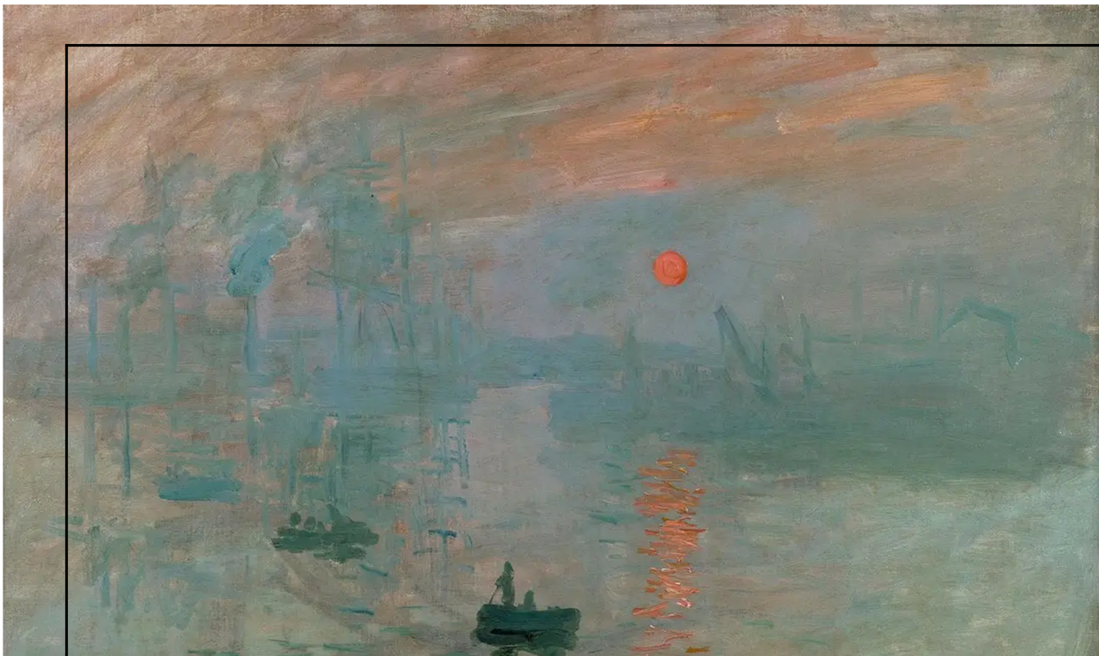
02

Lista de Exercícios

Introdução a Física de Hádrons

Lucas R. Ximenes
11917239



14
10

Q. 01 Funcional gerador de um campo escalar livre

O funcional gerador de um campo escalar livre é escrito como

$$Z_0[J] = N \int \exp\left\{ i \int \left[\frac{1}{2}\Big(\xi \vec{K}_x \xi + \xi J + \bar{\phi}\vec{K}_x \xi + \bar{\phi} J\Big) + J\bar{\phi} + J\xi \right] \mathrm{d}^4 x \right\} [D\xi]$$

após uma expansão do campo original ϕ em torno de sua configuração clássica $\bar{\phi}$ e sua correspondente flutuação ξ, $\phi = \bar{\phi} + \xi$. O operador $\vec{K}_x$ é o de Klein-Gordon, $\vec{K}_x = (\partial^2 + m^2)_x$. Obtenha

$$Z_0[J] = N' \exp\left[-\frac{i}{2} \int J(x)\Delta(x-y)J(y)\, \mathrm{d}^4 x\, \mathrm{d}^4 y \right]$$

Na expressão original do problema, podemos identificar que o termo $\frac{1}{2}\xi\vec{K}_x\xi$ é um termo quadrático em ξ, a soma dos termos $\frac{1}{2}\xi J + \frac{1}{2}\bar{\phi}\vec{K}_x\xi + J\xi$ é um termo linear em ξ e os termos restantes independem dessa variável, o que sugere uma integração gaussiana em ξ.

- Assumir que $\vec{K}_x$ é uma matriz diagonal
- Discretizar os campos pra usar a expressão da aula 7/8 (eu acho)
- Fazer uma mudança de variável conveniente
- Integrar em $[D\xi]$

Q. 02 Integração com números de Grassman

A integral de trajetória para férmions envolve o cálculo, no limite do contínuo, da integral discretizada

$$I(A) = \int \prod_{i=1}^{N} \exp\left(\sum_{j,k=1}^{N} \bar{\theta}_j A_{jk} \theta_k \right) \mathrm{d}\theta_i\, \mathrm{d}\bar{\theta}_i = \det(A)$$

Mostre explicitamente o resultado acima para $N = 3$, e depois, generalize para um N arbitrário.

- Usar $N = 3$ dá diretamente o resultado, só fazer as contas certinho considerando as propriedades dos números de Grassman
- Assumindo que vale pra N, provar que vale pra $N + 1$ pode ser o procedimento mais simples de se fazer

Q. 03 Relações de campos de gauges não-abelianos

No caso de um campo de gauge não-abeliano, mostre explicitamente que

(a) $[D_\mu, D_\nu]\Phi = -igF_{\mu\nu}\Phi$.

(b) $F'_{\mu\nu}\Phi' = UF_{\mu\nu}\Phi$.

em que Φ é um vetor coluna de campos de bósons escalares que satisfaz a simetria de gauge do grupo, e $U = \exp[T_a\theta_a(x)]$, sendo T_a os geradores do grupo.

(a)
(b) Por estarmos em uma teoria de gauge não-abeliana, o potencial vetor $\mathbf{A}_\mu$ se transforma como

$$\mathbf{A}'_\mu = U\mathbf{A}_\mu U^{-1} - \frac{i}{g}(\partial_\mu U)U^{-1}$$

e o tensor eletromagnético da teoria é dado por

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathbf{A}_\nu - \partial_\nu \mathbf{A}_\mu - ig[\mathbf{A}_\mu, \mathbf{A}_\nu]$$

Portanto, transformar esse tensor vai ser

$$\begin{aligned} F'_{\mu\nu} &= \partial_\mu \mathbf{A}'_\nu - \partial_\nu \mathbf{A}'_\mu - ig[\mathbf{A}'_\mu, \mathbf{A}'_\nu] \\ &= \underbrace{\partial_\mu \left[U\mathbf{A}_\nu U^{-1} - \frac{i}{g}(\partial_\nu U)U^{-1}\right]}_{\mathbb{J}_{\mu\nu}} - \underbrace{\partial_\nu \left[U\mathbf{A}_\mu U^{-1} - \frac{i}{g}(\partial_\mu U)U^{-1}\right]}_{\mathbb{K}_{\mu\nu}} - \underbrace{ig(\mathbf{A}'_\mu \mathbf{A}'_\nu - \mathbf{A}_\nu \mathbf{A}'_\mu)}_{\mathbb{L}_{\mu\nu}} \\ &= \mathbb{J}_{\mu\nu} - \mathbb{K}_{\mu\nu} - \mathbb{L}_{\mu\nu} \end{aligned}$$

Expandindo cada termo separadamente, temos

$$\begin{aligned} \mathbb{J}_{\mu\nu} &= \partial_\mu(U\mathbf{A}_\nu U^{-1}) - \frac{i}{g}\partial_\mu[(\partial_\nu U)U^{-1}] \\ &= (\partial_\mu U)\mathbf{A}_\nu U^{-1} + U(\partial_\mu \mathbf{A}_\nu)U^{-1} + U\mathbf{A}_\nu(\partial_\mu U^{-1}) - \frac{i}{g}(\partial_\mu\partial_\nu U)U^{-1} - \frac{i}{g}(\partial_\nu U)(\partial_\mu U^{-1}) \end{aligned}$$

Podemos substituir a derivada $\partial_\mu U^{-1}$ a partir do seguinte raciocínio: sabendo que $U^{-1}U = \mathbb{1}$, podemos derivar ambos os lados da equação, de modo que

$$\begin{aligned}
\partial_\mu(U^{-1}U) &= \partial_\mu \mathbb{1} \\
(\partial_\mu U^{-1})U + U^{-1}(\partial_\mu U) &= 0 \\
(\partial_\mu U^{-1})U &= -U^{-1}(\partial_\mu U) \\
\partial_\mu U^{-1} &= -U^{-1}(\partial_\mu U)U^{-1}
\end{aligned}$$

Portanto, podemos reescrever $\mathbb{J}_{\mu\nu}$ como

$$\begin{aligned}
\mathbb{J}_{\mu\nu} = &(\partial_\mu U)\mathbf{A}_\nu U^{-1} + U(\partial_\mu \mathbf{A}_\nu)U^{-1} - U\mathbf{A}_\nu U^{-1}(\partial_\mu U)U^{-1} - \frac{i}{g}(\partial_\mu\partial_\nu U)U^{-1} + \\
&+ \frac{i}{g}(\partial_\nu U)U^{-1}(\partial_\mu U)U^{-1}
\end{aligned}$$

No caso de $\mathbb{K}_{\mu\nu}$, basta substituir $\mu \leftrightarrow \nu$ em $\mathbb{J}_{\mu\nu}$, ou seja,

$$\begin{aligned}
\mathbb{K}_{\mu\nu} = &(\partial_\nu U)\mathbf{A}_\mu U^{-1} + U(\partial_\nu \mathbf{A}_\mu)U^{-1} - U\mathbf{A}_\mu U^{-1}(\partial_\nu U)U^{-1} - \frac{i}{g}(\partial_\nu\partial_\mu U)U^{-1} + \\
&+ \frac{i}{g}(\partial_\mu U)U^{-1}(\partial_\nu U)U^{-1}
\end{aligned}$$

Por fim, no caso de $\mathbb{L}_{\mu\nu}$, temos

$$\begin{aligned}
\mathbb{L}_{\mu\nu} &= ig\left[U\mathbf{A}_\mu U^{-1} - \frac{i}{g}(\partial_\mu U)U^{-1}\right]\left[U\mathbf{A}_\nu U^{-1} - \frac{i}{g}(\partial_\nu U)U^{-1}\right] - ig\left[U\mathbf{A}_\nu U^{-1} - \frac{i}{g}(\partial_\nu U)U^{-1}\right]\times \\
&\quad \times \left[U\mathbf{A}_\mu U^{-1} - \frac{i}{g}(\partial_\mu U)U^{-1}\right] \\
&= ig\left[U\mathbf{A}_\mu\mathbf{A}_\nu U^{-1} - \frac{i}{g}U\mathbf{A}_\mu U^{-1}(\partial_\nu U)U^{-1} - \frac{i}{g}(\partial_\mu U)\mathbf{A}_\nu U^{-1} - \frac{1}{g^2}(\partial_\mu U)U^{-1}(\partial_\nu U)U^{-1}\right] - \\
&\quad - ig\left[U\mathbf{A}_\nu\mathbf{A}_\mu U^{-1} - \frac{i}{g}U\mathbf{A}_\nu U^{-1}(\partial_\mu U)U^{-1} - \frac{i}{g}(\partial_\nu U)\mathbf{A}_\mu U^{-1} - \frac{1}{g^2}(\partial_\nu U)U^{-1}(\partial_\mu U)U^{-1}\right]
\end{aligned}$$

Colocando tudo junto, temos

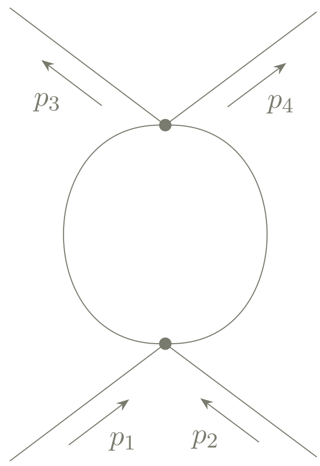
$$
\begin{aligned}
F'_{\mu\nu} = &(\partial_\mu U)\mathbf{A}_\nu U^{-1} + U(\partial_\mu \mathbf{A}_\nu)U^{-1} - U\mathbf{A}_\nu U^{-1}(\partial_\mu U)U^{-1} - \frac{i}{g}(\partial_\mu\partial_\nu U)U^{-1} + \\
&+ \frac{i}{g}(\partial_\nu U)U^{-1}(\partial_\mu U)U^{-1} - (\partial_\nu U)\mathbf{A}_\mu U^{-1} - U(\partial_\nu \mathbf{A}_\mu)U^{-1} + U\mathbf{A}_\mu U^{-1}(\partial_\nu U)U^{-1} + \\
&+ \frac{i}{g}(\partial_\nu\partial_\mu U)U^{-1} - \frac{i}{g}(\partial_\mu U)U^{-1}(\partial_\nu U)U^{-1} - igU\mathbf{A}_\mu\mathbf{A}_\nu U^{-1} - U\mathbf{A}_\mu U^{-1}(\partial_\nu U)U^{-1} - \\
&- (\partial_\mu U)\mathbf{A}_\nu U^{-1} + \frac{i}{g}(\partial_\mu U)U^{-1}(\partial_\nu U)U^{-1} + igU\mathbf{A}_\nu\mathbf{A}_\mu U^{-1} + U\mathbf{A}_\nu U^{-1}(\partial_\mu U)U^{-1} + \\
&+ (\partial_\nu U)\mathbf{A}_\mu U^{-1} - \frac{i}{g}(\partial_\nu U)U^{-1}(\partial_\mu U)U^{-1} \\
= &\, U(\partial_\mu \mathbf{A}_\nu)U^{-1} - U(\partial_\nu \mathbf{A}_\mu)U^{-1} - igU(\mathbf{A}_\mu\mathbf{A}_\nu - \mathbf{A}_\nu\mathbf{A}_\mu)U^{-1} \\
= &\, U(\partial_\mu \mathbf{A}_\nu - \partial_\nu \mathbf{A}_\mu - ig[\mathbf{A}_\mu, \mathbf{A}_\nu])U^{-1} \\
= &\, UF_{\mu\nu}U^{-1}
\end{aligned}
$$

Portanto, como $\Phi' = U\Phi$ e $U^{-1}U = \mathbb{1}$, temos

$$
F'_{\mu\nu}\Phi' = UF_{\mu\nu}U^{-1}U\Phi = UF_{\mu\nu}\Phi \tag{3.1}
$$

Q. 04 Teoria $\lambda\phi^4$

Na teoria $\lambda\phi^4$ calcule, em regularização dimensional, com todos os detalhes necessários (incluindo a expansão em torno de $\epsilon \to 0$, com $D = 4 - 2\epsilon$), a integral do diagrama de Feynman da figura ao lado.



- Aula 6 + Aula 11, o diagrama é do canal-t, bem determinado então
- O diagrama depende dos momentos externos apenas através da variável t

Q. 05 Regras de Feynman da QCD

Utilizando as regras de Feynman da QCD, mostre que o diagrama de 1 loop (auto-energia) do propagador do quark difere do correspondente ao elétron na QED por um fator multiplicativo $C_F = \sum_a T_a^2$. Obs: não é necessário calcular a integração de loop.

- Os diagramas de 1 loop do propagador do quark (esquerda) de do elétron (direita) são

- O fato de não precisar calcular a integração de loop indica que existe algum truque pra obter a resposta.

Q. 06 Espalhamento elástico elétron-múon

Calcule explicitamente a contração $L^{\alpha\beta}W_{\alpha\beta}$ no espalhamento elástico elétron-múon. Obs: despreze a massa do elétron comparada a outras escalas de energia, assumidas muito maiores.

- Aparentemente é só abrir as contas com as expressões da aula 15

Q. 07 Amplitude DVCS

Vimos que a amplitude DVCS (deeply-virtual Compton scattering) é dada por

$$T_{\mu\nu} = i \int e^{iqz} \langle p| \, T\{J_\mu(z) J_\nu(0)\} \, |p\rangle \, \mathrm{d}^4 z$$

(a) Partindo da expressão acima, mostre que $\mathrm{Im}[T_{\alpha\beta}] = \pi W_{\alpha\beta}$, ou seja, que a parte imaginária da amplitude DVCS é proporcional ao tensor hadrônico do espalhamento inélástico profundo.

(b) Usando um conjunto completo de estados intermediários entre as correntes eletromagnéticas, argumente por quê

$$\int e^{iqz} \langle p| \, J_\mu(0) J_\nu(z) \, |p\rangle$$

é igual a zero. **Dica:** obtenha uma função delta de Dirac e conservação do quadri-momento total.

Q. 08 Cálculo de diagramas de Feynman

Utilizando as regras de Feynman da QCD (aula 13), calcule os diagramas de Feynman abaixo, que contribuem para o processo $e^+(k_1)e^-(k_2) \to \bar{q}(p_1)q(p_2)$. No segundo diagrama, o glúon emitido possui momento muito baixo (*soft glúon*). Mostre que os dois diagramas são infinitos, explique a origem desses infinitos, e como lidar com eles para obter um resultado físico consistente.