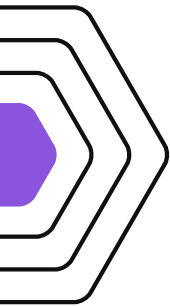


(1 pt) Clifford Algebra	1
(5 pts) Bhabha Scattering	5
(4 pts) Scalar QED	12

Lucas R. Ximenes dos Santos - 11917239

Due 05/07/2023



(1 pt) Clifford Algebra

Using the Clifford algebra of the gamma matrices, show that:

(a) $\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}$

Solution:

Usando o fato de que o traço é simétrico, ou seja $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$, para $A \in \mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{C})$ e $B \in \mathbb{M}_{n \times m}(\mathbb{C})$, podemos escrever que $\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) = \text{Tr}(\gamma^\nu \gamma^\mu)$, pois $\gamma^\mu, \gamma^\nu \in \mathbb{M}_{4 \times 4}(\mathbb{C})$. Com isso, temos:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) &= \text{Tr}(\gamma^\nu \gamma^\mu) \\ 2 \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) &= \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) + \text{Tr}(\gamma^\nu \gamma^\mu) \\ \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) &= \frac{1}{2} [\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) + \text{Tr}(\gamma^\nu \gamma^\mu)] \end{aligned}$$

Usando a propriedade de que $\text{Tr}(A + B) = \text{Tr}(A) + \text{Tr}(B)$:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) &= \frac{1}{2} \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu) \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr} \{ \gamma^\mu, \gamma^\nu \} \end{aligned}$$

Por definição, temos que $\{ \gamma^\mu, \gamma^\nu \} = 2g^{\mu\nu}$, tal que $\dim(g^{\mu\nu}) = 4$. Com isso, sendo $g^{\mu\nu}$ simplesmente uma constante que acompanha a matriz unitária:

$$\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) = g^{\mu\nu} \text{Tr}(\mathbb{1})$$

Sendo uma matriz de dimensão 4 com todos os elementos da diagonal sendo 1, temos $\text{Tr}(\mathbb{1}) = 4$, concluindo que:

$$\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu} \quad (1.1)$$

(b) $\gamma_\mu \not{p} \gamma^\mu = -2\not{p}$

Solution:

Usando a definição $\not{p} = \gamma^\mu p_\mu$:

$$\begin{aligned} \gamma_\mu \not{p} \gamma^\mu &= \gamma_\mu \gamma^\nu p_\nu \gamma^\mu \\ &= \gamma_\mu \gamma^\nu \gamma^\mu p_\nu \end{aligned}$$

Escrevendo $\gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} - \gamma^\mu \gamma^\nu$:

$$\begin{aligned} \gamma_\mu \not{p} \gamma^\mu &= \gamma_\mu (2g^{\mu\nu} - \gamma^\mu \gamma^\nu) p_\nu \\ &= 2\gamma_\mu g^{\mu\nu} p_\nu - \gamma_\mu \gamma^\mu \gamma^\nu p_\nu \\ &= 2\gamma^\nu p_\nu - \gamma_\mu \gamma^\mu \not{p} \\ &= 2\not{p} - \gamma_\mu \gamma^\mu \not{p} \end{aligned}$$

Note que podemos escrever $\gamma_\mu \gamma^\mu = \gamma_\mu g^{\mu\nu} \gamma_\nu = g^{\mu\nu} \gamma_\mu \gamma_\nu$, portanto garantimos que $g^{\mu\nu}$ é simétrico, implicando que podemos escrever:

$$\begin{aligned} \gamma_\mu \gamma^\mu &= \frac{1}{2} (g^{\mu\nu} + g^{\nu\mu}) \gamma_\mu \gamma_\nu \\ &= \frac{1}{2} (g^{\mu\nu} \gamma_\mu \gamma_\nu + g^{\nu\mu} \gamma_\mu \gamma_\nu) \\ &= \frac{1}{2} (g^{\mu\nu} \gamma_\mu \gamma_\nu + g^{\mu\nu} \gamma_\nu \gamma_\mu) \\ &= \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu) \\ &= \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} \end{aligned}$$

Novamente pela definição, temos $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu}$, portanto:

$$\gamma_\mu \gamma^\mu = g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = 4$$

Voltando ao problema original, concluímos que:

$$\gamma_\mu \not{p} \gamma^\mu = 2\not{p} - 4\not{p}$$

$$\gamma_\mu \not{p} \gamma^\mu = -2\not{p} \quad (1.2)$$

Nota: O que mostramos de fato é que

$$\gamma_\mu \gamma^\nu \gamma^\mu = -2\gamma^\nu \quad (1.3)$$

(c) $\gamma_\nu \not{A} \not{B} \gamma^\nu = 4A \cdot B$

Solution:

Abrindo \not{A} e \not{B} pela definição:

$$\begin{aligned} \gamma_\nu \not{A} \not{B} \gamma^\nu &= \gamma_\nu \gamma^\mu A_\mu \gamma^\sigma B_\sigma \gamma^\nu \\ &= \gamma_\nu \gamma^\mu \gamma^\sigma \gamma^\nu A_\mu B_\sigma \end{aligned}$$

Usando $\gamma^\sigma \gamma^\nu = 2g^{\sigma\nu} - \gamma^\nu \gamma^\sigma$:

$$\begin{aligned} \gamma_\nu \not{A} \not{B} \gamma^\nu &= \gamma_\nu \gamma^\mu (2g^{\sigma\nu} - \gamma^\nu \gamma^\sigma) A_\mu B_\sigma \\ &= 2\gamma_\nu \gamma^\mu g^{\sigma\nu} A_\mu B_\sigma - \gamma_\nu \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\sigma A_\mu B_\sigma \\ &= 2\gamma_\nu B^\nu \gamma^\mu A_\mu - \gamma_\nu (2g^{\mu\nu} - \gamma^\nu \gamma^\mu) A_\mu \gamma^\sigma B_\sigma \\ &= 2\not{B} \not{A} - 2\gamma_\nu g^{\mu\nu} A_\mu \not{B} + \gamma_\nu \gamma^\nu \gamma^\mu A_\mu \not{B} \\ &= 2\not{B} \not{A} + 2\not{A} \not{B} \\ &= 2\gamma^\sigma B_\sigma \gamma^\mu A_\mu + 2\gamma^\mu A_\mu \gamma^\sigma B_\sigma \\ &= 2(\gamma^\sigma \gamma^\mu + \gamma^\mu \gamma^\sigma) A_\mu B_\sigma \\ &= 2\{\gamma^\sigma, \gamma^\mu\} A_\mu B_\sigma \\ &= 4g^{\sigma\mu} A_\mu B_\sigma \end{aligned}$$

Concluindo que:

$$\gamma_\nu \not{A} \not{B} \gamma^\nu = 4A^\sigma B_\sigma = 4A_\mu B^\mu = 4A \cdot B \quad (1.4)$$

Nota: Essencialmente, o que mostramos de fato é a relação

$$\gamma_\nu \gamma^\mu \gamma^\sigma \gamma^\nu = 4g^{\mu\sigma} \quad (1.5)$$

(d) $\gamma_\nu \not{A} \not{B} \not{C} \gamma^\nu = -2\not{C} \not{B} \not{A}$

Solution:

Expandindo \not{A} , \not{B} e \not{C} :

$$\begin{aligned} \gamma_\nu \not{A} \not{B} \not{C} \gamma^\nu &= \gamma_\nu \gamma^\mu A_\mu \gamma^\sigma B_\sigma \gamma^\rho C_\rho \gamma^\nu \\ &= \gamma_\nu \gamma^\mu \gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\nu A_\mu B_\sigma C_\rho \\ &= \gamma_\nu \gamma^\mu \gamma^\sigma (2g^{\rho\nu} - \gamma^\nu \gamma^\rho) A_\mu B_\sigma C_\rho \\ &= 2g^{\rho\nu} \gamma_\nu \gamma^\mu \gamma^\sigma A_\mu B_\sigma C_\rho - \gamma_\nu \gamma^\mu \gamma^\sigma \gamma^\nu \gamma^\rho A_\mu B_\sigma C_\rho \end{aligned}$$

Usando (1.5):

$$\begin{aligned} \gamma_\nu \not{A} \not{B} \not{C} \gamma^\nu &= 2\gamma^\rho \gamma^\mu \gamma^\sigma A_\mu B_\sigma C_\rho - 4g^{\mu\sigma} \gamma^\rho A_\mu B_\sigma C_\rho \\ &= 2\gamma^\rho (2g^{\mu\sigma} - \gamma^\sigma \gamma^\mu) A_\mu B_\sigma C_\rho - 4g^{\mu\sigma} \gamma^\rho A_\mu B_\sigma C_\rho \\ &= 4g^{\mu\sigma} \gamma^\rho A_\mu B_\sigma C_\rho - 2\gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\mu A_\mu B_\sigma C_\rho - 4g^{\mu\sigma} \gamma^\rho A_\mu B_\sigma C_\rho \\ &= -2\gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\mu A_\mu B_\sigma C_\rho \\ &= -2\gamma^\rho C_\rho \gamma^\sigma B_\sigma \gamma^\mu A_\mu \end{aligned}$$

Concluindo que

$$\gamma_\nu \not{A} \not{B} \not{C} \gamma^\nu = -2 \not{C} \not{B} \not{A} \quad (1.6)$$

Nota: Mostramos essencialmente que:

$$\gamma_\nu \gamma^\mu \gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\nu = -2 \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\mu \quad (1.7)$$

$$(e) \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) = 4(g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho})$$

Solution:

Usaremos novamente mais da definição do anti-comutador das matrizes gamma.

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) &= \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu (2g^{\rho\sigma} - \gamma^\sigma \gamma^\rho)] \\ &= \text{Tr}(2\gamma^\mu \gamma^\nu g^{\rho\sigma} - \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\sigma \gamma^\rho) \\ &= \text{Tr}[2\gamma^\mu \gamma^\nu g^{\rho\sigma} - \gamma^\mu (2g^{\nu\sigma} - \gamma^\sigma \gamma^\nu) \gamma^\rho] \\ &= \text{Tr}(2\gamma^\mu \gamma^\nu g^{\rho\sigma} - 2\gamma^\mu \gamma^\rho g^{\nu\sigma} + \gamma^\mu \gamma^\sigma \gamma^\nu \gamma^\rho) \\ &= \text{Tr}[2\gamma^\mu \gamma^\nu g^{\rho\sigma} - 2\gamma^\mu \gamma^\rho g^{\nu\sigma} + \gamma^\mu \gamma^\sigma (2g^{\nu\rho} - \gamma^\rho \gamma^\nu)] \\ &= \text{Tr}(2\gamma^\mu \gamma^\nu g^{\rho\sigma} - 2\gamma^\mu \gamma^\rho g^{\nu\sigma} + 2\gamma^\mu \gamma^\sigma g^{\nu\rho} - \gamma^\mu \gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\nu) \end{aligned}$$

Usando a propriedade da soma e (1.1), temos:

$$\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) = 4g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - 4g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + 4g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho} - \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\nu)$$

Abrindo o último termo separadamente:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\nu) &= \text{Tr}[(2g^{\mu\sigma} - \gamma^\sigma \gamma^\mu)(2g^{\rho\nu} - \gamma^\nu \gamma^\rho)] \\ &= \text{Tr}(4g^{\mu\sigma} g^{\rho\nu} - g^{\mu\sigma} \gamma^\nu \gamma^\rho - 2\gamma^\sigma \gamma^\mu g^{\rho\nu} + \gamma^\sigma \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho) \\ &= 4g^{\mu\sigma} g^{\rho\nu} - 4g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho} - 4g^{\sigma\mu} g^{\rho\nu} + \text{Tr}(\gamma^\sigma \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho) \\ &= -4g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} + 4g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} - 4g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho} + \text{Tr}(\gamma^\sigma \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho) \end{aligned}$$

em que na última passagem, troquei $\rho \rightarrow \sigma$ e $\sigma \rightarrow \rho$ nos dois primeiros termos, trocando o sinal de ambos. Temos com isso que:

$$\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) = 8g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - 8g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + 8g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho} - \text{Tr}(\gamma^\sigma \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho)$$

Se usarmos a propriedade de ciclicidade do traço, ou seja, $\text{Tr}(ABCD) = \text{Tr}(DABC)$, temos:

$$2 \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) = 8g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - 8g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + 8g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}$$

Concluindo que:

$$\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) = 4(g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) \quad (1.8)$$

where the traces are taken over the spinor indices.

(5 pts) Bhabha Scattering

Compute the differential cross section $\frac{d\sigma}{d\cos\theta}$ for the process $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$. Draw all the contributing Feynmann diagrams, compute the amplitude and its square. Be careful about the interference terms. To simplify, take $m_e = 0$. Verify that using Mandelstam variables it can be written as

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{\pi\alpha^2}{s} \left[u^2 \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{t} \right)^2 + \left(\frac{t}{s} \right)^2 + \left(\frac{s}{t} \right)^2 \right]$$

where we defined

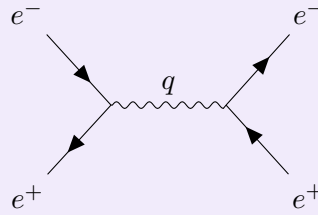
$$\alpha := \frac{e^2}{4\pi}$$

Solution:

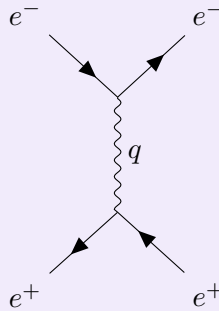
Ao considerarmos uma processo do tipo $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$, temos um processo férmion-férmion, de modo que podemos associar o campo $\bar{\psi}(x)$ para o elétron e o campo $\psi(x)$ para o pósitron, tal que o processo pode ser reescrito por $\psi\bar{\psi} \rightarrow \psi\bar{\psi}$.

Para este tipo de processo, temos supostamente 3 possíveis diagramas, no entanto, apenas 2 deles serão possíveis, o s e o t .

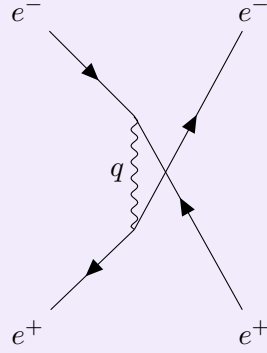
A primeira possibilidade seria um diagrama do tipo- s , em que um elétron colide com um pósitron se aniquilando e emitindo um fóton de momento q , de modo que este mesmo fóton produz um par elétron-pósitron da seguinte forma:



De modo que podemos ver a conservação da carga e do momento de forma direta. A outra possibilidade seria um diagrama do tipo- t , em que tanto o elétron quanto o pósitron se espalham, gerando um fóton de momento q , ou seja

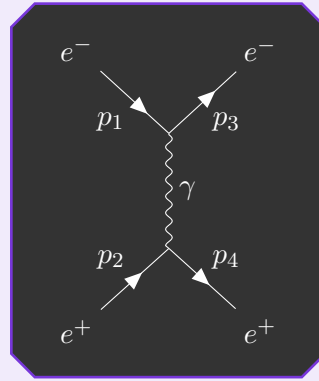
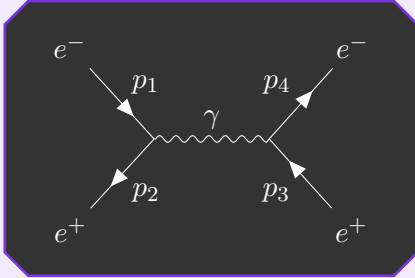


cuja conservação de carga e momento também é satisfeita, basta olhar para os vértices e notar que o fluxo das setas é contínuo. Por fim a última possibilidade seria um diagrama do tipo- u , no entanto, não teremos conservação da carga de, forma óbvia:



Note que teríamos um processo em que uma carga negativa se transformaria em uma carga positiva, que claramente não conserva a carga.

Temos então que o processo $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$ é composto por um diagrama de *aniquilação* (s -channel) e um diagrama de *espalhamento* (t -channel):



Como o processo é composto por partículas carregadas de carga e , precisamos usar as regras de Feynmann para QED. Sendo assim:

- Para o diagrama de aniquilação:
 - Temos 2 vértices, portanto adicionamos $(-ie)^2$ à amplitude;
 - Como podemos considerar $m_e = 0$, adicionamos apenas o propagador $\frac{i}{q^2}$;
 - Como deve haver conservação do momento nos vértices, adicionamos $(2\pi)^4 \delta^4(p_3 + p_4 - p_1 - p_2)$;
 - Temos um férmion entrando juntamente com um anti-férmion e um férmion saindo juntamente com um anti-férmion, de modo que adicionamos o fator:

$$\bar{u}_a^{s_2}(p_2)(\gamma^\nu)_{ab}u_b^{s_1}(p_1)$$

para as partículas no estado inicial e

$$\bar{u}_c^{s_3}(p_3)(\gamma_\nu)_{cd}v_d^{s_4}(p_4)$$

para as partículas do estado final.

Segue que para o diagrama de aniquilação (s -channel) temos:

$$i\mathcal{A}_s = (-ie)^2 \bar{u}_c^{s3}(p_3)(\gamma_\nu)_{cd} v_d^{s4}(p_4) \frac{i}{q^2} \bar{v}_a^{s2}(p_2)(\gamma^\nu)_{ab} u_b^{s1}(p_1) (2\pi)^4 \delta^4(p_3 + p_4 - p_1 - p_2)$$

Definindo $q = p_1 + p_2 = p_3 + p_4$, satisfazemos a condição de conservação do momento, reduzindo a expressão para:

$$i\mathcal{A}_s = (-ie)^2 \bar{u}_c^{s3}(p_3)(\gamma_\nu)_{cd} v_d^{s4}(p_4) \frac{i}{(p_1 + p_2)^2} \bar{v}_a^{s2}(p_2)(\gamma^\nu)_{ab} u_b^{s1}(p_1)$$

Concluindo que:

$$\mathcal{A}_s = -\bar{u}_c^{s3}(p_3)(\gamma_\nu)_{cd} v_d^{s4}(p_4) \frac{e^2}{(p_1 + p_2)^2} \bar{v}_a^{s2}(p_2)(\gamma^\nu)_{ab} u_b^{s1}(p_1)$$

No entanto, há uma pequena correção a ser feita nesta amplitude que é mais simples de ser explicada usando a redução do LSZ do que olhando diretamente o diagrama. Ao desenvolver o LSZ para o processo em questão, existirá uma troca de sinal ao comutar os campos, pois estamos trabalhando com variáveis de Grassman, tal que em uma das contrações, que resulta no diagrama do tipo- s quando aplicamos o Teorema de Wick, teremos que o que realmente acontece é que existe um sinal negativo acompanhando esta amplitude, portanto:

$$\mathcal{A}_s = \bar{u}_c^{s3}(p_3)(\gamma_\nu)_{cd} v_d^{s4}(p_4) \frac{e^2}{(p_1 + p_2)^2} \bar{v}_a^{s2}(p_2)(\gamma^\nu)_{ab} u_b^{s1}(p_1)$$

Novamente pelas regras de Feynmann:

- Para o diagrama de espalhamento:
 - Temos 2 vértices, portanto adicionamos $(-ie)^2$;
 - Considerando $m_e = 0$, adicionamos o propagador $\frac{i}{q^2}$;
 - Para haver conservação do momento, adicionamos $(2\pi)^4 \delta^4(p_2 - p_4 - p_1 + p_3)$;
 - Temos um férmion sendo espalhado e um anti-férmion sendo espalhado, de modo que adicionamos o fator

$$\bar{v}_a^{s2}(p_2)(\gamma^\mu)_{ab} v_b^{s4}(p_4)$$

para os pósitrons e

$$\bar{u}_c^{s1}(p_1)(\gamma_\mu)_{cd} u_d^{s3}(p_3)$$

para os elétrons.

Então o diagrama de espalhamento (t -channel) possui a seguinte amplitude:

$$i\mathcal{A}_t = (-ie)^2 \bar{u}_c^{s1}(p_1)(\gamma_\mu)_{cd} u_d^{s3}(p_3) \frac{i}{q^2} \bar{v}_a^{s2}(p_2)(\gamma^\mu)_{ab} v_b^{s4}(p_4) (2\pi)^4 \delta^4(p_2 - p_4 - p_1 + p_3)$$

Definindo $q = p_1 - p_3 = p_2 - p_4$ temos a conservação do momento satisfeita nos vértices, logo:

$$i\mathcal{A}_t = (-ie)^2 \bar{u}_c^{s1}(p_1)(\gamma_\mu)_{cd} u_d^{s3}(p_3) \frac{i}{(p_1 - p_3)^2} \bar{v}_a^{s2}(p_2)(\gamma^\mu)_{ab} v_b^{s4}(p_4)$$

Concluindo que

$$\mathcal{A}_t = -\bar{u}_c^{s_1}(p_1)(\gamma_\mu)_{cd}u_d^{s_3}(p_3)\frac{e^2}{(p_1 - p_3)^2}\bar{v}_a^{s_2}(p_2)(\gamma^\mu)_{ab}v_b^{s_4}(p_4)$$

Com as amplitudes de cada diagrama determinado, temos que a amplitude total do processo é simplesmente $\mathcal{A}_s + \mathcal{A}_t$, concluindo que:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} = & \bar{u}_c^{s_3}(p_3)(\gamma_\nu)_{cd}v_d^{s_4}(p_4)\frac{e^2}{(p_1 + p_2)^2}\bar{v}_a^{s_2}(p_2)(\gamma^\nu)_{ab}u_b^{s_1}(p_1) - \\ & - \bar{u}_c^{s_1}(p_1)(\gamma_\mu)_{cd}u_d^{s_3}(p_3)\frac{e^2}{(p_1 - p_3)^2}\bar{v}_a^{s_2}(p_2)(\gamma^\mu)_{ab}v_b^{s_4}(p_4) \end{aligned}$$

Podemos então determinar o módulo da amplitude ao quadrado do processo, pois isso é relevante para computar a seção de choque diferencial. Temos então:

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}|^2 &= |\mathcal{A}_s + \mathcal{A}_t|^2 = (\mathcal{A}_s + \mathcal{A}_t)^\dagger(\mathcal{A}_s + \mathcal{A}_t) \\ &= (\mathcal{A}_s^\dagger + \mathcal{A}_t^\dagger)(\mathcal{A}_s + \mathcal{A}_t) \\ &= \mathcal{A}_s^\dagger\mathcal{A}_s + \mathcal{A}_s^\dagger\mathcal{A}_t + \mathcal{A}_t^\dagger\mathcal{A}_s + \mathcal{A}_t^\dagger\mathcal{A}_t \\ &= |\mathcal{A}_s|^2 + \mathcal{A}_s^\dagger\mathcal{A}_t + \mathcal{A}_t^\dagger\mathcal{A}_s + |\mathcal{A}_t|^2 \\ &= |\mathcal{A}_s|^2 + \mathcal{A}_s^\dagger\mathcal{A}_t + (\mathcal{A}_s^\dagger\mathcal{A}_t)^\dagger + |\mathcal{A}_t|^2 \end{aligned}$$

Com isso, fica mais simples desenvolver cada termo separadamente. Sendo assim:

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}_s|^2 &= [\bar{u}_c^{s_3}(p_3)(\gamma_\nu)_{cd}u_p^{s_3}(p_3)][\bar{v}_d^{s_4}(p_4)(\gamma_\sigma)_{pk}v_k^{s_4}(p_4)]\frac{e^4}{(p_1 + p_2)^4} \\ & \quad [\bar{v}_a^{s_2}(p_2)(\gamma^\nu)_{ab}v_m^{s_2}(p_2)][\bar{u}_n^{s_1}(p_1)(\gamma^\sigma)_{mn}u_b^{s_1}(p_1)] \\ &= [\bar{u}_c^{s_3}(p_3)u_p^{s_3}(p_3)](\gamma_\nu)_{cd}[\bar{v}_d^{s_4}(p_4)v_k^{s_4}(p_4)](\gamma_\sigma)_{pk}\frac{e^4}{(p_1 + p_2)^4} \\ & \quad [\bar{v}_a^{s_2}(p_2)v_m^{s_2}(p_2)](\gamma^\nu)_{ab}[\bar{u}_n^{s_1}(p_1)u_b^{s_1}(p_1)](\gamma^\sigma)_{mn} \end{aligned}$$

Note que como **não** estamos trabalhando com matrizes, **mas sim** com as componentes delas, podemos fazer a troca de ordem dos γ 's sem qualquer restrição. Pelas relações de completudeza:

$$\sum_s \bar{u}_\alpha^s(p_i)u_\beta^s(p_i) = (\not{p}_i + m)_{\alpha\beta}$$

$$\sum_s \bar{v}_\alpha^s(p_i)v_\beta^s(p_i) = (\not{p}_i - m)_{\alpha\beta}$$

podemos escrever:

$$|\mathcal{A}_s|^2 = (\not{p}_3 + m)_{cp}(\gamma_\nu)_{cd}(\not{p}_4 - m)_{dk}(\gamma_\sigma)_{pk}\frac{e^4}{(p_1 + p_2)^4}(\not{p}_2 - m)_{am}(\gamma^\nu)_{ab}(\not{p}_1 + m)_{nb}(\gamma^\sigma)_{mn}$$

Como estamos assumindo $m = 0$:

$$|\mathcal{A}_s|^2 = (\not{p}_3)_{cp}(\gamma_\nu)_{cd}(\not{p}_4)_{dk}(\gamma_\sigma)_{pk}\frac{e^4}{(p_1 + p_2)^4}(\not{p}_2)_{am}(\gamma^\nu)_{ab}(\not{p}_1)_{nb}(\gamma^\sigma)_{mn}$$

Como todos os índices spinoriais estão contraídos, podemos escrever dois traços:

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}_s|^2 &= \text{Tr}(\not{p}_3 \gamma_\nu \not{p}_4 \gamma_\sigma) \frac{e^4}{(p_1 + p_2)^4} \text{Tr}(\not{p}_2 \gamma^\nu \not{p}_1 \gamma^\sigma) \\ &= p_3^\alpha p_4^\beta \text{Tr}(\gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_\beta \gamma_\sigma) \frac{e^4}{(p_1 + p_2)^4} p_{1\delta} p_{2\rho} \text{Tr}(\gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\delta \gamma^\sigma) \end{aligned}$$

Usando (1.8):

$$\begin{aligned} p_3^\alpha p_4^\beta \text{Tr}(\gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_\beta \gamma_\sigma) &= 4p_3^\alpha p_4^\beta (g_{\alpha\nu} g_{\beta\sigma} - g_{\alpha\beta} g_{\nu\sigma} + g_{\alpha\sigma} g_{\nu\beta}) \\ &= 4(p_{3\nu} p_{4\sigma} - p_3 \cdot p_4 g_{\nu\sigma} + p_{3\sigma} p_{4\nu}) \\ p_{1\delta} p_{2\rho} \text{Tr}(\gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\delta \gamma^\sigma) &= 4p_{1\delta} p_{2\rho} (g^{\rho\nu} g^{\delta\sigma} - g^{\rho\delta} g^{\nu\sigma} + g^{\rho\sigma} g^{\delta\nu}) \\ &= 4(p_1^\nu p_2^\rho - p_1 \cdot p_2 g^{\nu\sigma} + p_1^\sigma p_2^\nu) \end{aligned}$$

Temos portanto:

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}_s|^2 &= \frac{16e^4}{(p_1 + p_2)^4} (p_{3\nu} p_{4\sigma} - p_3 \cdot p_4 g_{\nu\sigma} + p_{3\sigma} p_{4\nu}) (p_1^\nu p_2^\rho - p_1 \cdot p_2 g^{\nu\sigma} + p_1^\sigma p_2^\nu) \\ &= \frac{32e^4}{(p_1 + p_2)^4} [(p_2 \cdot p_4)(p_1 \cdot p_3) + (p_4 \cdot p_1)(p_2 \cdot p_3)] \end{aligned}$$

Agora fazendo o mesmo processo para determinar $|\mathcal{A}_t|^2$:

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}_t|^2 &= [\bar{u}_c^{s_1}(p_1)(\gamma_\mu)_{cd} u_p^{s_1}(p_1)] [\bar{u}_k^{s_3}(p_3)(\gamma_\sigma)_{pk} u_d^{s_3}(p_3)] \frac{e^4}{(p_1 - p_3)^4} \\ &\quad [\bar{v}_a^{s_2}(p_2)(\gamma^\mu)_{ab} v_m^{s_2}(p_2)] [\bar{v}_n^{s_4}(p_4)(\gamma^\sigma)_{mn} v_b^{s_4}(p_4)] \end{aligned}$$

teremos essencialmente o mesmo desenvolvimento matemático, trocando apenas a posição dos momentos, ou seja, o que temos de fato é uma *crossing symmetry* de uma diagrama s para um t , tal que

$$p_1 \rightarrow p_1 \quad \& \quad p_2 \rightarrow -p_4 \quad \& \quad p_3 \rightarrow -p_2 \quad \& \quad p_4 \rightarrow p_3$$

obtendo portanto:

$$|\mathcal{A}_t|^2 = \frac{32e^4}{(p_1 - p_3)^4} [(p_4 \cdot p_3)(p_2 \cdot p_1) + (p_4 \cdot p_1)(p_2 \cdot p_3)]$$

Precisamos então desenvolver os termos de interferência, de modo que basta mostrar $\mathcal{A}_s^\dagger \mathcal{A}_t$, pois o outro termo é apenas o \dagger deste. Sabendo a forma da amplitude \mathcal{A}_s , temos que:

$$\mathcal{A}_s^\dagger = \bar{v}_a^{s_4}(p_4)(\gamma_\nu)_{ab} u_b^{s_3}(p_3) \frac{e^2}{(p_1 + p_2)^2} \bar{u}_c^{s_1}(p_1)(\gamma^\nu)_{cd} v_d^{s_2}(p_2)$$

de modo que o produto com \mathcal{A}_t fica:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_s^\dagger \mathcal{A}_t &= -\bar{v}_a^{s_4}(p_4)(\gamma_\nu)_{ab} u_b^{s_3}(p_3) \frac{e^2}{(p_1 + p_2)^2} \bar{u}_c^{s_1}(p_1)(\gamma^\nu)_{cd} v_d^{s_2}(p_2) \\ &\quad \bar{u}_e^{s_1}(p_1)(\gamma_\mu)_{ef} u_f^{s_3}(p_3) \frac{e^2}{(p_1 - p_3)^2} \bar{v}_g^{s_2}(p_2)(\gamma^\mu)_{gh} v_h^{s_4}(p_4) \end{aligned}$$

Podemos escrever isso de uma forma mais interessante, afim de fazer com que apareçam as relações de completeza e que apareça um traço:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_s^\dagger \mathcal{A}_t &= \frac{-e^4}{(p_1 + p_2)^2 (p_1 - p_3)^2} \bar{v}_a^{s_4}(p_4) v_h^{s_4}(p_4) (\gamma_\nu)_{ab} \bar{u}_b^{s_3}(p_3) u_f^{s_3}(p_3) (\gamma_\mu)_{ef} \\
&\quad \bar{u}_c^{s_1}(p_1) u_e^{s_1}(p_1) (\gamma^\nu)_{cd} \bar{v}_g^{s_2}(p_2) v_d^{s_2}(p_2) (\gamma^\mu)_{gh} \\
&= -\frac{e^4}{(p_1 + p_2)^2 (p_1 - p_3)^2} (\not{p}_4)_{ah} (\gamma_\nu)_{ab} (\not{p}_3)_{bf} (\gamma_\mu)_{ef} (\not{p}_1)_{ce} (\gamma^\nu)_{cd} (\not{p}_2)_{gd} (\gamma^\mu)_{gh} \\
&= -\frac{e^4}{(p_1 + p_2)^2 (p_1 - p_3)^2} \text{Tr}[\not{p}_4 \gamma_\nu \not{p}_3 \gamma_\mu \not{p}_1 \gamma^\nu \not{p}_2 \gamma^\mu]
\end{aligned}$$

Precisamos então desenvolver este traço. Fazendo isso separadamente temos:

$$\begin{aligned}
\text{Tr}(\not{p}_4 \gamma_\nu \not{p}_3 \gamma_\mu \not{p}_1 \gamma^\nu \not{p}_2 \gamma^\mu) &= p_{4\alpha} p_{3\beta} p_{1\rho} p_{2\sigma} \text{Tr}(\gamma^\alpha \gamma_\nu \gamma^\beta \gamma_\mu \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\sigma \gamma^\mu) \\
(1.7) \quad &= p_{4\alpha} p_{3\beta} p_{1\rho} p_{2\sigma} \text{Tr}[\gamma^\alpha \gamma_\nu \gamma^\beta (-2\gamma^\sigma \gamma^\nu \gamma^\rho)] \\
&= -2p_{4\alpha} p_{3\beta} p_{1\rho} p_{2\sigma} \text{Tr}(\gamma^\alpha \gamma_\nu \gamma^\beta \gamma^\sigma \gamma^\nu \gamma^\rho) \\
(1.5) \quad &= -2p_{4\alpha} p_{3\beta} p_{1\rho} p_{2\sigma} \text{Tr}[\gamma^\alpha (4g^{\beta\sigma} \gamma^\rho)] \\
&= -8p_{4\alpha} p_{3\beta} p_{1\rho} p_{2\sigma} g^{\beta\sigma} \text{Tr}(\gamma^\alpha \gamma^\rho) \\
(1.1) \quad &= -8p_{4\alpha} p_{3\beta} p_{1\rho} p_{2\sigma} g^{\beta\sigma} (4g^{\alpha\rho}) \\
&= -32p_{4\alpha} p_{3\beta} p_{1\rho} p_{2\sigma} g^{\beta\sigma} g^{\alpha\rho} \\
&= -32p_{4\alpha} p_{3\beta} p_{1\rho} p_{2\sigma} \\
&= -32(p_4 \cdot p_1)(p_3 \cdot p_2)
\end{aligned}$$

Concluindo que uma das amplitudes de interferência é dada por:

$$\mathcal{A}_s^\dagger \mathcal{A}_t = \frac{32e^4}{(p_1 + p_2)^2 (p_1 - p_3)^2} (p_4 \cdot p_1)(p_3 \cdot p_2)$$

Sendo todas as variáveis reais, temos que $(\mathcal{A}_s^\dagger \mathcal{A}_t)^\dagger$ deve ser igual, portanto, escrevemos o módulo da amplitude quadrada como sendo:

$$\begin{aligned}
|\mathcal{A}|^2 &= 32e^4 \left\{ \frac{1}{(p_1 + p_2)^4} [(p_2 \cdot p_4)(p_1 \cdot p_3) + (p_4 \cdot p_1)(p_2 \cdot p_3)] + \right. \\
&\quad \frac{2}{(p_1 + p_2)^2 (p_1 - p_3)^2} (p_4 \cdot p_1)(p_3 \cdot p_2) + \\
&\quad \left. \frac{1}{(p_1 - p_3)^4} [(p_4 \cdot p_3)(p_2 \cdot p_1) + (p_4 \cdot p_1)(p_2 \cdot p_3)] \right\} \quad (1.9)
\end{aligned}$$

Podemos simplificar esta expressão utilizando as variáveis de Mandelstam, definidas por:

$$\begin{aligned}
s &= (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2 \\
t &= (p_1 - p_3)^2 = (p_2 - p_4)^2 \\
u &= (p_1 - p_4)^2 = (p_3 - p_2)^2
\end{aligned}$$

Implicando em

$$\begin{aligned} p_2 \cdot p_1 &= +\frac{s}{2} = p_4 \cdot p_3 \\ p_1 \cdot p_3 &= -\frac{t}{2} = p_2 \cdot p_4 \\ p_4 \cdot p_1 &= -\frac{u}{2} = p_2 \cdot p_3 \end{aligned}$$

Concluindo que:

$$|\mathcal{A}|^2 = 8e^4 \left(\frac{t^2 + u^2}{s^2} + \frac{2u^2}{st} + \frac{s^2 + u^2}{t^2} \right) \quad (1.10)$$

Determinada a amplitude quadrada, conseguimos determinar a seção de choque diferencial no referencial do centro de massa a partir da expressão:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2E_1 2E_2 |v_1 - v_2|} \frac{|\mathbf{p}_2|}{16\pi^2 E_{\text{cm}}} |\overline{\mathcal{A}}|^2$$

Primeiro, temos que como o processo é $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$, cada partícula tem possibilidade de spin $\pm \frac{1}{2}$, de modo que

$$|\overline{\mathcal{A}}|^2 = \frac{1}{4} |\mathcal{A}|^2$$

Segundo, o primeiro denominador pode ser expandido por

$$\begin{aligned} 2E_1 2E_2 |v_1 - v_2| &= 2E_1 2E_2 \left| \frac{p_1}{E_1} - \frac{p_2}{E_2} \right| \\ &= 2|2E_2 p_1 - 2E_1 p_2| \\ &= 2|E_{\text{cm}}(-p_2) - E_{\text{cm}}p_2| \\ &= 4E_{\text{cm}}p_2 \end{aligned}$$

onde assumimos que $E = E_1 = E_2$, que $E_{\text{cm}} = E_1 + E_2 = 2E$ e que $|p_1| = |p_2|$, como na lista 3.

Terceiro, como consideramos que $m = 0$, podemos escrever que

$$p_2 = \sqrt{E^2} = E = \frac{E_{\text{cm}}}{2}$$

Por fim, da mesma forma que na lista 3, podemos considerar que no centro de massa:

$$E_{\text{cm}}^2 = s$$

Portanto, a seção de choque diferencial pode ser escrita por

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{1}{2E_{cm}^2} \frac{E_{cm}}{32\pi^2 E_{cm}} 2e^4 \left(\frac{t^2 + u^2}{s^2} + \frac{2u^2}{st} + \frac{s^2 + u^2}{t^2} \right) \\
&= \frac{e^4}{32\pi^2 s} \left(\frac{t^2 + u^2}{s^2} + \frac{2u^2}{st} + \frac{s^2 + u^2}{t^2} \right) \\
&= \frac{e^4}{32\pi^2 s} \left(\frac{t^2}{s^2} + \frac{u^2}{s^2} + \frac{2u^2}{st} + \frac{s^2}{t^2} + \frac{u^2}{t^2} \right) \\
&= \frac{e^4}{32\pi^2 s} \left[u^2 \left(\frac{1}{s^2} + \frac{2}{st} + \frac{1}{t^2} \right) + \frac{t^2}{s^2} + \frac{s^2}{t^2} \right] \\
&= \frac{e^4}{32\pi^2 s} \left[u^2 \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{t} \right)^2 + \left(\frac{t}{s} \right)^2 + \left(\frac{s}{t} \right)^2 \right]
\end{aligned}$$

Integrando o ângulo sólido em ϕ , fica claro que:

$$\int_0^{2\pi} d\Omega = 2\pi d \cos \theta$$

Logo:

$$\frac{d\sigma}{d \cos \theta} = \frac{e^4}{16\pi s} \left[u^2 \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{t} \right)^2 + \left(\frac{t}{s} \right)^2 + \left(\frac{s}{t} \right)^2 \right]$$

Dado que $\alpha := \frac{e^2}{4\pi}$, concluímos que a seção de choque diferencial é inteiramente definida por

$$\frac{d\sigma}{d \cos \theta} = \frac{\pi \alpha^2}{s} \left[u^2 \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{t} \right)^2 + \left(\frac{t}{s} \right)^2 + \left(\frac{s}{t} \right)^2 \right] \quad (1.11)$$

(4 pts) Scalar QED

Consider the theory of a complex (charged) scalar field, invariant under local $\mathcal{U}(1)$ transformations given by

$$\mathcal{L} = (\mathcal{D}_\mu \phi)^\dagger \mathcal{D}^\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

where

$$\mathcal{D}_\mu \phi = (\partial_\mu + ieA_\mu) \phi$$

and the $\mathcal{U}(1)$ gauge field strength tensor is $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

(a) Derive the Feynman rules for the theory.

Solution:

Antes de começar a desenvolver o LSZ para teoria, podemos desenvolver um pouco mais a densidade de lagrangiana, afim de determinar quais são os termos de interação.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} &= (\mathcal{D}_\mu \phi)^\dagger \mathcal{D}^\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\
 &= [(\partial_\mu + ieA_\mu)\phi]^\dagger (\partial^\mu + ieA^\mu)\phi - m^2 \phi^\dagger \phi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\
 &= (\partial_\mu \phi^\dagger - ieA_\mu \phi^\dagger)(\partial^\mu \phi + ieA^\mu \phi) - m^2 \phi^\dagger \phi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\
 &= \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi + ie \partial_\mu \phi^\dagger A^\mu \phi - ie A_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi + e^2 A_\mu \phi^\dagger A^\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\
 &= \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi + ie \left(\partial_\mu \phi^\dagger A^\mu \phi - A_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi \right) + e^2 A_\mu \phi^\dagger A^\mu \phi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}
 \end{aligned}$$

Integrando em d^4x para obter a ação:

$$\begin{aligned}
 S[A_\mu, \phi, \phi^\dagger] &= \int (\partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi) d^4x - \frac{1}{4} \int F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} d^4x + \\
 &\quad ie \int \left(\partial_\mu \phi^\dagger A^\mu \phi - A_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi \right) d^4x + e^2 \int A_\mu \phi^\dagger A^\mu \phi d^4x
 \end{aligned}$$

Usando integração por partes no primeiro termo:

$$\begin{aligned}
 \int (\partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi) d^4x &= - \int \phi^\dagger (\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi d^4x + \text{Termos de superfície} \\
 &= - \int \phi^\dagger \hat{\mathcal{O}}_\phi \phi d^4x
 \end{aligned}$$

Rearranjando o 3º termo:

$$\begin{aligned}
 ie \int \left(\partial_\mu \phi^\dagger A^\mu \phi - A_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi \right) d^4x &= ie \int \left(\partial_\mu \phi^\dagger A^\mu \phi - A^\mu \phi^\dagger \partial_\mu \phi \right) d^4x \\
 &= ie \int A^\mu \left[(\partial_\mu \phi^\dagger) \phi - \phi^\dagger (\partial_\mu \phi) \right] d^4x \\
 &= -ie \int A^\mu \left[\phi^\dagger (\partial_\mu \phi) - (\partial_\mu \phi^\dagger) \phi \right] d^4x \\
 &= -ie \int A^\mu \mathcal{J}_\mu d^4x
 \end{aligned}$$

E manipulando o último termo:

$$e^2 \int A_\mu \phi^\dagger A^\mu \phi d^4x = e^2 \int A_\mu A^\mu \phi^\dagger \phi d^4x$$

Portanto a ação pode ser reescrita por:

$$\begin{aligned}
 S[A_\mu, \phi, \phi^\dagger] &= \int \left[\left(-\phi^\dagger \hat{\mathcal{O}}_\phi \phi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) - ie A^\mu \mathcal{J}_\mu + e^2 A_\mu A^\mu \phi^\dagger \phi \right] d^4x \\
 &= \int \mathcal{L}_o[\phi, \phi^\dagger] d^4x + \int \mathcal{L}_o[A_\mu] d^4x + \int \mathcal{L}_o[A_\mu, \phi, \phi^\dagger] d^4x \\
 &= S_o[\phi, \phi^\dagger] + S_o[A_\mu] + S_{\text{int}}[A_\mu, \phi, \phi^\dagger]
 \end{aligned}$$

Com base nisso, podemos escrever a lagrangiana de interação da seguinte forma:

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -ieA^\mu \left[\phi^\dagger (\partial_\mu \phi) - (\partial_\mu \phi^\dagger) \phi \right] + e^2 A_\mu A^\mu \phi^\dagger \phi$$

A primeira parte da lagrangiana, nos mostra claramente a interação entre 1 campo $\phi(x)$, 1 campo $\phi^\dagger(x)$ e 1 campo $A^\mu(x)$, já a segunda parte nos mostra a interação de 1 campo $\phi(x)$, 1 campo $\phi^\dagger(x)$ e 2 campos $A^\mu(x)$. Precisamos então determinar a three-point function para descrever o tipo de vértice do primeiro termo da lagrangiana e depois a four-point function para o vértice do segundo termo.

Para determinar a three-point, precisamos do funcional gerador \mathcal{Z} deste caso. Sendo $J_\mu(x)$ o termo que acopla linearmente com o campo $A^\mu(x)$, $\eta(x)$ o termo que acopla linearmente com $\phi^\dagger(x)$ e $\eta^\dagger(x)$ o que acopla linearmente com $\phi(x)$. Com isso, temos o funcional não interagente:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_0[J_\mu, \eta^\dagger, \eta] &= N \int \exp \left\{ i \int [\mathcal{L}_o + \mathcal{L}_n] d^4x \right\} \mathcal{D}_{A^\mu \phi \phi^\dagger} \\ &= N \int \exp \left\{ iS_o + i \int (J_\mu A^\mu + \eta \phi^\dagger + \eta^\dagger \phi) d^4x \right\} \mathcal{D}_{A^\mu \phi \phi^\dagger} \\ &= N \int \exp \{ iS_o + iS_n \} \mathcal{D}_{A^\mu \phi \phi^\dagger} \end{aligned}$$

Sabendo isso, podemos computar o funcional gerador da interação:

$$\mathcal{Z}[J_\mu, \eta^\dagger, \eta] = \exp \left\{ i \int \mathcal{L}_{\text{int}} \left[-i \frac{\delta}{\delta J_\mu(x) \delta \eta^\dagger(x) \delta \eta(x)} \right] d^4x \right\} \mathcal{Z}_0[J_\mu, \eta^\dagger, \eta]$$

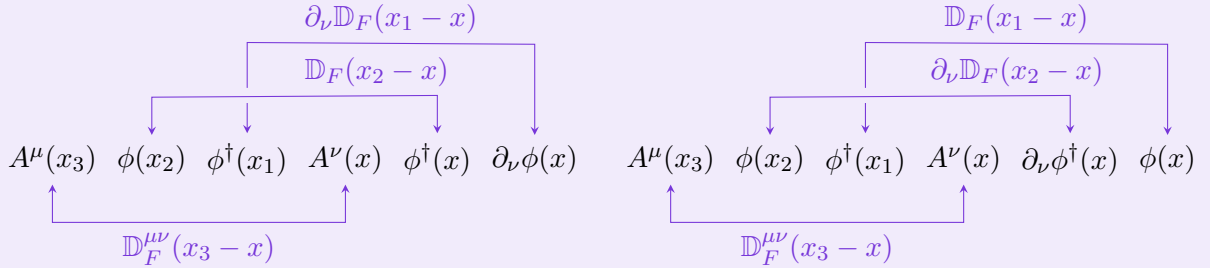
Expandindo a exponencial em primeira ordem, temos que o funcional é dado por:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[J_\mu, \eta^\dagger, \eta] &= \left\{ 1 + i \int \mathcal{L}_{\text{int}} \left[-i \frac{\delta^3}{\delta J_\mu(x) \delta \eta^\dagger(x) \delta \eta(x)} \right] d^4x \right\} \mathcal{Z}_0[J_\mu, \eta^\dagger, \eta] \\ &= \mathcal{Z}_0[J_\mu, \eta^\dagger, \eta] + i \int \mathcal{L}_{\text{int}} \left[-i \frac{\delta^3 \mathcal{Z}_0[J_\mu, \eta^\dagger, \eta]}{\delta J_\mu(x) \delta \eta^\dagger(x) \delta \eta(x)} \right] d^4x \\ &= N \int e^{iS_o + iS_n} \mathcal{D}_{A^\mu \phi \phi^\dagger} + iN \int (-i)eA^\mu \left[\phi^\dagger (\partial_\mu \phi) - (\partial_\mu \phi^\dagger) \phi \right] (-i)e^{iS_o + iS_n} d^4x \mathcal{D}_{A^\mu \phi \phi^\dagger} \\ &= N \int e^{iS_o + iS_n} \left\{ 1 + i^3 e \int A^\mu \left[\phi^\dagger (\partial_\mu \phi) - (\partial_\mu \phi^\dagger) \phi \right] d^4x \right\} \mathcal{D}_{A^\mu \phi \phi^\dagger} \\ &= N \int e^{i(S_o + S_n)} \left\{ 1 - ie \int A^\mu \left[\phi^\dagger (\partial_\mu \phi) - (\partial_\mu \phi^\dagger) \phi \right] d^4x \right\} \mathcal{D}_{A^\mu \phi \phi^\dagger} \end{aligned}$$

Somos então capazes de determinar a 3-point function:

$$\begin{aligned}
G^{(3)}(x_1, x_2, x_3) &= \frac{(-i)^3}{\mathcal{Z}[0, 0, 0]} \frac{\delta^3 \mathcal{Z}[J_\mu, \eta^\dagger, \eta]}{\delta J_\mu(x_3) \delta \eta^\dagger(x_2) \delta \eta(x_1)} \Big|_{J_\mu, \eta^\dagger, \eta=0} \\
&= \frac{N}{\mathcal{Z}[0, 0, 0]} \int e^{iS_0} A^\mu(x_3) \phi(x_2) \phi^\dagger(x_1) \left\{ 1 + e \int A^\nu [\phi^\dagger(\partial_\mu \phi) - (\partial_\mu \phi^\dagger) \phi] d^4x + \right. \\
&\quad \left. \dots \right\} \mathcal{D}_{A^\mu \phi \phi^\dagger} \\
&= \frac{N}{\mathcal{Z}[0, 0, 0]} \int e^{iS_0} A^\mu(x_3) \phi(x_2) \phi^\dagger(x_1) \left\{ 1 + e \int A^\nu(x) \phi^\dagger(x) [\partial_\nu \phi(x)] d^4x - \right. \\
&\quad \left. e \int A^\nu [\partial_\nu \phi^\dagger(x)] \phi(x) d^4x + \dots \right\} \mathcal{D}_{A^\mu \phi \phi^\dagger} \\
&= \frac{N}{\mathcal{Z}[0, 0, 0]} \int e^{iS_0} \left\{ A^\mu(x_3) \phi(x_2) \phi^\dagger(x_1) + \right. \\
&\quad \left. e \int A^\mu(x_3) \phi(x_2) \phi^\dagger(x_1) A^\nu(x) \phi^\dagger(x) [\partial_\nu \phi(x)] d^4x - \right. \\
&\quad \left. e \int A^\mu(x_3) \phi(x_2) \phi^\dagger(x_1) A^\nu(x) [\partial_\nu \phi(x)^\dagger] \phi(x) d^4x + \dots \right\} \mathcal{D}_{A^\mu \phi \phi^\dagger}
\end{aligned}$$

Com base no teorema de Wick, primeiro termo não forma propagadores, de modo que pode ser ignorado e os outros termos da expansão formam propagadores da seguinte forma:



Temos então que a three-point function é da forma:

$$\begin{aligned}
G^{(3)}(x_1, x_2, x_3) &= \frac{N}{\mathcal{Z}[0, 0, 0]} \int e^{iS_0} \mathcal{D}_{A^\mu \phi \phi^\dagger} \left\{ e \int \mathbb{D}_F^{\mu\nu}(x_3 - x) \mathbb{D}_F(x_2 - x) \partial_\nu \mathbb{D}_F(x_1 - x) d^4x - \right. \\
&\quad \left. e \int \mathbb{D}_F^{\mu\nu}(x_3 - x) [\partial_\nu \mathbb{D}_F(x_2 - x)] \mathbb{D}_F(x_1 - x) d^4x \right\}
\end{aligned}$$

Como

$$\int e^{iS_0} \mathcal{D}_{A^\mu \phi \phi^\dagger} = \mathcal{Z}_0[0, 0, 0]$$

podemos escolher uma constante de normalização N tal que o quociente entre as funções se cancelem, ou seja, fazemos

$$N = \frac{\mathcal{Z}[0, 0, 0]}{\mathcal{Z}_0[0, 0, 0]}$$

Concluindo que a three-point function é dada por:

$$G^{(3)}(x_1, x_2, x_3) = e \int \mathbb{D}_F^{\mu\nu}(x_3 - x) \left\{ \mathbb{D}_F(x_2 - x) \partial_\nu \mathbb{D}_F(x_1 - x) - [\partial_\nu \mathbb{D}_F(x_2 - x)] \mathbb{D}_F(x_1 - x) \right\} d^4x$$

Agora para determinar a four-point function, precisamos do funcional gerador do segundo tipo de interação, de modo que a mudança será apenas em

$$\mathcal{Z}[J_\mu, \eta^\dagger, \eta] = \mathcal{Z}_0[J_\mu, \eta^\dagger, \eta] + i \int \mathcal{L}_{\text{int}} \left[-i \frac{\delta^3 \mathcal{Z}_0[J_\mu, \eta^\dagger, \eta]}{\delta J_\mu(x) \delta \eta^\dagger(x) \delta \eta(x)} \right] d^4x$$

pois agora, $\mathcal{L}_{\text{int}} = e^2 A_\mu A^\mu \phi^\dagger \phi$, temos então que fazendo o mesmo procedimento:

$$\mathcal{Z}[J_\mu, \eta^\dagger, \eta] = N \int e^{i(S_0 + S_n)} \left\{ 1 + i e^2 \int A_\mu A^\mu \phi^\dagger \phi d^4x \right\} \mathcal{D}_{A^\mu \phi \phi^\dagger}$$

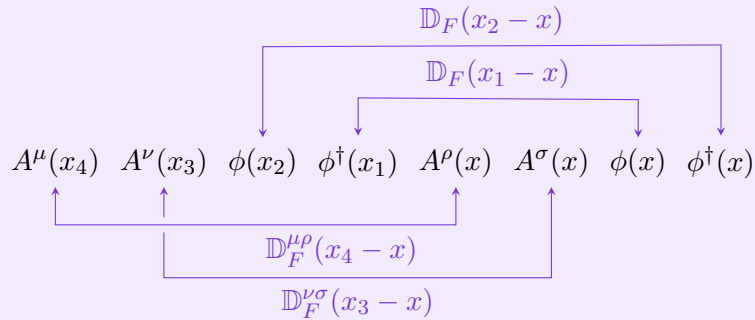
A four-point function pode ser determinada:

$$G^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{(-i)^4}{\mathcal{Z}[0, 0, 0]} \frac{\delta^4 \mathcal{Z}[J_\mu, \eta^\dagger, \eta]}{\delta J_\mu(x_4) \delta J_\nu(x_3) \delta \eta^\dagger(x_2) \delta \eta(x_1)} \Big|_{J_\mu, J_\nu, \eta^\dagger, \eta=0}$$

Usando que $A_\mu A^\mu = g_{\mu\nu} A^\nu A^\mu$:

$$\begin{aligned} G^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \frac{N}{\mathcal{Z}[0, 0, 0]} \int e^{iS_0} A^\mu(x_4) A^\nu(x_3) \phi(x_2) \phi^\dagger(x_1) \left\{ 1 + \right. \\ &\quad \left. e^2 \int g_{\sigma\rho} A^\rho(x) A^\sigma(x) \phi(x) \phi^\dagger(x) d^4x + \dots \right\} \mathcal{D}_{A^\mu \phi \phi^\dagger} \\ &= \frac{N}{\mathcal{Z}[0, 0, 0]} \int e^{S_0} \left\{ A^\mu(x_4) A^\nu(x_3) \phi(x_2) \phi^\dagger(x_1) + \right. \\ &\quad \left. e^2 g_{\sigma\rho} \int A^\mu(x_4) A^\nu(x_3) \phi(x_2) \phi^\dagger(x_1) A^\rho(x) A^\sigma(x) \phi(x) \phi^\dagger(x) d^4x + \dots \right\} \mathcal{D}_{A^\mu \phi \phi^\dagger} \end{aligned}$$

Novamente pelo teorema de Wick, o primeiro termo da expansão pode ser desprezado e o segundo gera o seguinte produto de propagadores:



Sendo assim, podemos usar um argumento semelhante para N de modo neste caso, pela simetria dos fótons, devemos ter $N = 2 \frac{\mathcal{Z}[0, 0, 0]}{\mathcal{Z}_0[0, 0, 0]}$, implicando que a four-point function fica:

$$G^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2e^2 g_{\sigma\rho} \int \mathbb{D}_F^{\mu\rho}(x_4 - x) \mathbb{D}_F^{\nu\sigma}(x_3 - x) \mathbb{D}_F(x_2 - x) \mathbb{D}_F(x_1 - x) d^4x$$

O próximo passo agora é determinar a regra para os vértices que buscamos.

Pela fórmula de redução do LSZ, temos que computar $\langle A^\mu(p_3)|\phi^\dagger(p_1)\phi(p_2)\rangle$ para descrever o primeiro tipo de vértice. Sabemos que:

$$\langle A^\mu(p_3)|\phi^\dagger(p_1)\phi(p_2)\rangle = \sqrt{2E_3}\sqrt{2E_1}\sqrt{2E_2}\langle 0|c_{p_3}^\dagger(+\infty)a_{p_1}(-\infty)b_{p_2}(-\infty)|0\rangle$$

onde usamos:

$$\begin{aligned}\sqrt{2E_1}[a_{p_1}(+\infty) - a_{p_1}(-\infty)] &= i \int e^{ip_1x_1}(\partial_1^2 + m^2)\phi^\dagger(x_1) d^4x_1 \\ \sqrt{2E_2}[b_{p_2}(+\infty) - b_{p_2}(-\infty)] &= i \int e^{ip_2x_2}(\partial_2^2 + m^2)\phi(x_2) d^4x_2 \\ \sqrt{2E_3}[c_{p_3}^\dagger(+\infty) - c_{p_3}^\dagger(-\infty)] &= i \int e^{-ip_3x_3}\epsilon^\nu(g_{\mu\nu}\partial_3^2)A^\mu(x_3) d^4x_3\end{aligned}$$

Os operadores $\partial^2 + m^2$ e $g_{\mu\nu}\partial^2$, quando atuam nos propagadores \mathbb{D}_F e $\mathbb{D}_F^{\mu\nu}$, irão fazer como que

$$\begin{aligned}(\partial^2 + m^2)\mathbb{D}_F(x_i - x) &= -i\delta^4(x_i - x) \\ (g_{\mu\sigma}\partial^2)\mathbb{D}_F^{\sigma\nu}(x_i - x) &= +i\delta_\mu^\nu\delta^4(x_i - x)\end{aligned}$$

Segue que a amplitude em termos do operador de ordenação temporal, que corresponde à three-point function quando calculado no estado inicial, fica:

$$\begin{aligned}\langle A^\mu(p_3)|\phi(p_1)\phi^\dagger(p_2)\rangle &= i^3 \int [e^{ip_1x_1}(\partial_1^2 + m^2)] [e^{ip_2x_2}(\partial_2^2 + m^2)] [e^{-ip_3x_3}\epsilon^\sigma(g_{\mu\sigma}\partial_3^2)] \\ &\quad \langle 0|\hat{\mathcal{T}}\{A^\mu(p_3)\phi^\dagger(p_1)\phi(p_2)\}|0\rangle d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 \\ &= -i \int [e^{ip_1x_1}(\partial_1^2 + m^2)] [e^{ip_2x_2}(\partial_2^2 + m^2)] [e^{-ip_3x_3}\epsilon^\sigma(g_{\mu\sigma}\partial_3^2)] \\ &\quad G^{(3)}(x_1, x_2, x_3) d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 \\ &= -ie \int [e^{ip_1x_1}(\partial_1^2 + m^2)] [e^{ip_2x_2}(\partial_2^2 + m^2)] [e^{-ip_3x_3}\epsilon^\sigma(g_{\mu\sigma}\partial_3^2)] \\ &\quad \mathbb{D}_F^{\mu\nu}(x_3 - x) \left\{ \mathbb{D}_F(x_2 - x)\partial_\nu\mathbb{D}_F(x_1 - x) - [\partial_\nu\mathbb{D}_F(x_2 - x)]\mathbb{D}_F(x_1 - x) \right\} \\ &\quad d^4x d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 \\ &= -ie \int [e^{ip_1x_1}(\partial_1^2 + m^2)] [e^{ip_2x_2}(\partial_2^2 + m^2)] [-ie^{-ip_3x_3}\epsilon^\sigma\delta_\sigma^\nu\delta^4(x_3 - x)] \\ &\quad \left\{ \mathbb{D}_F(x_2 - x)\partial_\nu\mathbb{D}_F(x_1 - x) - [\partial_\nu\mathbb{D}_F(x_2 - x)]\mathbb{D}_F(x_1 - x) \right\} \\ &\quad d^4x d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 \\ &= -e\epsilon^\nu \int [e^{ip_1x_1}(\partial_1^2 + m^2)] [e^{i(p_2x_2 - p_3x_3)}\delta^4(x_3 - x)] \\ &\quad \left\{ (-i)\delta^4(x_2 - x)\partial_\nu\mathbb{D}_F(x_1 - x) - (-i)\partial_\nu\delta^4(x_2 - x)\mathbb{D}_F(x_1 - x) \right\} \\ &\quad d^4x d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 \\ &= ie\epsilon^\nu \int [e^{i(p_1x_1 + p_2x_2 - p_3x_3)}\delta^4(x_3 - x)] \\ &\quad \left[(-i)\delta^4(x_2 - x)\partial_\nu\delta^4(x_1 - x) - (-i)\partial_\nu\delta^4(x_2 - x)\delta^4(x_1 - x) \right] \\ &\quad d^4x d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3\end{aligned}$$

Fazendo a integral apenas em x_3 por enquanto, temos que, denotando por $\Lambda(p_1, p_2, p_3) := \langle A^\mu(p_3) | \phi^\dagger(p_1) \phi(p_2) \rangle$:

$$\Lambda = e\epsilon^\nu \int e^{i(p_1 x_1 + p_2 x_2 - p_3 x)} \left[\delta^4(x_2 - x) \partial_\nu \delta^4(x_1 - x) - \partial_\nu \delta^4(x_2 - x) \delta^4(x_1 - x) \right] d^4x d^4x_1 d^4x_2$$

Podemos separar este resultado em duas partes então, tal que $\Lambda(p_1, p_2, p_3) \equiv \Lambda_1(p_1, p_2, p_3) - \Lambda_2(p_1, p_2, p_3)$, onde definimos:

$$\Lambda_1(p_1, p_2, p_3) := e\epsilon^\nu \int e^{i(p_1 x_1 + p_2 x_2 - p_3 x)} \delta^4(x_2 - x) \partial_\nu \delta^4(x_1 - x) d^4x d^4x_1 d^4x_2$$

$$\Lambda_2(p_1, p_2, p_3) := e\epsilon^\nu \int e^{i(p_1 x_1 + p_2 x_2 - p_3 x)} \partial_\nu \delta^4(x_2 - x) \delta^4(x_1 - x) d^4x d^4x_1 d^4x_2$$

Resolvendo Λ_1 primeiro, temos que:

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= e\epsilon^\nu \int e^{i(p_1 x_1 + p_2 x - p_3 x)} \partial_\nu \delta^4(x_1 - x) d^4x d^4x_1 \\ &= e\epsilon^\nu \int e^{ip_1 x_1} \left[e^{i(p_2 - p_3)x} \partial_\nu \delta^4(x_1 - x) \right] d^4x d^4x_1 \\ &= e\epsilon^\nu \int e^{ip_1 x_1} \left[e^{i(p_2 - p_3)x} \int \partial_\nu \delta^4(x_1 - x) d^4x - \int \partial_\nu e^{i(p_2 - p_3)x} \delta(x_1 - x) d^4x \right] d^4x_1 \end{aligned}$$

Notando que o primeiro termo da integração por partes constitui um termo de superfície, reduzimos o resultado a:

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= -e\epsilon^\nu \int e^{ip_1 x_1} \partial_\nu e^{i(p_2 - p_3)x} \delta(x_1 - x) d^4x d^4x_1 \\ &= -ie\epsilon^\nu (p_2 - p_3)_\nu \int e^{ip_1 x_1} e^{i(p_2 - p_3)x} \delta(x_1 - x) d^4x d^4x_1 \\ &= -ie\epsilon^\nu (p_2 - p_3)_\nu \int e^{i(p_1 + p_2 - p_3)x} d^4x \\ &= -ie\epsilon^\nu (p_2 - p_3)_\nu (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3) \end{aligned}$$

Agora para Λ_2 :

$$\begin{aligned} \Lambda_2 &= e\epsilon^\nu \int e^{i(p_1 x + p_2 x_2 - p_3 x)} \partial_\nu \delta^4(x_2 - x) d^4x d^4x_2 \\ &= e\epsilon^\nu \int e^{ip_2 x_2} e^{i(p_1 - p_3)x} \partial_\nu \delta^4(x_2 - x) d^4x d^4x_2 \\ &= e\epsilon^\nu \int e^{ip_2 x_2} \left[e^{i(p_1 - p_3)x} \int \partial_\nu \delta^4(x_2 - x) d^4x - \int \partial_\nu e^{i(p_1 - p_3)x} \delta(x_2 - x) d^4x \right] d^4x_2 \end{aligned}$$

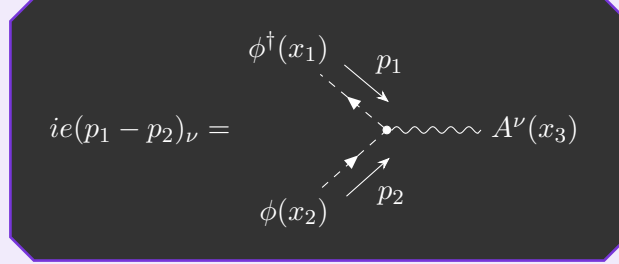
Desprezando o termo de superfície:

$$\begin{aligned} \Lambda_2 &= -e\epsilon^\nu \int e^{ip_2 x_2} \partial_\nu e^{i(p_1 - p_3)x} \delta(x_2 - x) d^4x d^4x_2 \\ &= -ie\epsilon^\nu (p_1 - p_3)_\nu \int e^{ip_2 x_2} e^{i(p_1 - p_3)x} \delta(x_2 - x) d^4x d^4x_2 \\ &= -ie\epsilon^\nu (p_1 - p_3)_\nu \int e^{i(p_2 + p_1 - p_3)x} d^4x \\ &= -ie\epsilon^\nu (p_1 - p_3)_\nu (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3) \end{aligned}$$

Temos portanto que:

$$\begin{aligned}\Lambda(p_1, p_2, p_3) &= ie\epsilon^\nu [-(p_2 - p_3)_\nu + (p_1 - p_3)_\nu] (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3) \\ &= ie\epsilon^\nu (p_1 - p_2)_\nu (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3)\end{aligned}$$

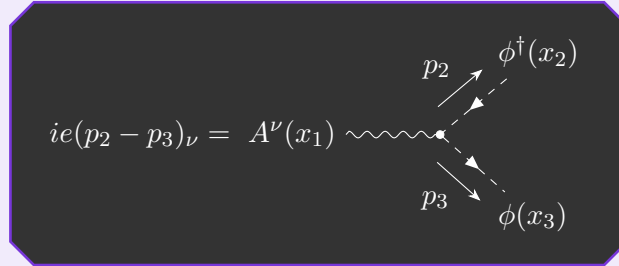
Se lembrarmos das regras de Feynman para, por exemplo, teoria de Yukawa, podemos assimilar os termos e concluir que o vértice do primeiro tipo é dado por:



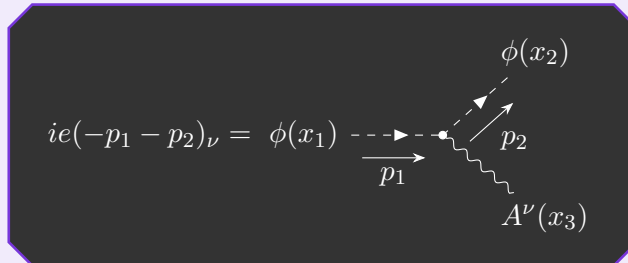
De modo que a regra dos sinais que encontramos é dada por:

$$\begin{array}{ccc} \xrightarrow{p} & & \xrightarrow{p} \\ \text{---} \blacktriangleright \text{---} & \Rightarrow -p_\nu & \text{---} \blacktriangleleft \text{---} \Rightarrow +p_\nu \end{array}$$

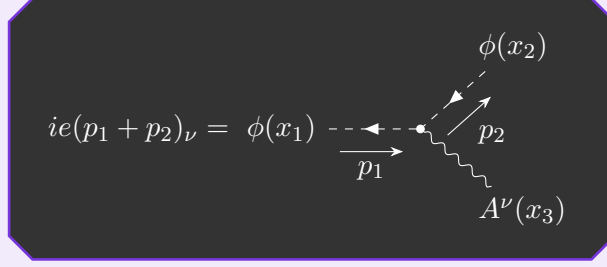
Podemos ver então de forma direta que se tratarmos o caso em que $\langle \phi^\dagger(p_2)\phi(p_3)|A^\mu(p_1)\rangle$, o fator $\epsilon^\nu \mapsto (\epsilon^\nu)^*$, o fator de conservação do momento muda para $(2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_2 - p_3)$ e o vértice fica:



Note que o primeiro vértice que obtivemos trata-se de um processo de aniquilação $\phi^\dagger\phi \rightarrow A^\nu$, já o segundo trata-se de um processo de produção de pares $A^\nu \rightarrow \phi^\dagger\phi$. O que podemos ter também são processos de espalhamento do tipo $\phi \rightarrow \phi A^\nu$ ou $\phi^\dagger \rightarrow \phi^\dagger A^\nu$, de modo que teremos sempre um bóson saindo (ϵ^ν), tal que o vértice do primeiro tipo de espalhamento será:



Já para o segundo:



Até agora, temos as seguintes regras de Feynman para a teoria:

- Para cada vértice que satisfaça a three-point function, adiciona-se o fator $ie(p_i + p_j)_\nu$ à amplitude do processo, onde a regra dos sinais deve ser obedecida;
- Para cada bóson “*entrando*”, adiciona-se o fator $(\epsilon^\nu)^*$ à amplitude do processo;
- Para cada bóson “*saindo*”, adiciona-se o fator ϵ^ν à amplitude do processo;
- A conservação do momento deve ser satisfeita em cada vértice do processo, de modo que adicionamos o fator $(2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i)$ para contribuição de cada diagrama relevante do processo, em que P_f é a soma de todos os momentos finais e P_i a soma de todos os momentos iniciais, todos satisfazendo a regra dos sinais.

Para finalizar todas as regras, precisamos determinar a regra do vértice da four-point function, o propagador para cada linha de campo escalar interna ao diagrama, o propagador para cada linha de campo de fóton interna ao diagrama e o que devemos fazer na presença de *loops*.

Para a regra do vértice da four-point function temos, pela redução do LSZ, que computar $\Lambda(p_1, p_2, p_3, p_4) := \langle A^\nu(p_3) A^\mu(p_4) | \phi^\dagger(x_1) \phi(x_2) \rangle$, ou seja:

$$\Lambda = \sqrt{2E_{p_3}} \sqrt{2E_{p_4}} \sqrt{2E_{p_1}} \sqrt{2E_{p_2}} \langle 0 | c_{p_3}^\dagger(+\infty) d_{p_4}^\dagger(+\infty) a_{p_1}(-\infty) b_{p_2}(-\infty) | 0 \rangle$$

tal que

$$\begin{aligned} \sqrt{2E_1} [a_{p_1}(+\infty) - a_{p_1}(-\infty)] &= i \int e^{ip_1 x_1} (\partial_1^2 + m^2) \phi^\dagger(x_1) d^4 x_1 \\ \sqrt{2E_2} [b_{p_2}(+\infty) - b_{p_2}(-\infty)] &= i \int e^{ip_2 x_2} (\partial_2^2 + m^2) \phi(x_2) d^4 x_2 \\ \sqrt{2E_3} [c_{p_3}^\dagger(+\infty) - c_{p_3}^\dagger(-\infty)] &= i \int e^{-ip_3 x_3} \epsilon^\alpha (g_{\alpha\nu} \partial_3^2) A^\nu(x_3) d^4 x_3 \\ \sqrt{2E_4} [d_{p_4}^\dagger(+\infty) - d_{p_4}^\dagger(-\infty)] &= i \int e^{-ip_4 x_4} \epsilon^\beta (g_{\beta\mu} \partial_4^2) A^\mu(x_4) d^4 x_4 \end{aligned}$$

Sendo assim, em termos do operador de ordenação temporal:

$$\begin{aligned} \Lambda &= (i)^4 \int [e^{ip_1 x_1} (\partial_1^2 + m^2)] [e^{ip_2 x_2} (\partial_2^2 + m^2)] [e^{-ip_3 x_3} \epsilon^\alpha (g_{\alpha\nu} \partial_3^2)] [e^{-ip_4 x_4} \epsilon^\beta (g_{\beta\mu} \partial_4^2)] \\ &\quad \langle 0 | \mathcal{T} \{ A^\nu(x_3) A^\mu(x_4) \phi^\dagger(x_1) \phi(x_2) \} | 0 \rangle d^4 x_1 d^4 x_2 d^4 x_3 d^4 x_4 \\ &= (i)^4 \int [e^{ip_1 x_1} (\partial_1^2 + m^2)] [e^{ip_2 x_2} (\partial_2^2 + m^2)] [e^{-ip_3 x_3} \epsilon^\alpha (g_{\alpha\nu} \partial_3^2)] [e^{-ip_4 x_4} \epsilon^\beta (g_{\beta\mu} \partial_4^2)] \\ &\quad G^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) d^4 x_1 d^4 x_2 d^4 x_3 d^4 x_4 \end{aligned}$$

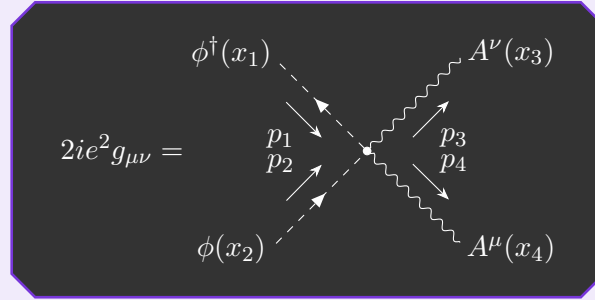
Abrindo a four-point function temos um caso mais simples, pois todos os propagadores são produtos, então não precisamos separar a integral, basta aplicarmos os operadores diretamente nos propagadores:

$$\begin{aligned}
\Lambda &= 2(i)^4 e^2 g_{\mu\nu} \int \left[-ie^{ip_1 x_1} \delta^4(x_1 - x) \right] \left[-ie^{ip_2 x_2} \delta^4(x_2 - x) \right] \left[i\epsilon^\alpha \delta^\nu_\alpha \delta^4(x_3 - x) \right] \left[i\epsilon^\beta \delta^\mu_\beta \delta^4(x_4 - x) \right] \\
&\quad d^4x d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 d^4x_4 \\
&= 2e^2 g_{\mu\nu} \epsilon^\nu \epsilon^\mu \int e^{i(p_1 x_1 + p_2 x_2 - p_3 x_3 - p_4 x_4)} \delta^4(x_1 - x) \delta^4(x_2 - x) \delta^4(x_3 - x) \delta^4(x_4 - x) \\
&\quad d^4x d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 d^4x_4 \\
&= 2e^2 g_{\mu\nu} \epsilon^\nu \epsilon^\mu \int e^{i(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)x} d^4x
\end{aligned}$$

Concluindo que a amplitude é da forma:

$$\Lambda(p_1, p_2, p_3, p_4) = 2ie^2 g_{\mu\nu} \epsilon^\nu \epsilon^\mu (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)$$

Sendo assim, a regra para o vértice satisfeito pela four-point function que encontramos é da forma:



Podemos ver a importância do fator 2 de simetria quando fazemos um processo contrário à este, ou seja, quando computamos $\langle \phi^\dagger(x_3) \phi(x_4) | A^\nu(p_1) A^\mu(p_2) \rangle$. Como o vértice não depende explicitamente dos momentos, a contribuição será a mesma, ou seja $2ie^2 g_{\mu\nu}$. O que realmente irá mudar serão os fatores $\epsilon^\nu \mapsto (\epsilon^\nu)^*$, $\epsilon^\mu \mapsto (\epsilon^\mu)^*$ e o fator de conservação de momento será o mesmo também.

Para determinar uma linha de campo escalar interna ao diagrama, precisamos determinar $\langle 0 | \phi^\dagger(x) \phi(y) | 0 \rangle$. Sabemos que um propagador de Feynman para campos escalares pode ser escrito como, conforme a Lecture 9 do Burdman (2021):

$$\mathbb{D}_F(x - y) = \langle 0 | \mathcal{T} \{ \phi^\dagger(x) \phi(y) \} | 0 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} e^{ip(x-y)} d^4p$$

De modo que o propagador que buscamos dentro do diagrama é dado pelo fator dentro da integral sem a exponencial, portanto:

$$\langle 0 | \phi^\dagger(x) \phi(y) | 0 \rangle = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}$$

Agora para uma linha de campo de fóton interna ao diagrama, temos diretamente da Lecture 18 do Burdman (2021):

$$\langle 0 | A^\mu(x) A^\nu(y) | 0 \rangle = -\frac{ig^{\mu\nu}}{p^2 + i\varepsilon}$$

Finalmente, as regras de Feynman para teoria de QED escalar são:

- (Regra dos sinais) Para os alinhamentos de fluxo do diagrama e dos momentos, tem-se:

$$\begin{array}{ccc} \xrightarrow{p} & & \xrightarrow{p} \\ \text{---} \blacktriangleright \text{---} & \Rightarrow -p_\nu & \text{---} \blacktriangleleft \text{---} \Rightarrow +p_\nu \end{array}$$

- Para cada vértice que satisfaça a three-point function, adiciona-se o fator $ie(p_i + p_j)_\nu$ à amplitude do processo, onde a regra dos sinais deve ser obedecida;
- Para cada vértice que satisfaça a four-point function, adiciona-se o fator $2ie^2 g_{\mu\nu}$ à amplitude do processo;
- Para cada fóton “*entrando*”, adiciona-se o fator $(\epsilon^\nu)^*$ à amplitude do processo;
- Para cada fóton “*saindo*”, adiciona-se o fator ϵ^ν à amplitude do processo;
- A conservação de momento deve ser satisfeita para cada vértice do diagrama. Adiciona-se portanto o fator $(2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i)$ para contribuição de cada diagrama relevante ao processo, tal que P_f é a soma dos momentos finais e P_i a soma dos momentos iniciais, todos satisfazendo a regra dos sinais;
- Para cada linha interna relacionada a um campo escalar, adiciona-se o propagador

$$\frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}$$

- Para cada linha interna relacionada a uma campo de fóton, adiciona-se o propagador

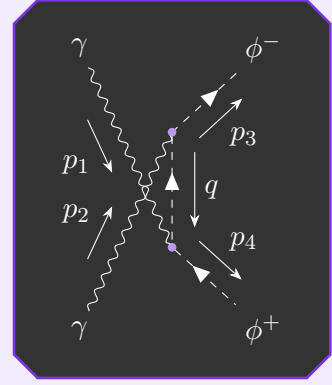
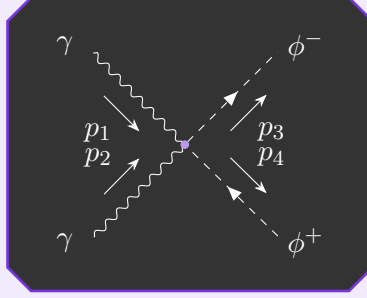
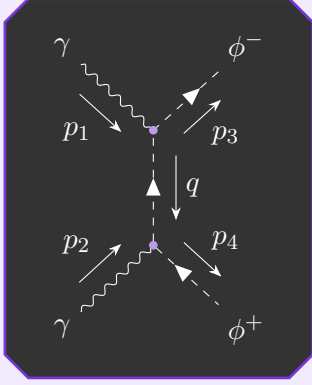
$$-\frac{ig^{\mu\nu}}{p^2 + i\varepsilon}$$

(b) Draw all the Feynman diagrams and compute the amplitude for the process $\gamma\gamma \rightarrow \phi^+\phi^-$.

Solution:

Para o processo $\gamma\gamma \rightarrow \phi^+\phi^-$, temos 3 possíveis diagramas, dois deles podem ser interpretados como “*quânticos*”, ou seja, não podemos determinar qual deles ao certo vai ocorrer no processo, portanto temos as duas possibilidades sobrepostas. O terceiro diagrama decorre diretamente da four-point function do item (a).

Os diagramas possíveis para o processo $\gamma\gamma \rightarrow \phi^+\phi^-$ são então:



O primeiro diagrama, do tipo *t*, terá pelas regras deduzidas no item (a) que ao definirmos $q = p_1 - p_3 = p_4 - p_2$, teremos a conservação do momento implícita e a amplitude será:

$$\begin{aligned} i\mathcal{A}_t &= (-ie)^2(\epsilon^\mu)^*(-p_3 + q)_\mu \frac{i}{q^2 - m^2}(\epsilon^\nu)^*(p_4 + q)_\nu \\ &= (-ie)^2(\epsilon^\mu)^*[-p_3 + (p_1 - p_3)]_\mu \frac{i}{q^2 - m^2}(\epsilon^\nu)^*[p_4 + (p_4 - p_2)]_\nu \\ &= (-ie)^2(\epsilon^\mu)^*(p_1 - 2p_3)_\mu \frac{i}{q^2 - m^2}(\epsilon^\nu)^*(2p_4 - p_2)_\nu \end{aligned}$$

Concluindo que para este diagrama, a amplitude fica:

$$\mathcal{A}_t = -\frac{e^2}{q^2 - m^2}(\epsilon^\mu)^*(p_1 - 2p_3)_\mu(\epsilon^\nu)^*(2p_4 - p_2)_\nu \quad (1.12)$$

Para o segundo diagrama, do tipo “*Seagull*”, conforme usado pelo Schwartz (2014), teremos-a de forma direta, pois temos um tipo de vértice, e portanto:

$$i\mathcal{A}_{\text{seagull}} = 2ie^2 g_{\mu\nu}(\epsilon^\mu)^*(\epsilon^\nu)^*$$

implicando que

$$\mathcal{A}_{\text{seagull}} = 2e^2 g_{\mu\nu}(\epsilon^\mu)^*(\epsilon^\nu)^* \quad (1.13)$$

Por fim, para o diagrama do tipo *u*, ao definirmos $q = p_4 - p_1 = p_2 - p_3$, a conservação do momento será respeitada e a amplitude fica:

$$\begin{aligned} i\mathcal{A}_u &= (-ie)^2(\epsilon^\mu)^*(-p_3 + q)_\mu \frac{i}{q^2 - m^2}(\epsilon^\nu)^*(p_4 + q)_\nu \\ &= (-ie)^2(\epsilon^\mu)^*[-p_3 + (p_2 - p_3)]_\mu \frac{i}{q^2 - m^2}(\epsilon^\nu)^*[p_4 + (p_4 - p_1)]_\nu \\ &= (-ie)^2(\epsilon^\mu)^*(p_2 - 2p_3)_\mu \frac{i}{q^2 - m^2}(\epsilon^\nu)^*(2p_4 - p_1)_\nu \end{aligned}$$

ou seja

$$\mathcal{A}_u = -\frac{e^2}{q^2 - m^2}(\epsilon^\mu)^*(p_2 - 2p_3)_\mu(\epsilon^\nu)^*(2p_4 - p_1)_\nu \quad (1.14)$$

Portanto, a amplitude do processo será dada pela soma de (1.12), (1.13) e (1.14).

(c) Choose **one** of the diagrams and compute its contribution to the differential cross section $\frac{d\sigma}{d\cos\theta}$.

Solution:

De forma a simplificar as contas e entregar logo esta lista, escolho o diagrama “*seagull*” para computar sua contribuição para a seção de choque diferencial. Para isto, comecemos com o quadrado da amplitude do diagrama:

$$|\mathcal{A}_{\text{seagull}}|^2 = (i\mathcal{A}_{\text{seagull}}^\dagger)(i\mathcal{A}_{\text{seagull}}) = [-2ie^2 g_{\alpha\beta} \epsilon^\alpha \epsilon^\beta] [2ie^2 g_{\mu\nu} (\epsilon^\mu)^* (\epsilon^\nu)^*]$$

Podemos rearranjar os termos afim de usar a relação de completeza:

$$\sum_k (\epsilon_k^\mu)^* \epsilon_k^\nu = g^{\mu\nu}$$

Sendo assim:

$$|\mathcal{A}_{\text{seagull}}|^2 = 4e^2 g_{\alpha\beta} [(\epsilon^\alpha)^* \epsilon^\mu] g_{\mu\nu} [(\epsilon^\beta)^* \epsilon^\nu] = 4e^4 g_{\alpha\beta} g^{\alpha\mu} g_{\mu\nu} g^{\beta\nu} = 4e^4 \delta_\mu^\beta \delta_\beta^\mu = 16e^4$$

Com isso, podemos considerar as devidas contribuições de spin, de modo que:

$$\overline{|\mathcal{A}_{\text{seagull}}|^2} = \frac{1}{4} |\mathcal{A}_{\text{seagull}}|^2 = 4e^4$$

Trabalhando no centro de massa do sistema, podemos usar os mesmos argumentos que usamos no Exercício 2 e na lista 3, de modo que a única mudança é o fato de não considerarmos $m = 0$, tal que como $E_{\text{cm}}^2 = s$, existirá um fator cinético da forma

$$\sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}}$$

que não pode ser ignorado. Este fator foi mostrado no último exercício da lista 3. Temos então que a seção de choque diferencial será dada por:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 s} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}} \overline{|\mathcal{A}_{\text{seagull}}|^2} = \frac{e^4}{16\pi^2 s} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}}$$

Usando então que podemos escrever

$$\int_0^{2\pi} d\Omega = 2\pi d\cos\theta$$

concluimos que a seção de choque diferencial do diagrama “*seagull*” é dada por:

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{e^4}{8\pi s} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}} \quad (1.15)$$

References

- Burdman, G. (2021). *Introduction to Quantum Field Theory*. São Paulo, Brazil: Authorial Text.
- Schwartz, M.D. (2014). *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press.