Institute of Physics

Quantum Mechanics II

Ph.D. Alexandre Suaide

L. R. Ximenes

2023

LISTA N° 1

Lucas R. Ximenes dos Santos - 11917239

Exercício 1

Mostre que uma soma de dois momentos angulares $\hat{j} = \hat{j}_1 + \hat{j}_2$, podemos escrever que $\hat{j}^2 = \hat{j}_1^2 + \hat{j}_2^2 + 2\hat{j}_{1z}\hat{j}_{2z} + \hat{j}_{1+}\hat{j}_{2-} + \hat{j}_{1-}\hat{j}_{2+}$

Solução:

Abrindo $\hat{j}^2$ como um produto escalar:

$$\begin{aligned}\hat{j}^2 &= (\hat{j}_1 + \hat{j}_2)^2 \\ &= \hat{j}_1^2 + \hat{j}_2^2 + \hat{j}_1 \cdot \hat{j}_2 + \hat{j}_2 \cdot \hat{j}_1 \\ &= \hat{j}_1^2 + \hat{j}_2^2 + (\hat{j}_{1x}\boldsymbol{e}_x + \hat{j}_{1y}\boldsymbol{e}_y + \hat{j}_{1z}\boldsymbol{e}_z) \cdot (\hat{j}_{2x}\boldsymbol{e}_x + \hat{j}_{2y}\boldsymbol{e}_y + \hat{j}_{2z}\boldsymbol{e}_z) + \\ &\quad + (\hat{j}_{2x}\boldsymbol{e}_x + \hat{j}_{2y}\boldsymbol{e}_y + \hat{j}_{2z}\boldsymbol{e}_z) \cdot (\hat{j}_{1x}\boldsymbol{e}_x + \hat{j}_{1y}\boldsymbol{e}_y + \hat{j}_{1z}\boldsymbol{e}_z)\end{aligned}$$

Usando a definição dos operadores de momento angular auxiliares:

$$\hat{j}_{1+} = \hat{j}_{1x} + i\hat{j}_{1y} \qquad \& \qquad \hat{j}_{1-} = \hat{j}_{1x} - i\hat{j}_{1y}$$

$$\hat{j}_{2+} = \hat{j}_{2x} + i\hat{j}_{2y} \qquad \& \qquad \hat{j}_{2-} = \hat{j}_{2x} - i\hat{j}_{2y}$$

temos que:

$$\begin{aligned}\hat{j}_{1+}\hat{j}_{2-} &= \hat{j}_{1x}\hat{j}_{2x} - i\hat{j}_{1x}\hat{j}_{2y} + i\hat{j}_{1y}\hat{j}_{2x} + \hat{j}_{1y}\hat{j}_{2y} \\ \hat{j}_{1-}\hat{j}_{2+} &= \hat{j}_{1x}\hat{j}_{2x} + i\hat{j}_{1x}\hat{j}_{2y} - i\hat{j}_{1y}\hat{j}_{2x} + \hat{j}_{1y}\hat{j}_{2y}\end{aligned}$$

Somando essas duas expressões:

$$\hat{j}_{1+}\hat{j}_{2-} + \hat{j}_{1-}\hat{j}_{2+} = 2\hat{j}_{1x}\hat{j}_{2x} + 2\hat{j}_{1y}\hat{j}_{2y}$$

Voltando à expressão de $\hat{j}^2$:

$$\hat{j}^2 = \hat{j}_1^2 + \hat{j}_2^2 + 2\hat{j}_{1x}\hat{j}_{2x} + 2\hat{j}_{1y}\hat{j}_{2y} + 2\hat{j}_{1z}\hat{j}_{2z}$$

Logo podemos substituir o resultado encontrado usando os operadores auxiliares para escrever:

$$\hat{j}^2 = \hat{j}_1^2 + \hat{j}_2^2 + 2\hat{j}_{1z}\hat{j}_{2z} + \hat{j}_{1+}\hat{j}_{2-} + \hat{j}_{1-}\hat{j}_{2+} \tag{1.1}$$

Exercício 2

Em aula comentamos sobre os estados de spin total para dois elétrons. São 4 estados possíveis. Determine os números quânticos para o spin total e projeção no eixo-z desse spin total para cada um desses estados.

Solução:

Podemos utilizar a relação:

$$|s_1 - s_2| \leqslant s \leqslant s_1 + s_2$$

Sendo elétrons, s_1 e s_2 são 1/2, e portanto:

$$\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right| \leqslant s \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \leqslant s \leqslant 1$$

Logo os valores possíveis de $s \in \{0, 1\}$. Para determinar as projeções no eixo-z, usamos a relação

$$-s \leqslant m_s \leqslant s \Rightarrow \begin{cases} -1 \leqslant s \leqslant 1, & s = 1 \\ 0 \leqslant s \leqslant 0, & s = 0 \end{cases}$$

Ou seja, para $s = 1$, $m_s \in \{-1, 0, 1\}$ e para $s = 0$, $m_s = 0$, logo os possíveis estados são

$$|1, 1\rangle \quad \text{ou} \quad |1, 0\rangle \quad \text{ou} \quad |1, -1\rangle \quad \text{ou} \quad |0, 0\rangle \tag{1.2}$$

Exercício 3

Duas partículas de momento angular 3/2 encontram-se em um estado de momento angular 1. Encontre todos os estados possíveis desse sistema na representação $|j, m, j_1, j_2\rangle$ escritos em termos da base de representação $|j_1, m_1, j_2, m_2\rangle$

Solução:

Duas partículas de momento angular 3/2 satisfazem que:

$$\left|-\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\right| \leqslant j \leqslant \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \Rightarrow 0 \leqslant j \leqslant 3$$

E como $-j \leqslant m \leqslant j$, temos que m assume os valores $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ para $j = 3$, $-2, -1, 0, 1, 2$ para $j = 2$, $-1, 0, 1$ para $j = 1$ e 0 para $j = 0$, sendo assim, como as partículas encontram-se em um estado de momento angular igual a 1, precisamos calcular os coeficientes de Clebsch-Gordan em que $j = 1$ na seguinte tabela (o que precisamos calcular estará sinalizado com ☭), lembrando que para $m \neq m_1 + m_2$ os coeficientes de Clebsch-Gordan são nulos:

Coeficientes de Clebsch-Gordan

m_1	m_2	Sistema $j_1 = \frac{3}{2}$ e $j_2 = \frac{3}{2}$															
$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$													0	0	0	
$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$													0	0	0	
$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$													0	0	☭	
$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$													0	☭	0	
$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$													0	0	0	
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$													0	0	☭	
$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$													0	☭	0	
$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$													☭	0	0	
$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$													0	0	☭	
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$													0	☭	0	
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$													☭	0	0	
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$													0	0	0	
$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$													0	☭	0	
$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$													☭	0	0	
$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$													0	0	0	
$-\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$													0	0	0	
j		3	3	3	3	3	3	3	2	2	2	2	2	1	1	1	0
m		-3	-2	-1	0	1	2	3	-2	-1	0	1	2	-1	0	1	0

Para escrever $|j, m, j_1, j_2\rangle$ em termos dos estados $|j_1, m_1, j_2, m_2\rangle$, temos que:

$$|j, m, j_1, j_2\rangle = \sum_{m_1, m_2} C^{j,m}_{m_1,m_2} \, |j_1, m_1, j_2, m_2\rangle$$

Os coeficientes que precisamos calcular são:

$$
\begin{array}{ccc}
C^{1,-1}_{1/2,-3/2} & C^{1,0}_{3/2,-3/2} & C^{1,1}_{3/2,-1/2} \\[2ex]
C^{1,-1}_{-1/2,-1/2} & C^{1,0}_{1/2,-1/2} & C^{1,1}_{1/2,1/2} \\[2ex]
C^{1,-1}_{-3/2,1/2} & C^{1,0}_{-1/2,1/2} & C^{1,1}_{-1/2,3/2} \\[2ex]
 & C^{1,0}_{-3/2,3/2} &
\end{array}
$$

Sendo assim, podemos escrever os seguintes estados de momento angular 1:

$$
\begin{aligned}
|1,-1\rangle &= \sum_{m_1,m_2} C^{1,-1}_{m_1,m_2} \left|\frac{3}{2}, m_1, \frac{3}{2}, m_2\right\rangle \\
|1,0\rangle &= \sum_{m_1,m_2} C^{1,0}_{m_1,m_2} \left|\frac{3}{2}, m_1, \frac{3}{2}, m_2\right\rangle \\
|1,1\rangle &= \sum_{m_1,m_2} C^{1,1}_{m_1,m_2} \left|\frac{3}{2}, m_1, \frac{3}{2}, m_2\right\rangle
\end{aligned}
$$

Agora precisamos calcular os coeficientes de forma direta. Sabemos que para $j = 3$ e $m = \pm 3$, para $m_1 + m_2 = m$, os coeficientes de Clebsch-Gordan são sempre iguais a 1, ou seja:

$$
C^{3,3}_{3/2,3/2} = 1 \qquad \& \qquad C^{3,-3}_{-3/2,-3/2} = 1
$$

de modo que podemos escrever $|3,3\rangle = \left|\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\rangle$. Usando então o operador de abaixamento, obtemos:

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathcal{J}}_- |3,3\rangle = \hbar\sqrt{6}\,|3,2\rangle \Rightarrow \hat{\mathcal{J}}_{1-} \left|\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\rangle + \hat{\mathcal{J}}_{2-} \left|\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\rangle &= \hbar\sqrt{6}\,|3,2\rangle \\
\hbar\sqrt{3} \left|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\rangle + \hbar\sqrt{3} \left|\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle &= \\
\frac{1}{\sqrt{2}} \left|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \left|\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle &= |3,2\rangle
\end{aligned}
$$

O que nos dá os coeficientes:

$$
C^{3,2}_{1/2,3/2} = C^{3,2}_{3/2,1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}
$$

Aplicando novamente o operador $\hat{\mathcal{J}}_-$, mas agora em $|3,2\rangle$, temos:

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathcal{J}}_- |3,2\rangle &= \hbar\sqrt{10}\,|3,1\rangle \\
\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\mathcal{J}}_{1-} \left(\left|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\rangle + \left|\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\mathcal{J}}_{2-} \left(\left|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\rangle + \left|\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle\right) &= \\
\frac{\hbar}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{4}\left|\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\rangle + \sqrt{3}\left|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle + \sqrt{3}\left|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle + \sqrt{4}\left|\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle\right) &= \\
\frac{2}{\sqrt{10}} \left|\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\rangle + \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}\sqrt{10}} \left|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle + \frac{2}{\sqrt{10}} \left|\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle &= |3,1\rangle \\
\frac{1}{\sqrt{5}} \left|\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\rangle + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \left|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}} \left|\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle &=
\end{aligned}
$$

Obtendo portanto:

$$C^{3,1}_{-1/2,3/2} = C^{3,1}_{3/2,-1/2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \qquad \& \qquad C^{3,1}_{1/2,1/2} = \sqrt{\frac{3}{5}}$$

Chegamos em $m = 1$, que é um dos valores que queremos, porém precisamos mudar o $j = 3$ para 1 também. Para isso, usamos as relações de ortogonalidade:

$$\begin{aligned}\langle 2,1|2,1\rangle &= 1\\ &= \left(C^{2,1}_{3/2,-1/2}\right)^2 + \left(C^{2,1}_{1/2,1/2}\right)^2 + \left(C^{2,1}_{-1/2,3/2}\right)^2\end{aligned}$$

Usando $\langle 3,1|$ (que já é conhecido):

$$\begin{aligned}\langle 3,1|2,1\rangle &= 0\\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\left\langle\frac{3}{2},-\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right| + \sqrt{\frac{3}{5}}\left\langle\frac{3}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right| + \frac{1}{\sqrt{5}}\left\langle\frac{3}{2},\frac{3}{2},\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right|\right)\\ &\quad \left(C^{2,1}_{3/2,-1/2}\left|\frac{3}{2},\frac{3}{2},\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle + C^{2,1}_{1/2,1/2}\left|\frac{3}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\rangle + C^{2,1}_{-1/2,3/2}\left|\frac{3}{2},-\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right\rangle\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}C^{2,1}_{-1/2,3/2} + \sqrt{\frac{3}{5}}C^{2,1}_{1/2,1/2} + \frac{1}{\sqrt{5}}C^{2,1}_{3/2,-1/2}\end{aligned}$$

Então:

$$\begin{cases} C^{2,1}_{3/2,-1/2} + C^{2,1}_{-1/2,3/2} = -\sqrt{3}C^{2,1}_{1/2,1/2}\\ \left(C^{2,1}_{3/2,-1/2}\right)^2 + \left(C^{2,1}_{1/2,1/2}\right)^2 + \left(C^{2,1}_{-1/2,3/2}\right)^2 = 1\\ (C^{2,1}_{3/2,-1/2})^2 = (C^{2,1}_{-1/2,3/2})^2 \end{cases}$$

Concluindo que:

$$C^{2,1}_{3/2,-1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \& \qquad C^{2,1}_{-1/2,3/2} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \& \qquad C^{2,1}_{1/2,1/2} = 0$$

Fazendo o mesmo procedimento, mas agora com $|1,1\rangle$ temos:

$$\begin{aligned}\langle 1,1|1,1\rangle &= 1\\ &= \left(C^{1,1}_{3/2,-1/2}\right)^2 + \left(C^{1,1}_{1/2,1/2}\right)^2 + \left(C^{1,1}_{-1/2,3/2}\right)^2\end{aligned}$$

Usando $\langle 2,1|$:

$$\begin{aligned}\langle 2,1|1,1\rangle &= 0\\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left\langle\frac{3}{2},\frac{3}{2},\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right| - \frac{1}{\sqrt{2}}\left\langle\frac{3}{2},-\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right|\right)\\ &\quad \left(C^{1,1}_{3/2,-1/2}\left|\frac{3}{2},\frac{3}{2},\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle + C^{1,1}_{1/2,1/2}\left|\frac{3}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\rangle + C^{1,1}_{-1/2,3/2}\left|\frac{3}{2},-\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right\rangle\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}C^{1,1}_{-1/2,3/2} - \frac{1}{\sqrt{2}}C^{1,1}_{3/2,-1/2}\end{aligned}$$

Concluímos que vale a simetria, agora usando $\langle 3,1|$:

$$
\begin{aligned}
\langle 3,1|1,1\rangle &= 0 \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\left|\frac{3}{2},-\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right\rangle + \sqrt{\frac{3}{5}}\left|\frac{3}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}}\left|\frac{3}{2},\frac{3}{2},\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle\right) \\
&\quad \left(C^{1,1}_{3/2,-1/2}\left|\frac{3}{2},\frac{3}{2},\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle + C^{1,1}_{1/2,1/2}\left|\frac{3}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\rangle + C^{1,1}_{-1/2,3/2}\left|\frac{3}{2},-\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right\rangle\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}C^{1,1}_{-1/2,3/2} + \sqrt{\frac{3}{5}}C^{1,1}_{1/2,1/2} + \frac{1}{\sqrt{5}}C^{1,1}_{3/2,-1/2} \\
&= \frac{2}{\sqrt{5}}C^{1,1}_{-1/2,3/2} + \sqrt{\frac{3}{5}}C^{1,1}_{1/2,1/2}
\end{aligned}
$$

Com todas essa informações, é fácil concluir que:

$$
C^{1,1}_{3/2,-1/2} = \sqrt{\frac{3}{10}} = C^{1,1}_{-1/2,3/2} \qquad \& \qquad C^{1,1}_{1/2,1/2} = -\sqrt{\frac{2}{5}}
$$

Temos então então um dos estados:

$$
\boxed{|1,1\rangle = \sqrt{\frac{3}{10}}\left|\frac{3}{2},\frac{3}{2},\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle - \sqrt{\frac{2}{5}}\left|\frac{3}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\rangle + \sqrt{\frac{3}{10}}\left|\frac{3}{2},-\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right\rangle} \tag{1.3}
$$

Aplicando o operador $\hat{\mathcal{J}}_-$ neste estado:

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathcal{J}}_- |1,1\rangle &= \hbar\sqrt{2}\,|1,0\rangle \\
(\hat{\mathcal{J}}_{1-} + \hat{\mathcal{J}}_{2-})\,|1,1\rangle &= \\
\sqrt{\frac{3}{10}}\hbar\sqrt{?}\left|\frac{3}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle - \sqrt{\frac{2}{5}}\hbar\sqrt{?}\left|\frac{3}{2},-\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\rangle + \sqrt{\frac{3}{10}}\hbar\sqrt{?}\left|\frac{3}{2},-\frac{3}{2},\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right\rangle & \\
+\sqrt{\frac{3}{10}}\hbar\sqrt{?}\left|\frac{3}{2},\frac{3}{2},\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right\rangle - \sqrt{\frac{2}{5}}\hbar\sqrt{?}\left|\frac{3}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle + \sqrt{\frac{3}{10}}\hbar\sqrt{?}\left|\frac{3}{2},-\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\rangle &= \\
\frac{3}{\sqrt{10}}\left|\frac{3}{2},\frac{3}{2},\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right\rangle - \frac{1}{\sqrt{20}}\left|\frac{3}{2},-\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\rangle - \frac{1}{\sqrt{20}}\left|\frac{3}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle + \frac{3}{\sqrt{10}}\left|-\frac{3}{2},\frac{3}{2},\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right\rangle &= |1,0\rangle
\end{aligned}
$$

Concluindo que:

$$
C^{1,0}_{3/2,-3/2} = \frac{3}{\sqrt{10}} = C^{1,0}_{-3/2,3/2} \qquad \& \qquad C^{1,0}_{-1/2,1/2} = -\frac{1}{\sqrt{20}} = C_{1/2,-1/2}
$$

Portanto:

$$
\boxed{\begin{aligned}|1,0\rangle = \frac{3}{\sqrt{10}}\left|\frac{3}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle - \frac{1}{\sqrt{20}}\left|\frac{3}{2},-\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\rangle - \\ -\frac{1}{\sqrt{20}}\left|\frac{3}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle + \frac{3}{\sqrt{10}}\left|\frac{3}{2},\frac{3}{2},\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle\end{aligned}} \tag{1.4}
$$

Por fim, usando $\hat{\mathcal{J}}_-$ neste estado, obtemos finalmente $|1,-1\rangle$:

$$
\hat{\mathcal{J}}_- |1,0\rangle = \hbar\sqrt{2}\,|1,-1\rangle
$$

Fazendo a mesma coisa, obtém-se que os coeficientes de Clebsch-Gordan:

$$C^{1,-1}_{1/2,-3/2} = \sqrt{\frac{3}{10}} \qquad \& \qquad C^{1,-1}_{-1/2,-1/2} = -\sqrt{\frac{2}{5}} \qquad \& \qquad C^{1,-1}_{-3/2,1/2} = \sqrt{\frac{3}{10}}$$

Resultando em:

$$\boxed{|1,-1\rangle = \sqrt{\frac{3}{20}}\left|\frac{3}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right\rangle - \sqrt{\frac{2}{5}}\left|\frac{3}{2},-\frac{1}{2},\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle + \sqrt{\frac{3}{20}}\left|\frac{3}{2},-\frac{3}{2},\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\rangle} \tag{1.5}$$

Exercício 4

Duas partículas se encontram em uma estado de momento angular orbital $|\ell, m, \ell_1, \ell_2\rangle = |2, 1, 2, 1\rangle$. Se realizarmos uma medida de $\hat{L}_{1z}$ neste estado, quais os valores possíveis de serem medidos e com qual probabilidade?

Solução:

Lembrando que:

$$\hat{L}_z |\ell, m\rangle = \hbar m |\ell, m\rangle \Rightarrow \hat{L}_{1z} |\ell_1, m_1\rangle = \hbar m_1 |\ell_1, m_1\rangle$$

Agora dado o estado de momento angular orbital $|\ell, m, \ell_1, \ell_2\rangle = |2, 1, 2, 1\rangle$, temos que:

$$-\ell_1 \leqslant m_1 \leqslant \ell_1 \Rightarrow -2 \leqslant m_1 \leqslant 2$$

Neste caso, m_2 é calculado de forma análoga, tal que:

$$-\ell_2 \leqslant m_2 \leqslant \ell_2 \Rightarrow -1 \leqslant m_2 \leqslant 1$$

Sabemos que:

$$|\ell, m\rangle = \sum_{m_1, m_2} C^{\ell,m}_{m_1,m_2} |\ell_1, m_1, \ell_2, m_2\rangle$$

E como queremos o estado com $\ell = 2$ e $m = 1$, precisamos calcular os coeficientes da expansão:

$$|2,1\rangle = C^{2,1}_{0,1} |2,0,1,1\rangle + C^{2,1}_{1,0} |2,1,1,0\rangle + C^{2,1}_{2,-1} |2,2,1,-1\rangle$$

Portanto é necessário calcular apenas:

$$C^{2,1}_{0,1} \qquad \& \qquad C^{2,1}_{1,0} \qquad \& \qquad C^{2,1}_{2,-1}$$

Para isso, podemos partir do pressuposto que $|3,3\rangle = |2,2,1,1\rangle$, pois $C^{2,1}_{2,1} = 1$. Aplicando $\hat{L}_-$ a este estado:

$$\begin{aligned} \hat{L}_- |3,3\rangle &= \hbar\sqrt{6}\,|3,2\rangle \\ (\hat{L}_{1-} + \hat{L}_{2-}) |2,2,1,1\rangle &= \\ \hbar\sqrt{2}\,|2,1,1,1\rangle + \hbar\sqrt{4}\,|2,2,1,0\rangle &= \\ \frac{1}{\sqrt{3}} |2,1,1,1\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} |2,2,1,0\rangle &= |3,2\rangle \end{aligned}$$

$$C^{2,1}_{1,1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \& \qquad C^{2,1}_{2,0} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Usando condições de ortogonalidade:

$$\begin{aligned}\langle 3,2|2,2\rangle &= 0\\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\langle 2,1,1,1| + \sqrt{\frac{2}{3}}\langle 2,2,1,0|\right)\left(C^{2,1}_{1,1}|2,1,1,1\rangle + C^{2,1}_{2,0}|2,2,1,0\rangle\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}C^{2,1}_{1,1} + \sqrt{\frac{2}{3}}C^{2,1}_{2,0}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle 2,2|2,2\rangle &= 1\\ &= \left(C^{2,1}_{1,1}\right)^2 + \left(C^{2,1}_{2,0}\right)^2\end{aligned}$$

Utilizando essas relações, concluímos que:

$$|2,2\rangle = -\frac{1}{\sqrt{3}}|2,1,1,1\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|2,2,1,0\rangle$$

Usando $\hat{L}_-$ neste estado:

$$\begin{aligned}\hat{L}_-|2,2\rangle &= \hbar\sqrt{4}\\ \hbar\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{6}|2,0,1,1\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{4}|2,1,1,0\rangle\right) + &\\ \hbar\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{2}|2,1,1,0\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{2}|2,2,1,-1\rangle\right) &=\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}|2,0,1,1\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}|2,1,1,0\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|2,2,1,-1\rangle &= |2,1\rangle\end{aligned}$$

Portanto, aplicando $\hat{L}_{1z}$ neste estado:

$$\begin{aligned}\hat{L}_{1z}|2,1\rangle &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{L}_{1z}|2,0,1,1\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}\hat{L}_{1z}|2,1,1,0\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{L}_{1z}|2,2,1,-1\rangle\\ &= 0|2,0,1,1\rangle + \frac{\hbar}{\sqrt{6}}|2,1,1,0\rangle + \frac{\hbar}{\sqrt{3}}2|2,2,1,-1\rangle\end{aligned}$$

Logo os valores possíveis de serem medidos são:

$$\boxed{0 \qquad \& \qquad \frac{\hbar}{\sqrt{6}} \qquad \& \qquad \frac{2\hbar}{\sqrt{3}}} \tag{1.6}$$

Cujas probabilidades são dadas pelos módulos quadrados dos coeficientes de Clebsch-Gordan que acompanham cada "ket", ou seja:

$$\boxed{\mathbb{P}(|2,0,1,1\rangle) = \frac{1}{2} \qquad \& \qquad \mathbb{P}(|2,1,1,0\rangle) = \frac{1}{6} \qquad \& \qquad \mathbb{P}(|2,2,1,-1\rangle = \frac{1}{3}} \tag{1.7}$$

Exercício 5

No caso da soma de três momentos angulares $\hat{j}_1$, $\hat{j}_2$ e $\hat{j}_3$, o conjunto de seis operadores na base com variáveis acopladas são $\hat{j}^2 = (\hat{j}_1 + \hat{j}_2 + \hat{j}_3)^2$, $\hat{j}_z = \hat{j}_{1z} + \hat{j}_{2z} + \hat{j}_{3z}$, $\hat{j}_1^2$, $\hat{j}_2^2$, $\hat{j}_3^2$ e um operador $\hat{A}^2$, definido como:

$$\hat{A}^2 = a_{12}(\hat{j}_1 + \hat{j}_2)^2 + a_{13}(\hat{j}_1 + \hat{j}_3)^2 + a_{23}(\hat{j}_2 + \hat{j}_3)^2$$

onde os coeficientes a_{ij} são arbitrários. Mostre que o operador $\hat{A}^2$ comuta com $\hat{j}^2$ e $\hat{j}_z$;.

Solução:

Para mostrar que $\hat{A}^2$ comuta com $\hat{j}^2$, temos que:

$$\begin{aligned}
[\hat{A}^2, \hat{j}^2] &= \hat{A}^2\hat{j}^2 - \hat{j}^2\hat{A}^2 \\
&= \left[a_{12}(\hat{j}_1 + \hat{j}_2)^2 + a_{13}(\hat{j}_1 + \hat{j}_3)^2 + a_{23}(\hat{j}_2 + \hat{j}_3)^2\right]\hat{j}^2 - \\
&\quad \hat{j}^2\left[a_{12}(\hat{j}_1 + \hat{j}_2)^2 + a_{13}(\hat{j}_1 + \hat{j}_3)^2 + a_{23}(\hat{j}_2 + \hat{j}_3)^2\right] \\
&= a_{12}(\hat{j}_1^2 + \hat{j}_2^2 + 2\hat{j}_1\hat{j}_2)\hat{j}^2 + a_{13}(\hat{j}_1^2 + \hat{j}_3^2 + 2\hat{j}_1\hat{j}_3)\hat{j}^2 + a_{23}(\hat{j}_2^2 + \hat{j}_3^2 + 2\hat{j}_2\hat{j}_3)\hat{j}^2 - \\
&\quad a_{12}\hat{j}^2(\hat{j}_1^2 + \hat{j}_2^2 + 2\hat{j}_1\hat{j}_2) - a_{13}\hat{j}^2(\hat{j}_1^2 + \hat{j}_3^2 + 2\hat{j}_1\hat{j}_3) - a_{23}\hat{j}^2(\hat{j}_2^2 + \hat{j}_3^2 + 2\hat{j}_2\hat{j}_3) \\
&= a_{12}\left([\hat{j}_1^2, \hat{j}^2] + [\hat{j}_2^2, \hat{j}^2] + 2[\hat{j}_1\hat{j}_2, \hat{j}^2]\right) + a_{13}\left([\hat{j}_1^2, \hat{j}^2] + [\hat{j}_3^2, \hat{j}^2] + 2[\hat{j}_1\hat{j}_3, \hat{j}^2]\right) + \\
&\quad a_{23}\left([\hat{j}_2^2, \hat{j}^2] + [\hat{j}_3^2, \hat{j}^2] + 2[\hat{j}_2\hat{j}_3, \hat{j}^2]\right)
\end{aligned}$$

Como vimos em aula que $[\hat{j}_i, \hat{j}^2] = 0$ para todo $\hat{j}_i$ que satisfaça a álgebra de momentos angulares, podemos dizer que $[\hat{j}_i^2, \hat{j}^2] = 0$, portanto temos apenas que expandir os operadores ”mistos”, ou seja:

$$\begin{aligned}
[\hat{A}^2, \hat{j}^2] &= 2a_{12}[\hat{j}_1\hat{j}_2, \hat{j}^2] + 2a_{13}[\hat{j}_1\hat{j}_2, \hat{j}^2] + 2a_{23}[\hat{j}_2\hat{j}_3, \hat{j}^2] \\
&= 2a_{12}\left([\hat{j}_1, \hat{j}^2]\hat{j}_2 + \hat{j}_1[\hat{j}_2, \hat{j}^2]\right) + 2a_{13}\left([\hat{j}_1, \hat{j}^2]\hat{j}_3 + \hat{j}_1[\hat{j}_3, \hat{j}^2]\right) + 2a_{23}\left([\hat{j}_2, \hat{j}^2]\hat{j}_3 + \hat{j}_2[\hat{j}_3, \hat{j}^2]\right)
\end{aligned}$$

E pelo menos argumento dado anteriormente, concluímos que:

$$\boxed{[\hat{A}^2, \hat{j}^2] = 0} \tag{1.8}$$

Agora para demonstrar a comutação entre $\hat{A}^2$ e $\hat{j}_z$, podemos usar a mesma linha de raciocínio e basicamente a mesma estrutura matemática, ou seja:

$$\begin{aligned}
[\hat{A}^2, \hat{j}_z] &= \hat{A}^2\hat{j}_z - \hat{j}_z\hat{A}^2 \\
&= \left[a_{12}(\hat{j}_1 + \hat{j}_2)^2 + a_{13}(\hat{j}_1 + \hat{j}_3)^2 + a_{23}(\hat{j}_2 + \hat{j}_3)^2\right]\hat{j}_z - \\
&\quad \hat{j}_z\left[a_{12}(\hat{j}_1 + \hat{j}_2)^2 + a_{13}(\hat{j}_1 + \hat{j}_3)^2 + a_{23}(\hat{j}_2 + \hat{j}_3)^2\right] \\
&= a_{12}(\hat{j}_1^2 + \hat{j}_2^2 + 2\hat{j}_1\hat{j}_2)\hat{j}_z + a_{13}(\hat{j}_1^2 + \hat{j}_3^2 + 2\hat{j}_1\hat{j}_3)\hat{j}_z + a_{23}(\hat{j}_2^2 + \hat{j}_3^2 + 2\hat{j}_2\hat{j}_3)\hat{j}_z - \\
&\quad a_{12}\hat{j}_z(\hat{j}_1^2 + \hat{j}_2^2 + 2\hat{j}_1\hat{j}_2) - a_{13}\hat{j}_z(\hat{j}_1^2 + \hat{j}_3^2 + 2\hat{j}_1\hat{j}_3) - a_{23}\hat{j}_z(\hat{j}_2^2 + \hat{j}_3^2 + 2\hat{j}_2\hat{j}_3) \\
&= a_{12}\left([\hat{j}_1^2, \hat{j}_z] + [\hat{j}_2^2, \hat{j}_z] + 2[\hat{j}_1\hat{j}_2, \hat{j}_z]\right) + a_{13}\left([\hat{j}_1^2, \hat{j}_z] + [\hat{j}_3^2, \hat{j}_z] + 2[\hat{j}_1\hat{j}_3, \hat{j}_z]\right) + \\
&\quad a_{23}\left([\hat{j}_2^2, \hat{j}_z] + [\hat{j}_3^2, \hat{j}_z] + 2[\hat{j}_2\hat{j}_3, \hat{j}_z]\right)
\end{aligned}$$

Sabemos que $[\hat{j}_z, \hat{j}_i] = [\hat{j}_z, \hat{j}_{ix} + \hat{j}_{iy} + \hat{j}_{iz}] = 0$, pois as componentes x e y são independentes de $\hat{j}_z$ e $\hat{j}_z = \hat{j}_{1z} + \hat{j}_{2z} + \hat{j}_{3z}$, tal que todas as componentes vão comutar, ou seja, expandindo as contas, vale que:

$$\boxed{[\hat{A}^2, \hat{j}_z] = 0} \tag{1.9}$$

Exercício 6

Quantos autoestados independentes de momento angular total de duas partículas existem, dados que a partícula 1 encontra-se em um autoestado com $\ell_1 = 3$ e a partícula 2 encontra-se em um autoestado com $\ell_2 = 6$? Deixe explícito como chegou ao resultado.

Solução:

De modo geral, podemos mostrar para uma soma arbitrárias de vetores de momento angular $\hat{\boldsymbol{L}}$:

$$\hat{\boldsymbol{L}} = \sum_{i=1}^{N} \hat{\boldsymbol{L}}_i$$

que definindo ℓ_N como sendo o maior valor de todos os ℓ's, vale que se:

$$\ell_N > \sum_{i=1}^{N-1} \ell_i \Rightarrow \ell_{\text{min}} = \ell_N - \sum_{i=1}^{N-1} \ell_i$$

Note então que sendo $\ell_1 = 3$ e $\ell_2 = 6$, essa propriedade é válida, ou seja, o menor valor possível de ℓ é:

$$\ell_{\text{min}} = 6 - 3 = 3$$

Agora o ℓ_{max} é simplesmente a soma de todos os ℓ_i, portanto:

$$\ell_{\text{max}} = 6 + 3 = 9$$

Segue que o momento angular total pertence ao conjunto de valores $\ell \in \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Para encontrar a quantidade de autoestados independentes precisamos determinar quantas projeções no eixo-z, m_ℓ, existem para cada ℓ, de modo que podemos determinar essa quantidade por:

$$\begin{aligned} N_{m_\ell} &= \sum_{\ell=3}^{9} (2\ell + 1) = (6+1) + (8+1) + (10+1) + (12+1) + (14+1) + (16+1) + (18+1) \\ &= 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 \\ &= 91 \end{aligned}$$

Portanto:

$$\boxed{\text{São possíveis 91 autoestados independentes}} \tag{1.10}$$

Exercício 7

Quais são os coeficientes de Clebsch-Gordan envolvidos na expansão do estado $|j, m, j_1, j_2\rangle = |3, 0, 2, 1\rangle$?

Solução:

Escrevemos os autoestados da base desacoplada em termos da base de acoplada como sendo:

$$|j, m, j_1, j_2\rangle = \sum_{m_1, m_2} C^{j,m}_{m_1,m_2} |j_1, m_1, j_2, m_2\rangle$$

Aplicando os valores fornecidos:

$$|3, 0, 2, 1\rangle = \sum_{m_1, m_2} C^{3,0}_{m_1,m_2} |2, m_1, 1, m_2\rangle$$

Para esse caso, $-2 \leqslant m_1 \leqslant 2$ e $-1 \leqslant m_2 \leqslant 1$, além de que para $m \neq m_1 + m_2$ temos coeficientes nulos. Sendo assim, os coeficientes não nulos, para $m = 0$ são:

$$C^{3,0}_{-1,1} \qquad \& \qquad C^{3,0}_{1,-1} \qquad \& \qquad C^{3,0}_{0,0}$$

No caso de $j_1 = 2$ e $j_2 = 1$, temos pelo desenvolvimento do exercício 4 que:

$$|3, 2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} |2, 1, 1, 1\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} |2, 2, 1, 0\rangle$$

Então aplicando $\hat{\mathcal{J}}_-$:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{J}}_- |3, 2\rangle &= \hbar\sqrt{10} |3, 1\rangle \\ \frac{\hbar}{\sqrt{3}}\sqrt{12} |2, 0, 1, 1\rangle + \hbar\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{2} |2, 1, 1, 0\rangle &= \\ + \frac{\hbar}{\sqrt{3}}\sqrt{4} |2, 1, 1, 0\rangle + \hbar\sqrt{\frac{2}{3}} |2, 2, 1, -1\rangle & \end{aligned}$$

Concluindo que:

$$|3, 1\rangle = \sqrt{\frac{2}{5}} |2, 0, 1, 1\rangle + \sqrt{\frac{8}{15}} |2, 1, 1, 0\rangle + \frac{1}{\sqrt{15}} |2, 2, 1, -1\rangle$$

Aplicando novamente $\hat{\mathcal{J}}_-$:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{J}}_- |3, 1\rangle &= \hbar\sqrt{12} |3, 0\rangle \\ \hbar\sqrt{\frac{2}{5}}\sqrt{6} |2, -1, 0, 1\rangle + \hbar\sqrt{\frac{8}{15}}\sqrt{6} |2, 0, 1, 0\rangle + \frac{\hbar}{\sqrt{15}}\sqrt{4} |2, 1, 1, -1\rangle &= \\ + \hbar\sqrt{\frac{2}{5}}\sqrt{2} |2, 0, 1, 0\rangle + \hbar\sqrt{\frac{8}{15}}\sqrt{2} |2, 1, 1, -1\rangle & \end{aligned}$$

Concluindo que:

$$|3, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} |2, 1, 1, -1\rangle + \sqrt{\frac{3}{5}} |2, 0, 1, 0\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}} |2, -1, 1, 1\rangle$$

Logo os coeficientes de Clebsch-Gordan na expansão de $|3, 0, 2, 1\rangle$ são:

$$\boxed{C^{3,0}_{-1,1} = \frac{1}{\sqrt{5}} = C_{1,-1} \qquad \& \qquad C^{3,0}_{0,0} = \sqrt{\frac{3}{5}}} \tag{1.11}$$

Exercício 8

Considere um sistema de duas partículas, uma com spin 1/2 e outra, spin 1. Construa os possíveis estados acoplados de spin dessas duas partículas em termos dos estados desacoplados de partículas individuais. Determine os valores totais de spin e projeção do spin no eixo-z para cada um desses estados.

Solução:

Sendo duas partículas, uma com spin $s_1 = 1/2$ e outra com $s_2 = 1$, temos

$$-\frac{1}{2} \leqslant m_{s1} \leqslant \frac{1}{2} \qquad \& \qquad -1 \leqslant m_{s2} \leqslant 1$$

Além disso, também podemos escrever

$$\left|\frac{1}{2} - 1\right| \leqslant |s| \leqslant \frac{1}{2} + 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \leqslant s \leqslant \frac{3}{2}$$

Usando que $-s \leqslant m_s \leqslant -s$, temos para $s = 3/2$, $m_s \in \{-3/2, -1/2, 1/2, 3/2\}$ e para $s = 1/2$, $m_s \in \{-1/2, 1/2\}$. Portanto, temos 6 possíveis estados na base acoplada:

$$\left|\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\rangle \qquad \& \qquad \left|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle \qquad \& \qquad \left|\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle \qquad \& \qquad \left|\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right\rangle$$

$$\left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle \qquad \& \qquad \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle$$

Já os estados na base desacoplada são escritos por:

$$\left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, -1\right\rangle \qquad \& \qquad \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, -1\right\rangle \qquad \& \qquad \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 1\right\rangle \qquad \& \qquad \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 1\right\rangle$$

$$\left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0\right\rangle \qquad \& \qquad \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0\right\rangle$$

Como podemos escrever

$$|s, m\rangle = \sum_{m_{s1}, m_{s2}} C^{s,m}_{m_{s1}, m_{s1}} |s_1, m_{s1}, s_2, m_{s2}\rangle$$

e considerando que se $m_{s1} + m_{s2} \neq m$ os coeficientes de Clebsch-Gordan são nulos, concluímos que:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\rangle &= C^{3/2,3/2}_{1/2,1} \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 1\right\rangle \\
\left|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle &= C^{3/2,1/2}_{-1/2,1} \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 1\right\rangle + C^{3/2,1/2}_{1/2,0} \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0\right\rangle \\
\left|\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle &= C^{3/2,-1/2}_{1/2,-1} \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, -1\right\rangle + C^{3/2,-1/2}_{-1/2,0} \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0\right\rangle \\
\left|\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right\rangle &= C^{3/2,-3/2}_{-1/2,-1} \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, -1\right\rangle \\
\left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle &= C^{1/2,1/2}_{-1/2,1} \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 1\right\rangle + C^{1/2,1/2}_{1/2,0} \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0\right\rangle \\
\left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle &= C^{1/2,-1/2}_{1/2,-1} \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, -1\right\rangle + C^{1/2,-1/2}_{-1/2,0} \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0\right\rangle
\end{aligned}$$

Sendo $C^{3/2,3/2}_{1/2,1} = C^{3/2,-3/2}_{-1/2,-1} = 1$, podemos aplicar $\hat{\mathcal{S}}_-$ no estado $\left|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right\rangle$ para escrever $|3/2,1/2\rangle$ e obter os coeficientes, ou seja:

$$\left|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right\rangle = \left|\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,1\right\rangle \tag{1.12}$$

$$\left|\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right\rangle = \left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1,-1\right\rangle \tag{1.13}$$

e também:

$$\hat{\mathcal{S}}_-\left|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right\rangle = \hbar\sqrt{3}\left|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\rangle$$

$$\hbar\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1,1\right\rangle + \hbar\sqrt{2}\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,0\right\rangle =$$

Logo:

$$\left|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1,1\right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,0\right\rangle \tag{1.14}$$

Aplicando novamente $\hat{\mathcal{S}}_-$, mas agora em $\left|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\rangle$,

$$\hat{\mathcal{S}}_-\left|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\rangle = \hbar\sqrt{4}\left|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle$$

$$\frac{\hbar}{\sqrt{3}}\sqrt{4}\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,-1\right\rangle + \hbar\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{4}\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1,0\right\rangle =$$

Concluindo

$$\left|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,-1\right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1,0\right\rangle \tag{1.15}$$

Agora usando condições de ortogonalidade afim de determinar $\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle$, podemos escrever:

$$\left\langle\frac{3}{2},\frac{1}{2}\middle|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle = 0$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}C^{1/2,1/2}_{-1/2,1} + \sqrt{\frac{2}{3}}C^{1/2,1/2}_{1/2,0}$$

E também

$$\left\langle\frac{1}{2},\frac{1}{2}\middle|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle = 1$$

$$= \left[C^{1/2,1/2}_{-1/2,1}\right]^2 + \left[C^{1/2,1/2}_{1/2,0}\right]^2$$

Usando essas duas informações, concluímos que:

$$\boxed{\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1,1\right\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}}\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,0\right\rangle} \tag{1.16}$$

Por fim, aplicando $\hat{S}_-$ neste estado, temos:

$$\hat{\mathcal{S}}_-\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle = \hbar\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle$$

$$-\frac{\hbar}{\sqrt{3}}\sqrt{1}\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1,0\right\rangle + \hbar\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{2}\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1,0\right\rangle - \frac{\hbar}{\sqrt{3}}\sqrt{2}\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,-1\right\rangle =$$

Concluindo que:

$$\boxed{\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1,0\right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,-1\right\rangle} \tag{1.17}$$

Exercício 9

Quais os possíveis valores de momento angular orbital ℓ para:

(a) Quatro elétrons no nível de p ($\ell = 1$)?

(b) Três elétrons no nível p e um elétron no nível f ($\ell = 3$)?

Solução:

(a) Para 4 elétrons no nível p ($\ell = 1$), temos essencialmente 4 vetores $|\ell_i, m_{\ell_i}\rangle$, onde todos estão em $\ell_i = 1$. O maior valor possível de momento angular pode ser calculado por:

$$\ell_{\text{máx}} = \sum_{i=1}^{4} \ell_i = 4$$

Já o menor, como estão todos com mesmo momento angular $\ell = 1$, temos que analisar:

$$\ell_4 \leqslant \sum_{i=1}^{3} \ell_i \Rightarrow 1 \leqslant 3 \qquad \checkmark$$

Portanto:

$$\ell_{\text{mín}} = 0$$

Concluindo que os possíveis valores de momento angular são:

$$\boxed{\ell_{\text{total}} \in \{0, 1, 2, 3, 4\}} \tag{1.18}$$

(b) Para 3 elétrons com $\ell = 1$ e 1 elétron com $\ell = 3$, temos que o maior valor possível é:

$$\ell_{\text{máx}} = \sum_{i}^{4} \ell_i = 1 + 1 + 1 + 3 = 6$$

Agora sendo $\ell_4 = 3$ e $\ell_j = 1$, para $j = 1, 2, 3$, temos que:

$$\ell_4 \leqslant \sum_{j=1}^{3} \ell_j \Rightarrow 3 \leqslant 3 \qquad \checkmark$$

Portanto $\ell_{\text{mín}} = 0$. Concluindo que:

$$\boxed{\ell_{\text{total}} \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}} \tag{1.19}$$

Exercício 10

Dois elétrons estão em um estado de momento angular orbital p ($\ell = 1$). Escreva todos os possíveis estados acoplados dessas duas partículas em termos dos estados desacoplados de partículas individuais. Para cada um deles, determine o momento angular total e o spin total do estado.

Solução:

Tendo 2 elétrons em um momento angular orbital p, temos $\ell_1 = 1$ e $\ell_2 = 1$, portanto $m_1, m_2 \in \{-1, 0, 1\}$. Além disso $\ell \in \{0, 1, 2\}$ e portanto existem 3 possíveis intervalos para m: $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $\{-1, 0, 1\}$ e $\{0\}$, ou seja, queremos determinar 9 estados possíveis. Como queremos os estados acoplados em termos dos desacoplados, temos:

$$|\ell_1, m_1, \ell_2, m_2\rangle = \sum_{j,m} C^{j,m}_{m_1,m_2} |j, m\rangle$$

Lembrando que $C^{2,2}_{1,1} = 1 = C^{2,-2}_{-1,-1}$, já podemos escrever 2 estados:

$$\boxed{|1, 1, 1, 1\rangle = |2, 2\rangle} \tag{1.20}$$

$$\boxed{|1, -1, 1, -1\rangle = |2, -2\rangle} \tag{1.21}$$

Aplicando $\hat{L}_-$ no estado $|2, 2\rangle$:

$$\begin{aligned} \hat{L}_- |2, 2\rangle &= \hbar\sqrt{2}\, |2, 1\rangle \\ \hbar\, |1, 0, 1, 1\rangle + \hbar\, |1, 1, 1, 0\rangle &\overset{!}{=} \end{aligned}$$

Concluindo que $C_{0,1}^{2,1} = \frac{1}{\sqrt{2}} = C_{1,0}^{2,1}$. Com isso temos $|2,1\rangle$ bem definido, logo podemos determinar $|1,1\rangle$ por ortogonalidade, ou seja:

$$\langle 2,1|1,1\rangle = 0$$
$$\overset{!}{=} C_{0,1}^{1,1} + C_{1,0}^{1,1}$$

$$\langle 1,1|1,1\rangle = 1$$
$$\overset{!}{=} \left[C_{0,1}^{1,1}\right]^2 + \left[C_{1,0}^{1,1}\right]^2$$

Concluindo que $C_{1,0}^{1,1} = \frac{1}{\sqrt{2}} = -C_{0,1}^{1,1}$. Com essas 4 constantes determinadas, podemos encontrar outros 2 estados acoplados em termos dos desacoplados:

$$\boxed{|1,1,1.0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|2,1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1,1\rangle} \tag{1.22}$$

$$\boxed{|1,0,1,1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|2,1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1,1\rangle} \tag{1.23}$$

Conhecendo $|2,1\rangle$ e $|1,1\rangle$, podemos aplicar $\hat{L}_-$ em ambos de forma sistemática (como feito nos exercícios anteriores), tal que obtemos 3 coeficientes associados a cada um:

$$C_{1,-1}^{2,0} = \frac{1}{\sqrt{6}} = C_{-1,1}^{2,0} \qquad \& \qquad C_{0,0}^{2,0} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$C_{1,-1}^{1,0} = \frac{1}{\sqrt{2}} = -C_{-1,1}^{1,0} \qquad \& \qquad C_{0,0}^{1,0} = 0$$

Precisamos agora determinar $|0,0\rangle$ para conseguir determinar mais 3 estados acoplados. Para isso, basta usarmos as relações de ortogonalidades $\langle 2,0|0,0\rangle = 0$, $\langle 1,0|0,0\rangle = 0$ e $\langle 0,0|0,0\rangle = 1$, tal que obtemos os seguintes coeficientes de Clebsch-Gordan:

$$C_{1,-1}^{0,0} = \frac{1}{\sqrt{3}} = C_{-1,1}^{0,0} \qquad \& \qquad C_{0,0}^{0,0} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Temos portanto os seguintes estados acoplados:

$$\boxed{|1,1,1,-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}|2,0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1,0\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|0,0\rangle} \tag{1.24}$$

$$\boxed{|1,0,1,0\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|2,0\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}}|0,0\rangle} \tag{1.25}$$

$$\boxed{|1,-1,1,1\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}|2,0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1,0\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|0,0\rangle} \tag{1.26}$$

Por fim, podemos usar o operador $\hat{L}_+$ em $|2,-2\rangle$ para determinar $|2,-1\rangle$ e depois usar as relações de ortogonalidade $\langle 2,-1|1,-1\rangle = 0$ e $\langle 1,-1|1,-1\rangle = 1$ para encontrar os coeficientes de Clebsch-Gordan faltantes:

$$C^{2,-1}_{0,-1} = C^{2,-1}_{-1,0} = C^{1,-1}_{0,-1} = -C^{1,-1}_{-1,0} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Concluindo que os últimos estados possíveis são:

$$\boxed{|1,0,1,-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|2,-1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1,-1\rangle} \quad (1.27)$$

$$\boxed{|1,-1,1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|2,-1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1,-1\rangle} \quad (1.28)$$

Por serem 2 elétrons, precisamos que o estado total $|\psi\rangle = |\text{spin}\rangle \otimes |\text{espaço}\rangle$ seja *antissimétrico*, de tal forma que é necessário analisar quais são os estados totais possíveis para cada situação. para elétrons, temos que $s_1 = s_2 = \frac{1}{2}$, logo, o spin total será dado por:

$$\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right| \leqslant s \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \leqslant s \leqslant 1$$

ou seja, s só pode assumir os valores 0 ou 1. Já m_s, temos que ele pode ser $-1, 0, 1$ para $s = 1$ e 0 para $s = 0$ (como visto em aula). Para $s = 0$, a parte de spin é antissimétrica, sendo assim, apenas estados espaciais *simétricos* podem se juntar a ele. De forma semelhante, para $s = 1$, temos estados de spin simétricos, portanto apenas estados espaciais *antissimétricos* podem se juntar a ele. Então precisamos determinar a simetria de cada estado espacial para determinar o spin total de cada um. Para tal, usamos o operador de troca $\hat{\mathcal{P}}$ que satisfaz:

$$\hat{\mathcal{P}}|\psi_{1,2}\rangle = |\psi_{2,1}\rangle \qquad \& \qquad \hat{\mathcal{P}}|\psi_{2,1}\rangle = |\psi_{1,2}\rangle$$

Exercício 11

A Hamiltoniana de um sistema de duas partículas com spin pode ser escrita como

$$\hat{\mathcal{H}} = A + \frac{B}{\hbar^2}\hat{\boldsymbol{S}}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{S}}_2 + \frac{C}{\hbar}(\hat{S}_{1z} + \hat{S}_{2z})$$

onde as constantes A, B e C são arbitrárias. Encontre os autovalores dessa hamiltoniana quando:

(a) As duas partículas não são idênticas e têm spin 1/2.

(b) Uma das partículas tem spin 1/2 e a outra, spin 1.

(c) O que acontece em (a) se as duas partículas forem idênticas?

Solução:

Sendo $\hat{\boldsymbol{S}} := \hat{\boldsymbol{S}}_\mathbf{1} + \hat{\boldsymbol{S}}_\mathbf{2}$, podemos escrever:

$$\hat{\boldsymbol{S}}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{S}}_2 = \frac{1}{2}\left(\hat{\boldsymbol{S}}^2 - \hat{\boldsymbol{S}}_1^2 - \hat{\boldsymbol{S}}_2^2\right) \qquad \& \qquad \hat{S}_z = \hat{S}_{1z} + \hat{S}_{2z}$$

Portanto podemos reescrever a hamiltoniana como sendo:

$$\hat{\mathcal{H}} = A + \frac{B}{2\hbar^2}\left(\hat{\boldsymbol{S}}^2 - \hat{\boldsymbol{S}}_1^2 - \hat{\boldsymbol{S}}_2^2\right) + \frac{C}{\hbar}\hat{S}_z$$

Os estados desacoplados de spin são escritos como sendo $|s, m_s, s_1, s_2\rangle$, de modo que o spin total s varia de 0 a 1 e m_s de -1 a 1, dependendo de s. Aplicando $\hat{\mathcal{H}}$ em $|s, m_s, s_1, s_2\rangle$, temos:

$$\hat{\mathcal{H}}\,|s, m_s, s_1, s_2\rangle = A\,|s, m_s, s_1, s_2\rangle + \frac{B}{2\hbar^2}\left(\hat{\boldsymbol{S}}^2 - \hat{\boldsymbol{S}}_1^2 - \hat{\boldsymbol{S}}_2^2\right)|s, m_s, s_1, s_2\rangle + \frac{C}{\hbar}\hat{S}_z\,|s, m_s, s_1, s_2\rangle$$

Usando as equações de autovalores:

$$\hat{\boldsymbol{S}}^2\,|s, m_s\rangle = \hbar^2 s(s+1)\,|s, m_s\rangle \qquad \& \qquad \hat{S}_z\,|s, m_s\rangle = \hbar m_s\,|s, m_s\rangle$$

$$\hat{\boldsymbol{S}}_1^2\,|s_1, m_{1s}\rangle = \hbar^2 s_1(s_1+1)\,|s_1, m_{1s}\rangle \qquad \& \qquad \hat{\boldsymbol{S}}_2^2\,|s_2, m_{2s}\rangle = \hbar^2 s_2(s_2+1)\,|s_2, m_{2s}\rangle$$

Obtemos uma equação geral para os autovalores de $\hat{\mathcal{H}}$:

$$E = A + \frac{B}{2}[s(s+1) - s_1(s_1+1) - s_2(s_2+1)] + Cm_s \tag{1.29}$$

(a) Para duas partículas distintas de spin $\frac{1}{2}$, temos que $s_1 = s_2 = \frac{1}{2}$. Sendo assim, $s \in \{0, 1\}$ e $m_s \in \{-1, 0, 1\}$ dependendo de s. Temos pela (1.29):

$$\boxed{s = 0,\ m_s = 0: \qquad E = A - \frac{3B}{4}} \tag{1.30}$$

$$\boxed{s = 1,\ m_s = -1: \qquad E = A + \frac{B}{4} - C} \tag{1.31}$$

$$\boxed{s = 1,\ m_s = 0: \qquad E = A + \frac{B}{4}} \tag{1.32}$$

$$\boxed{s = 1,\ m_s = 1: \qquad E = A + \frac{B}{4} + C} \tag{1.33}$$

(b) Para uma partícula com $s_1 = \frac{1}{2}$ e outra com $s_2 = 1$, temos que $s \in \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right\}$ e $m_s \in \left\{-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right\}$ dependendo de s. Usando (1.29):

$$\boxed{s = \frac{1}{2},\ m_s = -\frac{1}{2}: \qquad E = A - B - \frac{C}{2}} \tag{1.34}$$

$$s = \frac{1}{2},\ m_s = +\frac{1}{2}: \qquad E = A - B + \frac{C}{2} \tag{1.35}$$

$$s = \frac{3}{2},\ m_s = -\frac{3}{2}: \qquad E = A + \frac{B}{2} - \frac{3C}{2} \tag{1.36}$$

$$s = \frac{3}{2},\ m_s = -\frac{1}{2}: \qquad E = A + \frac{B}{2} - \frac{C}{2} \tag{1.37}$$

$$s = \frac{3}{2},\ m_s = +\frac{1}{2}: \qquad E = A + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} \tag{1.38}$$

$$s = \frac{3}{2},\ m_s = +\frac{3}{2}: \qquad E = A + \frac{B}{2} + \frac{3C}{2} \tag{1.39}$$

(c) Caso as partículas forem idênticas, o resultado não se altera, pois por construção a Hamiltoniana já distingue se as partículas são ou não simétricas e se respeitam o princípio de exclusão de Pauli para férmions, ou seja, sejam idênticas ou não, o resultado deve permanecer o mesmo.

Exercício 12

No caso do átomo neutro de deutério, devemos considerar, para obter o seu momento angular total, o spin do núcleo (neste caso, 1), o spin do elétron e o momento angular orbital. Chamando de $\hat{I}$ o operador para o spin do núcleo, $\hat{S}$, o operador para o spin do elétron e $\hat{L}$, o operador para o momento angular orbital, podemos definir o momento angular eletrônico $\hat{\mathcal{J}} = \hat{L} + \hat{S}$ e o momento angular total do átomo como $\hat{F} = \hat{\mathcal{J}} + \hat{I}$. Deste modo:

(a) Quais os possíveis valores para os números quânticos j e f caso o deutério se encontre no estado fundamental, nível $1s$?

(b) Quais os possíveis valores para o mesmos números quânticos do item (a) caso o deutério se encontre no primeiro estado excitado, nível $2p$?

Solução:

(a) Para determinar os valores possíveis de j, usamos o fato de que $\hat{\mathcal{J}}$ satisfaz a álgebra de soma de momentos angulares, de tal forma que sendo o estado fundamental descrito por, $\ell = 0$ e $s = \dfrac{1}{2}$, temos que o valor máximo que j assume é a soma destes e o valor mínimo será calculado analisando se:

$$j_N \leqslant \sum_{i=1}^{N} j_i$$

onde j_N é o maior valor dentre os números quânticos de momento angular. Nesse caso, $s > \ell$ e portanto a equação acima não é satisfeita, logo escrevemos o menor valor possível como sendo

$$j_{\text{mín}} = s - \ell = \frac{1}{2}$$

Segue que

$$\boxed{j \in \left\{\frac{1}{2}\right\}} \tag{1.40}$$

Para f, fazemos o mesmo raciocínio, portanto assumirei de forma direta que $j = \dfrac{1}{2}$ (no estado fundamental) e $i = 1$ logo:

$$j_{\text{máx}} = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} \qquad \& \qquad j_{\text{mín}} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Logo

$$\boxed{f \in \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right\}} \tag{1.41}$$

(b) No primeiro estado excitado, temos que $\ell = 1$, portanto $s < \ell$, implicando que a desigualdade é valida, o que conclui que o valor mínimo atribuído a j é 0. Já para o máximo, basta somar, o que nos dá $1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$. Logo os possíveis valores de j estão em:

$$\boxed{j \in \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right\}} \tag{1.42}$$

Note que o valor zero foi tirado, pois o "passo"entre os valores deve ser sempre 1, de tal forma que indo do maior possível para o menor, teríamos que ter $-\dfrac{1}{2}$ para o menor valor de j, o que não pode ser verdade e portanto não está incluso no conjunto de valores possíveis. Para f, a situação é a mesma, de modo que para $j = \dfrac{1}{2}$, temos $f_{\text{mín}} = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$ e $f_{\text{máx}} = \dfrac{3}{2}$ (como no estado fundamental). Mas para $j = \dfrac{3}{2}$, temos que o menor valor possível de f deve ser zero e o maior $\dfrac{3}{2} + 1 = \dfrac{5}{2}$, implicando em:

$$\boxed{f \in \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right\}} \tag{1.43}$$