Institute of Physics

# Fluid Mechanics

*Ph.D. Frédérique Grassi*

L. R. Ximenes

2023

LISTA N° 2

# 1. Profundidade de um rio

Dois riachos se juntam para formar um rio. Um dos riachos tem largura de 8.2 m, profundidade de 3.4 m e correnteza de velocidade 2.3 m/s. O outro riacho tem largura de 6.8 m, profundidade de 3.2 m e correnteza de velocidade 2.6 m/s. A largura do rio é 10.5 m e a velocidade da correnteza é 2.9 m/s. Qual é sua profundidade?

**Solução:**

Usando o princípio da continuidade, temos que a vazão na parte mais estreita do rio é igual à vazão na junção dos dois riachos. Sendo assim, podemos escrever:

$$A_1 v_1 + A_2 v_2 = Av$$

em que $A_1$ e $A_2$ são as seções transversais dos riachos, $v_1$ e $v_2$ as velocidades das correntes de cada riacho e $A$ e $v$ a seção transversal e a velocidade da corrente no rio. Supondo que os riachos e o rio resultante podem ser aproximados como sendo paralelepípedos, temos que aplicando os valores dados, temos que:

$$\begin{aligned}(8.2 * 3.4) * 2.3 + (6.8 * 3.2) * 2.6 &= (10.5 * h) * 2.9 \\ 27.88 * 2.3 + 21.76 * 2.6 &= 30.45 * h \\ 64.124 + 56.576 &= 30.45 * h \\ \frac{120.7}{30.45} &= h\end{aligned}$$

Portanto:

$$\boxed{h \approx 3.96 \text{ m}} \tag{1.1}$$

## 2. Desenvolvendo $(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{v}$ & $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v})$

(a) Escreva explicitamente a expressão de $(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v})$ para $\boldsymbol{v}=(v_x,v_y,v_z)$. São iguais?

**Solução:**

Começando pelo desenvolvimento de $(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})$:

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}) &= \begin{bmatrix} v_x & v_y & v_z \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\partial_x\\ \partial_y\\ \partial_z\end{bmatrix}\\
&= v_x\partial_x + v_y\partial_y + v_z\partial_z
\end{aligned}
$$

Aplicando esse operador ao vetor $\boldsymbol{v}$:

$$(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{v} = v_x\partial_x\boldsymbol{v} + v_y\partial_y\boldsymbol{v} + v_z\partial_z\boldsymbol{v}$$

Como $v_x$, $v_y$ e $v_z$ podem depender de qualquer uma das variáveis, como por exemplo o vetor $\boldsymbol{v}=(xy-zx, zy-xz, yx-zy)$, não podemos impor nenhuma condição específica das derivadas, logo:

$$\boxed{(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{v} = v_x\partial_x\boldsymbol{v} + v_y\partial_y\boldsymbol{v} + v_z\partial_z\boldsymbol{v}} \tag{1.2}$$

Agora desenvolvendo $(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v})$:

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}) &= \begin{bmatrix} \partial_x & \partial_y & \partial_z \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}v_x\\ v_y\\ v_z\end{bmatrix}\\
&= \partial_x v_x + \partial_y v_y + \partial_z v_z
\end{aligned}
$$

Nesse caso, se aplicarmos $\boldsymbol{v}$ ao lado direito, não temos mais um operador sendo aplicado a ele, mas sim uma constante multiplicando o vetor, de modo que a forma final acaba sendo:

$$\boxed{(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{v} = (\partial_x v_x + \partial_y v_y + \partial_z v_z)\boldsymbol{v}} \tag{1.3}$$

Nota-se portanto que as formas são diferentes, tal que um deles acaba se tornando um operador sendo aplicado a um vetor e o outro uma simples constante multiplicada por um vetor. Claro que existem resultados mais aprofundados quando aplicamos essas quantidades a vetores específicos, mas no caso geral podemos impor apenas esses significados.

(b) Mesma pergunta para $(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})f$ e $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{\nabla}f)$ com $f\equiv f(x,t,z)$

**Solução:**

Expandindo a primeira forma, temos:

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})f &= (v_x\partial_x + v_y\partial_y + v_z\partial_z)f\\
&= v_x\partial_x f + v_y\partial_y f + v_z\partial_z f
\end{aligned}
$$

Agora para segunda forma, temos:

$$\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{\nabla} f) = \begin{bmatrix} v_x & v_y & v_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \\ \partial_z f \end{bmatrix}$$
$$= v_x\partial_x f + v_y\partial_y f + v_z\partial_z f$$

De modo que podemos concluir:

$$\boxed{(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})f = \boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{\nabla} f)} \tag{1.4}$$

# 3. Um problema de escoamento

Consideremos um fluido com velocidade de escoamento $\boldsymbol{v} = (xt, -y, 0)$ e supomos o tempo inicial $t_o = 0$.

---

(a) Calcular a trajetória e aceleração de um elemento de fluido na descrição Lagrangiana.

**Solução:**

Na descrição Lagrangiana, temos as relações:

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = xt \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -y \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = 0 \end{cases}$$

Resolvendo primeiro em relação à $x$:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = xt \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}x}{x} = t\,\mathrm{d}t \Rightarrow \int_{x_o}^{x}\frac{\mathrm{d}x'}{x'} = \int_{t_o}^{t} t'\,\mathrm{d}t' \Rightarrow \ln\left(\frac{x}{x_o}\right) = \frac{t^2}{2} \Rightarrow x = x_o e^{t^2/2}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -y \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\,\mathrm{d}t \Rightarrow \int_{y_o}^{y}\frac{\mathrm{d}y'}{y'} = -\int_{t_o}^{t}\mathrm{d}t' \Rightarrow \ln\left(\frac{y}{y_o}\right) = -t \Rightarrow y = y_o e^{-t}$$

Portanto, derivando cada variável duas vezes no tempo, temos cada componente da aceleração, ou seja:

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = (t^2+1)x_o e^{t^2/2} = x(t^2+1) \qquad \& \qquad \frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}t^3} = y_o e^{-t} = y$$

Logo a trajetória e a aceleração são:

$$\boxed{\boldsymbol{r} = (x_o e^{t^2/2},\ y_o e^{-t},\ 0)} \tag{1.5}$$

$$\boxed{\ddot{\boldsymbol{r}} = (x(t^2+1),\ y,\ 0)} \tag{1.6}$$

(b) Calcular a aceleração de um elemento de fluido na descrição Euleriana.

**Solução:**

Para calcular a aceleração na descrição Euleriana, temos que calcular a derivada material de cada componente da velocidade, ou seja:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial v_x}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})v_x \\ &= \frac{\partial}{\partial t}(xt) + \left[(xt)\frac{\partial}{\partial x} + (-y)\frac{\partial}{\partial y}\right](xt) \\ &= x + (xt)t + (-y)\frac{\partial}{\partial y}(xt) \\ &= x + xt^2 \\ &= x(t^2+1)\end{aligned}$$

E para $v_y$:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial v_y}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})v_y \\ &= \frac{\partial}{\partial t}(-y) + \left[(xt)\frac{\partial}{\partial x} + (-y)\frac{\partial}{\partial y}\right](-y) \\ &= 0 + (xt)\frac{\partial}{\partial x} + (-y)(-1) \\ &= y\end{aligned}$$

Logo a aceleração é:

$$\boxed{\ddot{\boldsymbol{r}} = (x(t^2+1),\ y,\ 0)} \tag{1.7}$$

Como esperado do item (a).

# 4. Outro problema de escoamento

Um escoamento tem velocidade $\boldsymbol{v} = \sqrt{2gy}\boldsymbol{e}_y$. Calcular a aceleração de um elemento de fluido na descrição de Lagrange e na de Euler. Que tipo de movimento está sendo descrito?

**Solução:**

Na descrição de Lagrange, temos que:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \sqrt{2gy} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sqrt{2gy}\right) = \sqrt{2g}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\sqrt{y}) = \frac{\sqrt{2g}}{2\sqrt{y}}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \sqrt{2g}\frac{\sqrt{2gy}}{2\sqrt{y}}$$

Segue portanto que a aceleração é dada por:

$$\boxed{\ddot{\boldsymbol{r}} = (0, g, 0)} \tag{1.8}$$

Agora na descrição de Euler:

$$\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial v_y}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})v_y = 0 + \left(\sqrt{2gy}\frac{\partial}{\partial y}\right)\sqrt{2gy} = \frac{\sqrt{2gy}}{2\sqrt{y}}\sqrt{2g} = 0$$

Seguindo a mesma solução da descrição de Lagrange:

$$\boxed{\ddot{\boldsymbol{r}} = (0, g, 0)} \tag{1.9}$$

Vemos que como $g$ é uma constante, de modo que o movimento descrito pelo escoamento é possui aceleração constante apenas no sentido do versor $\boldsymbol{e}_y$.

# 5. Escoamento radial

Repetir o exercício anterior com $\boldsymbol{v} = R\omega\boldsymbol{e}_\phi$, com $R$ e $\omega = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}$ constantes e $(r, \phi)$ coordenadas polares.

**Solução:**

Na descrição de Lagrange:

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = R\omega\boldsymbol{e}_\phi \Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = R\omega\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\phi}{\mathrm{d}t}$$

Levando em conta que $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\phi}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \boldsymbol{e}_\phi}{\partial\phi}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}$ e que $\frac{\partial\boldsymbol{e}_\phi}{\partial\phi} = -\boldsymbol{e}_r$, concluímos que:

$$\boxed{\ddot{\boldsymbol{r}} = -R\omega^2\boldsymbol{e}_r} \tag{1.10}$$

E na descrição de Lagrange:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{v} = R\omega\underbrace{\frac{\partial\boldsymbol{e}_\phi}{\partial t}}_{=0} + \left(\frac{R\omega}{R}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)(R\omega\boldsymbol{e}_\phi) = R\omega^2\frac{\partial\boldsymbol{e}_\phi}{\partial\phi}$$

Concluindo que:

$$\boxed{\ddot{\boldsymbol{r}} = -R\omega^2\boldsymbol{e}_r} \tag{1.11}$$

# 6. Trajetória de um fluido

(Com computador) Um fluido tem movimento unidimensional com $v_x = -x$. Considerar um elemento de fluido em $x_o = 1$ m em $t_o = 0$.

(a) Calcular analiticamente a trajetória deste elemento de fluido.

**Solução:**

Usando a descrição de Lagrange, podemos escrever:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -x \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}x}{x} = -\,\mathrm{d}t \Rightarrow \int_{x_o}^{x} \frac{\mathrm{d}x'}{x'} = -\int_{t_o}^{t} \mathrm{d}t' \Rightarrow \ln\left(\frac{x}{x_o}\right) = -(t - t_o) \Rightarrow \ln(x) = -t$$

Segue que a trajetória do elemento é dada pela forma:

$$\boxed{\boldsymbol{r} = (e^{-t},\ 0,\ 0)} \tag{1.12}$$

(b) Calcular numericamente a trajetória deste elemento de fluido e comparar com o item (a).

**Solução:**

Com o seguinte código, podemos mostrar que a solução numérica é basicamente idêntica ao resultado analítico:

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

# Definir a equação diferencial dx/dt = -x
def f(x):
    return -x

fig, ax = plt.subplots(figsize=(10, 7))

# Definir os valores iniciais
x0 = 1  # Valor inicial de x
t0 = 0  # Valor inicial de t

# Definir o tamanho do passo
dt = 0.01

# Definir o número de passos
n = 1000

# Inicializar as listas de x e t
x = [x0]
t = [t0]

# Iterar o método de Euler
for i in range(n):
    x_new = x[-1] + f(x[-1]) * dt
    x.append(x_new)
    t_new = t[-1] + dt
    t.append(t_new)
```

```
# Calcular a função exponencial
t_exp = np.linspace(0, n*dt, 1000)
x_exp = np.exp(-t_exp)

# Plotar o resultado
plt.plot(t, x, label='Solução numérica')
plt.plot(t_exp, x_exp, label='Função exponencial')
plt.xlabel('t')
plt.ylabel('x')
plt.legend()
plt.show()
```

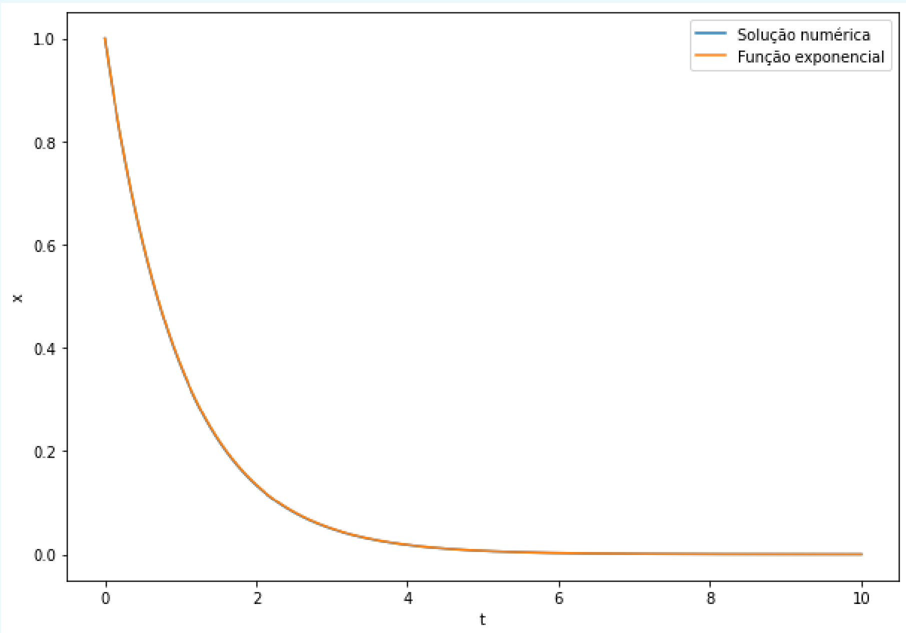


Figura 1.1: Plot da função exponencial analítica e a função gerada pelo método numérico. Podemos ver que basicamente não é possível ver diferença entre as funções.

# 7. fluido carregado

No caso de um fluido composto de partículas com carga elétrica, derivar a equação de continuidade adicional.

**Solução:**

Para demonstrar a equação de continuidade de um fluido carregado, podemos aplicar o princípio da conservação de carga elétrica em um volume arbitrário $V$. A carga elétrica total $q$

do fluido contido no volume $V$ pode ser expressa por:

$$q = \int_V \rho_e \, \mathrm{d}V$$

em que $\rho_e$ é a densidade de carga elétrica em um ponto $\boldsymbol{r}$ qualquer do fluido dentro do volume. Assumindo que não há nenhuma fonte, a variação temporal da carga do fluido é dada pela taxa de fluxo de carga através da superfície do volume fechado, ou seja:

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = -\oint_S (\rho_e \boldsymbol{v}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

tal que $(\rho_e \boldsymbol{v})$ é o fluxo de carga elétrica do fluido através da superfície de $V$. O sinal negativo é por convenção, tendo em vista que uma carga positiva é considerada como uma carga que "*entra*" no volume. Usando o Teorema da divergência, temos:

$$\oint_S (\rho_e \boldsymbol{v}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_V \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho_e \boldsymbol{v}) \, \mathrm{d}V$$

Substituindo essa forma e usando o princípio de conservação de carga, temos:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_V \rho_e \, \mathrm{d}V\right) = -\int_V \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho_e \boldsymbol{v}) \, \mathrm{d}V$$

Considerando que a carga no interior do volume está distribuída de forma homogênea e isotrópica, temos que a derivada material é igual à derivada parcial, e portanto:

$$\int_V \frac{\partial \rho_e}{\partial t} \, \mathrm{d}V = -\int_V \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho_e \boldsymbol{v}) \, \mathrm{d}V \Rightarrow \int_V \left[\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho_e \boldsymbol{v})\right] \mathrm{d}V = 0$$

Concluímos portanto que a equação da continuidade adicional é dada por:

$$\boxed{\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho_e \boldsymbol{v}) = 0} \tag{1.13}$$

# 8. Expansão de $(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{A}$

A igualdade $(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}) \times \boldsymbol{A} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{A}^2$ é muito usada em mecânica dos fluidos (ver por exemplo §2.3.2). Derivá-la em coordenadas cartesianas.

**Solução:**

Utilizarei notação covariante/contravariante pra dar menos trabalho. Assumirei também a notação de Einstein. Resolverei dessa forma, pois já lidei com problemas parecidos no curso de GR e acho mais interessante resolver dessa forma.

Para derivar a igualdade em coordenadas cartesianas, começamos com a definição do produto escalar na notação covariante:

$$(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\nabla}) = A_j\frac{\partial}{\partial x_j} \Rightarrow (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{A} = A_j\frac{\partial A_k}{\partial x_j}e_k \tag{1.14}$$

onde $A_i$ é a $i-$ésima componente do vetor $\boldsymbol{A}$, de modo que $i = 1,2,3 \equiv x,y,z$. Da mesma forma, o produto vetorial com nabla nesta notação é dado por:

$$(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})_i = \epsilon_{ijk}\frac{\partial A_k}{\partial x_j}$$

em que $\epsilon_{ijk}$ são os símbolos de Levi-Civita. Podemos então escrever:

$$(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})\times\boldsymbol{A} = \epsilon_{ijk}\frac{\partial A_k}{\partial x_j}A_\ell\epsilon^{\ell im}e_m$$

tal que $e_m$ são os vetores unitários na direção $m = 1,2,3 \equiv x,y,z$. Uma das identidades fundamentais dos símbolos de Levi-Civita é:

$$\epsilon_{ijk}\epsilon^{i\ell m} = \delta_j^\ell\delta_k^m - \delta_j^m\delta_k^\ell$$

Portanto a equação se transforma em:

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})\times\boldsymbol{A} &= (\delta_j^\ell\delta_k^m - \delta_j^m\delta_k^\ell)\frac{\partial A_k}{\partial x_j}A_\ell e_m\\ &= \frac{\partial A_k}{\partial x_j}\left(A_je_k - A_ke_j\right)\end{aligned}$$

Por fim, calculamos o último termo por:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{A}^2 &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_kA^k\right)e_j\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_k}{\partial x_j}A^ke_j + A_k\frac{\partial A^k}{\partial x_j}e_j\right)\end{aligned}$$

Em coordenadas cartesianas, elementos com índices covariantes e contravariantes são idênticos, de modo que podemos subir e descer índices sem muita preocupação, portanto:

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{A}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_k}{\partial x_j}A_ke_j + A_k\frac{\partial A_k}{\partial x_j}e_j\right) = \frac{\partial A_k}{\partial x_j}A_ke_j$$

Segue que:

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})\times\boldsymbol{A} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{A}^2 &= \frac{\partial A_k}{\partial x_j}A_je_k - A_ke_j) + \frac{\partial A_k}{\partial x_j}A_ke_j\\ &= \frac{\partial A_k}{\partial x_j}\\ &= \frac{\partial A_k}{\partial x_j}A_je_k\end{aligned}$$

Que comparando com a eq. (1.14), concluímos que:

$$\boxed{(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})\times\boldsymbol{A} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{A}^2} \tag{1.15}$$

# 9. Conservação da energia

(a) Escrever a equação de conservação de energia para um volume $V$ em movimento na ausência de forças externas.

**Solução:**

Ao considerar um fluido perfeito na ausência de forças externas, podemos dizer que a densidade de entropia de qualquer quantidade infinitesimal do fluido é constante, de modo que:

$$\mathrm{d}U = T\,\mathrm{d}S - p\,\mathrm{d}V \Rightarrow \frac{\mathrm{d}U}{m} = T\frac{\mathrm{d}S}{m} - p\frac{\mathrm{d}V}{m} \Rightarrow \mathrm{d}\varepsilon = T\,\mathrm{d}s - p\,\mathrm{d}V_e$$

onde $V_e$ é o volume específico, dado por $\frac{1}{\rho}$. Sendo $s$ constante, a variação é nula e portanto:

$$\mathrm{d}\varepsilon = -p\,\mathrm{d}V_e$$

Dada a definição do volume específico, podemos escrever que:

$$\mathrm{d}V_e = \frac{\partial V_e}{\partial \rho}\,\mathrm{d}\rho = -\frac{1}{\rho^2}\,\mathrm{d}\rho$$

o que implica em:

$$\mathrm{d}\varepsilon = \frac{p}{\rho^2}\,\mathrm{d}\rho \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t} = \frac{p}{\rho^2}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}$$

Utilizando a equação da continuidade, podemos escrever:

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = -\boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\boldsymbol{v}) = -\rho\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}$$

Portanto a equação de conservação de energia na ausência de forças externas é dada por:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t} = \frac{p}{\rho}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v})} \tag{1.16}$$

(b) Faça o mesmo usando um volume fixo e compare os resultados.

**Solução:**

Dado um volume fixo $V$, temos que as equações de conservação de massa e momento se mantém, porém a descrição da energia se altera. Sendo assim, temos que a variação temporal da energia total é dada por:

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t} = \int_V \frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\varepsilon + \frac{1}{2}v^2\right)\rho\right]\mathrm{d}V$$

de modo que $\rho\varepsilon$ é a densidade de energia interna e $\frac{1}{2}\rho v^2$ a densidade de energia cinética. Isso nos diz que há um fluxo de energia juntamente com a ação de trabalho exercido por forças de pressão, ou seja, que tem vetor contrário à normal da superfície que contém $V$. Utilizando a equação da continuidade, teorema de Gauss e teorema do divergente podemos escrever:

$$\int\limits_V \frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\varepsilon+\frac{1}{2}v^2\right)\rho\right]\mathrm{d}V = -\oint\limits_S \left[\left(\varepsilon+\frac{1}{2}v^2\right)\rho\right]\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} - \oint\limits_S p\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$
$$= -\int\limits_V \boldsymbol{\nabla}\cdot\left[\left(w+\frac{1}{2}v^2\right)\rho\right]\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}V$$

onde $w$ é a entalpia do fluido. Tendo em mente que as integrais são no mesmo volume $V$, os integrandos são os mesmos, de modo que:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\varepsilon+\frac{1}{2}v^2\right)\rho\right] = -\boldsymbol{\nabla}\cdot\left[\left(w+\frac{1}{2}v^2\right)\rho\right]\boldsymbol{v}$$

Com uma certa paciência matemática e tempo, podemos reescrever toda essa equação na forma:

$$\rho\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t} = -p\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}$$

De modo que:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t} = \frac{p}{\rho}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v})} \tag{1.17}$$

Ou seja, tratando de um volume fixo de fluido perfeito ou a ausência de forças externas também sobre um fluido perfeito, temos que a conservação da energia é equivalente.

O caso com forças externas pode ser encontrado em Landau (1987) §1.4.4 ou Kambe (2007) §3.4.2

# References

Kambe, T. (2007). *Elementary Fluid Mechanics*. Vol. I. Singapura: World Scientific.
Landau, L.D. (1987). *Fluid Mechanics*. Vol. II. Oxford: Pergamon Press.