Categories: our abstract nonsense language

Chapter I

L. R. Ximenes
University of São Paulo

2023

April

★ Apr. 27, 2023 — Thursday

Abaixo está o material de estudo sobre funções entre conjuntos, o que inclui definições, como o que são funções injetoras, sobrejetoras e bijetoras, o que são morfismos e epimorfismos, exemplos simples e por fim "o primeiro teorema do isomorfismo". Todo o conteúdo é baseado em §I.2 de Aluffi (2009).

A aula sobre essa parte foi dada pelo Artur e devido à falta de tempo nem todo conteúdo foi abordado, de modo que na próxima reunião, abordarei novamente alguns tópicos escritos aqui, porém com um enfoque maior nas demonstrações, além de já (tentar) começar a definir o que são categorias.

Funções entre conjuntos - Pt. 1

Definição

Um ponto muito importante é que *conjuntos* interagem um com o outro através de funções. Tudo que pode ser conhecido sobre uma função $f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{B}$ qualquer é capturado pela informação que diz:

"Cada elemento $b \in \mathbb{B}$ é a imagem de qualquer dado elemento de $\mathbb{A}$".

Essa frase nada mais é do que uma outra forma de representar um subconjunto do produto cartesiano $\mathbb{A} \times \mathbb{B}$, definido por:

$$\Gamma_f := \{(a, b) \in \mathbb{A} \times \mathbb{B} \mid b = f(a)\} \subseteq \mathbb{A} \times \mathbb{B} \tag{2023.1}$$

Este conjunto representa o gráfico de f, mais precisamente, Γ_f é o conjunto que define o gráfico de f juntamente com a informação de que $\mathbb{A}$ é a "fonte" e $\mathbb{B}$ o "alvo".

Nem todos os subconjuntos $\Gamma \subseteq \mathbb{A} \times \mathbb{B}$ correspondem a gráficos de funções, precisamos para isso de um requisito para que isso seja válido:

$$\forall\ a \in \mathbb{A},\ \exists!\ b \in \mathbb{B} \mid (a, b) \in \Gamma_f$$

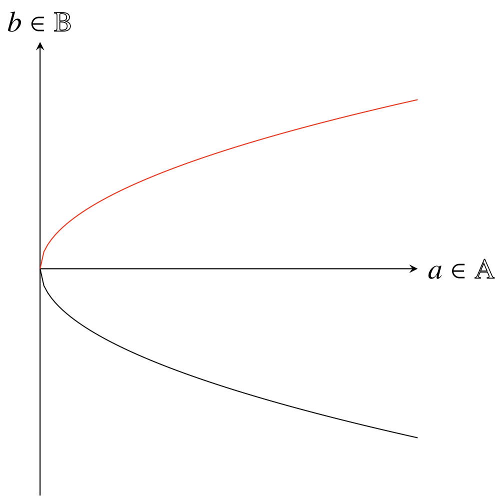
Isto significa que: A função f mapeia cada elemento $a \in \mathbb{A}$ a exatamente um único elemento de $\mathbb{B}$, com dependência explicita de a.

De forma alternativa, podemos escrever esse mesmo argumento com base na notação funcional:

$$\forall\ a \in \mathbb{A},\ \exists!\ b \in \mathbb{B} \mid f(a) = b$$

Exemplo 1

Um simples exemplo que, com base nessa enunciação, não são funções é definir $f(a) = \pm\sqrt{a}$. Note que para esse "mapeamento", temos que $a \in \mathbb{R}^+$ e $\sqrt{a}$ também, porém definir $f(a)$ com sinal positivo e negativo faz com que para cada elemento de $\mathbb{A}$, existam dois elementos de $\mathbb{B}$, o que por definição não pode ser caracterizado como uma função.



Para designar que uma função mapeia um elemento de um conjunto a outro, usamos a notação $f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{B}$, no entanto, a ação da função f em um elemento qualquer $a \in \mathbb{A}$ é indicado por $a \mapsto f(a)$.

A coleção τ de todas as funções que possuem como fonte $\mathbb{A}$ e tem como alvo $\mathbb{B}$ é por si só um conjunto, denotado por $\tau := \mathbb{B}^{\mathbb{A}}$. (Porquê usamos essa notação para essa coleção? Ver exercício 2.10 e 2.11). Se usarmos a noção de que uma função é a mesma coisa que seu gráfico, então podemos associar a τ como sendo um subconjunto especial de $\mathbb{A} \times \mathbb{B}$.

Um fato muito importante é que todo conjunto $\mathbb{A}$ vem equipado com uma função especial, cujo gráfico é diagonal no produto cartesiano $\mathbb{A} \times \mathbb{A}$: A função identidade em $\mathbb{A}$:

$$\begin{aligned} \mathrm{id}_{\mathbb{A}} : \mathbb{A} &\longrightarrow \mathbb{A} \\ a &\mapsto \mathrm{id}_{\mathbb{A}}(a),\ \forall\ a \in \mathbb{A} \end{aligned}$$

Imagem de uma função: A inclusão de qualquer subconjunto $\mathbb{S}$ de $\mathbb{A}$ ($\mathbb{S} \subseteq \mathbb{A}$) determina uma função $f : \mathbb{S} \longrightarrow \mathbb{A}$, simplesmente "enviando" todo elemento $s \in \mathbb{S}$ a si mesmo em $\mathbb{A}$, tendo em mente que:

$$\mathbb{S} \cap \mathbb{A} = \mathbb{S}$$

Se $\mathbb{S}$ é um subconjunto de $\mathbb{A}$, denotamos por $f(\mathbb{S})$ o subconjunto de $\mathbb{B}$ tal que:

$$f(\mathbb{S}) := \{b \in \mathbb{B} \mid \exists\ a \in \mathbb{A},\ \ b = f(a)\}$$

Isto é, $f(\mathbb{S})$ é um subconjunto de $\mathbb{B}$ que consiste de todos os elementos que são imagens de elementos de $\mathbb{S}$ através da função f. O maior subconjunto deste tipo seria $f(\mathbb{A})$, que é chamado de imagem de f, o qual denotamos por $\mathrm{im} f$.

Além disso, denotamos por $f|_{\mathbb{S}}$ como sendo a restrição de f ao subconjunto $\mathbb{S}$: isto é a função $f : \mathbb{S} \to \mathbb{B}$ definida por:

$$\forall\ s \in \mathbb{S} : \quad f|_{\mathbb{S}}(s) = f(s)$$

Ou seja, $f|_{\mathbb{S}}$ é a composição $f \circ i$ (explicarei mais a frente o que é isso), onde $i : \mathbb{S} \to \mathbb{S}$ é a inclusão. Note portanto que $f(\mathbb{S}) = \mathrm{im}(f|_{\mathbb{S}})$.

Exemplos: Multiconjuntos e conjuntos indexados

Os "multiconjuntos" mencionados brevemente na seção 1.1 são simples exemplos da noção facilmente formalizada do que significam funções. Um multiconjunto pode ser definido fornecendo uma função de um conjunto (regular) $\mathbb{A}$ ao conjunto $\mathbb{N}^*$ de inteiros positivos. Se $m : \mathbb{A} \to \mathbb{N}^*$ é uma função, o multiconjunto correspondente consiste de elementos $a \in \mathbb{A}$, cada um tomado $m(a)$ vezes. Portanto, o multiconjunto $\{a, a, a, b, b, b, b, b, c\}$ é na verdade a função $m : \{a, b, c\} \to \mathbb{N}^*$ para $m(a) = 3$, $m(b) = 5$ e $m(c) = 1$. Como com conjuntos ordinários, a ordem em que os elementos são listados não fazem parte da informação carregada por um multiconjunto. Noções simples de teoria dos conjuntos como inclusão, união, etc. se estendem de maneira simples para multiconjuntos. Para outro ponto de vista sobre multiconjuntos, voltaremos mais a frente na seção 3, Exercício 9.

Outro exemplo é dado pelo uso de "índices". Se escrevemos "sejam $a_1, ..., a_n$ inteiros...", na verdade queremos dizer: considere uma função $a : 1, ..., n \to \mathbb{Z}...$, com a compreensão de que a_i é uma abreviação para o valor $a(i)$ (para $i = 1, ..., n$). É tentador pensar em um conjunto indexado $\{a_i\}_{i \in \mathbb{I}}$ simplesmente como um conjunto cujos elementos são denotados por a_i, para i variando sobre algum "conjunto de índices" $\mathbb{I}$; mas tal conjunto indexado é mais propriamente uma função $\mathbb{I} \to \mathbb{A}$, onde $\mathbb{A}$ é algum conjunto do qual retiramos os elementos a_i. Por exemplo, isso nos permite considerar a_0 e a_1 como elementos distintos de $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, mesmo que, por coincidência, $a_0 = a_1$ como elementos do conjunto alvo $\mathbb{A}$.

É fácil perder tais sutilezas, e algum abuso de notação é comum e geralmente inofensivo. Essas distinções desempenham um papel em (por exemplo) discussões sobre a independência linear de conjuntos de vetores, cf. §VI.1.2.

Composição de funções

Quando tratamos de funções, podemos compô-las de uma modo bem sistemático. Sejam $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ e $g : \mathbb{B} \to \mathbb{C}$ funções arbitrárias. Então a operação $g \circ f$ é definida por:

$$\forall\, a \in \mathbb{A} : \quad (g \circ f)(a) := g(f(a)) \tag{2023.2}$$

ou seja, usamos f para ir de $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$, e então aplicamos g para ir a algum elemento de $\mathbb{C}$. Podemos representar isso através do que chamamos de diagramas (que podem se tornar bem complexos):

$$\begin{tikzcd} \mathbb{A} \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & \mathbb{B} \arrow[d, "g"] \\ & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

Dizemos que os diagramas são "comutativos", se caso formos de $\mathbb{A}$ até $\mathbb{C}$ por f seguido de g ou diretamente por $g \circ f$ o resultado for o mesmo. Isso é precisamente o que a eq. (2023.2) representa.

Composição de funções são associativas: Sejam $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$, $g : \mathbb{B} \to \mathbb{C}$ e $h : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ funções, então:

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

Em forma de diagrama, temos que:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{A} \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & \mathbb{B} \arrow[d, "g"] \arrow[r, "h \circ g"] & \mathbb{D} \\ & \mathbb{C} \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

Então dizemos que o diagrama é comutativo. Isso é uma observação importante que pode ser usada através da própria definição de composição de funções.

A função identidade é bem especial em relação a composições: se $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ é uma função qualquer, então:

$$\mathrm{id}_{\mathbb{B}} \circ f = f \qquad\qquad f \circ \mathrm{id}_{\mathbb{A}} = f$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{A} \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f"'] & \mathbb{B} \arrow[d, "\mathrm{id}_{\mathbb{B}}"] \\ & \mathbb{B} \end{tikzcd} \qquad\qquad \begin{tikzcd} \mathbb{A} \arrow[r, "\mathrm{id}_{\mathbb{A}}"] \arrow[dr, "f"'] & \mathbb{A} \arrow[d, "f"] \\ & \mathbb{B} \end{tikzcd}$$

O que mostra que esses diagramas comutam e que a função identidade é também associativa por construção.

Funções injetoras, sobrejetoras e bijetoras

Tratando diretamente com funções, existem certos tipos que exigem um enfoque extra:

Definição 1

(Injetividade) Uma função é injetora se para $f : \mathbb{A} \hookrightarrow \mathbb{B}$:

$$\forall\ a', a'' \in \mathbb{A} : \quad a' \neq a'' \Leftrightarrow f(a') \neq f(a'')$$

ou seja, f mapeia diferentes elementos de $\mathbb{A}$ a diferentes elementos de $\mathbb{B}$. Podemos enunciar esse mesmo tipo de função de forma contra positiva, que é equivalente.

$$\forall\ a', a'' \in \mathbb{A} : \quad f(a') = f(a'') \Leftrightarrow a' = a''$$

Definição 2

(Sobrejetividade) Uma função sobrejetora se para $f : \mathbb{A} \twoheadrightarrow \mathbb{B}$:

$$\forall\ b \in \mathbb{B},\ \exists\ a \in \mathbb{A} \mid b = f(a)$$

ou seja, isso é equivalente a dizer que f "cobre todo o $\mathbb{B}$"; mais precisamente, se $\mathrm{im} f = \mathbb{B}$.

Definição 3

(Bijetividade) Uma função é bijetora (ou um isomorfismo entre conjuntos) se ela for tanto injetora quanto bijetora. Nesse caso, escrevemos $f : \mathbb{A} \xrightarrow{\sim} \mathbb{B}$ ou $\mathbb{A} \cong \mathbb{B}$, e dizemos que $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ são conjuntos isomórficos.

Exemplo 2 Bijeção da identidade

Com esses enunciados, podemos mostrar que a função identidade $\mathrm{id}_{\mathbb{A}} : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ é uma bijeção.

Demonstração.

Para mostrar que a função identidade $\mathrm{id}_{\mathbb{A}} : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ é uma função bijetora, precisamos verificar duas propriedades: a injetividade e a sobrejetividade.

- Injetividade: Para mostrar que $\mathrm{id}_{\mathbb{A}}$ é injetora, precisamos mostrar que para quaisquer dois elementos $a, b \in \mathbb{A}$, se $\mathrm{id}_{\mathbb{A}}(a) = \mathrm{id}_{\mathbb{A}}(b)$, então $a = b$. Mas isso é imediato, pois $\mathrm{id}_{\mathbb{A}}(a) = a$ e $\mathrm{id}_{\mathbb{A}}(b) = b$. Portanto, se $\mathrm{id}_{\mathbb{A}}(a) = \mathrm{id}\mathbb{A}(b)$, então $a = b$, o que mostra que $\mathrm{id}_{\mathbb{A}}$ é injetora.

- Sobrejetividade: Para mostrar que $\mathrm{id}_{\mathbb{A}}$ é sobrejetora, precisamos mostrar que para todo $b \in \mathbb{A}$, existe um $a \in \mathbb{A}$ tal que $\mathrm{id}_{\mathbb{A}}(a) = b$. Mas isso também é imediato, pois para qualquer $b \in \mathbb{A}$, podemos simplesmente escolher $a = b$, e então $\mathrm{id}_{\mathbb{A}}(a) = a = b$. Portanto, $\mathrm{id}_{\mathbb{A}}$ é sobrejetora.

Como $\mathrm{id}_{\mathbb{A}}$ é injetora e sobrejetora, ela é bijetora. Isso conclui a demonstração, tal que podemos escrever:

$$\mathrm{id}_{\mathbb{A}} : \mathbb{A} \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}$$

■

Agora, se $f : \mathbb{A} \xrightarrow{\sim} \mathbb{B}$ for uma bijeção, então os conjuntos $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ podem ser identificados através de f, no sentido de que é fácil encontrar precisamente os elementos $a \in \mathbb{A}$ com seus elementos correspondentes $f(a) \in \mathbb{B}$. Note que se $\mathbb{A}$ for um conjunto finito e existir uma função $f : \mathbb{A} \xrightarrow{\sim} \mathbb{B}$, então $\mathbb{B}$ é necessariamente um conjunto finito, além de que isso impõe que $\#\mathbb{A} = \#\mathbb{B}$. (Isso será útil para resolver o exercício 2.1).

Esse tipo de terminologia nos permite, de certa forma, impor mais sentido às considerações sobre "Uniões disjuntas" explicitadas na primeira seção. Podemos dizer que as "cópias" $\mathbb{A}'$ e $\mathbb{B}'$ de conjuntos dados $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$, são simplesmente conjuntos isomórficos de $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$.

Funções injetoras, sobrejetoras e bijetoras: Um segundo ponto de vista

Se definirmos uma bijeção qualquer $f : \mathbb{A} \xrightarrow{\sim} \mathbb{B}$, podemos "flipar" seu gráfico e definir uma outra função:

$$g : \mathbb{B} \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}$$

tal que é possível dizer que $a = g(b)$ de forma precisa quando $b = f(a)$. O fato de f ser uma bijeção garante que ao fliparmos o conjunto Γ_f continua sendo o gráfico da função de acordo com a definição (2023.1).

Podemos ver na forma de diagrama uma propriedade bastante interessante da função g: os diagramas comutam!

$$g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{A}} \qquad\qquad f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{B}}$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{A} \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{\mathbb{A}}"'] & \mathbb{B} \arrow[d, "g"] \\ & \mathbb{A} \end{tikzcd} \qquad\qquad \begin{tikzcd} \mathbb{B} \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{\mathbb{B}}"'] & \mathbb{A} \arrow[d, "f"] \\ & \mathbb{B} \end{tikzcd}$$

A primeira identidade (da esquerda) nos diz que g é uma inversa à esquerda de f, tal que de forma análoga, a segunda (da direita) é dita como sendo g uma inversa à direita de f. De certa forma, podemos ignorar essa nomenclatura e dizer que f assume inversa e é dada por g, que definiremos como $g := f^{-1}$. Em resumo, concluí-se que bijeções possuem inversas.

Com apenas esses argumentos, ainda ficam algumas dúvidas: a recíproca é verdadeira? ou seja, se uma função possui inversa, ela é bijetora? Bom, isso é verdade, mas precisamos de mais algumas ferramentas para conseguir afirmar isso.

Proposição 1

Assuma que $\mathbb{A} \neq \varnothing$, e seja $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ uma função. Então:

(1) f possui inversa à esquerda se, e somente se, ela for injetora.

(2) f possui inversa à direita se, e somente se, ela for sobrejetora.

Demonstração.

(1) ($\Rightarrow$) Seja $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ uma função que possui inversa à esquerda. Então irá existir uma função $g : \mathbb{B} \to \mathbb{A}$ tal que $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{A}}$. Agora assuma que $a' \neq a''$ sejam elementos diferentes em $\mathbb{A}$, então:

$$g(f(a')) = \mathrm{id}_{\mathbb{A}}(a') = a' \neq a'' = \mathrm{id}_{\mathbb{A}}(a'') = g(f(a''))$$

ou seja, g envia $f(a')$ e $f(a'')$ a diferentes elementos, o que força $f(a')$ e $f(a'')$ a serem diferentes, implicando que f é injetiva.

($\Leftarrow$) Agora assuma que $f : \mathbb{A} \hookrightarrow \mathbb{B}$ é injetora. Afim de construir uma função $g : \mathbb{B} \to \mathbb{A}$, precisamos atribuir um único valor $g(b) \in \mathbb{A}$ para cada elemento $b \in \mathbb{B}$. Para isso, escolha um elemento fixo $s \in \mathbb{A}$ (podemos fazer isso, pois por hipótese $\mathbb{A} \neq \varnothing$) de modo que:

$$g(b) := \begin{cases} a, & \text{se } b = f(a) \text{ para algum } a \in \mathbb{A} \\ s, & \text{se } b \notin \mathrm{im} f \end{cases}$$

Em palavras: se b é a imagem de algum elemento $a \in \mathbb{A}$, g irá retornar a, por outro lado, se b não for imagem de nenhum elemento, g retornará o valor s.

A atribuição dada define uma função, precisamente porque f é injetiva: de fato, isso garante que todo b que é a imagem de algum $a \in \mathbb{A}$ por f é a imagem de um único a (dois elementos distintos de $\mathbb{A}$ não podem ser simultaneamente enviados para b por f, já que f é injetiva por hipótese). Assim, todo $b \in \mathbb{B}$ é enviado para um único elemento bem definido de $\mathbb{A}$, como é exigido de funções.

Finalmente, a função $g : \mathbb{B} \to \mathbb{A}$ é uma inversa à esquerda de f. De fato, se $a \in \mathbb{A}$, então $b = f(a)$ é do primeiro tipo, então é enviado de volta para a por g: isto é, $g \circ f(a) = a = \mathrm{id}_{\mathbb{A}}(a)$ para todos os $a \in \mathbb{A}$. ■

(2) ($\Rightarrow$) Vamos supor agora que exista uma função g que é inversa à direita de $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$. Então $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{B}}$. Sendo $b \in \mathbb{B}$, temos que $f(g(b)) = b$, de modo que existe um elemento $a \in \mathbb{A}$ tal que $a = g(b)$, o que implica que $f(a) = b$. Portanto f é uma função sobrejetora.

($\Leftarrow$) Seja agora $f : \mathbb{A} \twoheadrightarrow \mathbb{B}$ sobrejetora. Para construir uma função $g : \mathbb{B} \to \mathbb{A}$ que satisfaça $f(g(a)) = a,\ \forall\ a \in \mathbb{A}$, temos que desde que f seja sobrejetora, $\forall\ b \in \mathbb{B}$, existe um elemento $a \in \mathbb{A}$ tal que $f(a) = b$. Sendo assim, para cada $b \in \mathbb{B}$, posso construir um subconjunto $\mathbb{L}_b \subseteq \mathbb{A} \times \mathbb{B}$ de pares ordenados definido por:

$$\mathbb{L}_b := \{(a, b) \mid a \in \mathbb{A},\ f(a) = b\}$$

Note que este conjunto é não-vazio para qualquer elemento $b \in \mathbb{B}$. Podemos então escolher um par ordenado (a, b) (com a não necessariamente único) para cada conjunto em $\mathbb{L} = \{\mathbb{L}_b \mid b \in \mathbb{B}\}$ de modo a definir $g : \mathbb{B} \to \mathbb{A}$ como sendo:

$$g(b) := a, \quad a \in (a, b) \in \mathbb{L}_b$$

Agora só falta mostrar que g satisfaz a condição de ser inversa à direita de f. De fato, seja $b \in \mathbb{B}$; desde que f seja sobrejetora, g será definida tal que quando $a = g(b)$, seja satisfeita a igualdade $f(a) = b$, o que nos dá $f(g(b)) = (f \circ g)(b) = b$, que conclui que g é a inversa à direita de f. ■

Corolário 1. Uma função $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ é uma bijeção se, e somente se tiver inversa à direita e à esquerda.

Se uma função é somente injetora, podemos dizer que ela não possui inversa à direita e vai necessariamente possui mais de uma inversa à esquerda. Analogamente, se uma função é somente sobrejetora, ela não possui inversa à esquerda e vai ter necessariamente mais de uma inversa à direita. Funções como essas são chamadas muitas vezes de “seções”.

A Proposição 1 sugere que algo profundo está acontecendo aqui. A definição de mapas injetivos e sobrejetivos apresentada na Seção 2.4 depende crucialmente do trabalho direto com os elementos de nossos conjuntos; a Proposição 1 mostra que, na verdade, essas propriedades são detectadas pela forma como as funções estão “organizadas” entre conjuntos. Mesmo que não soubéssemos o que significam os “elementos”, ainda assim poderíamos dar sentido às noções de injetividade e sobrejetividade (e, portanto, de isomorfismos de conjuntos) referindo-se exclusivamente às propriedades das funções.

Essa é uma visão mais “madura” e que será defendida quando falarmos sobre categorias. Em certa medida, ela deve curar o leitor do desconforto de falar sobre “elementos”, como fizemos em nossa introdução informal aos conjuntos, sem definir o que essas entidades misteriosas deveriam ser.

A notação padrão para a inversa de uma bijeção f é f^{-1}, porém esse símbolo é também utilizado para funções que não são bijeções, mas em um contexto sucintamente diferente: se $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ é uma função qualquer, e $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{B}$ é um subconjunto de $\mathbb{B}$, então $f^{-1}(\mathbb{T})$ denota o subconjunto de $\mathbb{A}$ de "todos os elementos mapeados a $\mathbb{T}$", ou seja:

$$f^{-1}(\mathbb{T}) = \{a \in \mathbb{A} \mid f(a) \in \mathbb{T}\}$$

Se $\mathbb{T} = \{q\}$, ou seja, consiste de apenas um único elemento de $\mathbb{B}$, $f^{-1}(\mathbb{T})$, ou simplesmente $f^{-1}(q)$, é chamado de *fibra* de f sobre q. Dessa forma, uma função $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ é uma bijeção se ela tem fibras não vazias sobre todos os elementos de B (isto é, f é sobrejetiva) e essas fibras são de fato singletons[1] (isto é, f é injetiva).

Monomorfismos e epimorfismos

Vamos agora dar outra visão sobre como expressar injetividade e sobrejetividade, que a princípio pode parecer mais complicado, mas na verdade é mais simples que as abordagens anteriores.

Definição 4

Uma função $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ é dita um monomorfismo se a seguinte enunciação é verdadeira:

" Para todos os conjuntos $\mathbb{M}$ e todas as funções $\alpha', \alpha'' : \mathbb{M} \to \mathbb{A}$: "

$$f \circ \alpha' = f \circ \alpha'' \Rightarrow \alpha' = \alpha''$$

A partir dessa definição, podemos enunciar uma proposição que expressa de forma diferente funções injetivas.

Proposição 2

Uma função $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ é dita injetiva se, e somente se ela for um monomorfismo.

Demonstração.

($\Rightarrow$) A partir da Proposição 1, temos que se uma dada função $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ é uma injeção, então ela possui uma inversa à esquerda $g : \mathbb{B} \to \mathbb{A}$. Assuma então que α', α'' seja uma função arbitrária de um outro conjunto $\mathbb{M}$ até $\mathbb{A}$, de modo que:

$$f \circ \alpha' = f \circ \alpha''$$

Compondo pelo lado esquerdo dessas igualdades a função g e usando a propriedade

[1] Singletons podem ser traduzidos diretamente como sendo conjuntos unitários ou singulares, ou seja, que possuem apenas um único elemento.

associativa da composição de funções, temos que:

$$(g \circ f) \circ \alpha' = g \circ (f \circ \alpha') = g \circ (f \circ \alpha'') = g \circ f) \circ \alpha''$$

Desde que g seja uma inversa à esquerda de f, temos:

$$\mathrm{id}_{\mathbb{A}} \circ \alpha' = \mathrm{id}_{\mathbb{A}} \circ \alpha'' \Rightarrow \alpha' = \alpha''$$

Concluindo que f é um monomorfismo.
($\Leftarrow$) Agora assuma que f seja um monomorfismo. Isso nos diz algo sobre a arbitrariedade do conjunto $\mathbb{M}$ e sobre a arbitrariedade das funções definidas por $\mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{A}$. Usando $\mathbb{M}$ tal que ele seja um singleton $\{p\}$ qualquer, podemos escrever as funções $\alpha', \alpha'' : \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{Z}$ que equivalem a escolher quais elementos $a' = \alpha'(p)$ ou $a'' = \alpha''(p)$ podemos escolher para enviar um único elemento p até $\mathbb{M}$. Para essa escolha em particular de $\mathbb{M}$ a propriedade que define um monomorfismo pode ser escrita como sendo:

$$f \circ \alpha'(p) = f \circ \alpha''(p) \Rightarrow \alpha' = \alpha''$$

ou seja:

$$f(a') = f(a'') \Rightarrow \alpha' = \alpha''$$

Com isto, as duas funções de $\mathbb{M} \equiv \{p\} \longrightarrow \mathbb{A}$ são iguais se, e somente se elas enviam p ao mesmo elemento, o que nos diz que:

$$f(a') = f(a'') \Rightarrow a' = a''$$

que precisa ser verdade $\forall\ \alpha', \alpha''$, isto é, para todas as escolhas distintas de $a',\ a'' \in \mathbb{A}$. Ou seja, f é uma função injetora. ■

Agora nós devemos esperar que haja uma definição no estilo da que foi dada para monomorfismos, e que acabará sendo equivalente a "sobrejetiva". Essa noção é chamada de epimorfismo.

Definição 5

Uma função $f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{B}$ é dita um epimorfismo se a seguinte enunciação é verdadeira:

" Para todos os conjuntos $\mathbb{E}$ e todas as funções $b' : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{B}$, existe uma função $a' : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{A}$ tal que: "

$$f \circ a' = b'$$

Tal que de forma análoga à injetividade, temos uma proposição que define de outra forma o que são funções sobrejetoras:

Proposição 3

Uma função $f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{B}$ é dita sobrejetora se, e somente se ela for um epimorfismo.

Demonstração.
($\Rightarrow$) Suponha que $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ seja sobrejetora. Seja $\mathbb{E}$ um conjunto e defina a função $b' : \mathbb{E} \to \mathbb{B}$. Precisamos construir uma outra função $a' : \mathbb{Z} \to \mathbb{A}$ tal que $f \circ a' = b'$. Fixemos então $z \in \mathbb{E}$ e suponha que $b = b'(z) \in \mathbb{B}$. Desde que $b \in \mathbb{B}$ e f seja sobrejetora, $\exists\ a \in \mathbb{A}$ tal que $f(a) = b$. Dessa forma, definindo $a'(z) = a$, $\forall\ z \in \mathbb{E}$, podemos escrever:

$$f \circ a'(z) = b'(z), \quad \forall\ z \in \mathbb{E} \Rightarrow f \circ a' = b'$$

Implicando que f é obrigatoriamente um epimorfismo pela definição que criamos.
($\Leftarrow$) Suponha agora que f seja um epimorfismo e $b' : \mathbb{B} \xrightarrow{\sim} \mathbb{B}$ uma bijeção. Sendo f um epimorfismo, vai existir uma função $a' : \mathbb{B} \to \mathbb{A}$ tal que $f \circ a' = b'$. Agora seja $b \in \mathbb{B}$. Sabendo que b' seja uma função bijetora, existe um único elemento $y \in \mathbb{B}$ tal que $b'(y) = b$. Juntando esta relação com a composição, escrevemos:

$$(f \circ a')(y) = b \Rightarrow a := a'(y) : \quad f(a) = b$$

Ou seja, a é um elemento de $\mathbb{A}$ tal que $f(a) = b$, o que define uma função sobrejetiva. ■

Exemplos básicos

Agora vamos dar alguns exemplos básicos de operações entre conjuntos provenientes dos argumentos que fizemos sobre injetividade e sobrejetividade de funções.

Exemplo 3 Projeções naturais

Sejam $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ conjuntos arbitrários. Podemos definir as projeções naturais $\pi_{\mathbb{A}}$ e $\pi_{\mathbb{B}}$ de modo que:

$$\pi_{\mathbb{A}} : \mathbb{A} \times \mathbb{B} \twoheadrightarrow \mathbb{A} \qquad \& \qquad \pi_{\mathbb{B}} : \mathbb{A} \times \mathbb{B} \twoheadrightarrow \mathbb{B}$$

tal que:

$$\pi_{\mathbb{A}}((a,b)) := a \qquad \& \qquad \pi_{\mathbb{B}}((a,b)) := b$$

Para todo par ordenado $(a,b) \in \mathbb{A} \times \mathbb{B}$. Podemos ver de forma clara que essas funções são sobrejetoras, visto que $\mathrm{im}\pi_{\mathbb{A}} = \mathbb{A}$ (ou seja, cobre todo conjunto $\mathbb{A}$) e $\mathrm{im}\pi_{\mathbb{B}} = \mathbb{B}$ (ou seja, cobre todo conjunto $\mathbb{B}$). Em forma de diagrama temos:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{A} \times \mathbb{B} \arrow[dl, "\pi_{\mathbb{A}}"'] \arrow[dr, "\pi_{\mathbb{B}}"] & \\
\mathbb{A} & & \mathbb{B}
\end{tikzcd}$$

Pelo que eu pesquisei a projeção natural, que também pode ser chamada de homomorfismo, é uma maneira lógica de mapear uma estrutura algébrica em suas estruturas quocientes. A projeção natural π é definida comumente para grupos e anéis.

Exemplo 4 Injeções Naturais

De forma praticamente análoga, existem injeções naturais de $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ para a união disjunta $\mathbb{A} \amalg \mathbb{B}$, que diagramavelmente ficam:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{A} \arrow[dr, hook] & & \mathbb{B} \arrow[dl, hook'] \\
& \mathbb{A} \amalg \mathbb{B} &
\end{tikzcd}$$

Essas funções são obtidas enviando $a \in \mathbb{A}$ ao elemento correspondente à cópia isomórfica $\mathbb{A}'$ de $\mathbb{A}$ em $\mathbb{A} \amalg \mathbb{B}$, e enviando $b \in \mathbb{B}$ ao elemento correspondente à cópia isomórfica $\mathbb{B}'$ de $\mathbb{B}$ em $\mathbb{A} \amalg \mathbb{B}$.

Exemplo 5 Projeção Canônica

Se dissermos que $\sim$ representa uma relação de equivalência em um conjunto $\mathbb{A}$ qualquer, existe uma projeção canônica (que será sobrejetora):

$$\mathbb{A} \twoheadrightarrow \mathbb{A}/\sim$$

obtida através do envio de todo $a \in \mathbb{A}$ à sua classe de equivalência $[a]_\sim$.

Decomposição canônica

A razão pela qual focamos nossa atenção em mapas injetivos e sobrejetivos é que eles fornecem os blocos básicos a partir dos quais qualquer função pode ser construída.

Para isso, observemos que toda função $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ determina uma relação de equivalência $\sim$ em $\mathbb{A}$, da seguinte forma:

$$\forall\, a', a'' \in \mathbb{A} : \quad a' \sim a'' \Leftrightarrow f(a') = f(a'')$$

Para mostrar que isso é uma relação de equivalência, precisamos mostrar que 3 propriedades são satisfeitas:

- Reflexividade: Para todo $a \in \mathbb{A}$, temos $a \sim a$.

Demonstração.

Para todo $a \in \mathbb{A}$, temos $f(a) = f(a)$, já que f é uma função. Portanto, $a \sim a$, o que mostra a reflexividade.

- Simetria: Para todos $a', a'' \in \mathbb{A}$, se $a' \sim a''$, então $a'' \sim a'$.

Demonstração.

Se $a' \sim a''$, então $f(a') = f(a'')$. Mas como f é uma função, isso implica que $f(a'') = f(a')$. Portanto, $a'' \sim a'$, o que mostra a simetria.

- Transitividade: Para todos $a', a'', a''' \in \mathbb{A}$, se $a' \sim a''$ e $a'' \sim a'''$, então $a' \sim a'''$.

Demonstração.

Se $a' \sim a''$ e $a'' \sim a'''$, então $f(a') = f(a'')$ e $f(a'') = f(a''')$. Mas então temos que $f(a') = f(a''')$, o que implica que $a' \sim a'''$, mostrando a transitividade.

Teorema 1: O primeiro teorema do isomorfismo

Seja $f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{B}$ uma função qualquer, e defina $\sim$ conforme acima. Então f se decompõe no seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{A} \arrow[r, "f"] \arrow[d] & \mathbb{B} \\
(\mathbb{A}/\sim) \arrow[r, "\sim", "\widetilde{f}"'] & \mathrm{im} f \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

onde a primeira função é a projeção canônica $\mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}/\sim$, a terceira corresponde à inclusão $\mathrm{im} f \subseteq \mathbb{B}$ e a intermediária corresponde à bijeção $\widetilde{f}$ definida por:

$$\widetilde{f}([a]_\sim) := f(a), \quad \forall\, a \in \mathbb{A}$$

A fórmula que define $\widetilde{f}$ mostra imediatamente que o diagrama comuta; então tudo que precisamos verificar para provar esse teorema é:

- Essa fórmula define uma função;
- Essa função é de fato uma bijeção.

O primeiro item é um exemplo de uma classe de verificações de extrema importância. A fórmula dada para $\widetilde{f}$ tem uma ambiguidade colossal embutida: o mesmo elemento em $\mathbb{A}/\sim$ pode ser a classe de equivalência de muitos elementos de $\mathbb{A}$; aplicar a fórmula para $\widetilde{f}$ requer escolher um desses elementos e aplicar f a ele. Precisamos provar que o resultado dessa operação é independente dessa escolha: isto é, que todas as possíveis escolhas de representantes para essa classe de equivalência levam ao mesmo resultado.

Codificamos essa situação dizendo que precisamos verificar que $\widetilde{f}$ é bem definido. Frequentemente teremos que verificar que as operações que consideramos são bem definidas, em contextos muito similares ao exemplificado aqui.

Demonstração.

Como dissemos anteriormente no primeiro item, precisamos verificar que $\forall\ a', a'' \in \mathbb{A}$, temos:

$$[a']_\sim = [a'']_\sim \Rightarrow f(a') = f(a'')$$

Agora $[a']_\sim = [a'']_\sim$ significa que $a' \sim a''$; e a definição de $\sim$ foi moldada de forma precisa para que isso signifique que $f(a') = f(a'')$ como queremos demonstrar. Portanto $\widetilde{f}$ é realmente uma função bem definida.

Para demonstrar o segundo item, ou seja, que $f : \mathbb{A}/\sim \longrightarrow \mathrm{im} f$ é uma bijeção, precisamos checar explicitamente que $\widetilde{f}$ é tanto injetora quanto sobrejetora.

- Injetividade: Se $\widetilde{f}([a']_\sim) = \widetilde{f}([a'']_\sim)$ pela definição de $\widetilde{f}$, então $a' \sim a''$ pela definição de $\sim$, logo $[a']_\sim = [a'']_\sim$. Portanto:

  $$\widetilde{f}([a']_\sim) = \widetilde{f}([a'']_\sim) \Rightarrow [a']_\sim = [a'']_\sim$$

  Concluindo a injetividade da função.

- Sobrejetividade: Dado qualquer $b \in \mathrm{im} f$, existe um elemento $a \in \mathbb{A}$ tal que $f(a) = b$. Então:

  $$\widetilde{f}([a]_\sim) = f(a) = b$$

  pela definição de $\widetilde{f}$. Desde que b seja arbitrário em $\mathrm{im} f$, isso mostra que $\widetilde{f}$ é sobrejetora. ■

O Teorema mostra que toda função é a composição de uma sobrejeção, seguida de um isomorfismo, seguida de uma injeção. Embora sua prova seja relativamente simples, esse é um resultado de certa importância, pois é o protótipo de uma situação que ocorrerá várias vezes em conteúdos mais a frente.

References

Aluffi, Paolo (2009). Algebra, Chapter 0. American Mathematical Society.