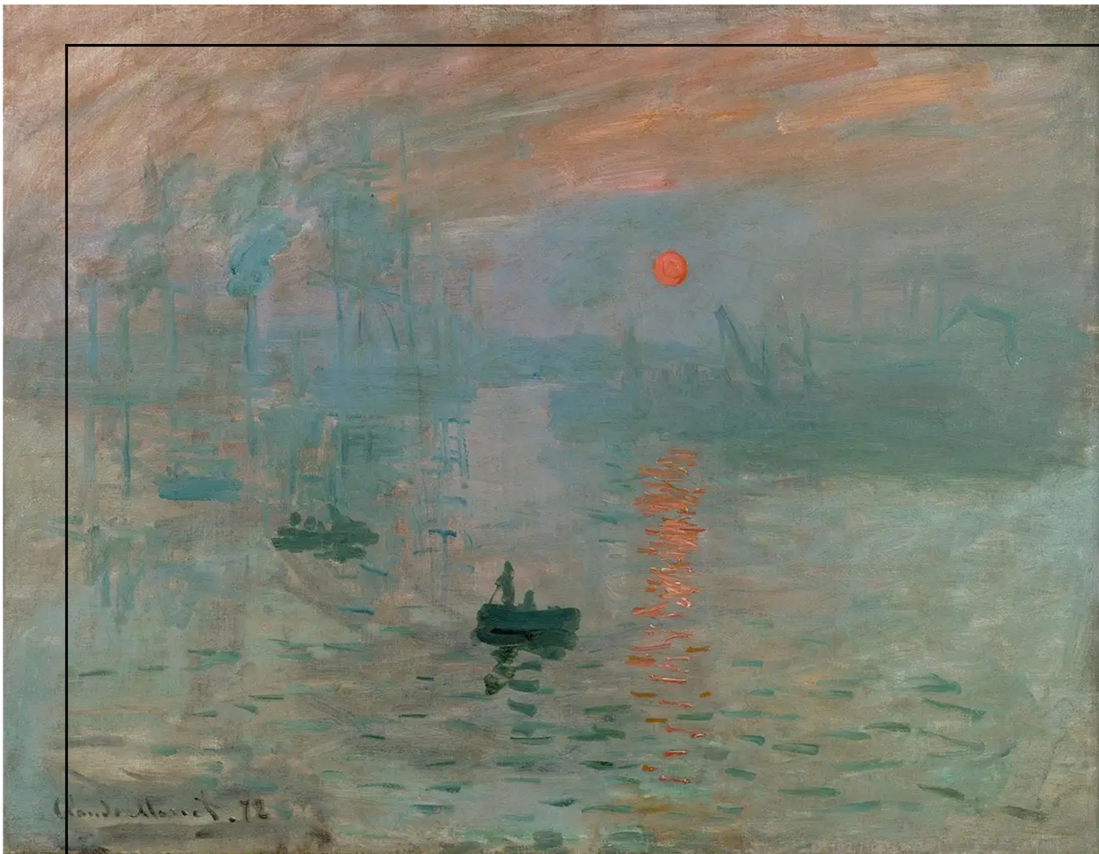
02

Lista de Exercícios

Introdução a Física de Hádrons

Lucas R. Ximenes
11917239



17
10

Q. 01 Funcional gerador de um campo escalar livre

O funcional gerador de um campo escalar livre é escrito como

$$Z_0[J] = N \int \exp\left\{ i \int \left[\frac{1}{2}\left(\xi \vec{K}_x \xi + \xi J + \bar{\phi}\vec{K}_x \xi + \bar{\phi} J\right) + J\bar{\phi} + J\xi \right] \mathrm{d}^4x \right\} [D\xi]$$

após uma expansão do campo original ϕ em torno de sua configuração clássica $\bar{\phi}$ e sua correspondente flutuação ξ, $\phi = \bar{\phi} + \xi$. O operador $\vec{K}_x$ é o de Klein-Gordon, $\vec{K}_x = (\partial^2 + m^2)_x$. Obtenha

$$Z_0[J] = N' \exp\left[-\frac{i}{2} \int J(x)\Delta(x-y)J(y)\, \mathrm{d}^4x\, \mathrm{d}^4y \right]$$

Na expressão original do problema, podemos identificar que o termo $\frac{1}{2}\xi\vec{K}_x\xi$ é um termo quadrático em ξ, a soma dos termos $\frac{1}{2}\xi J + \frac{1}{2}\bar{\phi}\vec{K}_x\xi + J\xi$ é um termo linear em ξ e os termos restantes independem dessa variável, o que sugere uma integração gaussiana em ξ.

- Assumir que $\vec{K}_x$ é uma matriz diagonal
- Discretizar os campos pra usar a expressão da aula 7/8 (eu acho)
- Fazer uma mudança de variável conveniente
- Integrar em $[D\xi]$

Q. 02 Integração gaussiana com números de Grassman

A integral de trajetória para férmions envolve o cálculo, no limite do contínuo, da integral discretizada

$$I(A) = \int \exp\left(\sum_{j,k=1}^{N} \bar{\theta}_j A_{jk} \theta_k \right) \prod_{i=1}^{N} \mathrm{d}\theta_i\, \mathrm{d}\bar{\theta}_i = \det(A)$$

Mostre explicitamente o resultado acima para $N = 3$, e depois, generalize para um N arbitrário.

Para $N = 3$, temos diretaamente que

$$I(\mathbf{A}) = \int \exp\left(\sum_{j,k=1}^{3} \bar{\theta}_j A_{jk} \theta_k\right) \prod_{i=1}^{3} \mathrm{d}\theta_i \, \mathrm{d}\bar{\theta}_i$$

Abrindo a exponencial em uma série de Taylor, temos

$$\begin{aligned} I(\mathbf{A}) &= \int \left[1 + \sum_{j,k=1}^{3} \bar{\theta}_j A_{jk} \theta_k + \frac{1}{2!}\left(\sum_{j,k=1}^{3} \bar{\theta}_j A_{jk} \theta_k\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\sum_{j,k=1}^{3} \bar{\theta}_j A_{jk} \theta_k\right)^3 + \cdots\right] \prod_{i=1}^{3} \mathrm{d}\theta_i \, \mathrm{d}\bar{\theta}_i \\ &= \int \prod_{i=1}^{3} \mathrm{d}\theta_i \, \mathrm{d}\bar{\theta}_i + \int \sum_{j,k=1}^{3} \bar{\theta}_j A_{jk} \theta_k \prod_{i=1}^{3} \mathrm{d}\theta_i \, \mathrm{d}\bar{\theta}_i + \frac{1}{2!} \int \left(\sum_{j,k=1}^{3} \bar{\theta}_j A_{jk} \theta_k\right)^2 \prod_{i=1}^{3} \mathrm{d}\theta_i \, \mathrm{d}\bar{\theta}_i + \\ &\quad + \frac{1}{3!} \int \left(\sum_{j,k=1}^{3} \bar{\theta}_j A_{jk} \theta_k\right)^3 \prod_{i=1}^{3} \mathrm{d}\theta_i \, \mathrm{d}\bar{\theta}_i + \cdots \end{aligned}$$

O primeiro termo é claramente nulo, pois não há variáveis de Grassman para integrar. O segundo termo também é nulo, pois cada termo da soma possui apenas um θ e um $\bar{\theta}$, e portanto, ao integrar sobre as outras variáveis, o resultado será zero. O terceiro termo também é nulo, pois cada termo da soma ao quadrado terá no máximo dois θ e dois $\bar{\theta}$, e portanto, ao integrar sobre as outras variáveis, o resultado será zero. Restando apenas o quarto termo, onde também podemos levar em conta que qualquer termo subsequente da expansão de Taylor será nulo, pois terá mais de três θ ou $\bar{\theta}$.

O quarto termo pode ser escrito como

$$I(\mathbf{A}) = \frac{1}{3!} \int \sum_{j,k,\ell,m,n,p=1}^{3} \bar{\theta}_j A_{jk} \theta_k \bar{\theta}_\ell A_{\ell m} \theta_m \bar{\theta}_n A_{np} \theta_p \prod_{i=1}^{3} \mathrm{d}\theta_i \, \mathrm{d}\bar{\theta}_i$$

Note que, para que a integral não seja nula, é necessário que $j \neq \ell \neq n$, assim como $k \neq m \neq p$. Um ponto a se notar é que temos essencialmente 9^3 termos dentro dessa integral, mas muitos deles são idênticos, pois a ordem dos fatores não importa. Por exemplo, o termo com $j = 1$, $\ell = 2$, $n = 3$, $k = 1$, $m = 2$ e $p = 3$

$$\bar{\theta}_1 A_{11} \theta_1 \bar{\theta}_2 A_{22} \theta_2 \bar{\theta}_3 A_{33} \theta_3$$

é idêntico ao termo com $j = 2$, $\ell = 1$, $n = 3$, $k = 2$, $m = 1$ e $p = 3$

$$\bar{\theta}_2 A_{22} \theta_2 \bar{\theta}_1 A_{11} \theta_1 \bar{\theta}_3 A_{33} \theta_3$$

pois levando em conta a anticomutatividade dos números de Grassmann, faremos 4 trocas de posição para chegar de um termo ao outro, o que é equivalente a multiplicar por $(-1)^4 = 1$. Isto faz com que muitos termos sejam idênticos, e portanto, possamos considerar apenas um representante de cada conjunto de termos idênticos. Note que, para cada conjunto de termos idênticos, há exatamente $3! = 6$ termos, pois há $3!$ maneiras de ordenar os índices j, ℓ e n, e outras $3!$ maneiras de ordenar os índices k, m e p. Portanto, podemos eliminar o fator $1/3!$ que está na frente da integral. Os representantes não-nulos formam então o seguinte resultado

$$\begin{aligned}
I(\mathbf{A}) = &\int (\bar{\theta}_1 A_{11}\theta_1\bar{\theta}_2 A_{22}\theta_2\bar{\theta}_3 A_{33}\theta_3 + \bar{\theta}_1 A_{11}\theta_1\bar{\theta}_2 A_{23}\theta_3\bar{\theta}_3 A_{32}\theta_2 + \bar{\theta}_1 A_{12}\theta_2\bar{\theta}_2 A_{21}\theta_1\bar{\theta}_3 A_{33}\theta_3 + \\
&+ \bar{\theta}_1 A_{12}\theta_2\bar{\theta}_2 A_{23}\theta_3\bar{\theta}_3 A_{31}\theta_1 + \bar{\theta}_1 A_{13}\theta_3\bar{\theta}_2 A_{21}\theta_1\bar{\theta}_3 A_{32}\theta_2 + \bar{\theta}_1 A_{13}\theta_3\bar{\theta}_2 A_{22}\theta_2\bar{\theta}_3 A_{31}\theta_1)\times \\
&\times \mathrm{d}\theta_1\,\mathrm{d}\bar{\theta}_1\,\mathrm{d}\theta_2\,\mathrm{d}\bar{\theta}_2\,\mathrm{d}\theta_3\,\mathrm{d}\bar{\theta}_3 \\
= &\int \bar{\theta}_1\theta_1\bar{\theta}_2\theta_2\bar{\theta}_3\theta_3(A_{11}A_{22}A_{33})\,\mathrm{d}\theta_1\,\mathrm{d}\bar{\theta}_1\,\mathrm{d}\theta_2\,\mathrm{d}\bar{\theta}_2\,\mathrm{d}\theta_3\,\mathrm{d}\bar{\theta}_3 + \int \bar{\theta}_1\theta_1\bar{\theta}_2\theta_3\bar{\theta}_3\theta_2(A_{11}A_{23}A_{32})\times \\
&\times \mathrm{d}\theta_1\,\mathrm{d}\bar{\theta}_1\,\mathrm{d}\theta_2\,\mathrm{d}\bar{\theta}_2\,\mathrm{d}\theta_3\,\mathrm{d}\bar{\theta}_3 + \int \bar{\theta}_1\theta_2\bar{\theta}_2\theta_1\bar{\theta}_3\theta_3(A_{12}A_{21}A_{33})\,\mathrm{d}\theta_1\,\mathrm{d}\bar{\theta}_1\,\mathrm{d}\theta_2\,\mathrm{d}\bar{\theta}_2\,\mathrm{d}\theta_3\,\mathrm{d}\bar{\theta}_3 + \\
&+ \int \bar{\theta}_1\theta_2\bar{\theta}_2\theta_3\bar{\theta}_3\theta_1(A_{12}A_{23}A_{31})\,\mathrm{d}\theta_1\,\mathrm{d}\bar{\theta}_1\,\mathrm{d}\theta_2\,\mathrm{d}\bar{\theta}_2\,\mathrm{d}\theta_3\,\mathrm{d}\bar{\theta}_3 + \int \bar{\theta}_1\theta_3\bar{\theta}_2\theta_1\bar{\theta}_3\theta_2(A_{13}A_{21}A_{32})\times \\
&\times \mathrm{d}\theta_1\,\mathrm{d}\bar{\theta}_1\,\mathrm{d}\theta_2\,\mathrm{d}\bar{\theta}_2\,\mathrm{d}\theta_3\,\mathrm{d}\bar{\theta}_3 + \int \bar{\theta}_1\theta_3\bar{\theta}_2\theta_2\bar{\theta}_3\theta_1(A_{13}A_{22}A_{31})\,\mathrm{d}\theta_1\,\mathrm{d}\bar{\theta}_1\,\mathrm{d}\theta_2\,\mathrm{d}\bar{\theta}_2\,\mathrm{d}\theta_3\,\mathrm{d}\bar{\theta}_3
\end{aligned}$$

Aqui precisamos levar em conta que a ordem da integração importa, portanto é necessário que a ordem dos fatores dentro da integral seja a mesma que a ordem de integração, que é

$$\mathrm{d}\theta_1 \to \mathrm{d}\bar{\theta}_1 \to \mathrm{d}\theta_2 \to \mathrm{d}\bar{\theta}_2 \to \mathrm{d}\theta_3 \to \mathrm{d}\bar{\theta}_3$$

Sendo assim, os termos ficam:

$$\begin{aligned}
\bar{\theta}_1\theta_1\bar{\theta}_2\theta_2\bar{\theta}_3\theta_3 &= (-1)^{12}\bar{\theta}_3\theta_3\bar{\theta}_2\theta_2\bar{\theta}_1\theta_1 = \bar{\theta}_3\theta_3\bar{\theta}_2\theta_2\bar{\theta}_1\theta_1 \\
\bar{\theta}_1\theta_1\bar{\theta}_2\theta_3\bar{\theta}_3\theta_2 &= (-1)^{11}\bar{\theta}_3\theta_3\bar{\theta}_2\theta_2\bar{\theta}_1\theta_1 = -\bar{\theta}_3\theta_3\bar{\theta}_2\theta_2\bar{\theta}_1\theta_1 \\
\bar{\theta}_1\theta_2\bar{\theta}_2\theta_1\bar{\theta}_3\theta_3 &= (-1)^{11}\bar{\theta}_3\theta_3\bar{\theta}_2\theta_2\bar{\theta}_1\theta_1 = -\bar{\theta}_3\theta_3\bar{\theta}_2\theta_2\bar{\theta}_1\theta_1 \\
\bar{\theta}_1\theta_2\bar{\theta}_2\theta_3\bar{\theta}_3\theta_1 &= (-1)^{10}\bar{\theta}_3\theta_3\bar{\theta}_2\theta_2\bar{\theta}_1\theta_1 = \bar{\theta}_3\theta_3\bar{\theta}_2\theta_2\bar{\theta}_1\theta_1 \\
\bar{\theta}_1\theta_3\bar{\theta}_2\theta_1\bar{\theta}_3\theta_2 &= (-1)^{8}\bar{\theta}_3\theta_3\bar{\theta}_2\theta_2\bar{\theta}_1\theta_1 = \bar{\theta}_3\theta_3\bar{\theta}_2\theta_2\bar{\theta}_1\theta_1 \\
\bar{\theta}_1\theta_3\bar{\theta}_2\theta_2\bar{\theta}_3\theta_1 &= (-1)^{7}\bar{\theta}_3\theta_3\bar{\theta}_2\theta_2\bar{\theta}_1\theta_1 = -\bar{\theta}_3\theta_3\bar{\theta}_2\theta_2\bar{\theta}_1\theta_1
\end{aligned}$$

Essa ordenação é interessante, pois ao integrarmos, todos terão o mesmo valor a menos de um sinal. Este valor é

$$\int \bar{\theta}_3\theta_3\bar{\theta}_2\theta_2\bar{\theta}_1\theta_1\,\mathrm{d}\theta_1\,\mathrm{d}\bar{\theta}_1\,\mathrm{d}\theta_2\,\mathrm{d}\bar{\theta}_2\,\mathrm{d}\theta_3\,\mathrm{d}\bar{\theta}_3 = 1$$

Portanto, $I(\mathbf{A})$ pode ser escrito como

$$I(\mathbf{A}) = A_{11}A_{22}A_{33} - A_{11}A_{23}A_{32} - A_{12}A_{21}A_{33} + A_{12}A_{23}A_{31} + A_{13}A_{21}A_{32} - A_{13}A_{22}A_{31}$$

que é exatamente a definição de $\det(\mathbf{A})$ para uma matriz $\mathbf{A}$ de $\dim(\mathbf{A}) = 3$. Mostrando então que

$$I(\mathbf{A}) = \int \exp\left(\sum_{j,k=1}^{3} \bar{\theta}_j A_{jk} \theta_k\right) \prod_{i=1}^{3} \mathrm{d}\theta_i \, \mathrm{d}\bar{\theta}_i = \det(\mathbf{A}) \tag{2.1}$$

Para generalizar para um N arbitrário, podemos reconsiderar a oredem de integração, isto é, podemos mudar

$$\prod_{i=1}^{N} \mathrm{d}\theta_i \, \mathrm{d}\bar{\theta}_i = (-1)^{\frac{N(N-1)}{2}} \prod_{i=1}^{N} \mathrm{d}\theta_i \prod_{\ell=1}^{N} \mathrm{d}\bar{\theta}_\ell$$

onde o fator $(-1)^{\frac{N(N-1)}{2}}$ surge do número de trocas necessárias para colocar todas as variáveis θ juntas e todas as variáveis $\bar{\theta}$ juntas, pela propriedade anticomutativa dos números de Grassmann. O expoente pode ser interpretado como sendo feita $N-1$ trocas em N termos, porém isto consideraria uma troca tanto dos termos $\mathrm{d}\theta$ quanto dos termos $\mathrm{d}\bar{\theta}$, por isso dividimos por 2 para considerar apenas a troca de ordem de um dos conjuntos de termos. Com isso e considerando que ao expandirmos a exponencial em série de Taylor, o único termo que não será nulo é o termo de ordem N, temos

$$\begin{aligned} I(\mathbf{A}) &= \int \exp\left(\sum_{j,k=1}^{N} \bar{\theta}_j A_{jk} \theta_k\right) \prod_{i=1}^{N} \mathrm{d}\theta_i \, \mathrm{d}\bar{\theta}_i \\ &= \frac{(-1)^{\frac{N(N-1)}{2}}}{N!} \int \left(\sum_{j,k=1}^{N} \bar{\theta}_j A_{jk} \theta_k\right)^N \prod_{i=1}^{N} \mathrm{d}\theta_i \prod_{\ell=1}^{N} \mathrm{d}\bar{\theta}_\ell \\ &= \frac{(-1)^{\frac{N(N-1)}{2}}}{N!} \int \bar{\theta}_{j_1}\theta_{k_1}\bar{\theta}_{j_2}\theta_{k_2}\cdots\bar{\theta}_{j_N}\theta_{k_N} A_{j_1k_1}A_{j_2k_2}\cdots A_{j_Nk_N} \prod_{i=1}^{N} \mathrm{d}\theta_i \prod_{\ell=1}^{N} \mathrm{d}\bar{\theta}_\ell \end{aligned}$$

Estamos considerando uma ordem de integração específica, então o argumento dentro da integral deve ser rearranjado para satisfazer esta ordem, então o que fazemos inicialmente é colocar todos os $\bar{\theta}_i$ à esquerda e todos os θ_i à direita, o que requer $N(N+1)/2$ trocas, ou seja

$$\bar{\theta}_{j_1}\theta_{k_1}\bar{\theta}_{j_2}\theta_{k_2}\cdots\bar{\theta}_{j_N}\theta_{k_N} = (-1)^{\frac{N(N+1)}{2}} \bar{\theta}_{j_1}\bar{\theta}_{j_2}\cdots\bar{\theta}_{j_N}\theta_{k_1}\theta_{k_2}\cdots\theta_{k_N}$$

Feita esta troca, precisamos nos ater às possíveis permutações entre os indices, o que sugere o uso de dois tensores de Levi-Civita, uma para considerar as permutações de j_i e outro para as permutação de k_i, resultando então em

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_{j_1}\theta_{k_1}\bar{\theta}_{j_2}\theta_{k_2}\cdots\bar{\theta}_{j_N}\theta_{k_N} &= (-1)^{\frac{N(N+1)}{2}} \epsilon_{j_1j_2\cdots j_N}\epsilon_{k_1k_2\cdots k_N} \bar{\theta}_1\bar{\theta}_2\cdots\bar{\theta}_N\theta_1\theta_2\cdots\theta_N \\ &= (-1)^{\frac{N(N+1)}{2}} \epsilon_{j_1j_2\cdots j_N}\epsilon_{k_1k_2\cdots k_N} \prod_{j=1}^{N} \bar{\theta}_j \prod_{k=1}^{N} \theta_k \end{aligned}$$

Então a integral que precisamos calcular é

$$\int \prod_{j=1}^{N} \bar{\theta}_j \prod_{k=1}^{N} \theta_k \prod_{i=1}^{N} \mathrm{d}\theta_i \prod_{\ell=1}^{N} \mathrm{d}\bar{\theta}_\ell$$

Que é facilmente determinada como sendo igual a 1. Um possível problema seria se perguntar se dependendo do valor de N (sendo par ou ímpar), se ocorreria alguma troca de sinal, já que para realiar a integração na ordem proposta ainda é necessário inverter os índices do produtório em k e do produtório em k, no entanto, se fizermos N trocas com θ_k, precisamos também fazer N trocas com $\bar{\theta}_j$, o que resultaria em $2N$ operações, que se traduz em $(-1)^{2N} = 1,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$. Portanto

$$
\begin{aligned}
I(A) &= \frac{(-1)^{\frac{N(N-1)}{2}}(-1)^{\frac{N(N+1)}{2}}}{N!}\epsilon_{j_1 j_2 \cdots j_N}\epsilon_{k_1 k_2 \cdots k_N} A_{j_1 k_1} A_{j_2 k_2} \cdots A_{j_N k_N} \\
&= \frac{(-1)^{N^2}}{N!}\epsilon_{j_1 j_2 \cdots j_N}\epsilon_{k_1 k_2 \cdots k_N} A_{j_1 k_1} A_{j_2 k_2} \cdots A_{j_N k_N}
\end{aligned}
$$

Como N^2 é par $\forall\, N \in \mathbb{N}$, então $(-1)^{N^2} = 1$, e portanto

$$
I(A) = \frac{1}{N!}\epsilon_{j_1 j_2 \cdots j_N}\epsilon_{k_1 k_2 \cdots k_N} A_{j_1 k_1} A_{j_2 k_2} \cdots A_{j_N k_N}
$$

que é justamente a definição de determinante de uma matriz **A** de dim(**A**) $= N$. Portanto, mostramos que

$$
I(A) = \int \exp\left(\sum_{j,k=1}^{N} \bar{\theta}_j A_{jk} \theta_k\right) \prod_{i=1}^{N} \mathrm{d}\theta_i \, \mathrm{d}\bar{\theta}_i = \det(A) \tag{2.2}
$$

Q. 03 Relações de campos de gauge não-abelianos

No caso de um campo de gauge não-abeliano, mostre explicitamente que

(a) $[D_\mu, D_\nu]\Phi = -igF_{\mu\nu}\Phi$.

(b) $F'_{\mu\nu}\Phi' = UF_{\mu\nu}\Phi$.

em que Φ é um vetor coluna de campos de bósons escalares que satisfaz a simetria de gauge do grupo, e $U = \exp[T_a\theta_a(x)]$, sendo T_a os geradores do grupo.

(a) Usando o gauge $D_\mu\Phi = (\partial_\mu - ig\mathbf{A}_\mu)\Phi$, onde $\mathbf{A}_\mu = A^a_\mu T^a$ e T^a são os geradores do grupo, temos

$$\begin{aligned}
[D_\mu, D_\nu]\Phi &= D_\mu(D_\nu\Phi) - D_\nu(D_\mu\Phi) \\
&= D_\mu(\partial_\nu\Phi - ig\mathbf{A}_\nu\Phi) - D_\nu(\partial_\mu\Phi - ig\mathbf{A}_\mu\Phi) \\
&= (\partial_\mu - ig\mathbf{A}_\mu)(\partial_\nu\Phi - ig\mathbf{A}_\nu\Phi) - (\partial_\nu - ig\mathbf{A}_\nu)(\partial_\mu\Phi - ig\mathbf{A}_\mu\Phi) \\
&= \partial_\mu\partial_\nu\Phi - ig\mathbf{A}_\mu(\partial_\nu\Phi) - ig\partial_\mu(\mathbf{A}_\nu\Phi) - g^2\mathbf{A}_\mu\mathbf{A}_\nu\Phi - \partial_\nu\partial_\mu\Phi + ig\mathbf{A}_\nu(\partial_\mu\Phi) + \\
&\quad + ig\partial_\nu(\mathbf{A}_\mu\Phi) + g^2\mathbf{A}_\nu\mathbf{A}_\mu\Phi \\
&= -ig\mathbf{A}_\mu(\partial_\nu\Phi) - ig(\partial_\mu\mathbf{A}_\nu)\Phi - ig\mathbf{A}_\nu(\partial_\mu\Phi) - g^2\mathbf{A}_\mu\mathbf{A}_\nu\Phi + ig\mathbf{A}_\nu(\partial_\mu\Phi) + ig(\partial_\nu\mathbf{A}_\mu)\Phi + \\
&\quad + ig\mathbf{A}_\mu(\partial_\nu\Phi) + g^2\mathbf{A}_\nu\mathbf{A}_\mu\Phi \\
&= -ig(\partial_\mu\mathbf{A}_\nu - \partial_\nu\mathbf{A}_\mu)\Phi - g^2(\mathbf{A}_\mu\mathbf{A}_\nu - \mathbf{A}_\nu\mathbf{A}_\mu)\Phi \\
&= -ig(\partial_\mu\mathbf{A}_\nu - \partial_\nu\mathbf{A}_\mu - ig[\mathbf{A}_\mu, \mathbf{A}_\nu])\Phi
\end{aligned}$$

onde um dos cancelamentos é feito levando em conta que $\partial_\mu\partial_\nu = \partial_\nu\partial_\mu$. Como na teoria de gauge não-abeliana o tensor eletromagnético é dado por

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu\mathbf{A}_\nu - \partial_\nu\mathbf{A}_\mu - ig[\mathbf{A}_\mu, \mathbf{A}_\nu]$$

temos

$$[D_\mu, D_\nu]\Phi = -igF_{\mu\nu}\Phi \tag{3.1}$$

(b) Por estarmos em uma teoria de gauge não-abeliana, $\mathbf{A}_\mu$ se transforma como

$$\mathbf{A}'_\mu = U\mathbf{A}_\mu U^{-1} - \frac{i}{g}(\partial_\mu U)U^{-1}$$

e o tensor eletromagnético da teoria é dado por

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu\mathbf{A}_\nu - \partial_\nu\mathbf{A}_\mu - ig[\mathbf{A}_\mu, \mathbf{A}_\nu]$$

Portanto, transformar esse tensor vai ser

$$\begin{aligned}
F'_{\mu\nu} &= \partial_\mu\mathbf{A}'_\nu - \partial_\nu\mathbf{A}'_\mu - ig[\mathbf{A}'_\mu, \mathbf{A}'_\nu] \\
&= \underbrace{\partial_\mu\left[U\mathbf{A}_\nu U^{-1} - \frac{i}{g}(\partial_\nu U)U^{-1}\right]}_{\mathbb{J}_{\mu\nu}} - \underbrace{\partial_\nu\left[U\mathbf{A}_\mu U^{-1} - \frac{i}{g}(\partial_\mu U)U^{-1}\right]}_{\mathbb{K}_{\mu\nu}} - \underbrace{ig(\mathbf{A}'_\mu\mathbf{A}'_\nu - \mathbf{A}_\nu\mathbf{A}'_\mu)}_{\mathbb{L}_{\mu\nu}} \\
&= \mathbb{J}_{\mu\nu} - \mathbb{K}_{\mu\nu} - \mathbb{L}_{\mu\nu}
\end{aligned}$$

Expandindo cada termo separadamente, temos

$$\begin{aligned}
\mathbb{J}_{\mu\nu} &= \partial_\mu(U\mathbf{A}_\nu U^{-1}) - \frac{i}{g}\partial_\mu[(\partial_\nu U)U^{-1}] \\
&= (\partial_\mu U)\mathbf{A}_\nu U^{-1} + U(\partial_\mu\mathbf{A}_\nu)U^{-1} + U\mathbf{A}_\nu(\partial_\mu U^{-1}) - \frac{i}{g}(\partial_\mu\partial_\nu U)U^{-1} - \frac{i}{g}(\partial_\nu U)(\partial_\mu U^{-1})
\end{aligned}$$

Podemos substituir a derivada $\partial_\mu U^{-1}$ a partir do seguinte raciocínio: sabendo que $U^{-1}U = \mathbb{1}$, podemos derivar ambos os lados da equação, de modo que

$$\begin{aligned}
\partial_\mu(U^{-1}U) &= \partial_\mu \mathbb{1} \\
(\partial_\mu U^{-1})U + U^{-1}(\partial_\mu U) &= 0 \\
(\partial_\mu U^{-1})U &= -U^{-1}(\partial_\mu U) \\
\partial_\mu U^{-1} &= -U^{-1}(\partial_\mu U)U^{-1}
\end{aligned}$$

Portanto, podemos reescrever $\mathbb{J}_{\mu\nu}$ como

$$\mathbb{J}_{\mu\nu} = (\partial_\mu U)\mathbf{A}_\nu U^{-1} + U(\partial_\mu \mathbf{A}_\nu)U^{-1} - U\mathbf{A}_\nu U^{-1}(\partial_\mu U)U^{-1} - \frac{i}{g}(\partial_\mu\partial_\nu U)U^{-1} + \\
+ \frac{i}{g}(\partial_\nu U)U^{-1}(\partial_\mu U)U^{-1}$$

No caso de $\mathbb{K}_{\mu\nu}$, basta substituir $\mu \leftrightarrow \nu$ em $\mathbb{J}_{\mu\nu}$, ou seja,

$$\mathbb{K}_{\mu\nu} = (\partial_\nu U)\mathbf{A}_\mu U^{-1} + U(\partial_\nu \mathbf{A}_\mu)U^{-1} - U\mathbf{A}_\mu U^{-1}(\partial_\nu U)U^{-1} - \frac{i}{g}(\partial_\nu\partial_\mu U)U^{-1} + \\
+ \frac{i}{g}(\partial_\mu U)U^{-1}(\partial_\nu U)U^{-1}$$

Por fim, no caso de $\mathbb{L}_{\mu\nu}$, temos

$$\begin{aligned}
\mathbb{L}_{\mu\nu} &= ig\left[U\mathbf{A}_\mu U^{-1} - \frac{i}{g}(\partial_\mu U)U^{-1}\right]\left[U\mathbf{A}_\nu U^{-1} - \frac{i}{g}(\partial_\nu U)U^{-1}\right] - ig\left[U\mathbf{A}_\nu U^{-1} - \frac{i}{g}(\partial_\nu U)U^{-1}\right]\times \\
&\quad \times \left[U\mathbf{A}_\mu U^{-1} - \frac{i}{g}(\partial_\mu U)U^{-1}\right] \\
&= ig\left[U\mathbf{A}_\mu\mathbf{A}_\nu U^{-1} - \frac{i}{g}U\mathbf{A}_\mu U^{-1}(\partial_\nu U)U^{-1} - \frac{i}{g}(\partial_\mu U)\mathbf{A}_\nu U^{-1} - \frac{1}{g^2}(\partial_\mu U)U^{-1}(\partial_\nu U)U^{-1}\right] - \\
&\quad - ig\left[U\mathbf{A}_\nu\mathbf{A}_\mu U^{-1} - \frac{i}{g}U\mathbf{A}_\nu U^{-1}(\partial_\mu U)U^{-1} - \frac{i}{g}(\partial_\nu U)\mathbf{A}_\mu U^{-1} - \frac{1}{g^2}(\partial_\nu U)U^{-1}(\partial_\mu U)U^{-1}\right]
\end{aligned}$$

Colocando tudo junto, temos

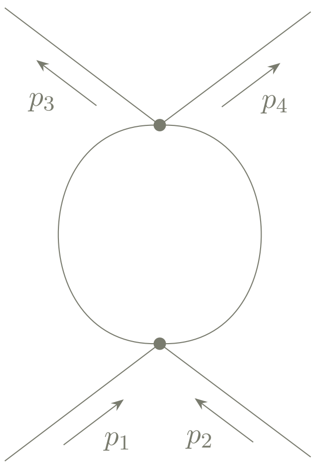
$$\begin{aligned}
F'_{\mu\nu} &= (\partial_\mu U)\mathbf{A}_\nu U^{-1} + U(\partial_\mu \mathbf{A}_\nu)U^{-1} - U\mathbf{A}_\nu U^{-1}(\partial_\mu U)U^{-1} - \frac{i}{g}(\partial_\mu\partial_\nu U)U^{-1} + \\
&+ \frac{i}{g}(\partial_\nu U)U^{-1}(\partial_\mu U)U^{-1} - (\partial_\nu U)\mathbf{A}_\mu U^{-1} - U(\partial_\nu \mathbf{A}_\mu)U^{-1} + U\mathbf{A}_\mu U^{-1}(\partial_\nu U)U^{-1} + \\
&+ \frac{i}{g}(\partial_\nu\partial_\mu U)U^{-1} - \frac{i}{g}(\partial_\mu U)U^{-1}(\partial_\nu U)U^{-1} - igU\mathbf{A}_\mu\mathbf{A}_\nu U^{-1} - U\mathbf{A}_\mu U^{-1}(\partial_\nu U)U^{-1} - \\
&- (\partial_\mu U)\mathbf{A}_\nu U^{-1} + \frac{i}{g}(\partial_\mu U)U^{-1}(\partial_\nu U)U^{-1} + igU\mathbf{A}_\nu\mathbf{A}_\mu U^{-1} + U\mathbf{A}_\nu U^{-1}(\partial_\mu U)U^{-1} + \\
&+ (\partial_\nu U)\mathbf{A}_\mu U^{-1} - \frac{i}{g}(\partial_\nu U)U^{-1}(\partial_\mu U)U^{-1} \\
&= U(\partial_\mu \mathbf{A}_\nu)U^{-1} - U(\partial_\nu \mathbf{A}_\mu)U^{-1} - igU(\mathbf{A}_\mu\mathbf{A}_\nu - \mathbf{A}_\nu\mathbf{A}_\mu)U^{-1} \\
&= U(\partial_\mu \mathbf{A}_\nu - \partial_\nu \mathbf{A}_\mu - ig[\mathbf{A}_\mu, \mathbf{A}_\nu])U^{-1} \\
&= UF_{\mu\nu}U^{-1}
\end{aligned}$$

Portanto, como $\Phi' = U\Phi$ e $U^{-1}U = \mathbb{1}$, temos

$$F'_{\mu\nu}\Phi' = UF_{\mu\nu}U^{-1}U\Phi = UF_{\mu\nu}\Phi \tag{3.2}$$

Q. 04 Teoria $\lambda\phi^4$

Na teoria $\lambda\phi^4$ calcule, em regularização dimensional, com todos os detalhes necessários (incluindo a expansão em torno de $\epsilon \to 0$, com $D = 4 - 2\epsilon$), a integral do diagrama de Feynman da figura ao lado.

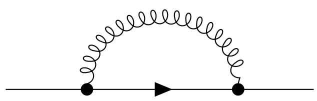


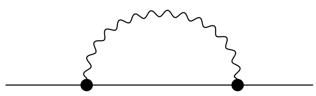
- Aula 6 + Aula 11, o diagrama é do canal-t, bem determinado então
- O diagrama depende dos momentos externos apenas através da variável t

Q. 05 Regras de Feynman da QCD

Utilizando as regras de Feynman da QCD, mostre que o diagrama de 1 loop (auto-energia) do propagador do quark difere do correspondente ao elétron na QED por um fator multiplicativo $C_F = \sum_a T_a^2$. Obs: não é necessário calcular a integração de loop.

- Os diagramas de 1 loop do propagador do quark (esquerda) de do elétron (direita) são





- O fato de não precisar calcular a integração de loop indica que existe algum truque pra obter a resposta.

Q. 06 Espalhamento elástico elétron-múon

Calcule explicitamente a contração $L^{\alpha\beta}W_{\alpha\beta}$ no espalhamento elástico elétron-múon. Obs: despreze a massa do elétron comparada a outras escalas de energia, assumidas muito maiores.

- Aparentemente é só abrir as contas com as expressões da aula 15

Q. 07 Amplitude DVCS

Vimos que a amplitude DVCS (deeply-virtual Compton scattering) é dada por

$$T_{\mu\nu} = i \int e^{iqz} \langle p| \, T\{J_\mu(z) J_\nu(0)\} \, |p\rangle \, \mathrm{d}^4 z$$

(a) Partindo da expressão acima, mostre que $\mathrm{Im}[T_{\alpha\beta}] = \pi W_{\alpha\beta}$, ou seja, que a parte imaginária da amplitude DVCS é proporcional ao tensor hadrônico do espalhamento inélástico profundo.

(b) Usando um conjunto completo de estados intermediários entre as correntes eletromagnéticas, argumente por quê

$$\int e^{iqz} \langle p| \, J_\mu(0) J_\nu(z) \, |p\rangle$$

é igual a zero. **Dica:** obtenha uma função delta de Dirac e conservação do quadri-momento total.

Q. 08 Cálculo de diagramas de Feynman

Utilizando as regras de Feynman da QCD (aula 13), calcule os diagramas de Feynman abaixo, que contribuem para o processo $e^+(k_1)e^-(k_2) \to \bar{q}(p_1)q(p_2)$. No segundo diagrama, o glúon emitido possui momento muito baixo (*soft glúon*). Mostre que os dois diagramas são infinitos, explique a origem desses infinitos, e como lidar com eles para obter um resultado físico consistente.