



Institute of Physics

# Fluid Mechanics

*Ph.D. Frédérique Grassi*

L. R. XIMENES

2023

1. Distância entre moléculas .....	2	4. Entropia do gás ideal $S(p, V)$ ....	5
2. Fórmula da entropia $S(T)$ .....	3	5. Variação da entropia .....	8
3. Energia interna $U(S, V)$ .....	4	6. Compressão.....	8

## 1. Distância entre moléculas

(a) Faça uma estimativa da distância entre moléculas de água.

### Solução:

Supondo que nas condições normais de temperatura e pressão, a massa molar da água seja  $m = 18 \text{ g/mol}$ . Em 1 mol de água, temos  $6.022 \cdot 10^{23}$  moléculas e a densidade pode ser escrita por  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ , então dividindo a massa molar por essa densidade, temos o volume ocupado por um mol de água, ou seja:

$$V = \frac{18}{1000000} = 18 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3/\text{mol}$$

Portanto, se dividirmos o volume pelo número de Avogadro, temos o volume ocupado por cada molécula de água, ou seja:

$$V_{p/m} = \frac{18 \cdot 10^{-6}}{6.022 \cdot 10^{23}} = 2.989 \cdot 10^{-29} \text{ m}^3$$

Se tirarmos a raiz cúbica, temos uma média da distância entre as moléculas, ou seja:

$$d_m = \sqrt[3]{2.989 \cdot 10^{-26}} = 3.103 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

Portanto, a distância média entre as moléculas é de aproximadamente:

$$d_m = 3.103 \text{ Å}$$

(1.1)

(b) Faça o mesmo para o vapor de água.

### Solução:

No caso do vapor de água, temos que o volume ocupado por 1 mol é de:

$$V = 22.4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

Dividindo pelo número de Avogadro:

$$V_{p/m} = \frac{22.4 \cdot 10^{-3}}{6.022 \cdot 10^{23}} = 3.719 \cdot 10^{-26} \text{ m}^3$$

Tirando a raiz cúbica:

$$d_m = \sqrt[3]{3.719 \cdot 10^{-26}} = 3.338 \cdot 10^{-9} \text{ m}$$

Logo, a distância média entre moléculas de vapor de água é de aproximadamente:

$$d_m = 33.379 \text{ Å} \quad (1.2)$$

## 2. Fórmula da entropia $S(T)$

Obter a forma da entropia  $S(T)$  para um fluido incompressível de capacidade térmica  $C$  suposta constante entre  $T_0$  e  $T$ . Porque a entropia depende de uma variável só?

### Solução:

Para um fluido incompressível de capacidade térmica  $C$  constante, a entropia pode ser calculada usando a definição de entropia:

$$dS = \frac{dQ}{T} \quad (1.3)$$

Onde  $dQ$  é a quantidade de calor transferida para o sistema e  $T$  é a temperatura absoluta do sistema.

Considerando uma transformação quasi-estática de uma temperatura inicial  $T_0$  até uma temperatura final  $T$ , temos:

$$dQ = C dT \quad (1.4)$$

Substituindo na equação (1.4) em (1.3), temos:

$$dS = \frac{C}{T} dT$$

Integrando a equação acima de  $T_0$  até  $T$ , temos:

$$\Delta S = \int_{T_0}^T \frac{C}{T'} dT' = C \ln \left( \frac{T}{T_0} \right)$$

Portanto, a entropia  $S(T)$  de um fluido incompressível de capacidade térmica  $C$  constante entre  $T_0$  e  $T$  é dada por:

$$S(T) = S_0 + C \ln \left( \frac{T}{T_0} \right) \quad (1.5)$$

Onde  $S_0$  é a entropia do sistema na temperatura inicial  $T_0$ .

A entropia depende apenas da temperatura porque estamos considerando um fluido incompressível, ou seja, não há variação de volume. Nesse caso, a única variável termodinâmica que está mudando é a temperatura. Além disso, a capacidade térmica  $C$  é considerada constante, o que também implica que a entropia é uma função apenas da temperatura.

### 3. Energia interna $U(S, V)$

Sabemos que a energia interna de um gás ideal é função da temperatura apenas. Mas pelo que vimos na seção §1.5.3, ela também pode ser escrita como função de  $S$  e  $V$ . Derive uma expressão para  $S(T, V)$  e deduza  $U(S, V)$ .

#### Solução:

Utilizando a definição de entropia, presente na eq. (1.3), podemos reescrever o calor por:

$$dQ = dU + p dV$$

através da primeira lei da termodinâmica. Temos então:

$$dS = \frac{dU}{T} + \frac{p dV}{T}$$

Sabendo que para um gás ideal a energia interna pode ser escrita como sendo:

$$dU = nC_V dT \quad (1.6)$$

temos que:

$$dS = nC_V \frac{dT}{T} + \frac{p dV}{T}$$

A partir da equação de estado dos gases ideais:

$$\frac{p}{T} = \frac{nR}{V}$$

portanto:

$$\begin{aligned} dS = nC_V \frac{dT}{T} + nR \frac{dV}{V} &\Rightarrow \Delta S = nC_V \int_{T_0}^T \frac{dT'}{T'} + nR \int_{V_0}^V \frac{dV'}{V'} \\ &= nC_V \ln \left( \frac{T}{T_0} \right) + nR \ln \left( \frac{V}{V_0} \right) \end{aligned}$$

Concluindo que a entropia pode ser escrita por:

$$S(T, V) = S_o + nC_V \ln \left( \frac{T}{T_o} \right) + nR \ln \left( \frac{V}{V_o} \right) \quad (1.7)$$

Agora para encontrar  $U(S, V)$ , partimos da eq. (1.6), tal que ao integrarmos nos limites de temperatura  $T_o$  a  $T$ , temos:

$$U(T) = U(T_o) + nC_V(T - T_o)$$

Rearranjando a eq. (1.7) temos:

$$\begin{aligned} \frac{S - S_o}{nC_V} &= \ln \left( \frac{T}{T_o} \right) + \frac{nR}{nC_V} \ln \left( \frac{V}{V_o} \right) = \ln \left( \frac{T}{T_o} \right) + \frac{R}{C_V} \ln \left( \frac{V}{V_o} \right) \\ &= \ln \left( \frac{T}{T_o} \right) + \ln \left( \frac{V}{V_o} \right)^{\frac{R}{C_V}} \end{aligned}$$

Exponenciando ficamos com:

$$\exp \left( \frac{S - S_o}{nC_V} \right) = \frac{T}{T_o} \left( \frac{V}{V_o} \right)^{\frac{R}{C_V}} \Rightarrow \frac{T}{T_o} = \exp \left( \frac{S - S_o}{nC_V} \right) \left( \frac{V_o}{V} \right)^{\frac{R}{C_V}}$$

Se supormos que  $U(T_o) \equiv U_o = nC_V T_o$ , acabamos com  $U(T) \equiv U = nC_V T$ , portanto:

$$U = nC_V \left[ T_o \exp \left( \frac{S - S_o}{nC_V} \right) \left( \frac{V_o}{V} \right)^{\frac{R}{C_V}} \right]$$

Logo:

$$U(S, T) = U_o \left( \frac{V_o}{V} \right)^{\frac{R}{C_V}} \exp \left( \frac{S - S_o}{nC_V} \right) \quad (1.8)$$

## 4. Entropia do gás ideal $S(p, V)$

(a) Calcule  $S(p, V)$  para um gás ideal. Se o sistema foi submetido a um processo adiabático reversível, verifique que a entropia não muda.

### Solução:

Partindo novamente da definição de entropia, eq. (1.3), podemos usar a primeira lei da termodinâmica para escrever:

$$dS = \frac{dU}{T} + \frac{p dV}{T}$$

Por ser um gás ideal, usamos novamente a eq. (1.6) juntamente com a equação de estado dos gases ideais, para obter:

$$dS = nC_V \frac{dT}{T} + nR \frac{dV}{V}$$

Ainda na equação de estado dos gases ideais, temos:

$$pV = nRT \Rightarrow p dV + V dp = nR dT$$

tal que podemos substituir o  $dT$  na equação:

$$\begin{aligned} dS &= \frac{nC_V}{nR} \left( \frac{p dV + V dp}{T} \right) + nR \frac{dV}{V} \\ &= \frac{nC_V}{nR} \left( \frac{p dV}{T} + \frac{V dp}{T} \right) + nR \frac{dV}{V} \end{aligned}$$

E mais uma vez com a equação de estado dos gases ideais:

$$\frac{p}{T} = \frac{nR}{V} \quad \& \quad \frac{V}{T} = \frac{nR}{p}$$

Resultando então em:

$$\begin{aligned} dS &= nC_V \left( \frac{dV}{V} + \frac{dp}{p} \right) + nR \frac{dV}{V} \\ &= n(C_V + R) \frac{dV}{V} + nC_V \frac{dp}{p} \\ &= nC_p \frac{dV}{V} + nC_V \frac{dp}{p} \\ \frac{dS}{nC_V} &= \gamma \frac{dV}{V} + \frac{dp}{p} \\ &= \gamma d \ln(V) + d \ln(p) \\ &= d \ln(V)^\gamma + d \ln(p) \\ &= d \ln(pV^\gamma) \\ dS &= nC_V d \ln(pV^\gamma) \end{aligned}$$

Integrando nos limites de volume e pressão, chegamos em:

$$\Delta S = nC_V \ln \left( \frac{pV^\gamma}{p_o V_o^\gamma} \right)$$

Resultando portanto em:

$$S(p, V) = S_o + nC_V \ln \left( \frac{pV^\gamma}{p_o V_o^\gamma} \right) \quad (1.9)$$

Caso o processo seja adiabático e reversível, temos que  $pV^\gamma$  é constante, zerando o logaritmo, pois  $p = p_o$  e  $V = V_o$ , resultando em  $\ln(1) = 0$ , portanto:

$$S(p, V) = S_o \quad (1.10)$$

ou seja, a entropia do sistema não varia.

(b) Obter  $p(S, V)$ . Verificar usando a forma de  $U(S, V)$  do exercício anterior, que  $p = -\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S$ .

### Solução:

Utilizando a eq. (1.9), podemos rearranjá-la para obter  $p(S, V)$ , ou seja:

$$\begin{aligned} S - S_o &= nC_V \ln \left( \frac{pV^\gamma}{p_o V_o^\gamma} \right) \\ \frac{S - S_o}{nC_V} &= \ln \left( \frac{pV^\gamma}{p_o V_o^\gamma} \right) \\ \exp \left( \frac{S - S_o}{nC_V} \right) &= \frac{p}{p_o} \left( \frac{V}{V_o} \right)^\gamma \\ p_o \left( \frac{V_o}{V} \right)^\gamma \exp \left( \frac{S - S_o}{nC_V} \right) &= p \end{aligned}$$

Resultando portanto em:

$$p(S, V) = p_o \left( \frac{V_o}{V} \right)^\gamma \exp \left( \frac{S - S_o}{nC_V} \right) \quad (1.11)$$

Partindo agora da eq. (1.8), podemos derivá-la em relação ao volume e manter a entropia constante, de modo que:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial U}{\partial V} \right|_S &= U_o \exp \left( \frac{S - S_o}{nC_V} \right) \frac{\partial}{\partial V} \left[ \left( \frac{V_o}{V} \right)^{\frac{R}{C_V}} \right] \\ &= -U_o \exp \left( \frac{S - S_o}{nC_V} \right) \frac{R}{C_V} V_o^{\frac{R}{C_V}} \frac{1}{V^{\frac{C_V+R}{C_V}}} \\ &= -U_o \exp \left( \frac{S - S_o}{nC_V} \right) \frac{R}{C_V V_o} \left( \frac{V_o}{V} \right)^\gamma \\ &= -nC_V T_o \exp \left( \frac{S - S_o}{nC_V} \right) \frac{R}{C_V V_o} \left( \frac{V_o}{V} \right)^\gamma \\ &= -nR \frac{T_o}{V_o} \exp \left( \frac{S - S_o}{nC_V} \right) \left( \frac{V_o}{V} \right)^\gamma \end{aligned}$$

Usando a equação de estado dos gases ideais:

$$p_o V_o = nRT_o \Rightarrow \frac{T_o}{V_o} = \frac{p_o}{nR}$$

Portanto:

$$\left. \frac{\partial U}{\partial V} \right|_S = -p_o \left( \frac{V_o}{V} \right)^\gamma \exp \left( \frac{S - S_o}{nC_V} \right)$$

Concluindo que:

$$p(S, V) = -\left. \frac{\partial U}{\partial V} \right|_S \quad (1.12)$$

## 5. Variação da entropia

Um mol de gás diatômico nas condições padrões de temperatura e pressão, dobra de volume a pressão constante e em seguida se esfria até a pressão atingir 0.75 atm a volume constante. Qual é a variação de entropia?

### Solução:

Para a primeira parte do processo, podemos usar a eq. (1.9) usando  $\gamma = \frac{7}{5}$ :

$$\begin{aligned}\Delta S_1 &= nC_V \ln \left( \frac{pV_o^{\frac{7}{5}}}{p_oV_o^{\frac{7}{5}}} \right) \\ &= nC_V \ln \left[ \frac{p_o(2V_o)^{\frac{7}{5}}}{p_oV_o^{\frac{7}{5}}} \right] \\ &= nC_V \ln \left( 2^{\frac{7}{5}} \right)\end{aligned}$$

E para o outro processo:

$$\begin{aligned}\Delta S_2 &= nC_V \ln \left( \frac{pV_o^{\frac{7}{5}}}{p_oV_o^{\frac{7}{5}}} \right) \\ &= nC_V \ln \left( \frac{(0.75p_o)V_o^{\frac{7}{5}}}{p_oV_o^{\frac{7}{5}}} \right) \\ &= nC_V \ln(0.75)\end{aligned}$$

Somando os dois processos, temos a variação de entropia total:

$$\Delta S_{\text{tot}} = nC_V \left[ \ln \left( 2^{\frac{7}{5}} \right) + \ln(0.75) \right] = nC_V \ln \left( 2^{\frac{7}{5}} * 0.75 \right)$$

Para determinar  $nC_V$ , temos que isso é igual  $\frac{5}{2}nR$ , mas como estamos tratando de 1 mol,  $n = 1$  e portanto:

$$\Delta S_{\text{tot}} = \frac{5}{2}R \ln \left( 2^{\frac{7}{5}} * 0.75 \right) \approx 14.1912 \text{ J/K} \quad (1.13)$$

## 6. Compressão

Qual é a temperatura de ar originalmente a 293 K após ser comprimido rapidamente até 1/25 do seu volume original?



### Solução:

Dado que o processo está ocorrendo rapidamente, podemos supô-lo como adiabático, ou seja, não ocorre troca de calor, e portanto  $pV^\gamma$  é constante. Então utilizando a equação de estado dos gases ideais (assumindo que podemos aproximar o ar como um):

$$pV = nRT \Rightarrow p = \frac{nRT}{V} \Rightarrow pV^\gamma = \frac{nRT}{V} V^\gamma = nRTV^{\gamma-1}$$

Sendo o ar um gás diatômico,  $\gamma = \frac{7}{5}$  e portanto  $\gamma - 1 = \frac{2}{5}$ , ou seja:

$$\begin{aligned} pV^{\frac{7}{5}} &= nRT_f \left( \frac{1}{25} V \right)^{\frac{2}{5}} \\ nRT_i V^{\frac{2}{5}} &= nRT_f \left( \frac{1}{25} V \right)^{\frac{2}{5}} \\ 293 &= T_f \left( \frac{1}{25} \right)^{\frac{2}{5}} \end{aligned}$$

Concluindo que:

$$T_f = 1061.802 \text{ K}$$

(1.14)