, pois os operadores de evolução temporal são aplicados nos campos, tal que

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial t} &= i \left[\hat{H}(\phi, \pi), \phi \right] \\ &= i \hat{H}(\phi, \pi) \phi - i \phi \hat{H}(\phi, \pi) \\ &= U^{-1} i \hat{H}(\phi_{\text{in}}, \pi_{\text{in}}) U \phi - i \phi U^{-1} \hat{H}(\phi_{\text{in}}, \pi_{\text{in}}) U \\ &= \left[U^{-1} i \hat{H}(\phi_{\text{in}}, \pi_{\text{in}}) U, \phi \right]\end{aligned}$$

Temos então

$$\left[U^{-1} i \hat{H}(\phi_{\text{in}}, \pi_{\text{in}}) U, \phi \right] = -U^{-1} \dot{U} \phi + \left[U^{-1} i \hat{H}_0(\phi_{\text{in}}, \pi_{\text{in}}) U, \phi \right] + \phi U^{-1} \dot{U}$$

Somando e subtraindo $U^{-1} \phi \dot{U}$, podemos escrever

$$\begin{aligned}-U^{-1} \dot{U} \phi + \phi U^{-1} \dot{U} + U^{-1} \phi \dot{U} - U^{-1} \phi \dot{U} &= [\phi, U^{-1}] \dot{U} + U^{-1} [\phi, \dot{U}] = [\phi, U^{-1} \dot{U}] \\ &= -[U^{-1} \dot{U}, \phi]\end{aligned}$$

Adicionando $\mathbb{1} = U^{-1} U$ teremos

$$-[U^{-1} \dot{U}, \phi] = -[U^{-1} \dot{U} U^{-1} U, \phi]$$

Resultando portanto na expressão

$$\left[U^{-1} i \hat{H}(\phi_{\text{in}}, \pi_{\text{in}}) U, \phi \right] = \left[U^{-1} i \hat{H}_0(\phi_{\text{in}}, \pi_{\text{in}}) U, \phi \right] - \left[U^{-1} \dot{U} U^{-1} U, \phi \right]$$



Reorganizando um pouco, levando em conta que $[A + B, C] = [A, C] + [B, C]$,

$$\left[U^{-1} \left(\dot{U} U^{-1} + i \hat{H}(\phi_{\text{in}}, \pi_{\text{in}}) \right) U, \phi \right] = \left[U^{-1} i \hat{H}_0(\phi_{\text{in}}, \pi_{\text{in}}) U, \phi \right]$$

De modo que pela igualdade, podemos afirmar que

$$\dot{U} U^{-1} + i \hat{H}(\phi_{\text{in}}, \pi_{\text{in}}) = i \hat{H}_0(\phi_{\text{in}}, \pi_{\text{in}}) \quad (10.1)$$

Dado que $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{\text{int}}$, temos que

$$\hat{H}_{\text{int}}(\phi_{\text{in}}, \pi_{\text{in}}) = \hat{H}(\phi_{\text{in}}, \pi_{\text{in}}) - \hat{H}_0(\phi_{\text{in}}, \pi_{\text{in}})$$

A (10.1) pode ser reescrita multiplicando tudo por i e isolando $\dot{U} U^{-1}$, ou seja

$$i \dot{U} U^{-1} = \hat{H}(\phi_{\text{in}}, \pi_{\text{in}}) - \hat{H}_0(\phi_{\text{in}}, \pi_{\text{in}}) = \hat{H}_{\text{int}}(\phi_{\text{in}}, \pi_{\text{in}})$$

Multiplicando U pela direita das duas expressões, concluímos que

$$i \frac{\partial U(t)}{\partial t} = \hat{H}_{\text{int}}(\phi_{\text{in}}, \pi_{\text{in}}) U(t) \quad (10.2)$$