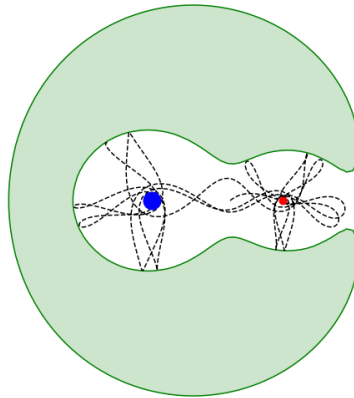


# Mecánica Celeste y Analítica

## Teoría, problemas y algoritmos



**Jorge I. Zuluaga**

Profesor titular de Física y Astronomía

Instituto de Física, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Universidad de Antioquia

11 de octubre de 2019

BORRADOR

# Índice general

<b>1.</b>	<b>Prefacio</b>	<b>7</b>
1.1.	¿Otro libro de mecánica celeste?	8
1.2.	Mecánica celeste y mecánica analítica	9
1.3.	Mecánica celeste en la era de la información	10
1.4.	Mecánica celeste en Python	10
1.5.	Mecánica celeste con SPICE	12
1.6.	¿Qué hace distinto a este libro?: un decálogo	13
<b>2.</b>	<b>Agradecimientos</b>	<b>17</b>
<b>3.</b>	<b>Introducción</b>	<b>19</b>
3.1.	¿Cómo se organiza este libro?	19
3.2.	¿Cómo usar este libro?	26
3.3.	Mecánica celeste en <i>libretas</i>	27
3.3.1.	Instalación de las libretas	28
3.4.	Idioma y Notación	28
3.4.1.	Extranjerismos y pronunciación	28
3.4.2.	Siglos y décadas	29
3.4.3.	Notación matemática	29
3.5.	Estructura del libro	30
3.5.1.	Cajas de texto	30
3.5.2.	Algoritmos	32
3.6.	Figuras interactivas y animaciones	34
<b>4.</b>	<b>Fundamentos</b>	<b>37</b>
4.1.	Vectores y cálculo	37
4.1.1.	Conjunto, tuplas y vectores	38
4.1.2.	Sistemas de coordenadas	43
4.1.3.	Funciones	45
4.1.4.	Derivadas	48
4.1.5.	Funciones homogéneas	50
4.1.6.	Derivada vectorial	51
4.1.7.	Integrales	52
4.1.8.	Integrales vectoriales	53
4.1.9.	Ecuaciones diferenciales	55
4.1.10.	Funcionales y cálculo de variaciones	62

4.1.11.	Gráficos interactivos . . . . .	68
<b>5.</b>	<b>Mecánica de partículas</b>	<b>71</b>
5.1.	Cinemática . . . . .	72
5.1.1.	Cantidades cinemáticas . . . . .	72
5.1.2.	Sistemas de referencia . . . . .	74
5.1.3.	La ecuación de movimiento (e.d.m.) . . . . .	75
5.1.4.	Integración de la e.d.m. . . . .	77
5.1.5.	Integración por cuadraturas . . . . .	77
5.1.6.	Integración numérica de la e.d.m. . . . .	80
5.2.	Dinámica . . . . .	86
5.2.1.	Cantidades dinámicas . . . . .	86
5.2.2.	Partículas y fuerzas . . . . .	87
5.2.3.	Sistemas de referencia inerciales . . . . .	88
5.2.4.	Postulado de fuerzas . . . . .	89
5.2.5.	Fuerzas conservativas y no conservativas . . . . .	91
5.2.6.	Energía mecánica . . . . .	92
5.2.7.	¿Ley de inercia? . . . . .	93
5.2.8.	Postulado de acción y reacción . . . . .	94
5.2.9.	Postulado de gravitación universal . . . . .	94
5.2.10.	La fuerza gravitacional de la Tierra, el Sol y la la Luna . . . . .	96
5.2.11.	El campo gravitacional . . . . .	97
5.2.12.	Energía potencial gravitacional . . . . .	98
5.2.13.	Masa y principio de equivalencia . . . . .	98
5.3.	Sistemas de partículas . . . . .	101
5.3.1.	Fuerzas y centro de masa . . . . .	101
5.3.2.	Centro de masa de un sistema de dos partículas . . . . .	106
5.3.3.	Teoremas de conservación . . . . .	108
5.3.4.	Dinámica referida al centro de masa . . . . .	111
	<b>Bibliografía</b>	<b>117</b>

# Índice de figuras

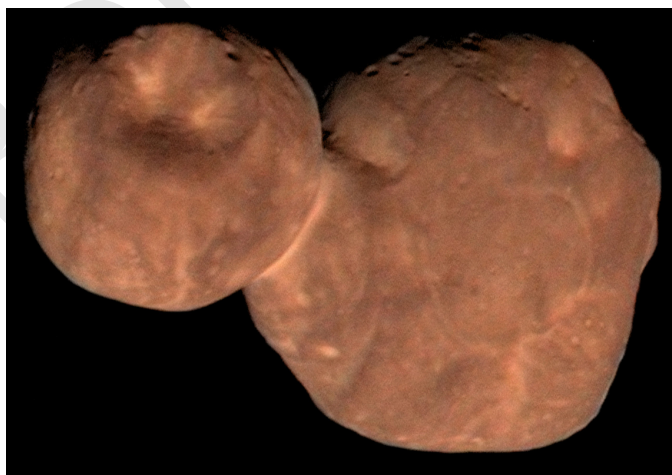
1.1.	Imagen procesada de Ultima Thule, el objeto transneptuniano sobrevolado por la sonda New Horizons en 2019 (crédito: NASA/Johns Hopkins University Applied Physics Laboratory/Southwest Research Institute/Roman Tkachenko.) . . . . .	7
1.2.	Figura correspondiente al código 1.1. . . . .	12
3.1.	Retrato de Johannes Kepler, copia de un original de 1610 de pintor desconocido y que se conserva en el monasterio Benedictino de Kremsmünster . . . . .	31
3.2.	Figura correspondiente al código 3.3. . . . .	34
3.3.	Gráfico de las funciones trigonométricas básicas, en el intervalo de interés (gráfico generado). . . . .	35
4.1.	Definición geométrica de vector espacial y de sus operaciones básicas (suma, resta y multiplicación por un escalar). Aunque la resta de $\vec{A} - \vec{B}$ es un caso particular de la suma, es importante aquí familiarizarse con la dirección que tiene este vector (va de la cabeza del sustraendo $\vec{B}$ a la del minuendo $\vec{A}$ ). . . . .	39
4.2.	Definición de los sistemas de coordenadas usadas en este texto . . .	44
4.3.	Figura correspondiente al código 4.3. Solución aproximada de la ecuación diferencial $d^2F/dt^2 = -kF$ con $k=1.5$ . . . . .	61
4.4.	El área bajo una curva es un funcional, en tanto depende de la función que represente la curva, $f(t)$ o $f_0(t)$ . Se conoce como una variación $\delta f$ a la diferencia entre dos funciones cercanas, parametrizada a través de un número real $\epsilon$ y una función plantilla (panel inferior.) En términos de variaciones el valor de cualquier función vecina a una función de referencia $f_0$ se puede calcular, en un intervalo de interés, como $f(t) = f_0(t) + \epsilon \eta(t)$ . . . . .	63
4.5.	Figura correspondiente al código 4.5. La curva continua indica una aproximación numérica al camino más corto entre los puntos $(0,0)$ y $(0,\pi)$ del plano euclidiano, encontrada al minimizar el funcional longitud de arco y usando como función de prueba $f_0 = (t/\pi)^n$ (línea punteada) y como función plantilla $\epsilon(t) = \sin t$ . El valor de $\epsilon$ que corresponde a la solución se muestra en la etiqueta. Para comparación se muestra (línea rayada) la solución exacta, que corresponde a una línea recta. . . . .	69

5.1.	Figura correspondiente al código 5.2. La figura muestra la solución numérica a la e.d.m. de un sistema sometido a un tirón constante $\vec{j} = j_0 \hat{e}_x$ . . . . .	83
5.2.	Figura correspondiente al código 5.3. Comparación de la solución numérica (puntos) y la solución analítica (línea continua) de la e.d.m. de un sistema con tirón constante $j_0 = 0,5$ . . . . .	84
5.3.	Figura correspondiente al código 5.4. Solución numérica de la e.d.m. de un sistema dinámico con aceleración $\vec{a} : (-2,5x, 0, 0)$ . . . . .	86
5.4.	Dos formas del postulado de acción y reacción: a la izquierda el postulado débil, en el que las fuerzas son iguales y de sentido contrario, pero no son paralelas a la línea que une las partículas; a la derecha el postulado fuerte en el que la acción y reacción actúan sobre la línea que une a las partículas. . . . .	95
5.5.	Definición de los vectores de posición, vector relativo y vector de fuerza en el postulado de gravitación universal. . . . .	96
5.6.	El único retrato disponible de Simon Stevin (ca. 1548). Crédito: Colección Universidad de Leiden. . . . .	100
5.7.	Figura correspondiente al código 5.7. Un sistema de tres partículas. El tamaño del círculo que representa cada partícula es proporcional a su masa. La cruz y la flecha adherida a ella muestran la posición y velocidad del centro de masa. . . . .	106
5.8.	Relación entre la posición del centro de masa $\vec{R}$ , el vector relativo $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ y la posición de las partículas en un sistema de dos cuerpos. . . . .	107
5.9.	Primera página de la obra cumbre de Kepler <i>Astronomía Nova</i> . . . . .	108

## Capítulo 1

# Prefacio

En el mismo año en el que escribo estas palabras, celebramos el centenario de la histórica observación de un eclipse total de Sol, liderada por *Sir Arthur Eddington* y que permitió la primera confirmación experimental de las predicciones de la teoría general de la relatividad. Hace tan solo unos meses, una nave espacial, la sonda **New Horizons**, sobrevoló el cuerpo astronómico más remoto fotografiado por nuestra especie, el objeto transneptuniano **2014 (MU69) “Ultima Thule”**; la misma sonda, cinco años antes, había pasado “rozando” la superficie de Plutón, enviándonos imágenes inesperadas de un mundo sorprendente. Muy lejos de allí, y también en el año en el que escribo este prefacio, dos naves espaciales, una japonesa, la sonda **Hayabusa 2** y la otra estadounidense, **OSIRIS-REx**, transmitieron imágenes impactantes desde la superficie de dos pequeños asteroides, cuerpos que visitaron con el objeto de traer muestras a la Tierra.



**Figura 1.1:** Imagen procesada de Ultima Thule, el objeto transneptuniano sobrevolado por la sonda New Horizons en 2019 (crédito: NASA/Johns Hopkins University Applied Physics Laboratory/Southwest Research Institute/Roman Tkachenko.)

Todas estas hazañas de exploración y conocimiento fueron posibles gracias a la **Mecánica Celeste**. Esta disciplina científica, combinación asombrosa de astronomía, física y matemáticas, comenzó con el trabajo teórico pionero de *Johanes Kepler* a principios de los 1600; se estableció con la obra cumbre de *Sir Isaac Newton*, los *Principios Matemáticos de la Filosofía Natural* [8], publicada a finales de los 1600; y alcanzó su apogeo entre los 1700 y los 1800 con los trabajos de matemáticos y astrónomos como *Edmund Halley*, *Leonhard Euler*, *Pierre-Simon Laplace*, *Joseph-Louis Lagrange*, *William Rowan Hamilton* y *Henri Poincaré* (entre muchos otros que mencionaremos en este libro).

Este libro presenta una visión panorámica de la mecánica celeste y en general de la **mecánica analítica** o **mecánica clásica**, que se desarrollo de forma paralela a la primera, inspirada, en muchos casos, por sus problemas. El texto esta dirigido especialmente a quiénes, por su formación o trabajo, están interesados en la aplicación de la mecánica celeste en astronomía o en ingeniería aeroespacial. Su extensión, énfasis y nivel de profundidad lo hace especialmente adecuado para estudiantes de pregrado (licenciatura o bachillerato, dependiendo del país) de cualquier programa científico o técnico, especialmente astronomía, física o ingeniería aeroespacial. Su enfoque computacional, lo podría hacer, además, útil como material de referencia para profesionales de estas disciplinas.

## 1.1. ¿Otro libro de mecánica celeste?

Al escribir este libro, no pretendo hacer un compendio exhaustivo de la Mecánica Celeste, que, durante más de 400 años de historia se ha convertido en una disciplina científica basta y en constante desarrollo.

Muchos textos en la materia han sido escritos desde los tiempo de Newton, la mayoría en las últimas décadas. Algunos presentan detallados y rigurosos desarrollos matemáticos. Otros están orientados específicamente al Sistema Solar o al movimiento de satélites y vehículos espaciales. Muchos más son buenos libros de texto, la mayoría dirigidos a estudiantes de posgrado (la mecánica celeste es considerada una línea de profundización, tanto en física como en astronomía.) También se han escrito algunos libros divulgativos y al alcance de aficionados.

La bibliografía de este libro recoge una lista de importantes referencias en la materia, que serán citados a lo largo de sus capítulos, y que, de antemano, invito a los lectores a explorar con curiosidad para no quedarse con la punta de el inmenso *iceberg* que apenas alcanzará a asomarse en estas páginas.

Siendo este el caso ¿para qué escribir un libro más de mecánica celeste? Existen dos razones fundamentales que me motivaron a emprender esta aventura.

La primera es que, como mencione antes, la mayoría de los libros de mecánica celeste están dirigidos a estudiantes con una formación media o avanzada en matemáticas, mecánica newtoniana y mecánica analítica. Como se acostumbra decir, tienen un nivel de posgrado. En contraste, el número de textos al “alcance” de estudiantes de los primeros años universitarios, no es muy grande. Escribo este libro para contribuir a enriquecer precisamente ese “nicho”.

Podría argumentarse que la mecánica celeste, como aplicación específica de la mecánica, es un tema especializado y de allí que sus textos estén dirigidos a estudiantes más avanzados. Sin embargo, la importancia de esta disciplina en la historia de la astronomía y de la física, así como su potencial para describir fenómenos



fascinantes, desde el movimiento de planetas y naves espaciales, hasta la colisión de agujeros negros, hace de la mecánica celeste un medio educativo excelente para introducir conceptos teóricos en física y astronomía, que, sin un contexto y motivación apropiado, son difíciles de digerir.

Un buen libro de mecánica celeste o mecánica analítica, sin importar su nivel, debería poder ser estudiado por cualquier estudiante, incluso de pregrado. Esa ha sido la premisa en muchos centros académicos. Pero la realidad es más compleja. Como cualquier profesor sensible sabe, para valorar realmente los logros intelectuales del pasado, entender las motivaciones que llevaron a los padres de una disciplina a introducir hipótesis o formular las leyes de la misma, se necesita experiencia académica. Experiencia que la mayoría de los estudiantes de pregrado no tienen. No es solo un problema de nivel matemático, es también un problema de falta de exposición a la materia.

Este libro, pretende ser un buen *primer* libro de mecánica celeste y mecánica analítica. Un primer escalón para abordar, ya con experiencia, libros más avanzados.

## 1.2. Mecánica celeste y mecánica analítica

La segunda razón, y la original para mí como profesor del pregrado de Astronomía en la Universidad de Antioquia, fue la necesidad de escribir un texto de mecánica celeste que permitiría además una formación en los principios y métodos de la mecánica analítica (mecánica teórica o mecánica clásica). Esos principios y métodos son instrumentales en la formulación de la mecánica cuántica y lo son además en versiones modernas de otras áreas de la física clásica, como la relatividad o la electrodinámica. La mecánica analítica es indispensable entonces en la formación de cualquier estudiante de ciencias físicas.

En la inmensa mayoría de los textos clásicos de mecánica celeste, los resultados se derivan usando, casi exclusivamente, los métodos de lo que llamaremos aquí el **formalismo vectorial o geométrico de la mecánica**. En este formalismo (originalmente introducido por Newton y desarrollado posteriormente por Euler) las fuerzas juegan el papel central en la descripción de la dinámica (*dime cuánto te halan y te diré cómo te mueves*.)

Desde los trabajos pioneros de matemáticos y “físicos” de los 1700 y 1800, tales como *Alambert*, *Lagrange*, *Hamilton* y *Jacobi*, se hizo evidente que algunos problemas complejos de mecánica celeste podían abordarse usando un **formalismo analítico de la mecánica**. En este formalismo, los sistemas se describen usando *funcionales* tales como el *Lagrangiano* o el *Hamiltoniano*, que contienen toda la información relevante del sistema, sus restricciones y simetrías (*dime cuál es tu hamiltoniano y no solo te diré para dónde vas sino también cómo eres*.)

Un caso ilustrativo, muy popular y reciente, de como el formalismo analítico de la mecánica es aplicado hoy, de forma generalizada, en mecánica celeste, es la “predicción” de un nuevo planeta en el Sistema Solar, más allá del cinturón de Kuiper, cuya existencia, a la fecha, no se ha confirmado, ni rechazado [3]. Este trabajo también es la punta de un inmenso “iceberg” de literatura científica en mecánica celeste en la que el formalismo analítico es protagonista.

Más allá entonces de la necesidad práctica de juntar a la mecánica celeste y a la mecánica analítica en un mismo texto, de modo que sirva a estudiantes de pro-

gramas académicos como astronomía o ingeniería aeroespacial, este libro presenta este particular “matrimonio” entre dos disciplinas clásicas de la astronomía y la física como lo que es: una relación estrecha entre dos cuerpos de conocimiento inseparables.

### 1.3. Mecánica celeste en la era de la información

Un ingrediente adicional hace a este libro diferente. Me refiero al énfasis especial que daremos a los algoritmos de la mecánica celeste a través de todo el libro.

Es un hecho reconocido que la complejidad de muchos problemas de mecánica celeste, en particular aquellos con un interés práctico tales como el diseño de trayectorias de vehículos espaciales, la predicción de la posición precisa de asteroides y cometas que pueden amenazar nuestro planeta o la predicción a largo plazo de la posición de los cuerpos del sistema solar y otros sistema planetarios, ha exigido, casi desde los tiempos de Kepler, el desarrollo y aplicación de métodos numéricos y, más recientemente, su implementación en calculadores y computadores.

En este sentido, la relación de la mecánica celeste con *algoritmos* de toda clase, no es comparable con la relación, principalmente utilitaria, que tienen la mayoría de las área de la física con la computación. Podría decirse, que hoy, es casi impensable saber de mecánica celeste, sin estar familiarizado también con sus algoritmos.

Pensando en esto, todo el contenido del libro ha sido elaborado usando *libretas* o *notebooks* del Proyecto Jupyter<sup>1</sup>. Estas libretas pueden ser obtenidas y usadas por el lector para interactuar con y modificar los algoritmos. Este medio tecnológico permite además aprovechar gráficos interactivos y animaciones (disponibles en la versión electrónica del texto) para entender mejor conceptos que pueden ser difíciles.

En la versión impresa, los algoritmos se presentarán en cajas especiales de texto como esta:

```
import math
e=0.3
M=0.5
E=M
Eo=2*M
while abs(E-Eo)>0.01:
    Eo=E
    E=M+e*math.sin(E)
```

¿Puede el lector adivinar qué hace este algoritmo? ¿sabe en qué lenguaje de programación está escrito?

### 1.4. Mecánica celeste en Python

Es casi imposible escribir un libro con algoritmos sin comprometerse con un lenguaje de programación específico (especialmente si queremos que los algoritmos funcionen.) En el caso de esta edición del libro, el lenguaje elegido es Python.

<sup>1</sup><https://jupyter.org>

Esta siempre será una apuesta arriesgada. Aunque la mecánica celeste y sus algoritmos no pasarán de “moda”, los lenguajes de programación van y vienen. Es un hecho (poco reconocido) que cientos de libros científicos acumulan polvo por haber comprometido su contenido con lenguajes de programación que hoy no son tan populares (BASIC o Pascal por ejemplo)

No sabemos si Python y este libro sufrirán la misma suerte. Pero hay tres hechos que *sugieren* que la popularidad de este lenguaje podría durar más de lo esperado (o al menos esa es mi esperanza).

El primero es que su sintaxis es muy similar a la del “lenguaje natural”. Considere, por ejemplo, el algoritmo presentado antes (que ya lo sabe, esta escrito en Python) o el siguiente algoritmo, aún más simple:

```
from math import pi
for n in range(1,5):
    print("pi a la",n,"es",pi**n)
```

```
pi a la 1 es 3.141592653589793
pi a la 2 es 9.869604401089358
pi a la 3 es 31.006276680299816
pi a la 4 es 97.40909103400242
```

Es difícil que estos algoritmos se escriban de manera tan natural en casi cualquier otro lenguaje de programación popular en ciencia (C, FORTRAN o Java.) Este hecho, no solo facilita el aprendizaje del lenguaje, sino también la legibilidad de los algoritmos.

El segundo hecho que demuestra el promisorio futuro de Python como lenguaje de la computación científica, es la creciente cantidad de paquetes, en todas las disciplinas de la ciencia y la técnica, que se escriben permanentemente en este lenguaje y que están disponibles en [repositorios públicos](#)<sup>2</sup>. Además, herramientas informáticas muy conocidas (bibliotecas de rutinas, bases de datos, sistemas de información, etc.) escritas originalmente en otros lenguajes, han sido ahora traducidas a Python (*pythonizadas* si quieren) con el único propósito de que puedan ser usadas por la creciente comunidad de desarrolladores en este lenguaje.

Python se está convirtiendo, y esta es una conjetura mía, en depositario de décadas de experiencia en ciencia computacional. ¿Cambiará esta tendencia pronto? Lo dudo (o al menos así lo espero, por el bien de este libro).

Una última razón, pero no por ello, menos importante, para elegir Python como el idioma oficial de los algoritmos en este libro, es la existencia de una biblioteca gráfica, robusta y bien documentada, escrita para este lenguaje. Me refiero por supuesto a [matplotlib](#)<sup>3</sup>. Y es que, con la excepción de paquetes científicos que incluyen avanzadas facilidades de graficación, tales como Mathematica, Matlab, o IDL (todos ellos sujetos a un pago), la mayoría de los lenguajes de programación dependen, a veces, de complejas bibliotecas gráficas o programas de terceros para hacer, hasta los más sencillos gráficos.

En Python, hacer un gráfico elemental, es tan simple como escribir:

<sup>2</sup><https://pypi.org/project/IPy>

<sup>3</sup><https://matplotlib.org/>

(Algoritmo 1.1)

```
from matplotlib.pyplot import plot  
plot([1,2,3,4],[1,4,9,16]);
```

ver Figura 1.2

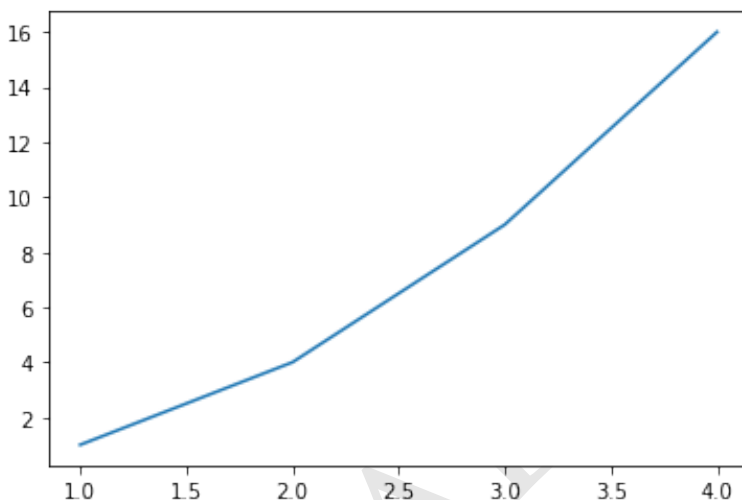


Figura 1.2: Figura correspondiente al código 1.1.

## 1.5. Mecánica celeste con SPICE

Con el temor de haberlos aburrido ya suficiente con este largo prefacio, no puedo dejar de mencionar aquí, una última herramienta que será protagonista en este libro. Se trata de SPICE, una aplicación desarrollado para la *NASA's Navigation and Ancillary Information Facility (NAIF)*<sup>4</sup>.

SPICE es un sistema de información de uso libre, formado basicamente por una biblioteca de rutinas para realizar cálculos en mecánica celeste y de datos (*kernels*) que permiten, usando esas mismas rutinas, la determinación de la posición y orientación precisa (pasada y futura) de muchos cuerpos del Sistema Solar y de algunos vehículos espaciales lanzados al espacio por nuestra especie.

Esta herramienta ha cobrado, en años recientes, una popularidad significativa en la comunidad académica. Sus rutinas y *kernels* están detrás de algunas de los servicios en línea más populares de NASA, tales como el sistema *NASA Horizons*<sup>5</sup>, que permite, a través de distintas interfaces, calcular la posición pasada y futura de cuerpos del sistema solar y naves espaciales; o del simulador *NASA's Eyes*<sup>6</sup> que ofrece vistas en tiempo real de la posición de los cuerpos del sistema solar y de misiones espaciales de la agencia espacial estadounidense.

<sup>4</sup><https://naif.jpl.nasa.gov/naif/>

<sup>5</sup><https://ssd.jpl.nasa.gov/horizons.cgi>

<sup>6</sup><https://eyes.nasa.gov/>

En este libro usaremos las rutinas y *kernels* de SPICE (a través de la biblioteca `spiceypy`<sup>7</sup>, desarrollada en Python) para ilustrar conceptos, desarrollar ejemplos y resolver problemas que, de otro modo, implicarían un gran esfuerzo algorítmico (el objetivo será no *reinventar la rueda redonda*.)

Al hacerlo, además, el lector, sin importar su nivel, se familiarizará con una herramienta que usan astrónomos e ingenieros aeroespaciales para resolver problemas reales de mecánica celeste. ¡De la teoría a la acción!

Como nos preguntamos en el caso de Python, ¿podría SPICE desaparecer o, mejor, ser reemplazada por un sistema diferente en los próximos años? No podemos asegurarlo, pero la cantidad de herramientas que hoy dependen de este sistema de información, hace difícil suponer que podría cambiar radicalmente en el futuro inmediato.

Un último aspecto hace de SPICE una opción muy estable para los propósitos de un libro de texto. La biblioteca de rutinas asociada con el sistema está disponible para un amplio conjunto de lenguajes de programación diferentes a Python. Familiarizarse con las rutinas y *kernels* de SPICE aquí, será suficiente para que pueda usarlo con lenguajes como C/C++, FORTRAN e IDL.

A continuación, y a modo de ilustración, presento un algoritmo, escrito con SPICE, para calcular la distancia de la Tierra al Sol durante el eclipse total de Sol del 29 de mayo de 1919 en el que se obtuvieron las primeras evidencias empíricas de la relatividad general y con el que abrimos este prefacio. Naturalmente, este algoritmo es mucho más complejo (y menos natural) que los que escribí antes, pero ilustra el poder de esta herramienta para obtener resultados interesantes con muy poco esfuerzo computacional.

```
import spiceypy as spy
spy.furnsh('pymcel/data/naif0012.tls')
spy.furnsh('pymcel/data/de430.bsp')
et=spy.str2et("05/29/1919 09:08:00 UTC-3")
sol,tluz=spy.spkgeo(10,et,"ECLIPJ2000",0)
tierra,tluz=spy.spkgeo(399,et,"ECLIPJ2000",0)
distancia=spy.vnorm(tierra-sol)
```

Distancia Tierra-Sol durante el eclipse de 1919: 151649284 km

## 1.6. ¿Qué hace distinto a este libro?: un decálogo

Para resumir, enumero a continuación las 10 cosas que hacen de este un libro distinto de los muchos que se han escrito en casi 400 años de historia de la mecánica celeste. Este decálogo, como la mayor parte de este prefacio, es, además de una descripción abreviada de las características únicas del libro, una lista de razones que justifican la existencia de un libro más en el “basto océano” de literatura en la materia.

1. ¿Ya les mencione que es un libro para estudiantes de pregrado? Para entender su contenido no es necesario haber visto previamente un curso de mecánica analítica o matemáticas especiales. Solo se necesita una fundamentación mínima en geometría, cálculo y física.

<sup>7</sup><https://spiceypy.readthedocs.io/en/master>

2. El libro ha sido escrito, en la medida de las posibilidades, para ser autocontenido. Todo lo que un lector necesita saber de los fundamentos matemáticos (geometría, cálculo vectorial, ecuaciones diferenciales), los fundamentos físicos (mecánica newtoniana), astronómicos o de computación, ha sido incluido en los capítulos o en apéndices. Esto hace del libro, un texto que puede ser leído o estudiado por personas ajenas a la disciplina, incluso por aficionados.
3. El libro utiliza, como la mayoría de los textos en el área, el *formalismo geométrico y vectorial* de la mecánica para presentar y desarrollar los problemas centrales de la mecánica celeste. Pero también introduce el *formalismo analítico* (mecánica analítica o mecánica clásica) y lo aplica a la mecánica celeste. Es por tanto un libro de mecánica celeste y al mismo tiempo uno de mecánica analítica.
4. El libro no profundiza en todos los temas de la mecánica celeste o la mecánica analítica como lo hacen textos más avanzados. Pero, para un estudiante de pregrado, esta podría ser su primera lectura antes de abordar esos textos.
5. El texto hace un énfasis especial en los algoritmos de la mecánica celeste, que implementa usando códigos en Python, gráficas en matplotlib y, en ocasiones, las rutinas y datos del sistema SPICE de NASA.
6. Todo el libro está disponible como *notebooks* de Jupyter que pueden ser modificados por el lector o ejecutados durante una clase (¡es un libro para enseñar!) Los *notebooks* contienen gráficos interactivos y animaciones que ilustran conceptos que pueden resultar difíciles.
7. El libro no requiere conocimientos previos de programación en Python (aunque tenerlos puede ser muy útil.) En realidad, el libro podría utilizarse como una manera de aprender el lenguaje en contexto, algo que es difícil de conseguir en libros dedicados específicamente a la enseñanza de la programación.
8. Los temas no se desarrollan en el orden en el que aparecieron en la historia: problema de los dos cuerpos → teoría de perturbaciones → problema de los tres cuerpos → mecánica celeste relativística, etc. He preferido presentarlos como me hubiera gustado conocerlos desde el principio, siguiendo un orden más lógico y un poco atemporal. Esta es la manera en la que, creo, un viajero en el tiempo, que retrocediera a 1700, se lo explicaría a un sorprendido Newton.
9. A pesar de lo anterior, la historia es importante en el libro. A través de los capítulos y en recuadros especiales he incluido anécdotas y biografías que permitirán hacerse a una idea del contexto en el que surgieron las principales ideas de la mecánica celeste y la mecánica analítica y los personajes que las concibieron.
10. He incluido tópicos modernos, escasamente cubiertos por otros textos en el área a este nivel, tales como una fundamentación elemental en relatividad, útil para realizar cálculos postnewtonianos en mecánica celeste, que hoy, en la era de los viajes espaciales y las observaciones ultra precisas, han cobrado mucha relevancia.

**Jorge I. Zuluaga**

Medellín, Diciembre 31 de 2019

BORRADOR

BORRADOR



## Capítulo 2

# Agradecimientos

Así como no hay *vacas esféricas en el vacío*, tampoco existen los *autores cilíndricos en el vacío*. La elaboración de este libro ha sido determinada y afectada por una multitud de factores y personas a los que no puedo dejar de mencionar.

En primer lugar, quiero agradecer a todos **los estudiantes del pregrado de astronomía** que tomaron el curso de Mecánica Celeste durante los años en los que elaboré las notas que sirvieron de base para este libro. Agradezco su paciencia y sus preguntas en clase que me ayudaron a enriquecer el texto, concentrarme en puntos difíciles y escoger mejor los temas más interesantes. También fue de gran valor los errores que me ayudaron a detectar en las primeras versiones de los *notebooks*. Entre ellos, quiero resaltar a **Andrés Gómez**, quien fue mas lejos aún al revisar detalladamente el contenido de algunos *notebooks* y criticarlos como lo haría un colega o un editor. Adicionalmente, sus impecables soluciones de los problemas inspiraron una parte del material que he incluido en esta edición del libro.

Una buena parte de la primera versión de las notas del curso fue **escrita y transcrita a LaTeX** por el hoy Astrónomo **Bayron Portilla** (en ese entonces mi tallerista del curso). En un momento dado, nos propusimos, incluso, escribir juntos el libro. Sin embargo, nuestras ocupaciones fueron dilatando el proyecto hasta que decidí re escribir todo el material usando solamente *notebooks* de Jupyter. El resultado fue esta edición del libro. Aún así, reconozco y agradezco el esfuerzo que hizo en esas primeras notas, en las que además exploramos las mejores maneras de organizar los temas del curso. Tal vez en el futuro retome con Bayron algunas de esas notas iniciales con miras a un texto avanzado en la materia donde podamos, por ejemplo, abordar los tópicos que se quedaron por fuera de este libro.

Estoy también en deuda con **Miguel Vásquez**, el mejor de los talleristas que he tenido en mi carrera como profesor (ahora es un Astrónomo). Miguel realizó una juiciosa tarea de búsqueda de problemas, transcripción de los mismos al formato de Jupyter y, más importante, preparación en el mismo formato de su solución. Todo, mientras mantenía una estrecha relación con los estudiantes (mucho mejor que la mía como profesor, debo admitir) que le permitió entender sus necesidades, evaluar y ajustar el grado de dificultad de los problemas y recoger correcciones y sugerencias a las notas. **Muchos problemas** incluidos en este libro se basan en el

trabajo original de Miguel al que debo hacer un sentido reconocimiento aquí.

Agradezco también a los maestros que me motivaron a estudiar física teórica durante el pregrado y el posgrado, muy a pesar de mi monocromática pasión por la astronomía. Esto me permitió entender, apreciar y abordar mejor los aspectos teóricos de la mecánica celeste. En particular, mis agradecimientos van para los profesores **Lorenzo de la Torre, Alonso Sepúlveda, Jorge Mahecha, William Ponce y Boris Rodríguez**. A través de sus propios manuscritos, conocí (y espero haber aprendido con el ejemplo) el “arte” de escribir libros de texto. El estilo, profundidad y cuidado de sus **notas de clase, libros publicados e inéditos**, han sido imitados sistemáticamente en este libro.

Agradezco a la **Universidad de Antioquia** y en particular a las autoridades del **Instituto de Física** y la **Facultad de Ciencias Exactas y Naturales**, por otorgarme el beneficio de un año sabático, durante el cuál pude, entre otras cosas maravillosas, escribir la primera versión completa de este libro. Mi reconocimiento y agradecimiento además para los **profesores del pregrado de Astronomía** que recibieron mi carga académica y de investigación durante ese año en el que estuve escribiendo.

Finalmente, pero no menos importante, quiero agradecer a mi familia, **Olga y Sofía**. A ellas les toco la peor parte, es decir, soportarme un año entero en la casa, escribiendo en pijamas (o mejor hablando solo, por yo no escribo sino que hablo con el computador) y prestándoles, a veces, menos atención de la que les presto incluso en situaciones normales. Este libro esta dedicado a ellas.

## Capítulo 3

# Introducción

### 3.1. ¿Cómo se organiza este libro?

Como mencionamos en la [Sección 1.6](#), una de las cosas hace a este libro diferente de otros textos de mecánica celeste, es la manera y el orden particular en el que se desarrollan los temas. El libro está dividido en tres grandes partes:

- Los fundamentos matemáticos y físicos.
- Mecánica celeste usando vectores y geometría (formalismo vectorial de la mecánica).
- Mecánica analítica (formalismo lagrangiano y hamiltoniano) y su aplicación en mecánica celeste (clásica y postnewtoniana).

En los siguientes párrafos encontrarán una síntesis *narrada* del libro; algo así como una *tabla de contenido comentada* que le permitirá al lector, no solo orientarse en el texto, sino también entender la manera como se encadenan cada una de sus partes.

Y es que todo libro debería contar una *historia*. En los textos académicos, lamentablemente, esa “vocación” narrativa parece perderse en medio de figuras, teoremas y algoritmos. Esta sección puede ser entonces entendida, como un esfuerzo para esbozar la *historia* que se hila a través de sus capítulos.

- **Parte 1 (Capítulo 4): Fundamentos.** Antes de comenzar, repasaremos algunos temas de matemáticas y física necesarios para estudiar mecánica celeste. Si bien el lector debería estar familiarizado con la mayoría de estos temas, hemos decidido incluir este capítulo no solo para hacer al texto autocontenido, sino también con el propósito de compilar resultados útiles, definiciones y algoritmos, en el formato y notación del texto, que se usarán en capítulos posteriores.
- **?: Fundamentos de geometría analítica.** En este capítulo nos concentraremos en repasar (o presentar) las propiedades de las figuras cónicas, su definición y descripción geométrica más general, así como su descripción algebraica.

Las figuras cónicas juegan un papel central en la mecánica celeste y estar familiarizado con ellas, permitirá resolver más fácilmente problemas físicos relativamente complejos.

Estudiaremos las cónicas, tanto en el plano, como en el espacio de tres dimensiones. Con este propósito, introduciremos aquí el tema de las rotaciones en dos y tres dimensiones (ángulos de Euler) que son usados con frecuencia en la mecánica celeste.

- **?: Fundamentos de mecánica.** Como hizo Newton en los *Principia*, antes de resolver el problema del “movimiento planetario”, es necesario definir las cantidades físicas básicas, formular los principios fundamentales y obtener las leyes y teoremas que permiten entender el movimiento de los cuerpos en cualquier contexto (no solo en un contexto gravitacional).

Este capítulo es una breve síntesis de un texto de mecánica newtoniana. Tiene elementos distintivos: hace una presentación moderna de la teoría (con definiciones y leyes que se diferencian un poco de la formulación histórica, muy común en los textos universitarios); hace énfasis en una formulación basada en el cálculo vectorial y en distintos sistemas de coordenadas; introduce algoritmos para la solución numérica de las ecuaciones de movimiento de sistemas dinámicos (algoritmos que serán muy importantes en el resto del libro); y presenta una síntesis de algunos resultados importantes de la cinemática y dinámica en sistemas de referencia rotantes (que son de interés en el estudio del *problema circular restringido de los tres cuerpos*.)

- **?: Fundamentos de relatividad.** Como lo mencionamos en el prefacio, otro elemento que hace diferente a este libro, es la introducción de algunos tópicos modernos que han estado normalmente ausentes de los textos de mecánica celeste, al menos para el nivel al que esta dirigido. Para llegar a ese punto es necesario, sin embargo, presentar una fundamentación básica de la teoría de la relatividad (especial y general).

La síntesis presentada aquí es bastante breve y tiene dos propósitos prácticos: 1) introducir el concepto de métrica del espacio-tiempo y sus consecuencias para la cinemática; nos concentraremos específicamente en las métricas de Minkowski y de Schwarzschild. Y 2) a partir de las métricas, derivar resultados sobre las diferencias en los intervalos de tiempo medido por observadores inerciales y otros en campos gravitacionales. Ambos temas serán la base para presentar algunos resultados de *mecánica celeste postnewtoniana* en capítulos posteriores.

- **?: Fundamentos de astronomía.** Muchos de los ejemplos y problemas en el curso se refieren a sistemas físicos reales, dentro y afuera del Sistema Solar. La mecánica celeste, como área de la astronomía, se desarrolla para predecir, justamente, la posición en el cielo de los planetas o determinar la trayectoria de cometas y otros cuerpos errantes.

En este capítulo repasaremos algunos conceptos de Astronomía que serán de utilidad en el resto del texto: la organización general del Sistema Solar, algunos elementos de nomenclatura astronómica, la medida del tiempo y los sistemas de referencia usados para especificar la posición

tanto en el cielo como en el espacio de tres dimensiones, de cuerpo astronómicos o vehículos espaciales.

- **Parte 2: El formalismo vectorial de la mecánica.** Como veremos a lo largo del libro, la mecánica puede ser presentada usando dos enfoques matemáticos o *formalismos* diferentes. En esta parte del curso nos concentraremos en la formulación geométrica o vectorial de la mecánica celeste, la más popular y la que uso originalmente Newton en sus *Principia* y que fue desarrollada posteriormente por Euler.

- **?: El problema de Los N Cuerpos.** A diferencia de la mayoría de los textos en esta área, en este libro comenzamos por el más general de los problemas de la mecánica celeste: el problema de los N cuerpos. En este problema, el reto consiste en predecir la posición y velocidad de muchos cuerpos que interactúan gravitacionalmente. Si bien el problema de los N cuerpos fue el último en ser formulado y abordado rigurosamente en la historia, su presentación temprana en este libro, permitirá introducir resultados y métodos que serán de utilidad para el resto del texto.

De particular interés será la introducción en este capítulo de los algoritmos para resolver numéricamente el problema. Estos algoritmos y algunas herramientas computacionales relacionadas, serán muy importante en el resto del texto, para comparar y validar resultados de los modelos analíticos. Se presentará también aquí el concepto de integrales de movimiento o *cuadraturas*, uno de los métodos usados clásicamente para extraer información sobre un sistema dinámico sin resolverlo completamente. El método de las cuadraturas será central en lo que queda del texto.

- **?: El problema de los dos cuerpos.** Una de las idealizaciones más conocidas de la mecánica celeste consiste en suponer que cuando dos cuerpos astronómicos interactúan gravitacionalmente, el efecto del resto del Universo es completamente despreciable. Naturalmente, no existe ningún sistema astronómico real que cumpla cabalmente estas condiciones. Todos los sistemas del universo, en sentido estricto, son sistemas de N cuerpos.

En este capítulo mostraremos, a través de experimentos numéricos y ejemplos astronómicos reales, que la mayoría de los sistemas astronómicos se pueden analizar dinámicamente como *sistemas de N cuerpos jerárquicos*, es decir, sistemas en los que las partículas se agrupan por pares (pares de partículas, pares de pares, etc.) que se perturban mutuamente.

El problema de los dos cuerpos no es, sin embargo, el destino final de la mecánica celeste, sino su punto de partida. Es un resultado útil para estudiar sistemas mucho más complejos. Resolveremos en este capítulo el problema de los dos cuerpos usando el método de las cuadraturas (primeras integrales de movimiento) introducido en el capítulo anterior. Demostraremos que el movimiento relativo de dos cuerpos se realiza sobre una cónica y desarrollaremos en detalle las relaciones entre las propiedades geométricas de esa cónica y las propiedades dinámicas

del sistema. Resolveremos también, usando métodos geométricos primero y después métodos del cálculo, el denominado problema de los dos cuerpos en el tiempo, que conducirá a la famosa ecuación de Kepler.

- **?: Aplicaciones del problema de los dos cuerpos.** Antes de abordar sistemas más complejos, nos ocuparemos en este capítulo de estudiar a fondo algunas aplicaciones de interés para la astronomía o la ingeniería aeroespacial, de los resultados del capítulo anterior: la descripción de la trayectoria de cuerpos astronómicos y vehículos espaciales usando elementos orbitales instantáneos (osculatrices); la transformación entre el denominado *vector de estado* y los elementos orbitales y viceversa; la determinación de las órbitas, usando información de la posición y el movimiento de un cuerpo.

Usaremos estos resultados para hacer predicciones, de primer orden, de la posición de algunos cuerpos astronómicos reales. Estudiaremos también los fundamentos de la teoría de perturbaciones, en la que no profundizaremos, sin embargo (este es un tema que se deja para libros más avanzados).

Nos aprovecharemos, además, de las capacidades del sistema de información SPICE de NASA para predecir la posición precisa de cuerpos astronómicos reales y para calcular con ellas efemérides astronómicas (condiciones de eclipses, ocultaciones, fases de la Luna y los planetas, etc.)

En síntesis, este será el más astronómico de todos los capítulos del texto.

- **?: El problema de los tres cuerpos.** A pesar del poder que la teoría desarrollada en el capítulo anterior tiene para describir el movimiento de muchos sistemas astronómicos, existen situaciones que escapan a una descripción *kepleriana* del movimiento orbital (incluso, una que incluye perturbaciones). El caso de la Luna, el de algunos cometas perturbados por Júpiter y vehículos espaciales modernos, son especialmente significativos.

En este capítulo abordaremos, inicialmente, el problema general de los tres cuerpos, es decir, aquel en el que la dinámica no es jerárquica. A diferencia del problema de los dos cuerpos, no se conoce una solución general en términos de funciones analíticas o de series al problema de los tres cuerpos (aunque se sabe que existe una.)

Una versión restringida de este problema, a saber el *problema circular restringido de tres cuerpos* (CRTBP por su sigla en inglés), tiene propiedades teóricas que han resultado de interés en la descripción de sistemas astronómicos reales. Estudiaremos aquí en detalle el CRTBP, su descripción dinámica y cinemática, tanto en sistemas inerciales como no inerciales. Introduciremos algoritmos para la solución numérica del problema en el sistema rotante. Encontraremos su constante de movimiento, la *constante de Jacobi* y una aproximación astronómica en términos de elementos orbitales, el *parámetro de Tisserand*. Deduciremos las propiedades y visualizaremos las denominadas *regiones de exclusión* y *curvas de cero velocidad* (conceptos interesantes que permiten, si no predecir dónde estarán

los cuerpos, al menos, donde no estarán). Finalmente se deducirán las propiedades de los *puntos de equilibrio de Lagrange* y algunas aplicaciones astronómicas y en mecánica orbital del problema.

- **Parte 3: El formalismo analítico de la mecánica.** En esta parte del libro, introduciremos el *formalismo analítico de la mecánica* y su aplicación en la solución a la mecánica celeste. El formalismo analítico tiene una importancia central en la física que trasciende la mecánica celeste (se usa por ejemplo para estudiar la dinámica de cuerpos rígidos y sistemas oscilantes, el caos en sistemas dinámicos, la mecánica relativista, el electromagnetismo, la teoría de campos clásica y la mecánica cuántica.) Si bien ninguna aplicación del formalismo distinta a la mecánica celeste, se desarrollara en este texto (como si sucede en algunos textos avanzados de mecánica clásica) los fundamentos teóricos presentados en esta parte le permitirán al lector abordar el estudio de esas otras disciplinas.

- **?: El formalismo lagrangiano.** En este capítulo se introducen los principios y teoremas centrales del formalismo analítico de la mecánica, en particular los principios de Alambert-Lagrange y de Hamilton. Haremos aquí, un especial énfasis en las motivaciones teóricas que llevaron a matemáticos y físicos de los 1700 a introducir este formalismo (un tema en el que los textos más avanzados de mecánica clásica, apenas si consideran.)

Se introducirá aquí la función lagrangiana, las ecuaciones de Lagrange y, a través de la aplicación del cálculo variacional (del que se hará una introducción breve y práctica), se deducirán las ecuaciones generales de Euler-Lagrange (que tienen una aplicación amplia en muchas áreas de la física).

Muchos de los ejemplos usados para ilustrar el formalismo Lagrangiano serán, como se usa en la mayoría de los textos avanzados de mecánica clásica, sistemas mecánicos simples (péndulos, bloques en movimiento, esferas y cilindros que ruedan, etc.) Sin embargo, a diferencia de esos textos, no profundizaremos demasiado en sistemas de este tipo (el interés central aquí son los problemas gravitacionales.) Este hecho, sin embargo, no compromete el rigor o la extensión en la que el formalismo lagrangiano será presentado y desarrollado aquí.

Como un elemento novedoso se presentarán en este capítulo algunos algoritmos aplicados al formalismo lagrangiano, y en particular a la comprensión mejor del principio de Hamilton y los métodos del cálculo variacional.

- **?: Aplicaciones del formalismo lagrangiano.** Con los elementos básicos del formalismo lagrangiano a la mano, procederemos a aplicarlo en la solución de problemas concretos en mecánica celeste. Para ello presentaremos, primero, resultados importantes sobre la relación entre las simetrías de la función lagrangiana y las cantidades conservadas en el movimiento (teorema de Noether). A partir de allí, procederemos de forma similar a como lo hicimos con el formalismo vectorial, a resolver el problema general de los  $N$  cuerpos y el de los dos cuerpos.

Deduciremos el lagrangiano de los  $N$  cuerpos y de sus simetrías obtendremos las cantidades conservadas en el sistema. Pero ¿de qué sirve deducir los mismos resultados que ya habíamos visto en el capítulo correspondiente de la segunda parte? Usaremos lo que sabemos de mecánica celeste para ilustrar el poder del formalismo lagrangiano frente al formalismo vectorial.

Posteriormente, abordaremos el problema de los dos cuerpos usando el formalismo lagrangiano. En este caso, a diferencia del problema de los  $N$  cuerpos, tendremos una novedad. En lugar de restringirnos al caso de la gravitación Newtoniano, estudiaremos aquí el problema más general de sistemas de dos cuerpos sometidos a fuerzas centrales con un potencial generalizado. Los resultados obtenidos aquí, tendrán un rango más amplio de aplicación. Podrán por ejemplo usarse para estudiar la física de sólidos, moléculas y átomos, pero también la mecánica celeste postnewtoniana.

Estudiaremos, en este contexto, el problema de fuerzas centrales reducido a una dimensión, el potencial efectivo (y las correspondientes zonas de exclusión). Para el caso del potencial newtoniano deduciremos la denominada ecuación de la forma orbital y resolveremos el problema de los dos cuerpos a partir de ella. Para el caso de un potencial general, pero no muy distinto del potencial Newtoniano, estudiaremos el denominado *avance del perihelio* como una introducción al capítulo siguiente.

- **?: El problema de los dos cuerpos postnewtoniano.** Con los elementos desarrollados en el capítulo anterior, estaremos en posición de abordar la solución general a una versión restringida del problema de los dos cuerpos en el contexto de la relatividad general (la denominada *aproximación postnewtoniana*).

Para ello partiremos de la métrica de Schwarzschild y las ecuaciones de la geodésica (una versión geométrica de las ecuaciones de Euler Lagrange.) A partir de ellas y con argumentos de simetría, obtendremos las primeras integrales o cuadraturas y deduciremos el lagrangiano y su potencial efectivo, para el movimiento de una partícula muy ligera (partícula de prueba) en la métrica de Schwarzschild.

Usando estos elementos estudiaremos dos aplicaciones específicas: el avance del perihelio de Mercurio, el primer problema de mecánica celeste que resolvió la Relatividad General y la primera prueba de su superioridad frente a la teoría newtoniana del movimiento y la gravedad. Y el movimiento de partículas de prueba alrededor de cuerpos muy densos (estrellas de neutrones o agujeros negros.)

- **?: El formalismo hamiltoniano.** En este capítulo abordamos el más general (y poderoso) formalismo analítico de la mecánica: el formalismo Hamiltoniano. Después de discutir las motivaciones para la introducción de este formalismo (motivaciones de naturaleza principalmente geométrica), deduciremos de forma heurística las ecuaciones canónicas (de primer orden) de Hamilton; introduciremos la función Hamiltoniana y demostraremos su equivalencia con las ecuaciones (de segundo orden) de Euler-Lagrange. Ilustraremos el poder del formalismo y la des-



cripción de los sistemas en el denominado *espacio de fase*; para ello nos valdremos inicialmente de sistemas dinámicos simples (péndulos y bloques), como hicimos en el primer capítulo de esta parte.

Posteriormente abordaremos (sin el detalle en el que lo hicimos en el caso del formalismo Lagrangiano y por las obvias analogías entre los dos formalismos) el tema de las simetrías y las cantidades conservadas, e introduciremos los útiles *corchetes de Poisson*, como herramienta matemática para estudiar dichas simetrías.

Escribiremos los hamiltonianos del problema general de los  $N$  cuerpos, el del problema de los dos cuerpos y el del problema circular restringido de los tres cuerpos, y redescubriremos, usando los elementos de este nuevo formalismo, las propiedades ya conocidas de estos sistemas.

- **?: El formalismo de Hamiltoniano-Jacobi.** Una de las formas más frecuentes en las que se aplica el formalismo Hamiltoniano en la mecánica celeste, es la de aprovechar las simetrías de los sistemas gravitacionales, para, a través de transformaciones de *coordenadas* en el espacio de fase, escribir formas simplificadas de los Hamiltonianos. Estas formas simplificadas, además, permiten aplicar de forma más directa la teoría de perturbaciones y así estudiar sistemas muy complejos (un tema que no está incluido en este libro.)

En este capítulo introduciremos, primero, el tema de las transformaciones canónicas, que son transformaciones de coordenadas en el espacio de fase que mantienen la *estructura hamiltoniana* de los sistemas (es decir, que hacen que los sistemas sigan siendo descritos con las ecuaciones canónicas). Nos concentraremos, especialmente en el formalismo de la función generatriz de las transformaciones canónicas.

A continuación, aplicando lo visto en el capítulo anterior y la teoría de transformaciones canónicas recién introducida, presentaremos el formalismo de Hamilton-Jacobi que permite, entre otras cosas, encontrar sistemas de coordenadas que simplifican significativamente la descripción de ciertos sistemas físicos. En particular utilizaremos este formalismo para deducir, en el problema de los dos cuerpos, el Hamiltoniano del sistema en términos de elementos orbitales; en particular, en términos de funciones específicas de esos elementos orbitales, que hacen lo más simple posible el hamiltoniano del sistema.

El resultado más importante de este capítulo será la deducción de las denominadas *variables de Dalaunay* que son de gran utilidad y poder en la mecánica celeste moderna y posiblemente el punto de partida de algunos textos de mecánica celeste avanzados.

Todos los capítulos hasta aquí contarán con un conjunto completo de preguntas, ejercicios y problemas, que permitan al lector poner a prueba los conocimientos adquiridos y las habilidades desarrolladas, pero también, descubrir como estas ideas, métodos y herramientas, se aplican en otras situaciones específicas.

- **Apéndices.** La última parte del libro, presenta material complementario y de referencia, que puede ser de interés consultar durante su lectura.

- **?: Python mínimo.** En este apéndice ofrecemos un breve tutorial introductorio al lenguaje Python y a la biblioteca de gráficos de Matplotlib que usaremos como herramientas para presentar los algoritmos de la mecánica celeste, desarrollar ejemplo y formular problemas (ver la [Sección 1.4](#)).
- **?: El sistema de información SPICE.** Como comentamos en la [Sección 1.5](#), una de las herramientas prácticas de programación de las que nos apoyaremos en este libro, es el sistema de información SPICE del NAIF de NASA. En este apéndice ofrecemos una guía de referencia básica a este sistema, que puede ser consultada para entender mejor algunos de los ejemplos desarrollados a lo largo del libro.
- **?: Notación y glosario.** La notación en física y en astronomía, así como el vocabulario, puede cambiar mucho de unos textos a otros. En este apéndice encontrará una guía de referencia práctica a la notación y el vocabulario usado en este libro.
- **?: La biblioteca pymcel.** Las rutinas útiles escritas a lo largo del libro se han compilado en un paquete de Python que acompaña este libro. En este apéndice se ofrece una lista completa de las rutinas del paquete.

## 3.2. ¿Cómo usar este libro?

Este libro puede ser utilizado de tres formas diferentes:

1. Como un texto para el *autoaprendizaje* de la mecánica celeste y analítica. Estudiantes y profesionales de muchas disciplinas, se pueden valer de él para acercarse a ellas.
2. Como el texto guía de un primer curso de mecánica celeste. Una fuente de lecciones y problemas útiles para organizar un curso de pregrado.
3. Como material de referencia para estudiantes y profesionales. Muchas fórmulas, algoritmos, e incluso anécdotas e historias interesantes, podrían resultar útiles para quienes ya tienen una formación en el área.

Como **texto para el autoaprendizaje**, recomiendo **leerlo enteramente** incluyendo la primera parte de Fundamentación en la que se encuentran algunos elementos teóricos (matemáticos y físicos) requeridos para el resto del libro.

Para quienes tengan una formación avanzada en física, astronomía o ingeniería, es posible que una buena fracción de los temas de esa primera parte resulten sencillos y puedan obviarse. Sin embargo, aunque los tópicos tratados allí aparezcan conocidos (al menos por los nombres), su tratamiento puede resultar novedoso; de modo que no deje de echarle una mirada. En particular recomiendo revisar, como mínimo, las secciones dedicadas a la solución numérica de las ecuaciones de movimiento, la dinámica en sistemas rotantes y los principios de relatividad, donde podrían encontrarse las diferencias más significativas respecto a los textos canónicos de matemáticas y física.

El uso ideal de este libro es como **texto guía** de un primer curso de mecánica celeste y analítica. El libro fue escrito a partir de la experiencia de más de 5 años ofreciendo el curso en el pregrado de astronomía de la Universidad de Antioqui;

por la misma razón esta la extensión y organización particular del texto, se adapta de forma *precisa* a las condiciones propias de un curso universitario de un semestre de duración (cuatro meses efectivos de lecciones.) El curso se ofrece ha ofrecido exitosamente a estudiantes que han cursado los cursos básicos de física (hasta el curso de oscilaciones y ondas) y de cálculo (incluyendo cálculo vectorial y ecuaciones diferenciales.)

Todos los capítulos del libro han sido dictados dentro del plazo del curso. Sin embargo, dependiendo del nivel académico de los estudiantes y de su independencia intelectual, el curso puede dictarse sin incluir todos los temas de la primera parte.

Por mi experiencia dictando el curso, el repaso de los fundamentos puede resultar extenso (como mínimo toma un mes que es justamente el período en el que los estudiantes tienen una motivación y disposición mayor, además de menos distracciones de otros cursos.) Sugeriría, entonces, que de sacrificarse algunos temas de esa parte, se asigne la lectura independiente a los estudiantes de los temas mejor conocidos y se evalúe a través de la completa lista de problemas incluidos al final de esa parte.

Como se menciono en la **Sección 1.3**, y se detallará abajo, el libro fue escrito usando *libretas de Jupyter*, una por cada clase (a lo sumo se pueden dictar dos clases con cada libreta). Es decir, el número de *libretas* y su organización puede ofrecer una idea del programación detallado de actividades del curso o del plan de lectura.

### 3.3. Mecánica celeste en *libretas*

El libro ha sido concebido, escrito y compilado enteramente usando *libretas* de Jupyter. Las libretas, que están disponibles en la versión electrónica del texto, son archivos en un formato especial (no son programa de Python, ni páginas web) que pueden ser visualizadas y ejecutadas usando un navegador de Internet.

El uso de las libretas no es indispensable para entender el contenido del libro, pero pueden ofrecer una experiencia interactiva muy enriquecedora, que a veces puede acelerar el proceso de aprendizaje. El uso de las libretas en clase puede, además, hacer más dinámica la interacción entre el profesor y los estudiantes.

Para hacer uso de las libretas se debe contar con un **computador de escritorio** que use cualquier sistema operativo (Windows, Linux o MacOS). Por la misma razón, en caso de usarla, recomiendo que el curso se desarrolle en una sala de computo. Para ejecutar las libretas es necesario instalar primero el interprete y la biblioteca base del lenguaje Python, un conjunto específico de paquetes y el sistema Jupyter, además de varias de sus extensiones (los detalles se presentan en la siguiente sección.)

La versión web de este libro, puede ser también una alternativa a las libretas de Jupyter. Tiene la ventaja de que solo requiere un dispositivo con conexión a Internet (de escritorio o móvil) y puede manipularse en cualquier contexto. Aunque la versión web carece de casi todas las características interactivas de las libretas de Jupyter, en ella encontrarán, además de todos los algoritmos y gráficos, todas las animaciones y otros elementos de *hipertexto*.

### 3.3.1. Instalación de las libretas

Para aquellos que deseen aprovechar las libretas de Jupyter como medio didáctico, se ofrece a continuación una guía básica de cómo preparar un computador para ejecutarlas. Instrucciones adicionales pueden encontrarse en la versión en línea del libro.

1. **Instalación del lenguaje Python y las bibliotecas básicas del lenguaje.** El primer requisito para utilizar las libretas es instalar el interprete y las bibliotecas del sistema del lenguaje Python. Existen diversas maneras para hacerlo en cada sistema operativo y abundante información en Internet. Mi recomendación es utilizar el sistema [Anaconda](https://www.anaconda.com)<sup>8</sup> que ofrece en una plataforma completa de programación incluyendo los archivos del lenguaje Python, una amplia diversidad de paquetes científicos, el sistema Jupyter y todas las herramientas necesarias para la instalación de otros paquetes.
2. **Descarga las libretas.** Una vez haya instalado Python y Jupyter, puede descargar las libretas del libro los archivos adicionales requeridos por ellas del sitio web del libro. Para ello siga las instrucciones provistas allí.
3. **Ejecución de pruebas.** Para verificar si las libretas funcionan correctamente, una vez descargadas, busque y abra la libreta `Pruebas.ipynb`. Una vez abierta ejecute todas sus celdas (`Cell / Run all`). Si la ejecución se realiza completa, en la última celda aparecerá un reporte completo con los resultados de la prueba. Si alguna de las prueba individuales falla, es posible que sea necesario instalar paquetes, datos adicionales y otras dependencias.
4. **Instalación de dependencias.** Para instalar todas las dependencias del libro abra la libreta `Instalacion.ipynb` y siga las instrucciones descritas allí.

## 3.4. Idioma y Notación

### 3.4.1. Extranjerismos y pronunciación

El libro está escrito en español. Sin embargo, y como sucede con todas las ciencias, habrán muchos apartes en los que es necesario introducir términos técnicos y acrónimos procedentes de la lengua inglesa. En estos casos las palabras y acrónimos se presentarán en *italica*. Así por ejemplo, al referirnos al problema matemático de resolver la ecuación de movimiento de una partícula hablaremos del *initial value problem* o su acrónimo *IVP*, en contraposición al *boundary condition problem*. Por otro lado en el ?? estudiaremos el *CRTBP* o *circular restricted three body problem*.

Muchos de los científicos (hombres y mujeres) que han contribuido con el desarrollo de la mecánica celeste en sus cuatro siglos de historia, tienen nombres y apellidos no hispanos. Su correcta pronunciación, especialmente en el caso de autores franceses o de origen germano, es difícil para quienes no hablamos las lenguas de esos pueblos.

Un caso notable, por ejemplo, es el nombre de la matemática alemana *Emmy Noether*. En castellano la mayoría pronunciaríamos “emi noeter” o “emmi neder”

<sup>8</sup><https://www.anaconda.com>

(siguiendo la tradición inglesa con la que estamos más familiarizados.)<sup>9</sup> La pronunciación “correcta” (en alemán) del nombre de esta matemática, es en realidad “emmi noutar”.

Para hacernos a una idea fonética más precisa nos apoyaremos a lo largo del libro de la increíble colección compilada en [este sitio web](#)<sup>10</sup> que ofrece pronunciasiones en línea, en decenas de idiomas, de miles de nombres, palabras y frases. Allí encontrará por ejemplo la pronunciación correcta, en su idioma original del nombre [Emmy Noether](#)<sup>11</sup>.

### 3.4.2. Siglos y décadas

La historia de la mecánica celeste y analítica, así como la historia de las áreas de la física y las matemáticas con las que se relaciona, es fascinante. En el libro, como detallamos en la próxima sección, incluiremos abundantes referencias históricas sobre los personajes y los momentos claves en el desarrollo de las ideas de la mecánica celeste.

Para referirnos a los siglos, sin embargo, nos desviaremos de las reglas convencionales del español. Según esas reglas al período comprendido, por ejemplo, entre 1701 y 1800, se lo llama el siglo XVIII. Para este autor, la notación usando números romanos, si bien ampliamente aceptada, es confusa y exige realizar operaciones mentales innecesarias (número romano → número indoarabigo → restar uno → multiplicar por 100).

En los sucesivos para referirnos al período comprendido entre 1700 y 1799 (comenzando en el año cero y no en el año uno como dicta la regla) hablaremos de **los 1700**. Así mismo el siglo XX será **los 1900** y así sucesivamente.

Dado que en las reglas establecidas del español, los 1900 hacen referencia en realidad a la década entre 1901 y 1910, cuando queramos referirnos a un período de diez años siempre usaremos explícitamente la palabra **década**: década de 1680, década de 1960, etc.

No pretendió, con este acto de rebeldía *gramático*, cambiar el idioma. Pero sí, al menos en lo que respecta a este libro, facilitar la lectura de los períodos históricos.

### 3.4.3. Notación matemática

Todos los libros de ciencias físicas o matemáticas se “casan” con una notación específica. La elección de la notación, no es sin embargo una tarea sencilla, en tanto son muy comunes los casos de textos que en virtud de su notación se hacen prácticamente ilegibles aunque traten los mismos temas o problemas de otros que usan notaciones más comunes.

Pensando justamente en esto, he tomado la decisión de utilizar, en la medida de las posibilidades, la misma notación de algunos textos clásicos de mecánica celeste, que se diferencia, a veces significativamente, de la que utilizan libros de matemáticas e incluso de física, con los que el lector puede estar familiarizado.

<sup>9</sup>En el libro presentaremos “transliteraciones” de la pronunciación en castellano, indicando, entre comillas las letras y palabras más cercanas que un hispanohablante podría usar. Así por ejemplo “niu-ton” será la transliteración fonética de Newton.

<sup>10</sup><http://forvo.com>

<sup>11</sup><https://es.forvo.com/search/Emmy%20Noether/de/>

El lector encontrará los detalles específicos de la notación usada en el libro en la [Sección *Vectores y cálculo*].

## 3.5. Estructura del libro

Para facilitar la lectura del libro y hacer de la experiencia de leerlo algo realmente excitante, el libro, además de toda la teoría que esperamos encontrar en un texto académico, contiene una serie de elementos gráficos con los que debemos familiarizarnos.

### 3.5.1. Cajas de texto

Mucha información importante en el texto se presenta en *cajas* independientes y cuyas características gráficas resaltan del resto del documento. En particular existen 3 tipos de cajas:

- **Resumen del capítulo.** Esta caja aparece normalmente al principio del libro y contiene una breve síntesis de cada capítulo. No deje de leer este resumen para identificar los temas centrales de cada parte del libro. El profesor podría usar la información contenida allí para definir los objetivos específicos de la evaluación.
- **Notas.** A veces es necesario desviarse un momento del hilo del texto para aclarar o ampliar asuntos relacionados con la notación, algunos detalles sobre los paquetes y algoritmos utilizados, o simplemente llamar la atención sobre un asunto importante. A continuación se muestra un ejemplo de una *caja de nota*.

#### Nota

**El lenguaje *Markdown*.** La mayor parte del texto de este libro, ha sido escrito en las celdas de libretas de Jupyter en un lenguaje de descripción de documentos conocido como *Markdown*. Puede explorar la sintaxis del lenguaje, o bien desplegando el contenido de las *celdas* de las libretas, o bien consultando la documentación.

- **Definiciones.** Muchas cantidades físicas y algunos conceptos claves requieren una definición rigurosa. Este es el rol justamente que juegan las *cajas de definición*. A diferencia de las cajas de Resumen y Notas, las cajas de *Definición* están numeradas (como las figuras o las ecuaciones), de modo que sea más fácil referirse a ellas.

#### Definición 3.1

**Mecánica celeste.** Llamamos *Mecánica Celeste* a la disciplina científica que aplica las leyes de la mecánica para estudiar el movimiento de cuerpos bajo la acción dominante de la gravedad. Dado que solo en en lugares lejanos a la superficie terrestre (normalmente fuera de su atmósfera), la gravedad es la fuerza dominante, la mecánica celeste normalmente describe el mo-

### Definición (Cont.)

vimiento de cuerpos astronómicos (desde partículas de roca, hielo o polvo interestelar, hasta planetas y estrellas) y de vehículos espaciales. En este último caso se habla más de *Mecánica orbital*.

- **Teoremas y leyes.** Como las definiciones, en muchas ocasiones será indispensable separarnos un momento de una explicación para formular más rigurosamente un resultado, normalmente obtenido por razonamiento deductivo en el marco de una teoría (teoremas, colorarios) o por razonamiento inductivo a partir de la experiencia (leyes).

### Teorema 3.1

**Teorema de Danelin.** Dada una esfera tangente a un cono y un plano que corta el cono en un determinado ángulo, el punto de tangencia de la esfera con el plano es uno de los focos de la cónica.

- **Mecánica celeste en la historia.** Finalmente, pero no menos importante, son las anécdotas e historias que contaremos a lo largo de todo el libro. Como se menciono en el prefacio, la mecánica celeste tiene ya más de 400 años (aproximadamente 100 años más que la mecánica analítica) y cientos de libros y miles de artículos se han escrito en el tema. Es casi imposible hablar de mecánica celeste y analítica, sin mencionar de vez en cuando las historias que rodearon la invención de una técnica, la biografía de alguno de los grandes hombres y mujeres que concibieron las ideas contenidas en el libro o simplemente una anécdota curiosa relacionada con algún tema de interés.

### Mecánica celeste en la historia

**¿Kepler o Newton?** En el Prefacio daba a entender que la mecánica celeste posiblemente había comenzado con los trabajos pioneros de Johannes Kepler (ver [Figura 3.1](#)). Otros autores van más lejos y apuntan a los astrónomos de la antigüedad y la edad media, especialmente indios, chinos, arabes y griegos, que desarrollaron modelos complejos para la descripción del movimiento de los cuerpos celestes. Los más conservadores apuntan a Sir Isaac Newton, quien después de la publicación de su obra cumbre, los *Principia*, sentó las bases físicas, no solo para la mecánica celeste, sino también, en general, para toda la mecánica.



La razón en este libro para escoger a Kepler, como el *padre* de la disciplina (y en general de la astronomía física) fueron sus contribuciones decisivas y bastante bien conocidas, para esclarecer definitivamente la *cinemática* del movimiento planetario. En particular, el descubri-

### Mecánica celeste en la historia (Cont.)

miento (o enunciado matemáticos) de sus conocidas *leyes del movimiento planetario*, representaron un cambio cualitativo en el desarrollo de la teoría del movimiento planetario e inspiraron en últimas el trabajo de Newton.

Adicionalmente, y esto es aún más importante, Kepler fue uno de los primeros astrónomos modernos (renacentistas europeo) en hacer consideraciones teóricas sobre la causa del movimiento planetario, más allá de ocuparse de su descripción, como lo hicieron la mayoría de los astrónomos de la antigüedad y la edad media. Esto pone a Kepler, entre esos astrónomos, como el primer *astrofísico* de la historia.

### 3.5.2. Algoritmos

Como se ha insistido hasta aquí, una de las novedades más importantes de este libro, es el énfasis que se ha querido dar en los algoritmos y la aplicación de técnicas computacionales en la comprensión y aplicación de la mecánica celeste. A lo largo de todo el texto encontraremos *algoritmos* para realizar tareas de computo propias de cada uno de los temas abordados.

Existen en general tres tipos de *algoritmos* que encontraremos a lo largo del texto. En primer lugar están los algoritmos más sencillos, *retazos de código* (en inglés *code snippets*), que ejecutan tareas básicas de preparación para algoritmos más complejos. Este es un caso de ellos:

```
a=1
b=-1
c=2
disc=b**2-4*a*c
```

Los algoritmos más complejos pueden, como las ecuaciones, venir numerados:

(Algoritmo 3.1)

```
def calcula_discriminante(a,b,c):
    """Calcula el discriminante de una ecuación de segundo grado.

    Argumentos:
    =====
    a,b,c (float): Coeficientes
```



```

Retorna:
=====
d (float): Valor del discriminante

"""
a=1
b=-1
c=2
disc=b**2-4*a*c
return disc

```

En este caso, además, el algoritmo representa una rutina o función, que podría ser usada más adelante, no solo en el mismo capítulo, sino en un capítulo posterior. Todas las rutinas como estas, hacen parte de un paquete que viene con el libro, el paquete `pymcel`.

Hay algoritmos que se ejecutan implícitamente pero para los cuáles, al menos en el libro impreso o en el libro para la web, no mostramos el código, bien sea por economía o porque es muy complejo e irrelevante para el libro. Un ejemplo común de este código oculto, es el código que usamos para mostrar los resultados de algunos cálculos. Por ejemplo:

(Algoritmo 3.2)

```
d=calcula_discriminante(1,2,3)
```

El valor del discriminante es: -7

Nótese que en el código (3.2) no hay ningún comando para mostrar el valor de la variable `discriminante` y mucho menos del mensaje asociado. Esa tarea se realiza en una celda de código oculta. En las libretas de clase, el lector encontrará todas las celdas.

También tenemos los códigos que dan como resultado figuras o gráficos. Estos están entre los más interesantes y útiles. Todos los códigos que producen figuras están numerados. Así mismo los gráficos que producen aparecen en el texto como figuras independientes. Incluso, en el texto impreso, y por razones de eficiencia del espacio, algunas de esos gráficos pueden estar en lugares lejanos de la posición del código. Es por esto que en todos los algoritmos que producen gráficos encontraran (en la parte inferior) una referencia a la figura correspondiente.

(Algoritmo 3.3)

```

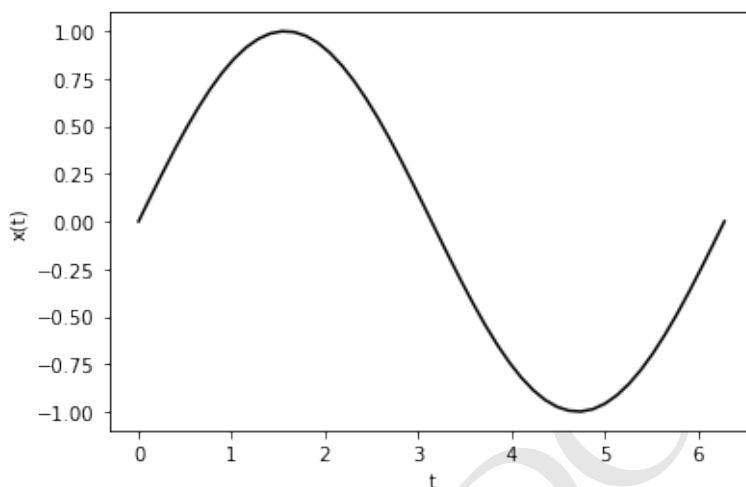
import matplotlib.pyplot as plt
from numpy import linspace,sin,pi

t=linspace(0,2*pi)
x=sin(t)

plt.figure()
plt.plot(t,x,'k-');

plt.xlabel("t");
plt.ylabel("x(t)");

```

[ver Figura 3.2](#)

**Figura 3.2:** Figura correspondiente al código 3.3.

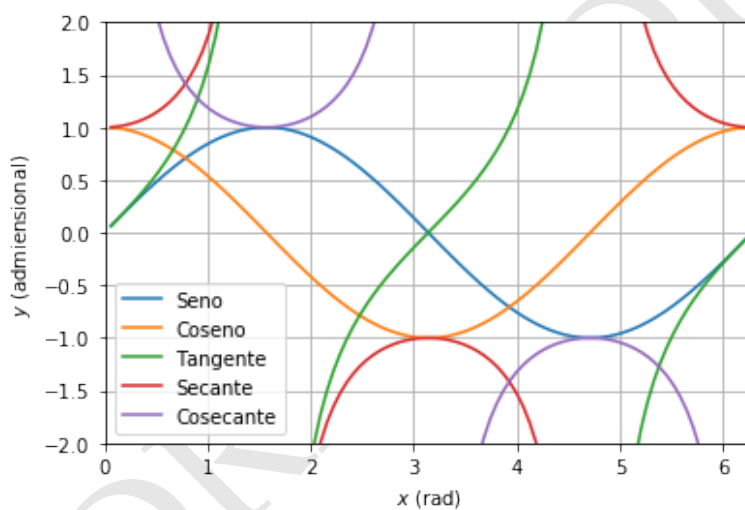
La mayoría de las figuras del libro han sido elaboradas usando software de diseño independientes. Sin embargo, algunas figuras, especialmente gráficos de datos o resultados de simulaciones, son generadas por las libretas con las que fue escrito el libro. Si bien los algoritmos con los que son creados esas figuras (que llamaremos *gráficos generados*) no aparecen en la versión impresa o en la versión web (pueden ser muy elaborados e irrelevantes para los fines del curso), ellos sí pueden aparecer en las libretas de clase.

## 3.6. Figuras interactivas y animaciones

Uno de las cosas que hace poderosas a las libretas de Jupyter, como medios para compartir información o estudiar un tema, es la posibilidad de interactuar con la información que se está compartiendo o asimilando. Esto se consigue principalmente accediendo al contenido de las celdas de la libreta (código) y eventualmente modificándolas.

Pero hay otra posibilidad que ofrecen las libretas y es la de generar gráficos interactivos y animaciones, que permiten al lector o al estudiante, modificar de forma sencilla los parámetros de un algoritmo o una solución (gráficos interactivos) o ver en movimiento figuras que normalmente vemos estáticas en los libros.

Para ver las figuras interactivas y animaciones de esta parte del libro, debe dirigirse al sitio en línea del texto.



**Figura 3.3:** Gráfico de las funciones trigonométricas básicas, en el intervalo de interés (gráfico generado).

BORRADOR

## Capítulo 4

# Fundamentos

### Resumen

En este capítulo haremos una síntesis práctica de los temas de matemáticas, física y astronomía que necesitaremos para desarrollar la mecánica celeste en el resto del libro. Repasaremos la geometría de las cónicas, (que son la base para describir la trayectorias de cuerpos celestes sometidos a la gavedad newtoniana), en el plano y en el espacio de tres dimensiones. Sintetizaremos, en un lenguaje moderno, los principios y leyes de la mecánica newtoniana, incluyendo la dinámica en sistemas de referencia rotantes. Presentaremos brevemente los fundamentos de la teoría de la relatividad (especial y general), especialmente el concepto de métrica y sus implicaciones cinemáticas básicas. Finalmente repasaremos a algunas conceptos y definiciones de astronomía que serán de relevancia en el texto, la organización y nomenclatura del sistema solar, los sistemas de medida de tiempo y los sistemas de referencia usados para especificar la posición de cuerpos en el cielo y en el espacio interplanetario.

### 4.1. Vectores y cálculo

En esta sección repasaremos, de manera práctica (y posiblemente poco rigurosa desde el punto de vista matemático), algunos resultados centrales del cálculo infinitesimal y la teoría de ecuaciones diferenciales que serán de utilidad en el resto del libro.

Para quienes conocen bien estos temas, puede servir de motivación para la lectura de esta sección, el hecho de que además de conceptos matemáticos ampliamente conocidos, hemos incluido aquí detalles sobre la **notación matemática**, **definiciones** y **teoremas** que usaremos en el resto del libro; escritos todos en un lenguaje muy propio del texto. Tal vez más interesante es el hecho de que a lo largo de esta sección ilustraremos también algunos de los conceptos claves usando **algoritmos**, con lo que sentaremos las bases para todos los desarrollos *computacionales* de los demás capítulos.

Sea que lea esta sección o sea que no lo haga, antes de pasar a los siguientes capítulos intente resolver los problemas al final de este capítulo que están directamente relacionados con los temas de esta sección. Este ejercicio le permitirá valorar mejor las habilidades matemáticas y algorítmicas que tiene antes de comenzar y que serán indispensable en el resto del libro. Tal vez descubra que después todo no es mala idea hacer este repaso.

#### 4.1.1. Conjunto, tuplas y vectores

Hay tres tipos de entidades matemáticas (además de los números reales y las funciones) que usaremos con frecuencia en este capítulo (y en general en todo el libro):

- **Conjuntos.** Muchas veces nos referiremos aquí a conjuntos (no necesariamente ordenados) de entidades que están relacionadas de alguna manera: las coordenadas de un punto en el espacio de fases, un conjunto de funciones, las ecuaciones diferenciales que describen el movimiento de un sistema dinámico, las partículas que interactúan gravitacionalmente en un sistema, etc. Los elementos de la mayoría de los conjuntos usados en este libro estarán numerados. Así por ejemplo, las masas de un sistema de  $N$  partículas,  $m_0, m_1, \dots, m_{N-1}$  se representarán como el conjunto:

$$\{m_i\}_{i=0,1,\dots,N-1}$$

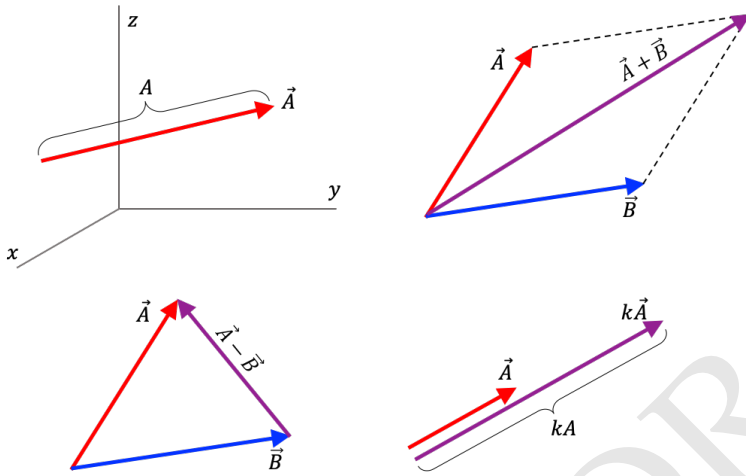
Una versión sintética más común de esta notación será  $\{m_i\}_N$ . En el caso en el que el número de elementos sea claro en el contexto se usará simplemente  $\{m_i\}$

##### Nota

**Numeración comenzando en cero.** En lo sucesivo numeraremos todas las cantidades físicas y matemáticas (partículas, variables auxiliares, componentes de un vector o una matriz, etc.) comenzando en cero, tal y como se acostumbra en programación. Esta elección facilitará la implementación de las fórmulas en algoritmos y programas de computadora. Si bien la numeración comenzando en cero no es muy común en matemáticas o física, existen justificaciones poderosas para su uso, algunas de las cuáles están enumeradas en el documento “[Why numbering should start at zero](https://www.cs.utexas.edu/users/EWD/transcriptions/EWD08xx/EWD831.html)”<sup>a</sup> del maestro de maestros de la programación científica, Edsger Wybe Dijkstra.

<sup>a</sup><https://www.cs.utexas.edu/users/EWD/transcriptions/EWD08xx/EWD831.html>

- **Tuplas.** Las tuplas (pares, tripletas, etc.) son conjuntos ordenados de números reales. Para las tuplas usaremos la notación convencional  $(x_0, x_2, \dots, x_{N-1})$ , donde los paréntesis, a diferencia de las llaves de los conjuntos más generales, nos permitirán reconocer el hecho de que el orden de



**Figura 4.1:** Definición geométrica de vector espacial y de sus operaciones básicas (suma, resta y multiplicación por un escalar). Aunque la resta de  $\vec{A} - \vec{B}$  es un caso particular de la suma, es importante aquí familiarizarse con la dirección que tiene este vector (va de la cabeza del sustraendo  $\vec{B}$  a la del minuendo  $\vec{A}$ .)

los elementos es importante. Las tuplas forman, con el conjunto de los números reales, un *espacio vectorial*. En este espacio se definen las siguientes operaciones básicas:

- Suma:

$$(a_0, a_1, \dots) + (b_0, b_1, \dots) \equiv (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \dots) \quad (4.1)$$

- Multiplicación por un escalar:

$$k(a_0, a_1, \dots) \equiv (ka_0, ka_1, \dots) \quad (4.2)$$

donde  $k$  es un número real.

- **Vectores geométricos (euclidianos).** Los vectores geométricos o en breve vectores, son *segmentos orientados* en el espacio de tres dimensiones (ver [Figura 4.1](#)) que tienen las siguientes propiedades:

- Se denotarán en este libro como  $\vec{A}$  o  $\hat{e}$  (este último es un vector unitario) en lugar de usar la notación más común con letras en negrilla.
- Todo vector tiene: 1) magnitud,  $A$ , igual a la longitud (euclidiana) del segmento correspondiente y 2) una dirección en el espacio.
- Los vectores forman con los números reales, un espacio vectorial con operaciones definidas, geoméricamente, como se muestra en la [Figura 4.1](#).

- El elemento neutro de la operación suma entre vectores, es el vector nulo, que representaremos como  $\vec{0}$ .
- Todo vector, por definición, se puede escribir como una combinación lineal de tres vectores de una base ortonormal:  $\hat{e}_0, \hat{e}_1, \hat{e}_2$ . Los coeficientes de la combinación se conocen como componentes del vector:

$$\vec{A} = A_0\hat{e}_0 + A_1\hat{e}_1 + A_2\hat{e}_2. \quad (4.3)$$

- El espacio de vectores es *isomorfo* a el espacio vectorial de triplas. Por la misma razón nos referiremos al vector, o bien como la entidad abstracta  $\vec{A}$ , como su representación en términos de los vectores unitarios de una base ortonormal (ver ítem anterior) o aún mejor, en términos de la tripleta:

$$\vec{A} : (A_0, A_1, A_2)$$

En este caso usaremos el símbolo ":" en lugar de "=" para dar entender que el vector *no es* una tripleta sino una entidad geométrica más abstracta.

El isomorfismo implica también, que las componentes de los vectores en las operaciones geométricas definidas en la **Figura 4.1**, cumplen la Ecs. (4.1) y (4.2).

- Además de la suma y la multiplicación por un escalar, que caracterizan el espacio vectorial, se definen dos productos adicionales:
  - **Producto escalar** o **producto punto**,  $\vec{A} \cdot \vec{B}$ . El producto escalar se define, a partir los vectores unitarios de la base, como:

$$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij},$$

donde  $\delta_{ij}$  es el "delta de kroenecker":

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (4.4)$$

Con esta esta definición y usando la representación de los vectores dada por la Ec. (4.3) puede probarse que:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_0B_0 + A_1B_1 + A_2B_2$$

- **Producto vectorial** o **producto cruz**,  $\vec{A} \times \vec{B}$ . El producto vectorial se define, a partir los vectores unitarios de la base, como:

$$\hat{e}_i \times \hat{e}_j = \epsilon_{ijk}\hat{e}_k, \quad (4.5)$$

donde  $\epsilon_{ijk}$  es el "símbolo de Levi-Civita" ("levi chivita"<sup>12</sup>):

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{si } (i, j, k) \text{ es } (0, 1, 2), (1, 2, 0) \text{ o } (2, 0, 1) \\ -1 & \text{si } (i, j, k) \text{ es } (2, 1, 0), (0, 2, 1) \text{ o } (1, 0, 2) \\ 0 & \text{de otro modo } i = j \text{ o } j = k \text{ o } k = i \end{cases} \quad (4.6)$$

<sup>12</sup><https://forvo.com/word/levi-civita/#it>



Al conjunto de vectores unitarios de una base que se definen cumpliendo la Ec. (4.5) se lo llama un *conjunto de vectores de mano derecha*. Con esta definición y usando la representación de los vectores dada por la Ec. (4.3) puede probarse que:

$$\begin{aligned}\vec{A} \times \vec{B} = & (A_1 B_2 - A_2 B_1) \hat{e}_0 + \\ & -(A_0 B_2 - A_2 B_0) \hat{e}_1 + \\ & (A_0 B_1 - A_1 B_0) \hat{e}_2\end{aligned}\quad (4.7)$$

Esta última expresión es tan elaborada que con frecuencia se usa la regla mnemotécnica:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{e}_0 & \hat{e}_1 & \hat{e}_2 \\ A_0 & A_1 & A_2 \\ B_0 & B_1 & B_2 \end{vmatrix} \quad (4.8)$$

Donde  $|M|$  es el determinante de la matriz  $M$ .

- Otras identidades útiles:
  - Propiedad cíclica del **triple producto escalar**:

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) \quad (4.9)$$

- **Triple producto vectorial**:

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C}) \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{C} \quad (4.10)$$

### Algoritmos para conjuntos y tuplas

Todos los lenguajes modernos de programación, definen tipos especiales para representar conjuntos y tuplas. En Python existen tres tipos de objetos básicos para este propósito: listas, tuplas y diccionarios. Existen sutiles diferencias entre las listas y las tuplas en Python y en general usaremos con más frecuencia las primeras. Para los algoritmos de este libro, es importante entender las *operaciones* entre listas, que son diferentes a las operaciones en el espacio vectorial de las tuplas matemáticas que definimos antes.

Así, por ejemplo, en el siguiente algoritmo se construye una lista con las componentes del vector de estado de una partícula, “sumando” las listas de las componentes de su vector posición y velocidad:

```
#Lista de componentes del vector posición
r=[1,0,3]
#Lista de componentes del vector velocidad
v=[0,-1,0]
#Lista de componentes del vector de estado
X=r+v
```

```
X = [1, 0, 3, 0, -1, 0]
```

El operador +, entre listas y tuplas de Python produce la unión de los elementos de las listas.

Usando este operador se pueden hacer algoritmos prácticos como el que se muestra a continuación:

```
def f(x):
    from math import sin
    y=sin(x)/x
    return y

valores_de_x=[1.0,2.0,3.0]
valores_de_f=[]
for x in valores_de_x:
    valores_de_f+= [f(x)]
```

valores de f = [0.8414709848078965, 0.45464871341284085, 0.0470400026866224]

aquí, comenzamos con un conjunto vacío, valores\_de\_f=[] y después, dentro de un ciclo, usamos el operador de acumulación += para agregar elementos al conjunto. Este es un método muy común usado en el lenguaje para construir “tablas de valores”, que pueden, por ejemplo usarse para hacer gráficos de funciones.

### Algoritmos para vectores

Los vectores forman un “capítulo” en la computación separado de las listas y las tuplas. La razón básica son sus propiedades matemáticas y las operaciones definidas entre ellos. Bibliotecas de rutinas muy completas existen en todos los lenguajes de programación para representar este tipo de entidades matemáticas.

En Python y a lo largo de este libro usaremos los objetos y rutinas de los paquetes NumPy y SPICE para definir y manipular vectores.

El ejemplo abajo muestra como se calcula el ángulo entre dos vectores  $\theta_{AB}$ , a partir de la interpretación geométrica del producto punto  $\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta_{AB}$  (ver problemas al final del capítulo):

```
#Definimos los vectores
from numpy import array
A=array([1.0,0.0,2.0])
B=array([0.0,1.0,3.0])

#Calculamos el producto escalar y vectorial
from numpy import dot
ApuntoB=dot(A,B)

#El ángulo entre los vectores
from numpy import arccos
from numpy.linalg import norm
anguloAB=arccos(ApuntoB/(norm(A)*norm(B)))
```

AnguloAB = 31.948059431330062 grados

**Nota**

**Radianes y grados en los algoritmos.** Es importante entender que las funciones trigonométricas inversas como `arccos`, devuelven, en todos los lenguajes de programación, valores de los ángulos en radianes. En el caso anterior, por ejemplo, el valor de la variable `anguloAB` al final del algoritmo en realidad era 0.5575988266995369. Sin embargo, decidimos mostrar su valor en grados después de multiplicar `anguloAB` por el factor de conversión  $\pi/180$  (esta operación no se muestra en el código.) Así lo seguiremos haciendo en el resto del libro. El lector que use los algoritmos no debe olvidar multiplicar por el factor de conversión para reconstruir los resultados mostrados aquí.

Un procedimiento similar, esta vez usando vectores y rutinas de SPICE (internamente SPICE usa vectores o arreglos de NumPy), puede usarse para calcular el triple producto vectorial:

```
from numpy import array
from spiceypy import vdot, vcrss

A=array([2.0,2.0,1.0])
B=array([0.0,-1.0,0.0])
C=array([0.0,0.0,2.0])

AxBxC=vdot(A,B)*C-vdot(A,C)*B
```

$A \times (B \times C) = [-0. \quad 2. \quad -4.]$

También podemos usarlas para verificar la propiedad cíclica del triple producto escalar:

```
from numpy import array
from spiceypy import vnorm, vdot, vcrss

A=array([2.0,2.0,1.0])
B=array([0.0,-1.0,0.0])
C=array([0.0,0.0,2.0])

ABC=vdot(A,vcrss(B,C))
CAB=vdot(C,vcrss(A,B))
BCA=vdot(B,vcrss(C,A))
```

$A \cdot (B \times C) = -4.0$   
 $C \cdot (A \times B) = -4.0$   
 $B \cdot (C \times A) = -4.0$

Con lo que se verifica la identidad (al menos para los vectores escogidos.)

#### 4.1.2. Sistemas de coordenadas

A lo largo de este libro, usaremos los tres sistemas de coordenadas ortogonales clásicos (cartesianas, cilíndricas y esféricas, ver [Figura 4.2](#)) con algunas convencio-

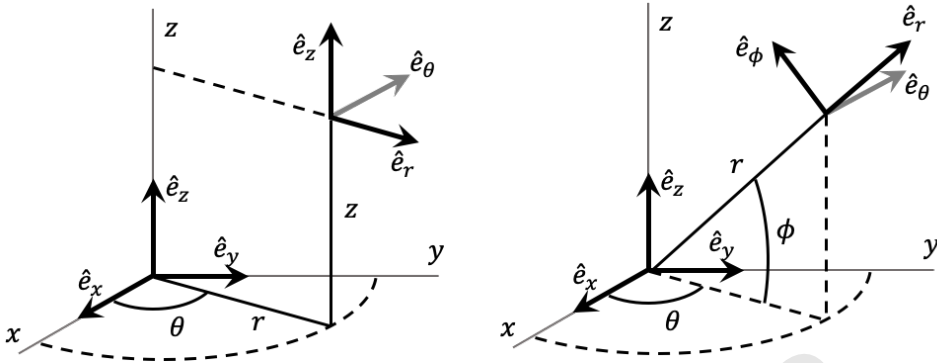


Figura 4.2: Definición de los sistemas de coordenadas usadas en este texto

nes más propias de la astronomía y la mecánica celeste que del cálculo.

A continuación, y en especial para clarificar nuestra notación, enumeramos detalladamente las propiedades de cada sistema.

■ **Sistema de coordenadas cartesiano.**

- Coordenadas:  $x \in (-\infty, +\infty)$ ,  $y \in (-\infty, +\infty)$ ,  $z \in (-\infty, +\infty)$ .
- Vectores unitarios:  $\hat{e}_x$ ,  $\hat{e}_y$ ,  $\hat{e}_z$ .
- Comentarios:
  - En todos los casos la orientación de los ejes obedecerá la *regla de la mano derecha*, es decir, los sistemas cartesianos usados en el texto y cuyos ejes están definidos por el conjunto de vectores unitarios ( $\hat{e}_x$ ,  $\hat{e}_y$ ,  $\hat{e}_z$ ) forman un *conjunto de mano derecha* (ver Ec. 4.5), a saber, en forma explícita:

$$\begin{aligned}\hat{e}_x \times \hat{e}_y &= \hat{e}_z \\ \hat{e}_y \times \hat{e}_z &= \hat{e}_x \\ \hat{e}_z \times \hat{e}_x &= \hat{e}_y\end{aligned}\tag{4.11}$$

■ **Sistema de coordenadas cilíndrico** (ver Figura 4.2).

- Coordenadas:  $r \in [0, +\infty)$ ,  $\theta \in [0, 2\pi)$ ,  $z \in (-\infty, +\infty)$ .
- Conversión al sistema de coordenadas cartesianas:

$$\begin{aligned}x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta\end{aligned}\tag{4.12}$$

- Vectores unitarios expresados en el sistema de coordenadas cartesianas:

$$\begin{aligned}\hat{e}_r &= \cos \theta \hat{e}_x + \sin \theta \hat{e}_y \\ \hat{e}_\theta &= -\sin \theta \hat{e}_x + \cos \theta \hat{e}_y \\ \hat{e}_z &= \hat{e}_z\end{aligned}\tag{4.13}$$

- Comentarios:

- El conjunto de vectores unitarios ( $\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_z$ ) forman un conjunto de mano derecha tal y como se definió en las Ecs. (4.11).
- Nótese que, a diferencia de la notación usada generalmente en los textos de cálculo, la coordenada cilíndrica  $r$  usa la misma letra que la coordenada esférica  $r$  y la magnitud del vector posición (ver siguiente sección). La distinción entre las tres, dependerá del contexto.
- Usaremos la letra griega  $\theta$  para denotar el ángulo *acimutal*, a diferencia de la notación convencional que usa esta letra para la coordenada esférica polar (ángulo del vector posición respecto al eje  $z$ .)

- **Sistema de coordenadas esférico** (ver Figura 4.2).

- Coordenadas:  $r \in [0, +\infty)$ ,  $\theta \in [0, 2\pi)$ ,  $\phi \in [-\pi/2, +\pi/2]$ .
- Conversión al sistema de coordenadas cartesianas:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \phi \cos \theta \\ y &= r \cos \phi \sin \theta \\ z &= r \sin \phi \end{aligned} \quad (4.14)$$

- Vectores unitarios expresados en el sistema de coordenadas cartesianas:

$$\begin{aligned} \hat{e}_r &= \cos \phi \cos \theta \hat{e}_x + \cos \phi \sin \theta \hat{e}_y + \sin \phi \hat{e}_z \\ \hat{e}_\theta &= -\sin \theta \hat{e}_x + \cos \theta \hat{e}_y \\ \hat{e}_\phi &= \cos \phi \cos \theta \hat{e}_x + \sin \phi \sin \theta \hat{e}_y - \sin \phi \hat{e}_z \end{aligned} \quad (4.15)$$

- Comentarios:

- El conjunto de vectores unitarios ( $\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_\phi$ ) forman un conjunto de mano derecha tal y como se definió en las Ecs. (4.11).
- Nótese que, a diferencia de la notación usada generalmente en los textos de cálculo, la coordenada esférica  $\phi$  se medirá respecto al plano  $x - y$  (como una *latitud*) en lugar de hacerlo respecto al eje  $z$  (como una *colatitud*).

Una interesante página interactiva que permite visualizar mejor la definición de los sistemas de coordenadas y la orientación de los vectores coordenadas puede encontrarse en los siguientes enlaces, tanto para el [sistema de coordenadas cilíndrica](http://dynref.engr.illinois.edu/rvy.html)<sup>13</sup> como para el [sistema de coordenadas esféricas](http://dynref.engr.illinois.edu/rvy.html)<sup>14</sup>.

### 4.1.3. Funciones

Una función es, en términos informales, una regla de correspondencia que asocia los elementos de un conjunto de partida o *dominio* (p.e. el conjunto de los números reales  $\mathbb{R}$ , el conjunto de puntos en un plano  $\mathbb{R}^2$  o de eventos en el espacio

<sup>13</sup><http://dynref.engr.illinois.edu/rvy.html>

<sup>14</sup><http://dynref.engr.illinois.edu/rvy.html>

tiempo  $\mathbb{R}^4$ ) con los de otro conjunto, llamado rango, de modo a que cada elemento del dominio le corresponde **uno y solo un elemento del rango**.

Entre los distintos tipos de funciones que reconoce el análisis matemático, en este libro nos concentraremos en:

- **Funciones de variable real:** Dominio y rango  $\mathbb{R}$ . Ejemplo:  $f(t) = t^2$ .
- **Funciones de muchas variables o Campos escalares:** Dominio  $\mathbb{R}^n$ , rango  $\mathbb{R}$ . Ejemplos:  $f(x, y) = x^2 + y^2$ ,  $H(\{q_i\}_N) = \sum_i q_i^2$  (para la notación del conjunto  $\{q_i\}$  ver la [Sección 4.1.1](#)).
- **Funciones vectoriales:** Dominio  $\mathbb{R}$ , rango  $\mathbb{R}^n$ . Ejemplo:  $\vec{a}(t) = kr^{-n}\hat{e}_r$ .
- **Funciones vectoriales de muchas variables o Campos vectoriales:** Dominio  $\mathbb{R}^n$ , rango  $\mathbb{R}^3$ . Ejemplo:  $\vec{F}(r, \theta, z) : -k(r \cos \theta, r \sin \theta, z)$ .

### Nota

**$t$  como variable genérica de las funciones.** En todos los textos de matemáticas (incluso en los de física) se acostumbra usar  $x$  como el nombre preferido para representar, de forma genérica, la variable independiente de las funciones. En lo sucesivo cambiaremos esta convención al llamar  $t$  a la variable independiente genérica. La razón no puede ser más sencilla: en la mecánica  $t$  es el nombre que damos a la variable independiente por excelencia, el tiempo, de modo que muchas de las fórmulas que desarrollaremos en este capítulo, se trasladaran simbólicamente casi sin modificación a la mecánica.

Es obvio que la elección de la letra con la que representamos la variable independiente, no modifica en nada las definiciones y teoremas que veremos en esta sección, de modo que esperamos esta elección no moleste a los más conservadores ni confunda a quienes han estudiado ampliamente estos temas en otros textos.

### Algoritmos para funciones

Hay dos maneras de definir una función en Python: 1) como una rutina o 2) como una función lambda.

Como una rutina, una función en Python puede recibir como “argumentos” de entrada no solo las variables de la función sino también argumentos opcionales.

La siguiente función, por ejemplo, permite calcular el valor de la energía potencial de un sistema físico usando la función de varias variables  $U(\vec{r}) = kr^n$  (siendo  $\vec{r} : x, y, z$  el vector posición y  $r$  su magnitud.)

(Algoritmo 4.1)

```
def U(x, y, z, k=1, n=-1):
    r=(x**2+y**2+z**2)**0.5
    return k*r**n
```

$U(1.0, 2.0, 0.0)$  con  $k = 1$  y  $n = -1$  (valores por defecto) = 0.4472135954999579  
 $U(1.0, 2.0, 0.0)$  con  $k = 6.67\text{e-}11$  y  $n = -2 = 1.334\text{e-}11$

**Nota**

**Argumentos obligatorios y argumentos opcionales.** Toda rutina en Python puede tener unos argumentos obligatorios (que llamaremos variables) o unos opcionales.

Las variables son en estricto sentido una tupla de valores, por ejemplo  $x, y, z$  en la función  $U$  en el Alg. (4.1).

Los argumentos opcionales son, por otro lado, un diccionario de valores, que no es otra cosa que una lista de valores identificados con un nombre (también llamado clave o *key*). En la función  $U$  en el Alg. (??) los argumentos opcionales son  $k=1, n=-1$ .

En Python las variables y las opciones de una rutina pueden representarse usando los objetos especiales `*variables` y `**opciones`. El uso de estos objetos especiales no es muy común, pero en ciertas situaciones puede ser bastante útil.

Una forma alternativa de la rutina para  $U$  en el Alg. (??) es:

```
def U(*variables,**opciones):
    x,y,z=*variables
    r=(x**2+y**2+z**2)**0.5
    return opciones["k"]*r**n
```

que se puede invocar usando:

```
var=1.0,2.0
opc=dict(k=1,n=-2)
U(*var,**opc)
```

No parece muy práctico, pero como veremos puede ser muy útil en ciertas situaciones especiales.

Las funciones `lambda` se usan para representar funciones muy abreviadas y no tienen argumentos distintos de las variables de las que dependen.

Así, por ejemplo, el siguiente algoritmo define una función `lambda`,  $U_x$ , basada en la función  $U$  del Alg. (??), que depende solo de la variable  $x$  cuando  $y$  y  $z$  asumen constante los valores de  $y$  y  $z$  ( $U_x$  será útil para calcular más abajo la derivadas parcial de  $U$  respecto a  $x$ ):

(Algoritmo 4.2)

```
y=1.0
z=1.0
k=1
n=-2
U_x=lambda x:U(x,y,z,k,n)
```

$$U_x(0.0) = 0.49999999999999994$$

#### 4.1.4. Derivadas

La derivada de una función de variable real es en sí misma una función definida por el límite:

$$\frac{df}{dt} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t + \Delta t)}{\Delta t} \quad (4.16)$$

Si el límite no existe decimos que la función no es derivable en  $t$ .

##### Nota

**Notación de la derivada.** A lo largo de la historia la manera como se ha representado la función derivada ha cambiado. Existen al menos tres notaciones comunes:

- La **notación de Leibniz**,  $df/dt$ ,  $d^2f/dt^2$ . En esta notación la derivada se representa como si fuera la razón entre dos cantidades, pero no es así ¡mucho cuidado! Usaremos la notación de Leibniz especialmente para representar la derivada de funciones que se escriben de forma explícita, así por ejemplo:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} t^2 \right)$$

- La **notación de Newton**,  $\dot{f}$ ,  $\ddot{f}$ . Esta será la forma que usaremos para denotar a lo largo del libro las derivadas respecto del tiempo (o el tiempo propio en relatividad).
- La **notación de Lagrange**,  $f'$ ,  $f''$ , que no usaremos en este libro pero que pueden encontrar en muchos textos clásicos de mecánica celeste o analítica.
- La **notación de Euler**,  $Df$ ,  $D^2f$ , es la notación menos común, pero puede aparecer en el contexto de la mecánica de fluidos.

La definición de derivada de las funciones de variable real como un límite, se extiende por analogía a campos escalares, funciones vectoriales o campos vectoriales. Para las funciones que dependen de varias variables, sin embargo, se usa una notación y un nombre diferente: **derivada parcial**. La derivada parcial de un campo escalar se define como:

$$\frac{\partial f}{\partial q_k} = \lim_{\Delta q_k \rightarrow 0} \frac{f(q_1, q_2, \dots, q_k + \Delta q_k, \dots, q_N) - f(q_1, q_2, \dots, q_k, \dots, q_N)}{\Delta q_k}$$

La derivada parcial se calcula de la misma manera que la derivada de una variable, con la salvedad de que al hacerlo se asume que todas las demás variables de la función son constantes.

En muchas partes en este libro, y por economía usaremos la notación de Euler para las derivadas parciales, a saber:



$$\partial_x f \equiv \frac{\partial f}{\partial x}$$

En esta notación una derivada parcial múltiple se escribirá como:

$$\partial_{xyz} f(x, y, z) \equiv \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}$$

A pesar de que la derivada parcial tiene una definición *numérica* análoga a la de la derivada total, existe una sutil diferencia entre ambas.

Imagine que tenemos una **variable independiente**  $t$  y definimos, a partir de ella, una nueva variable  $u$  que es función de  $t$  (variable dependiente).

¿Cómo podemos calcular la derivada de una función de la nueva variable  $f(u)$  respecto de la variable independiente  $t$ ?

#### Teorema 4.1

**Regla de la Cadena.** Dada una función compuesta  $f(u(t))$ , la derivada de  $f$  respecto a  $t$  es:

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{du} \frac{du}{dt}$$

Decimos que la función  $f$  depende *implícitamente* de la variable independiente  $t$ . En este sentido la regla de la cadena es una regla de *derivación implícita*.

Usando la notación de Newton la expresión anterior se escribirá de forma abreviada:

$$\dot{f}(t) = \dot{u} \frac{df}{du}$$

¿Qué pasa en el caso en el que  $f$  depende de varias variables dependientes, por ejemplo  $f(q_1(t), q_2(t), \dots, q_N(t)) \equiv f(\{q_i(t)\}_N)$ ?

En este caso la regla de la cadena se puede generalizar como:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial q_1} \frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial q_2} \frac{dq_2}{dt} + \dots + \frac{\partial f}{\partial q_N} \frac{dq_N}{dt} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} = \sum_i \dot{q}_i \partial_{q_i} f$$

Ahora bien: ¿existirá, en este caso, la derivada parcial de  $f$  respecto de  $t$ ?

La respuesta a esta pregunta, ilustra, justamente, la diferencia sutil entre la derivada ordinaria o *derivada total*  $d/dt$  y la derivada parcial  $\partial/\partial t$ .

Hay dos situaciones posibles:

- Si la función  $f$  *no depende* explícitamente de  $t$ , es decir si la variable  $t$  no aparece en la fórmula de  $f$ , entonces  $\partial f / \partial t = 0$ . Este resultado es *independiente* de que  $f$  dependa implícitamente de  $t$  a través de otras variables dependientes.

**Ejemplo:** si  $f(q, t) = q^2$ , entonces:  $\partial f / \partial t = 0$  aunque, por regla de la cadena,  $df/dt = 2q\dot{q}$ .

- Si la fórmula de la función  $f$  contiene la variable  $t$ , entonces su derivada parcial puede ser distinta de cero (dependiendo de la forma funcional de  $f$ ).

**Ejemplo:** Si  $f(q, t) = q^2 + \sin t$ , entonces:  $\partial f / \partial t = \cos t$  y  $df/dt = 2q\dot{q} + \cos t$ .

En este sentido la derivada parcial es como un “operador semántico”, es decir un operador sobre las “letras” que aparecen en la fórmula de la función.

Teniendo en cuenta esta propiedad, la forma más general de la regla de la cadena, para una función de varias variables (campo escalar o vectorial) será:

$$\frac{d}{dt}f(\{q_i\}, t) = \sum_i \dot{q}_i \partial_{q_i} f + \frac{\partial f}{\partial t} \quad (4.17)$$

#### 4.1.5. Funciones homogéneas

Existe un interesante conjunto de funciones para las cuáles hay una relación no trivial entre su derivada y el valor de la función misma. Se conocen como **funciones homogéneas**:

##### Definición 4.1

**Funciones homogéneas.** Una función general  $f(\{q_i\})$  se llama homogénea si frente a una operación de escalado de sus variables (multiplicación por un escalar), la función *escala* también. En términos matemáticos:

$$f(\{\lambda q_i\}) = \lambda^k f(\{q_i\})$$

donde  $\lambda$  es un número real y  $k$  se conoce como el **orden** de la función.

Las funciones homogéneas son, generalmente polinomios y funciones racionales. Así por ejemplo  $f(x, y) = x^2/a^2 + y^2/b^2$ , con  $a$  y  $b$  constantes, y que representa la ecuación algebraica de una elipse, es una función homogénea de grado  $k = 2$ . De otro lado  $f(x) = x^3y^2 + y^5$  es homogénea de grado  $k = 5$ .

Las funciones homogéneas más interesantes para nosotros en este libro son del tipo  $f(\vec{r}) = kr^n$  que son homogéneas de grado  $k = n$  (ver problemas al final del capítulo.)

Como mencionamos desde el principio, las derivadas de las funciones homogéneas tienen una propiedad muy importante:

##### Teorema 4.2

**Teorema de funciones homogéneas de Euler.** Si una función  $f(\{q_i\}_N)$  es homogénea de grado  $k$ , entonces:

$$\sum_i q_i \frac{\partial f}{\partial q_i} = kf$$

Para funciones homogéneas definidas en el espacio de tres dimensiones, el teorema de Euler se puede escribir como:

$$\vec{r} \cdot \vec{\nabla} f = kf$$

#### 4.1.6. Derivada vectorial

Para funciones de varias variables (especialmente aquellas con dominio en el espacio coordenado  $\mathbb{R}^3$ ) se definen generalizaciones vectoriales de la derivada que tienen motivaciones e interpretaciones geométricas específicas.

El *operador diferencial vectorial* básico se conoce como el **gradiente**. Denotado comúnmente como  $\vec{\nabla}$ , en coordenadas cartesianas se define explícitamente como:

$$\vec{\nabla}f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{e}_z \quad (4.18)$$

El operador gradiente en el sistema de coordenadas cilíndrico (con la notación definida anteriormente) esta dado por:

$$\vec{\nabla}f(r, \theta, z) = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{e}_z \quad (4.19)$$

Donde el factor  $1/h_\theta \equiv 1/r$  se conoce como *factor de escala*.

Por su parte en coordenadas esféricas (con la notación definida anteriormente):

$$\vec{\nabla}f(r, \theta, \phi) = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{e}_\theta + \frac{1}{r\cos\phi}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{e}_\phi \quad (4.20)$$

En este caso se ha introducido un nuevo factor de escala:  $h_\phi \equiv r\cos\phi$ .

##### Nota

**Una notación para el gradiente.** Como lo hicimos con la derivada parcial, a lo largo de este libro, abreviaremos el gradiente usando la notación especial:

$$\partial_{\vec{r}}f \equiv \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} \equiv \vec{\nabla}f$$

Aunque no es una notación muy rigurosa, permite abreviar expresiones que de otra manera serían muy elaboradas. Así por ejemplo, la regla de la cadena (Ec. 4.17) para funciones definidas en el espacio coordenado, se puede escribir de forma compacta como:

$$\dot{f}(x, y, z, t) = \partial_{\vec{r}}f \cdot \dot{\vec{r}} + \partial_t f \quad (4.21)$$

Existen otros operadores vectoriales (laplaciano, divergencia, rotacional) sobre los que no profundizaremos aquí por no ser de mucha utilidad práctica en la mecánica celeste (al menos no al nivel de este libro.)

#### Algoritmos para la derivada

Existen diversos algoritmos para calcular la derivada de una función en una o varias variables. En este libro, en donde sea necesario, nos apoyaremos de la biblioteca científica `scipy` y su rutina `derivative` que permite calcular, numéricamente, derivadas de cualquier orden.

El siguiente algoritmo ilustra el uso de `derivative` y sus opciones:

```
def f(t):
    from math import sin
    return sin(t)/t

#Valor de la variable independiente donde queremos la derivada
t=2.0

from scipy.misc import derivative

#Primera derivada usando un dx=0.01 y 3 puntos
dfdt=derivative(f,t,dx=1e-2,n=1,order=3)

#Segunda derivada en t
d2fdt2=derivative(f,t,dx=1e-2,n=2,order=5)
```

dfdt : Numérica = -0.4353938258295498, Exacta = -0.43539777497999166  
d2fdt2 : Numérica = -0.019250938436687903, Exacta = -0.01925093843284925

Usando derivative es posible diseñar funciones para calcular derivadas parciales e incluso gradientes (para los cuáles no existen funciones en la biblioteca scipy). Así por ejemplo:

```
def f(x,y,z):
    from math import sin
    return sin(x*y*z)/(x*y*z)

def partial_derivative_x(f,x,y,z,**opciones):
    f_solo_x=lambda x:f(x,y,z)
    dfdx=derivative(f_solo_x,x,**opciones)
    return dfdx

x=1.0
y=2.0
z=3.0
dfdx=partial_derivative_x(f,x,y,z,dx=0.01)
```

dfdx: Numérica = 1.0061803563982654, Exacta = 1.006739536350187

Nótese como usamos aquí la función lambda `f_solo_x`, de la manera que lo hicimos en el Algoritmo (4.2) para conseguir el resultado deseado.

#### 4.1.7. Integrales

Se llama **antiderivada** de una función de variable real  $f(t)$ , a la función  $F(t)$  cuya derivada es igual a la función original:

$$\dot{F}(t) = f(t)$$

O en notación *integral*:

$$F(t) \equiv \int f(t) \, dt$$

A  $F(t)$  o equivalentemente  $\int f(t) dt$  se la llama también la **integral indefinida** de  $f(t)$ .

La antiderivada permite calcular la **cuadratura de una función**, que no es otra cosa que el área encerrada por la curva en el plano cartesiano definido por la variable independiente y los valores de la función:

#### Teorema 4.3

**Fórmula de Newton-Leibniz.** <sup>a</sup> Dada una función  $f(t)$  que tiene antiderivada  $F(t)$  definida en el intervalo  $[a, b]$ , el área o cuadratura de la función en el mismo intervalo esta dado por:

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$$

A la cantidad  $\int_a^b f(t) dt$  se la llama **integral definida** de  $f(t)$ .

<sup>a</sup> A esta fórmula se la llama a menudo *segundo teorema fundamental del cálculo*

En términos de la integral definida podemos definir una nueva función:

$$I(t) = \int_a^t f(\tau) d\tau$$

Nótese que para ser rigurosos hemos cambiado el nombre de la “variable de integración”  $\tau$  para no confundirla con el límite superior de la integral  $t$ .

Esta nueva función tiene una importante propiedad:

#### Teorema 4.4

**Teorema fundamental del cálculo.** Dada una función  $f(t)$  integrable en el intervalo  $[a, b]$ , si definimos la función  $I(t) = \int_a^t f(\tau) d\tau$ , entonces:

$$\frac{dI}{dt} = f(t)$$

o bien,

$$\frac{d}{dt} \int_a^t f(\tau) d\tau = f(t) \quad (4.22)$$

Es interesante anotar que aunque la antiderivada  $F(t)$  y la función  $I(t)$  tienen la misma derivada en  $t$ , es decir  $dF/dt = dI/dt = f(t)$ , no son necesariamente la misma función. Considere, por ejemplo, el hecho elemental de que  $I(a) = 0$  (por definición) mientras que  $F(a)$  podría ser cualquier número (incluyendo cero por supuesto.)

#### 4.1.8. Integrales vectoriales

Una extrapolación del concepto de integral a funciones de varias variables (campos escalares y campos vectoriales) conduce a algunas operaciones integra-

les de gran importancia en la física. Para los propósitos de lo que veremos en este libro, son de particular interés las integrales del tipo:

$$\int \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

que se define sobre todos los valores de  $\vec{r}$  de una curva en el espacio coordenado. A esta integral se la conoce como **integral de línea**. Si la trayectoria es cerrada, escribiremos:

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

que no se diferencia (matemáticamente) en nada de una integral de línea. A esta integral la llamaremos **circulación** del campo vectorial  $\vec{F}$ .

Otro tipo de integral vectorial de interés es:

$$\int_{\Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

Donde  $d\vec{S}$  tiene dirección normal a la superficie  $\Sigma$  (formada por el lugar geométrico de todos los puntos que la definen) y magnitud igual al área de una fracción infinitesimal de la superficie.

#### Teorema 4.5

**teorema de Stokes.** Si  $\vec{F}(\vec{r})$  es un campo vectorial diferenciable en todos los puntos del espacio, entonces:

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\Sigma} (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{S}$$

Donde  $\Sigma$  es cualquier superficie que tenga como frontera la trayectoria sobre la que se define la circulación.

Un importante corolario del teorema de Stokes es el siguiente:

#### Teorema 4.6

**Corolario de Stokes.** Si el campo vectorial  $\vec{F}(\vec{r})$  tiene circulación nula:

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

Entonces existe un campo escalar  $U(\vec{r})$  tal que:

$$\vec{F} = \vec{\nabla}U$$

Llamamos a  $U$  la función *potencial* de  $\vec{F}$ .

### Algoritmos para la integral

El cálculo numérico de integrales es una vasta área del análisis numérico. En cada lenguaje de programación es posible encontrar bibliotecas completas con rutinas para el cálculo de aproximaciones numéricas de integrales definidas e integrales vectoriales.

Para los propósitos de este libro, usaremos la rutina `quad` de la biblioteca `SciPy` para calcular numéricamente integrales definidas de funciones de variable real.

En el algoritmo provisto a continuación, calculamos, por ejemplo, el trabajo  $W \equiv \int F(x) dx$  sobre una partícula que se mueve en una dimensión sometida a una fuerza del tipo  $F(x) = -kx$ , asumiendo que  $k = 0,1$  y que la partícula se desplaza entre  $x = 1,0$  y  $x = 5,0$ :

```
#El integrando debe definirse como una rutina
def F(x,k=1):
    return -k*x

from scipy.integrate import quad
k=0.1
x0=1.0
x1=5.0
integral=quad(F,x0,x1,args=(k,))
```

Integral: Numérica = (-1.2, 1.3322676295501878e-14), Exacta = -1.2

Nótese que los argumentos opcionales del integrando se pasan como la tupla `args` que en este caso, dado que la función solo depende de un parámetro opcional, se escribe de forma poco intuitiva como `args=(k,)` donde la coma final es oblogatoria.

El resultado de la rutina `quad` es una tupla con dos números: el valor de la integral y el error estimado de la misma. Como vemos, en el ejemplo arriba, la integral es prácticamente exacta.

#### Nota

**Cuadraturas Gaussianas.** El método usado por `quad` para calcular la integral se conoce como *cuadraturas gaussianas* y aproxima la integral como una serie de pocos términos del valor de la función definido en algunos puntos específicos [9]. Las cuadraturas gaussianas permiten calcular la integral de funciones polinómicas de forma *exacta*. Esta es la razón por la cuál la integral en el ejemplo dado aquí, es idéntica al valor esperado.

### 4.1.9. Ecuaciones diferenciales

Encontrar la antiderivada de una función (ver [Sección 4.1.7](#)), se puede formular, de forma general, como el problema de encontrar una función  $F(t)$  tal que:

$$\frac{dF(t)}{dt} = f(t) \quad (4.23)$$

La solución a este problema es, por definición:

$$F(t) = \int f(t) dt$$

La integral indefinida en el lado derecho de la anterior ecuación y los métodos numéricos o exactos (analíticos) para obtenerla (no cubiertos en este corto resumen) representan unas de las herramientas matemáticas más útiles de la física.

Pero, existen situaciones en las que el cálculo de una antiderivada no se reduce simplemente a una integral indefinida. Considere por ejemplo el siguiente problema:

$$\frac{d^2 F(t)}{dt^2} = -kF(t) \quad (4.24)$$

que, en palabras, se formularía como: encontrar la función cuya segunda derivada es proporcional ( $k$  se supone constante) al negativo de ella misma.

Ambas, las Ecs. (4.23) y (4.24) se conocen como **ecuaciones diferenciales**.

Las ecuaciones diferenciales se clasifican según:

- Su **orden**. El orden de una ecuación diferencial es igual al máximo orden de la derivada de la función objetivo (antiderivada) que aparece en la ecuación. La ecuación diferencial básica (4.23) es, por ejemplo, de *primer* orden porque solo involucra la *primera* derivada de la función  $F(t)$ . Por su parte, la ecuación diferencial (4.24) es una ecuación diferencial de segundo orden.
- Su **linealidad**. Una ecuación diferencial que solo depende de primeras potencias de la función y sus derivadas se dice que es lineal. En caso contrario tenemos una *ecuación diferencial no lineal*. Las ecuaciones (4.23) y (4.24) son lineales, pero la siguiente ecuación diferencial de primer orden, no lo es:

$$\frac{dF(t)}{dt} = \frac{h}{F(t)},$$

donde  $h$  es una constante.

- El **número de variables independientes**. Una ecuación diferencial en la que la función depende de una sola variable real se conoce como una **ecuación diferencial ordinaria** (ODE por la sigla en inglés de *ordinary differential equation*). Si, por otro lado, la función es un campo escalar o vectorial y la ecuación diferencial se expresa en términos de derivadas parciales (y totales) hablamos de una **ecuación diferencial parcial** (PDE por sus siglas en inglés).
- El **número de funciones o variables dependientes**. Es posible que un problema implique encontrar más de una antiderivada. En ese caso hablamos de un **sistema de ecuaciones diferenciales**. Un caso común de sistemas de ecuaciones diferenciales se produce cuando queremos encontrar la antiderivada de una función vectorial (cada componente de una función vectorial es una función en sí misma). El caso más importante en la física de un sistema de ecuaciones diferenciales es la *ecuación de movimiento de una partícula* (que exploraremos a fondo en la ??):



$$\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \vec{a}$$

Esta ecuación es una forma abreviada de escribir el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned}\frac{d^2x(t)}{dt^2} &= a_x \\ \frac{d^2y(t)}{dt^2} &= a_y \\ \frac{d^2z(t)}{dt^2} &= a_z\end{aligned}\tag{4.25}$$

Como las cantidades  $a_x$ ,  $a_y$  y  $a_z$  pueden ser a su vez funciones del tiempo, de las funciones  $x$ ,  $y$ ,  $z$  y de sus derivadas, se habla, además, de un **sistema de ecuaciones diferenciales acopladas**.

- **Las condiciones que deben proveerse para resolverla.** La solución abstracta de una ecuación diferencial, es decir, el problema de encontrar la antiderivada general, es el equivalente a la integral indefinida. Las integrales definidas, por su lado, equivalen en la teoría de ecuaciones diferenciales a los que se conocen como **problemas de valor inicial** (IVP por el acrónimo en inglés de *initial value problem*.) En este tipo de problemas la solución a la ecuación diferencial consiste en encontrar el valor de la función para cualquier valor de la variable independiente una vez se ha provisto el valor de la función (o funciones) y de sus derivadas, en un valor específico o inicial de la variable independiente. Así por ejemplo:

$$\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \vec{a}, \text{ con } \vec{r}(0) : (0,0,0) \text{ y } \dot{\vec{r}}(0) : (1,0,0)$$

es un IVP.

Por otro lado un **problema de condiciones de frontera** (BVP por la sigla en inglés de *boundary value problem*) es aquel en el que el valor de la función dependiente (no de sus derivadas necesariamente) se provee para varios valores de la variable independiente. Así por ejemplo:

$$\frac{d^2F(t)}{dt^2} = -F(t), \text{ con } F(0) = 0 \text{ y } F(\pi/2) = 1,0,$$

es un BVP.

Como se intuye fácilmente, la dificultad en la solución a una ecuación diferencial, como sucede también con las ecuaciones algebraicas, puede aumentar con su orden. Sin embargo, usando variables auxiliares, siempre es posible escribir una

ecuación diferencial de orden  $M$  como un sistema de  $M$  ecuaciones diferenciales de primer orden.

Por ejemplo, si en la Ec. (4.24) llamamos  $G(t) \equiv dF(t)/dt$ , esa ecuación diferencial de segundo orden se puede escribir como el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} dF/dt &= G \\ dG/dt &= -kF \end{aligned} \quad (4.26)$$

A esta sistema de ecuaciones, lo llamamos el *sistema de ecuaciones diferenciales reducido*.

La reducción del orden será un método muy utilizado en este libro para abordar la solución a las ecuaciones diferenciales de la mecánica celeste y analítica.

### Algoritmos para la solución de ODE

La solución aproximada de ecuaciones diferenciales es una de las áreas de mayor interés en el análisis numérico. Sus beneficios prácticos se extienden desde la física teórica y la economía hasta la climatología y la simulación del vuelo de aviones y vehículos espaciales. A lo largo de los últimos 350 años (y en paralelo con la evolución de la mecánica), se han desarrollado métodos numéricos para aproximar la solución de todos los tipos de ecuaciones diferenciales que hemos mencionado hasta aquí.

En este libro, sin embargo, nos concentraremos en la solución de sistemas ecuaciones diferenciales ordinarias con valores iniciales o *IVP*.

Los métodos numéricos generales, desarrollados para resolver este tipo de problemas (ver [9] para detalles sobre los métodos y algoritmos explícitos), suponen que la ecuación o sistema de ecuaciones diferenciales que queremos resolver puede escribirse como un sistema reducido de ecuaciones diferenciales de primer orden de la forma:

$$\{\dot{Y}_i = f_i(\{Y_k\}, t)\}_{i=0,1,\dots,M} \quad (4.27)$$

Donde  $Y_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, M-1$ ) es el conjunto de funciones auxiliares que reemplaza a las funciones dependientes y sus derivadas de orden inferior y  $f_i$  son las función que proveen el valor de la primera derivada de la variable auxiliar  $Y_i$ .

Así por ejemplo, para resolver la ecuación diferencial (4.24), que ya habíamos reducido como las ecuaciones (4.26), las variables auxiliares y sus derivadas serían:

$$\begin{aligned} Y_0 &= F & , & \quad f_0(t, Y_0, Y_1) = Y_1 \\ Y_1 &= G & , & \quad f_1(t, Y_0, Y_1) = -kY_0 \end{aligned} \quad (4.28)$$

Con esta identificación, el problema original puede escribirse, de forma general como la Ec. (4.27).

En este libro usaremos la rutina `odeint` de la biblioteca científica `SciPy` (ver *Nota* abajo) para integrar numéricamente sistemas de ecuaciones diferenciales de la forma reducida. El lector puede leer la [documentación completa de `odeint`](https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.integrate.odeint.html)<sup>15</sup> para conocer los detalles de su aplicación.

<sup>15</sup><https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.integrate.odeint.html>

El primer paso para usar `odeint` es implementar las ecuaciones reducidas como una rutina. En nuestro ejemplo (Ec. 4.28) la rutina sería:

```
def ode_simple(Y,t,k=1):  
    f=[0,0]  
    f[0]=Y[1]  
    f[1]=-k*Y[0]  
    return f
```

Los primeros dos argumentos de esta rutina (ver Sección 4.1.3), es decir  $Y$  (que contiene una lista de los valores instantáneos de las variables auxiliares  $Y_i$ ) y  $t$  (el tiempo en el que las variables auxiliares tienen ese valor) deben estar, estrictamente en ese orden. Otros podrían encontrar más natural poner de primero el tiempo, pero `odeint` está diseñado para trabajar con rutinas con este *prototipo* particular. Además de estos argumentos obligatorios, la rutina puede tener cualquier otro argumento opcional. En este caso aprovechamos esta libertad para proveer el valor de la constante  $k$ , que aparece en la ecuación diferencial, y para el cual hemos asumido un valor por defecto  $k=1$  (naturalmente el usuario de la rutina podrá especificar un valor distinto cuando la llame.)

Para resolver este conjunto de ecuaciones diferenciales debemos, además de la rutina anterior, proveer:

1. Valores específicos para los parámetros de la ecuación diferencial (en este caso la constante  $k$ ),
2. Una lista de condiciones iniciales, es decir de los valores iniciales de las variables auxiliares  $\{Y_i(t = t_0)\}$
3. un conjunto de valores del tiempo (incluyendo el tiempo inicial  $t_0$ ) para los cuales deseamos predecir el valor de la antiderivada (función o funciones dependientes.)

El siguiente algoritmo prepara estos insumos para `odeint` en nuestro ejemplo particular:

```
from numpy import array  
  
k=1.5  
  
Yos=array([1.0,0.0])  
  
ts=array([0.0,1.0,2.0,3.0,4.0,5.0])
```

Nótese que para las condiciones iniciales y los valores de tiempo (que son aquí arbitrarios, el lector podría escoger unos completamente diferentes) hemos escogido usar arreglos de NumPy (`array`) en lugar de listas planas (ver Sección 4.1.1). Aunque esto no es obligatorio, más adelante hará más fácil la manipulación matemática de estas variables.

**Nota**

**El plural en los algoritmos.** Preste atención a la convención que usaremos en lo sucesivo de usar la letra *s* como sufijo del nombre de algunos arreglos y matrices (p.e. *Yos*, *ts*). En lo sucesivo (a no ser que se indique lo contrario) *t* denotará un valor individual de la variable, pero *ts* será un arreglo de valores de *t*.

La solución numérica al conjunto de ecuaciones diferenciales implementados en la rutina `ode_simple` se obtiene, finalmente, invocando `odeint`:

```
from scipy.integrate import odeint
Ys=odeint(ode_simple,Yos,ts,args=(k,))
```

Solución, *Ys* =

```
[[ 1.          0.          ]
 [ 0.33918602 -1.15214115]
 [-0.76990562 -0.78158038]
 [-0.86146852  0.6219388 ]
 [ 0.18550948  1.20348632]
 [ 0.987313    0.1944726 ]]
```

Las filas de la matriz solución *Ys*, contienen el valor de las variables auxiliares  $\{Y_i\}$  en cada uno de los tiempos provistos. Las columnas, naturalmente, corresponden a los valores instantáneos de cada una de esas variables auxiliares. Así, la componente *Ys*[0,0] corresponde al valor de  $Y_0$  (es decir el valor de la función *F* de nuestro ejemplo) en  $t_0$  (condición inicial).

También es posible extraer tajadas de la matriz. Así, *Ys*[:, 1] (que podría leerse como *el segundo valor de cualquier fila* o simplemente *la columna 1*), corresponde al valor de la función auxiliar *G* en cada uno de los tiempos de integración (recuerde que  $G = Y_1$ , ver la identificación en la Ec. 4.28).

Usando la matriz de solución *Ys* es posible, finalmente, hacer el gráfico de la función  $F(t)$  que estabamos buscando:

(Algoritmo 4.3)

```
import matplotlib.pyplot as plt

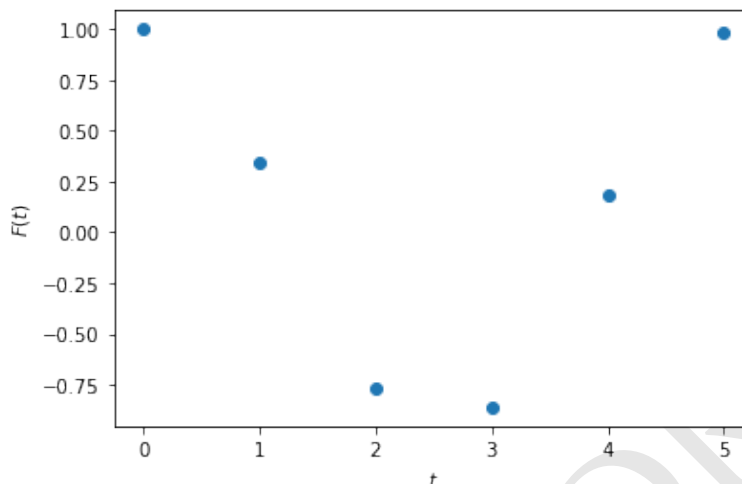
#Extraemos los valores de la función F
Fs=Ys[:,0]

plt.figure();
plt.plot(ts,Fs,marker='o',linewidth=0);

#--hide--
plt.xlabel("$t$");
plt.ylabel("$F(t)$");
```

ver Figura 4.3

Naturalmente la resolución de este gráfico es bastante pobre porque hemos pe-



**Figura 4.3:** Figura correspondiente al código 4.3. Solución aproximada de la ecuación diferencial  $d^2F/dt^2 = -kF$  con  $k=1.5$ .

dido al algoritmo encontrar únicamente los valores de  $F(t)$  en 5 valores del tiempo (arreglo `ts`.) Si se incrementa el número de componentes de este vector el resultado será mucho más cercano al que esperamos de una función.

#### Nota

**Los algoritmos detrás de odeint.** La rutina `odeint` es un *empaquetado* en Python (*wrap* en inglés) de un complejo y robusto paquete de rutinas conocido como [ODEPACK](#)<sup>a</sup>. Desarrollado por el *Center for Applied Scientific Computing* del *Lawrence Livermore National Laboratory*, las rutinas de ODEPACK están escritas en lenguaje FORTRAN77 (Python se usa únicamente para pasar los parámetros al paquete y para recuperar las salidas; ese es justamente el sentido del nombre “empaquetado”) y han sido probadas y perfeccionadas durante varias décadas en distintas aplicaciones científicas y de ingeniería [7].

Existen otras rutinas en el paquete SciPy para resolver ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales (IVP). Por ejemplo `ode` y `solve_ivp` pueden usarse también (esta última es, por ejemplo, la recomendada por los desarrolladores de SciPy). Sin embargo, estas otras rutinas tienen una *interface* un poco más complicada. Así por ejemplo, para integrar la e.d.m. del ejemplo visto aquí, usando `solve_ivp`, el código **mínimo** en Python sería:

```
from scipy.integrate import solve_ivp
solucion=solve_ivp(fun=lambda t,Y:ode_simple(Y,t,k),
                  t_span=[ts[0],ts[-1]],y0=Yos,t_eval=ts)
```

Como puede apreciarse la complejidad del código supera con creces la

**Nota (Cont.)**

de aquel que usamos para invocar `odeint`. A esto se suma el hecho de que la solución, que en el caso de `odeint` es una matriz `Ys` fácil de interpretar, en el caso de `solve_ivp` es en realidad un *objeto* cuyo *atributo* `solucion` contiene la solución que buscamos. Y finalmente, pero no menos importante: para el tipo de ecuaciones diferenciales que usaremos en este libro `solve_ivp` es casi dos veces más lento que `odeint`. El lector sin embargo puede explorar esas otras alternativas, especialmente si quiere, por ejemplo, comparar distintos métodos de solución (a diferencia de `odeint`, `solve_ivp` escoger el método de solución.)

<sup>a</sup><https://computing.llnl.gov/casc/odepack>

#### 4.1.10. Funcionales y cálculo de variaciones

Un tema poco cubierto en los textos básicos de cálculo, pero de gran utilidad en la mecánica, es el denominado **cálculo de variaciones**. Si bien en esta sección de “repaso” no pretendemos ofrecer una introducción detallada a esta importante área del análisis matemático, es necesario presentar aquí algunos resultados básicos que serán de utilidad para el resto del libro.

Si el cálculo infinitesimal, que repasamos en las secciones anteriores, trata sobre la variación continua de funciones de variable real, el cálculo de variaciones se ocupa de la variación de los que se conocen como **funcionales**.

En términos informales, un funcional es una “función de funciones”, es decir, una regla de correspondencia entre el conjunto de las funciones y el de los números reales.

Un ejemplo, muy interesante e ilustrativo de un funcional, es la integral definida de una función de variable real:

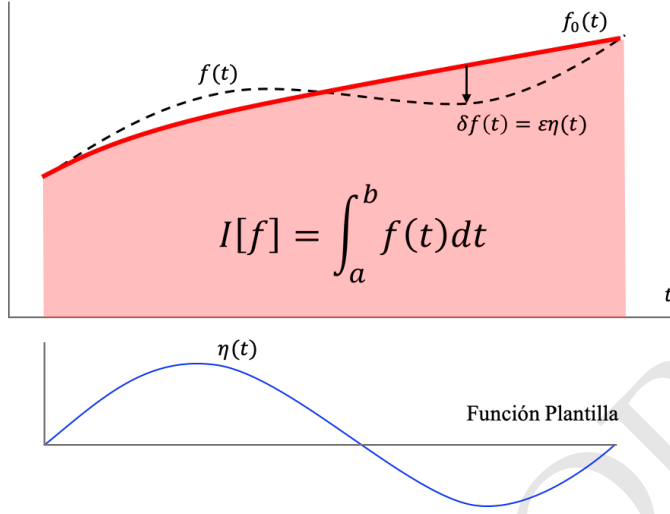
$$I[f] = \int_a^b f(t) dt$$

La notación  $I[f]$ , en lugar de  $I(b)$  como lo usamos en Sección 4.1.7, trata de poner en evidencia el hecho de que lo que nos interesa aquí no es el valor mismo de la integral definida, sino cómo el valor de esta cantidad cambia si modificamos la función  $f$ . En la Figura 4.4 se muestra la interpretación gráfica de la integral definida. Sabemos que el área bajo la curva, el valor de nuestro funcional, dependerá de si usamos la función  $f(t)$  o  $f_0(t)$ .

De la misma manera en la que se puede estudiar el efecto que un cambio muy pequeño  $\Delta t$  en el valor de la variable independiente  $t$  tiene en una función de variable real  $f(t)$ , como lo hicimos por ejemplo para definir la derivada (ver Sección 4.1.4), en el cálculo variacional es posible estudiar el efecto que un cambio pequeño  $\delta f$  de una función  $f$  tiene en el funcional  $I[f]$ .

Para hacerlo debemos primero definir otra función  $\eta$  que sirve de “plantilla” para el cambio. Al cambio en  $f$  se lo llama **variación** y se escribe como:

$$\delta f \equiv \epsilon \eta \tag{4.29}$$



**Figura 4.4:** El área bajo una curva es un funcional, en tanto depende de la función que represente la curva,  $f(t)$  o  $f_0(t)$ . Se conoce como una variación  $\delta f$  a la diferencia entre dos funciones cercanas, parametrizada a través de un número real  $\epsilon$  y una función plantilla (panel inferior.) En términos de variaciones el valor de cualquier función vecina a una función de referencia  $f_0$  se puede calcular, en un intervalo de interés, como  $f(t) = f_0(t) + \epsilon\eta(t)$ .

Una ilustración del concepto de *variación* se muestra en la **Figura 4.4**. Allí reconocemos una importante propiedad de la función de plantilla  $\eta(t)$  y es que vale cero en los extremos del intervalo considerado  $[a, b]$ .

El cálculo variacional surgió originalmente para resolver problemas prácticos en física, tales como hallar las funciones que maximan o minimizan (extremos) funcionales de alguna utilidad.

Así por ejemplo, considere la siguiente pregunta: ¿cuál es la curva más corta que conecta dos puntos en el plano de euclidiano?

Para responder a esta pregunta debemos primero construir el funcional “distancia a lo largo de una curva”, también llamado, longitud de arco ([2]):

$$I[f] = \int_a^b \sqrt{1 + \left| \frac{df}{dt} \right|^2} dt \quad (4.30)$$

Queremos encontrar la función  $f_0$  tal que  $I[f_0]$  tenga el mínimo valor entre todas las posibles funciones  $f$ .

Para encontrar la función que minimiza este funcional debemos, como se acostumbra en el cálculo ([1]), derivar el funcional respecto a la cantidad que parametriza la variación:  $\epsilon$ .

Escribamos el funcional de forma más general, en términos de una función cercana al mínimo escrita como  $f = f_0 + \epsilon\eta$ :

$$I[f] = \int_a^b L(f(t), \dot{f}(t), t) dt \quad (4.31)$$

Nótese que hemos escrito el integrando como una función general  $L$  que depende del valor de la función  $f(t)$ , de su derivada  $\dot{f}(t)$  y de la variable independiente  $t$ . Implícitamente, el funcional depende también del parámetro  $\epsilon$  dado que  $f = f_0 + \epsilon\eta$ .

Si derivamos el funcional respecto de  $\epsilon$ , obtenemos:

$$\frac{dI[f]}{d\epsilon} = \int_a^b \frac{d}{d\epsilon} L(f(t), \dot{f}(t), t) dt$$

Aplicando la regla de la cadena, la integral del lado derecho nos queda:

$$\frac{dI[f]}{d\epsilon} = \int_a^b \left( \frac{\partial L}{\partial f} \frac{df}{d\epsilon} + \frac{\partial L}{\partial \dot{f}} \frac{d\dot{f}}{d\epsilon} \right) dt$$

Como  $f(t) = f_0(t) + \epsilon\eta(t)$ , entonces  $df/d\epsilon = \eta$ , mientras que  $d\dot{f}/d\epsilon = \dot{\eta}$ . Así la integral anterior se desarrolla como:

$$\frac{dI[f]}{d\epsilon} = \int_a^b \left( \frac{\partial L}{\partial f} \eta + \frac{\partial L}{\partial \dot{f}} \dot{\eta} \right) dt \quad (4.32)$$

El término  $\int_a^b (\partial L / \partial \dot{f}) \dot{\eta} dt$  se puede integrar por partes, si se hace  $u = \partial L / \partial \dot{f}$  y  $dv = \dot{\eta} dt$ :

$$\int_a^b \frac{\partial L}{\partial \dot{f}} \dot{\eta} dt = \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{f}} \eta \right|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{f}} \right) \eta dt$$

El primer término del lado derecho de la ecuación anterior es cero, en tanto, por definición  $\eta(a) = \eta(b) = 0$ .

Reemplazando en la Ec. (4.32), la derivada del funcional respecto de epsilon queda finalmente:

$$\frac{dI[f]}{d\epsilon} = \int_a^b \eta(x) \left( \frac{\partial L}{\partial f} - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial \dot{f}} \right) dx$$

Para que  $I[f]$  sea mínima en  $f = f_0$  su derivada  $dI[f]/d\epsilon$  debe ser cero en  $\epsilon = 0$ . Esto equivale a la *ecuación integral*:

$$\int_a^b \eta(x) \left( \frac{\partial L}{\partial f} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{f}} \right) dt = 0 \quad (4.33)$$

que lamentablemente no es muy útil para resolver nuestro problema original. Para acercarnos a la solución necesitamos de un poderoso teorema:

#### Teorema 4.7

**Lema fundamental del cálculo de variacions.** Si una función continua  $f(t)$  en el intervalo abierto  $(a, b)$  satisface la igualdad:

$$\int_a^b f(t)h(t) dt = 0$$

para toda función  $h(t)$  continuamente diferenciable (todas sus derivadas



**Teorema (Cont.)**

son continuas) y con *soporte compacto* (acotada), entonces  $f(t) = 0$ .

De acuerdo con este teorema, y suponiendo que  $\eta(t)$  es continuamente diferenciable y acotada, la función entre paréntesis la ecuación integral (4.33) es:

$$\frac{\partial L}{\partial f} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{f}} = 0 \quad (4.34)$$

Esta ecuación es una versión particular (para funciones de una sola variable) de la que se conoce en la historia como la **ecuación de Euler-Lagrange** y que será de importancia central en este libro.

Volviendo a nuestro problema original, es decir, encontrar la curva con la menor longitud entre dos puntos, y reconociendo que:

$$L(f(t), \dot{f}(t), t) = \sqrt{1 + |\dot{f}(t)|^2},$$

Entonces  $\partial L / \partial f = 0$  (no aparece el símbolo  $f$  en la fórmula de  $L$ ) y  $\partial L / \partial \dot{f} = \dot{f} / \sqrt{1 + |\dot{f}(t)|^2}$ . De allí, la ecuación de Euler-Lagrange (4.34) en este problema se convierte en:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{f}}{\sqrt{1 + |\dot{f}(t)|^2}} \right) = 0$$

Esta ecuación significa que el término entre paréntesis es constante. Después de un poco de álgebra, la expresión resultante, se puede integrar para obtener:

$$f(t) = At + B,$$

donde  $A, B$  son constantes.

La respuesta final a la pregunta original es ahora clara: la curva más corta entre dos puntos en el plano euclidiano es una línea recta.

**Algoritmos en el cálculo variacional**

Si el cálculo variacional es poco común en los textos básicos de cálculo infinitesimal, los algoritmos relacionados con él son aún más escasos en los textos de análisis numérico.

Dada la importancia del cálculo variacional en la mecánica nos detendremos un momento aquí para explorar desde la algoritmia, al menos la solución al problema de cálculo variacional que expusimos en la sección anterior: el cálculo de la curva más corta entre dos puntos en el plano euclidiano.

Para ello escribamos primero la rutina que servirá en nuestro caso como funcional (y que implementa la Ec. 4.30):

(Algoritmo 4.4)

```
def funcional_integral(f0,eta,epsilon,a,b,**opciones_de_f0):

    #Definimos las función con su variación
    f=lambda t:f0(t,**opciones_de_f0)+epsilon*eta(t)

    #La derivada de f la calculamos con derivative
    from scipy.misc import derivative
    dfdt=lambda t:derivative(f,t,0.01)

    #Este es el integrando del funcional
    from numpy import sqrt
    L=lambda t:sqrt(1+abs(dfdt(t))**2)

    #El funcional es la integral definida del integrando
    from scipy.integrate import quad
    integral=quad(L,a,b)
    longitud=integral[0]

    return longitud
```

Nótese que un *funcional* en el lenguaje de la algoritmia es una rutina que recibe como parámetros otras rutina (en este caso  $f_0$  y  $\eta$ ) y devuelve un valor numérico (en este caso  $\text{longitud}$ .)

La rutina en el Alg. (4.4), si bien parece compleja, recoge todos los elementos que hemos aprendido en esta sección: los parámetros opcionales de una rutina expresados como `**opciones_de_f0` y que vimos en una nota de la Sección 4.1.3, las funciones `lambda` que vimos en la misma sección, la derivada numérica calculada usando `derivative` que conocimos en la Sección 4.1.4 y la integral por cuadraturas usando `quad` de la Sección 4.1.7.

Más importante aún es el hecho que esta rutina puede usarse para cualquier funcional que se exprese como una integral definida de la forma de la Ec. (4.31). Para adaptarla a otras situaciones, simplemente se debe cambiar la función  $L$ . En la sección de problemas al final de este capítulo se pone a prueba esta rutina en otros contextos.

Supongamos ahora que queremos calcular la curva más corta que une los puntos del plano cartesiano  $(0,0)$  y  $(\pi,1)$  (es decir  $a=0$  y  $b=\pi$ ). Para ello proponemos una función de referencia  $f_0(t) = (t/\pi)^n$ . Esta función para por ambos puntos para todo  $n$ . Como función de plantilla  $\eta(t)$ , que debe ser una función acotada de acuerdo al lema fundamental del cálculo de variaciones, usaremos la función trigonométrica seno (que cumple la condición  $\eta(a) = \sin 0 = 0$  y  $\eta(b) = \sin \pi = 0$ ).

El siguiente algoritmo implementa estas elecciones:

```
#Intervalo entre los puntos
from numpy import pi
a=0
b=pi

#Funcion de referencia
```

```
def curva(t,n=1):
    return (t/pi)**n

#Función plantilla
from numpy import sin
eta=sin
```

Para ilustrar el uso de la rutina en el Alg. (4.4), calculemos la longitud de arco para el caso en el que  $n = 2$  y  $\epsilon = 0,5$ :

```
n=2
If=funcional_integral(curva,eta,0.5,a,b,n=n)
```

```
I[f] = 3.337162809417341
```

Para encontrar la trayectoria más corta entre los puntos seleccionados, debemos minimizar una función del tipo `longitud_arco(epsilon)` que llame a la rutina `funcional_integral`, pero que solo dependa de la variable que queremos minimizar, es decir de `epsilon`. Para ello podemos definir la función `lambda`:

```
longitud_arco=lambda epsilon:funcional_integral(curva,eta,epsilon,
                                                a,b,n=n)
```

La minimización, finalmente, se consigue usando la rutina `minimize` del paquete `SciPy`, capaz de encontrar el mínimo de funciones escalares con un número arbitrario de variables. Lo único que necesita `minimize` para lograr su cometido es que le pasemos una rutina que tenga un solo parametro, en nuestro caso `longitud_arco` y un valor de prueba para la variable independiente (en nuestro caso usaremos  $\epsilon = 0$ ):

```
from scipy.optimize import minimize
solucion=minimize(longitud_arco,0.0)
```

Resultado de la minimización:

```
fun: 3.2975722013512403
hess_inv: array([[0.73687233]])
jac: array([1.1920929e-06])
message: 'Optimization terminated successfully.'
nfev: 12
nit: 3
njev: 4
status: 0
success: True
x: array([0.25801323])
```

Nótese que el resultado de la rutina `minimize` es un *objeto* entre cuyos atributos se encuentra el valor de la variable independiente `x` que hace mínima la función de nuestro interés, en este caso `longitud_de_arco`.

Puesto en términos de nuestro problema el resultado anterior indica que para curvas del tipo  $f_0(t) = (t/\pi)^2$ , que sufren variaciones con una función plantilla

$\eta(t) = \sin t$ , la curva de mínima longitud entre el punto  $(0,0)$  y el punto  $(0, \pi)$ , corresponde a una variación con  $\epsilon = 0,258$ .

Hagamos un gráfico de la función resultante y de su comparación con la solución analítica:

(Algoritmo 4.5)

```
import matplotlib.pyplot as plt
plt.figure()

from numpy import linspace, pi
ts=linspace(0,pi)

#Valor de epsilon proveniente de la minimización
epsilon=solucion.x[0]

plt.plot(ts,curva(ts,n=n),'r.',
         label=f"Curva de referencia")
plt.plot(ts,curva(ts,n=n)+epsilon*eta(ts),'b-',
         label=f"Curva variada con $\epsilon$={epsilon:g}")
plt.plot(ts,curva(ts,n=1),'k--',
         label=f"Línea recta")

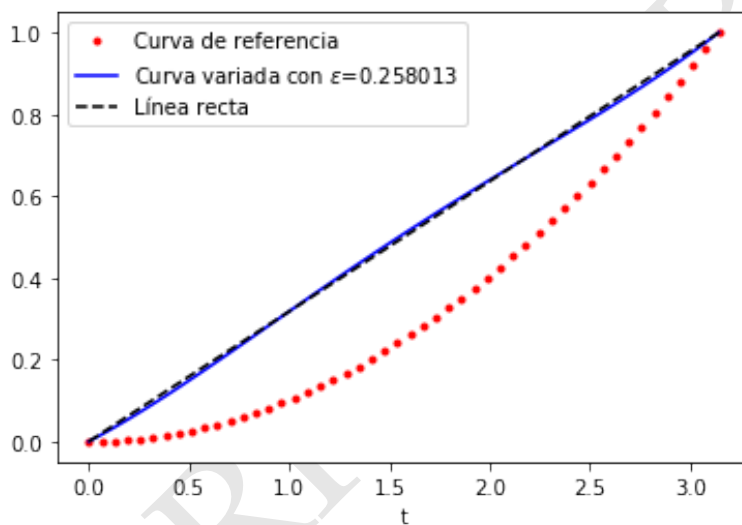
plt.legend();

#--hide--
plt.xlabel("t");
```

ver Figura 4.5

#### 4.1.11. Gráficos interactivos

Para ver los gráficos interactivos use a las libretas de Jupyter que que están disponibles en la versión electrónica del libro.



**Figura 4.5:** Figura correspondiente al código 4.5. La curva continua indica una aproximación numérica al camino más corto entre los puntos  $(0,0)$  y  $(0,\pi)$  del plano euclidiano, encontrada al minimizar el funcional longitud de arco y usando como función de prueba  $f_0 = (t/\pi)^n$  (línea punteada) y como función plantilla  $\epsilon(t) = \sin t$ . El valor de  $\epsilon$  que corresponde a la solución se muestra en la etiqueta. Para comparación se muestra (línea rayada) la solución exacta, que corresponde a una línea recta.

BORRADOR

## Capítulo 5

# Mecánica de partículas

### Resumen

En este capítulo presentaremos una síntesis moderna de los principios y leyes de la mecánica, especialmente la mecánica prerrelativística o newtoniana, sobre los que se fundamenta la mecánica celeste y la mecánica analítica que desarrollaremos en los siguientes capítulos. Nos concentraremos aquí en la mecánica de partículas puntuales y sistemas de partículas interactuantes. Dividiremos la mecánica en cinemática, la descripción del movimiento y dinámica, el estudio de sus causas. Hacia el final presentaremos algunos elementos de mecánica relativística (principalmente cinemática) que serán de utilidad en la mecánica celeste postnewtoniana.

Conocemos con el nombre de **mecánica** al conjunto de definiciones, principios y leyes físicas que permiten describir el movimiento de los cuerpos materiales (cinemática) y la relación con los agentes que los producen y perturban (dinámica).

La mecánica se ha desarrollado históricamente durante dos períodos. El primero período está comprendido entre la publicación de los *hilosophiae Naturalis Principia Mathematica* por Sir Isaac Newton [8] y los artículos fundamentales de la teoría de la relatividad de 1905. A la mecánica de este período la llamaremos **mecánica prerrelativística** o **mecánica newtoniana**. El segundo período cubre el tiempo entre 1905 y el presente. A la mecánica que se desarrolló después de los trabajos originales de Einstein la llamaremos **mecánica relativística** e incluye las teorías especial (mecánica en espacio-tiempo plano) y general de la relatividad (gravitación moderna.)

El adjetivo newtoniano, que usaremos a lo largo de este capítulo, no significa que las cantidades, principios y leyes que formularemos aquí fueron todas inventadas por Newton. Por un lado, además de sus ideas originales, Newton también compiló y sistematizó ideas que ya existían en su época; por el otro, mucha de sus ideas fueron también ampliadas durante casi 200 años después de la publicación de sus obras.

Lo *newtoniano* se refiere aquí al hecho de que en la definición de las cantidades básicas y en la formulación de las leyes, asumiremos, como lo hizo Newton en los *Principia* y lo hicieron sus sucesores hasta principios de los 1900, que: (1) el espacio y el tiempo son entidades independientes y no son afectadas por la materia y (2) la gravedad es una fuerza de acción instantánea a distancia.

Aunque hoy nos parezca increíble, casi toda la mecánica celeste de los últimos 350 años se ha formulado sobre la base de estos principios que hoy sabemos no describen la realidad fundamental del Universo.

La mecánica es una teoría muy amplia que se usa para describir no solo el movimiento de cuerpos o partículas individuales, sino también el movimiento, rotación y deformación de cuerpos materiales continuos (cuerpos rígidos y fluídos.) En este capítulo (y en lo que resta del libro) nos concentraremos, sin embargo, en la mecánica de partículas o sistemas de partículas (nubes de partículas que interactúan débilmente y a distancia entre ellas.)

Antes de proceder a formular los principios (axiomas) y postulados (leyes) en los que se fundamenta la mecánica newtoniana, es necesario definir primero, las cantidades físicas que requerimos en esta tarea. Definir estas cantidades en todo rigor, no solo es un ejercicio intelectual indispensable en la formulación de una teoría, sino, como veremos, puede ser la fuente misma de algunas ideas claves.

## 5.1. Cinemática

### 5.1.1. Cantidades cinemáticas

Las cantidades cinemáticas son aquellas que se usan para describir el movimiento, tal y como ocurre, independiente de sus causas.

Para detalles sobre las convenciones y la notación de las cantidades definidas abajo se recomienda leer la [Sección 4.1.1](#), [Sección 4.1.2](#) y [Sección 4.1.4](#).

- **Tiempo,  $t$ :** Un número real que indica el *intervalo* transcurrido desde un *instante* de referencia. Esta cantidad es *independiente* y *absoluta* (ver comentarios abajo.)
- **Posición (o vector posición),  $\vec{r}$ :** Es el vector que va del origen de coordenadas a un lugar del espacio.
  - Coordenadas cartesianas:  $\vec{r} = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z$ .
  - Coordenadas cilíndricas:  $\vec{r} = r\hat{e}_r + z\hat{e}_z$ .
  - Coordenadas esféricas:  $\vec{r} = r\hat{e}_r$ .
- **Velocidad  $\vec{v}$ :**
  - Definición general:  $\vec{v} \equiv d\vec{r}/dt = \dot{\vec{r}}$ .
  - Coordenadas cartesianas:  $\vec{v} = \dot{x}\hat{e}_x + \dot{y}\hat{e}_y + \dot{z}\hat{e}_z$ .
  - Coordenadas cilíndricas:  $\vec{v} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta + \dot{z}\hat{e}_z$ .
  - Coordenadas esféricas:  $\vec{v} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\cos\phi\hat{e}_\theta + r\dot{\phi}\hat{e}_\phi$ .
- **Estado  $\vec{X}$ :** En el contexto de la cinemática en mecánica celeste, llamamos vector de estado  $\vec{X}$ , al vector formado por la unión de las componentes cartesianas de los vectores posición y velocidad,  $\vec{X} : (x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ . En distintos



contextos será más conveniente denotar al vector de estado usando *notación matricial*, como un vector columna (matriz  $6 \times 1$ )  $\vec{X} : (x \ y \ z \ \dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z})^T$  o explícitamente:

$$\vec{X} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

■ **Aceleración  $\vec{a}$ :**

- Definición general:  $\vec{a} \equiv d\vec{v}/dt = \dot{\vec{v}} = d^2\vec{r}/dt^2 = \ddot{\vec{r}}$ .
- Coordenadas cartesianas:  $\vec{a} = \ddot{x}\hat{e}_x + \ddot{y}\hat{e}_y + \ddot{z}\hat{e}_z$ .
- Coordenadas cilíndricas:

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{e}_\theta + \ddot{z}\hat{e}_z \quad (5.2)$$

- Coordenadas esféricas:

$$\begin{aligned} \vec{a} = & (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \cos^2 \phi - r\dot{\phi}^2)\hat{e}_r + \\ & (2\dot{r}\dot{\theta} \cos \phi + r\ddot{\theta} \cos \phi - 2r\dot{\theta}\dot{\phi} \sin \phi)\hat{e}_\theta + \\ & (2\dot{r}\dot{\phi} + r\dot{\phi}^2 \sin \phi \cos \phi + r\ddot{\phi})\hat{e}_\phi \end{aligned} \quad (5.3)$$

- **Tirón y otras:** Es posible definir propiedades que correspondan a la derivada tercera e incluso derivadas superiores del vector posición.

Así por ejemplo, en algunos contextos es útil definir el *tirón* o *sobreaceleración* (*jerk* en inglés):

$$\vec{j} = d\vec{a}/dt = \frac{d^3\vec{r}}{dt^3},$$

el *chasquido* o *rebote* (*jounce* en inglés):

$$\vec{s} \equiv d\vec{j}/dt = \frac{d^4\vec{r}}{dt^4}.$$

Aunque estas cantidades pueden ser de utilidad en algunos contextos mecánicos (por ejemplo en aplicaciones tecnológicas) e incluso en algunos contextos de física teórica, en mecánica celeste ninguno de los dos tiene una función específica (aunque es natural que puedan aparecer derivadas superiores de la posición en los desarrollos.) Por esta misma razón no profundizaremos en estas cantidades. Los interesados pueden [encontrar en línea](https://en.wikipedia.org/wiki/Jerk_(physics))<sup>16</sup> algunas [lecturas interesantes](http://math.ucr.edu/home/baez/physics/General/jerk.html)<sup>17</sup> al respecto.

<sup>16</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Jerk\\_\(physics\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Jerk_(physics))

<sup>17</sup><http://math.ucr.edu/home/baez/physics/General/jerk.html>

Las expresiones para  $\vec{v}$  y para  $\vec{a}$  en el sistema de coordenadas cilíndricas y esféricas, provistas en la enumeración anterior, pueden obtenerse a partir de las derivadas respecto al tiempo de los vectores unitarios en cada sistema de coordenadas. Dejamos al lector estas deducciones (ver problemas al final del capítulo.)

Varias precisiones deben hacerse sobre la definición de las cantidades cinemáticas presentadas arriba:

- **Tiempo independiente y absoluto.** En la mecánica newtoniana, el valor del tiempo  $t$  asociado a un evento depende solo de las unidades y el instante de referencia escogido. Si dos sistemas de referencia, independiente de su estado de movimiento relativo, usan las mismas unidades y el mismo instante de referencia, obtendrán el mismo valor de  $t$ . Este postulado (que formularemos rigurosamente en el siguiente aparte) aunque bastante útil, es inexacto como se comprobaría a principios de los 1900.
- **Notación del vector posición en coordenadas cilíndricas.** La notación del vector posición en coordenadas cilíndricas,  $\vec{r} = r\hat{a}_r + z\hat{a}_z$  es “inconsistente” porque usa la misma letra para referirse a cantidades diferentes. Así, en este sistema de coordenadas la magnitud del vector posición es  $r = \sqrt{r^2 + z^2}$ , una expresión que carece de sentido (parece indicar que todos los puntos tienen  $z = 0$ ). Para subsanar esta dificultad es común que en los libros de cálculo se use la letra griega  $\rho$  para denotar la componente radial del vector posición en coordenadas cilíndricas. ¿Por qué no hacer lo mismo aquí? Como sucede con muchas elecciones no muy sensatas en astronomía, lo haremos simplemente porque es tradición en mecánica celeste usar la letra  $r$  para referirse a la coordenada radial sobre un plano. En lo que resta del libro, el significado de las cantidades que denotemos como  $r$  se precisará de acuerdo al contexto en la que se usen.
- **Velocidad, rapidez y componente radial de la velocidad.** Asegurese de entender la diferencia conceptual y matemática entre las cantidades:  $\vec{v}$  (vector velocidad),  $v = |\vec{v}|$  (magnitud de la velocidad o rapidez) y  $\dot{r}$  (componente radial de la velocidad en el sistema de coordenadas cilíndricas o esféricas).

### 5.1.2. Sistemas de referencia

Como hemos sugerido antes, el valor de las cantidades cinemáticas definidas arriba, dependerá, por ejemplo, de cómo elijamos el instante de referencia para medir el tiempo o el origen del sistema de coordenadas. Estas elecciones (arbitrarias) definen lo que en física se conoce como el **sistema de referencia**.

Vale la pena aclarar que el sistema de referencia no es lo mismo que el sistema de coordenadas: en un mismo sistema de referencia se pueden usar distintos sistemas de coordenadas.

¿Cómo se relacionan las cantidades cinemáticas medidas en dos sistemas de referencia diferentes?

Esta pregunta fue importante en los albores de la mecánica, especialmente en los trabajos de Galileo. En aquel entonces, sin embargo, tenía un valor más bien filosófico e incluso retórico (como herramienta de argumentación), pero una relevancia física menor. A principios de los 1900, especialmente en los trabajos de Albert Einstein y colaboradores, la pregunta por la relación entre las observaciones

realizadas en distintos sistemas de referencia, se convirtió en la base de la formulación de una nueva teoría física (la teoría de la relatividad.)

Toda la mecánica newtoniana que veremos a continuación, y sobre la base de ella, los resultados de la mecánica celeste que desarrollaremos en este libro, se apoyan en el postulado de que las observaciones realizadas en sistemas de referencias diferentes se pueden conectar a través de las denominadas **transformaciones de Galileo**:

#### Postulado 5.1

**Transformaciones de Galileo.** Si dos sistemas de referencia,  $R$  y  $R'$  usan las mismas unidades y el origen de sus sistema de coordenadas coincide en  $t = 0$ , las siguientes relaciones entre las propiedades cinemáticas básicas medidas en los dos sistemas de referencia, se consideran válidas:

$$\begin{aligned} t &= t' \\ \vec{r} &= \vec{r}' + \int_0^t \vec{u}(t) dt \end{aligned} \quad (5.4)$$

Donde  $\vec{u}(t)$  es la velocidad del origen de coordenadas del sistema  $R'$  respecto del sistema  $R$ .

Estas transformaciones fundamentales, permiten escribir las reglas de transformación para cualquier otras propiedad cinemática, por ejemplo, para la velocidad y la aceleración:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u} \quad (5.5)$$

$$\vec{a} = \vec{a}' + \dot{\vec{u}} \quad (5.6)$$

La Ec. (5.5) se conoce como la **ley de adición de velocidades galileana** y tiene una importancia histórica en el desarrollo de los postulados de la teoría de la relatividad. La Ec. (5.6) será importante en la definición, en las próximas secciones, del concepto de **sistema de referencia inercial**.

### 5.1.3. La ecuación de movimiento (e.d.m.)

La posición y velocidad de una partícula en cualquier instante futuro puede predecirse si se resuelve la siguiente ecuación diferencial:

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{a}. \quad (5.7)$$

A esta ecuación se la conoce en mecánica como la **ecuación de movimiento** y para referirnos a ella, en lo sucesivo, usaremos el acrónimo e.d.m. o el nombre edm en los algoritmos.

La solución general de esta ecuación es la función de posición de la partícula  $\vec{r}(t)$ , de la que se pueden deducir posteriormente las demás cantidades cinemáticas.

La e.d.m. es una ecuación diferencial vectorial de segundo orden con condiciones iniciales  $\vec{r}(t_0) = r_0$ ,  $\dot{\vec{r}}(t = t_0) = \vec{v}_0$ , es decir, matemáticamente y como explicamos en la **Sección 4.1.9**, es un problema de valor inicial (IVP).

La aceleración  $\vec{a}$  en la Ec. (5.7) es una función que puede depender de varias de las cantidades cinemáticas definidas en la sección previa. Para la mayoría de las situaciones consideradas en este texto, sin embargo, asumiremos que la aceleración depende solamente del tiempo y del estado de la partícula, es decir:

$$\vec{a} = \vec{a}(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}}).$$

La e.d.m. puede expresarse también como dos ecuaciones diferenciales vectoriales de primer orden (*reducción de orden*):

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}} &= \vec{v} \\ \dot{\vec{v}} &= \vec{a}(t, \vec{r}, \vec{v})\end{aligned}\tag{5.8}$$

Aquí se ha introducido como variable auxiliar la velocidad misma  $\vec{v} \equiv \dot{\vec{r}}$ . Escrita de esta manera, la solución al sistema de ecuaciones diferenciales de la e.d.m. provee simultáneamente las funciones  $\vec{r}(t)$  y  $\vec{v}(t)$ . El sistema gana variables, pero el orden se reduce.

La e.d.m., tanto en la forma (5.7) como (5.8) representa, en realidad, una forma compacta de escribir un sistema de ecuaciones diferenciales escalares.

En términos de las componentes cartesianas, la e.d.m. de la Ec. (5.7) es en realidad un sistema de tres ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= a_x \\ \ddot{y} &= a_y \\ \ddot{z} &= a_z\end{aligned}\tag{5.9}$$

Por su lado la e.d.m. de la Ec. (5.8) corresponde a un sistema de 6 ecuaciones diferenciales escalares de primer orden:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v_x \\ \dot{y} &= v_y \\ \dot{z} &= v_z \\ \dot{v}_x &= a_x(t, x, y, z, v_x, v_y, v_z) \\ \dot{v}_y &= a_y(t, x, y, z, v_x, v_y, v_z) \\ \dot{v}_z &= a_z(t, x, y, z, v_x, v_y, v_z)\end{aligned}\tag{5.10}$$

En esta última expresión hemos escrito explícitamente la dependencia de la aceleración de las componentes del vector de estado, para resaltar el hecho que el sistema de ecuaciones diferenciales puede ser altamente *acoplado*.

En términos del vector de estado  $\vec{X} : (\vec{r} \ \vec{v})^T$ , la e.d.m. de primer orden (Ec. 5.10) se puede escribir como:

$$\dot{\vec{X}} = \begin{pmatrix} \vec{v} \\ \vec{a} \end{pmatrix}\tag{5.11}$$

donde (abusando de la notación)  $\vec{v} : (v_x \ v_y \ v_z)^T$  y  $\vec{a} : (a_x \ a_y \ a_z)^T$

#### Nota

**Ecuaciones de movimiento en otros sistemas de coordenadas.** Ecuaciones análogas a la Ecs. (5.9,5.10) pueden escribirse en caso de que la

**Nota (Cont.)**

aceleración sea provista en los sistema coordenadas cilíndricas o esféricas. Para ello deben usarse las definiciones de velocidad y aceleración, en el sistema de coordenadas respectivo, que vimos en la [Sección 5.1.1](#). La forma explícita de esas ecuaciones diferenciales, sin embargo, no será tan sencilla como la que escribimos en el caso de las coordenadas cartesianas. El lector podrá explorar estos casos a través de algunos de los problemas incluidos al final del capítulo.

**5.1.4. Integración de la e.d.m.**

La solución o *integración* de la e.d.m. constituye el problema matemático central de la cinemática y a la larga, el problema más importante de toda la mecánica incluyendo, naturalmente, la mecánica celeste.

En los cursos de mecánica newtoniana básica el problema se resuelve normalmente para dos casos simples:

1.  $\vec{a} = \vec{0}$  que se conoce también como *movimiento rectilíneo y uniforme*.
2.  $\vec{a} = \vec{a}_0$ , donde  $\vec{a}_0$  es un vector constante y que se conoce como movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.

Si bien estos dos casos son interesantes en la descripción de un amplio rango de aplicaciones simples (p.e. en el movimiento parabólico), en situaciones realistas y en particular en las que veremos en la mecánica celeste, la función  $\vec{a}$  puede ser mucho más compleja.

En los ejemplos desarrollados a continuación, y que nos sirvan para ilustrar algunos conceptos físicos y matemáticos que usaremos con regularidad en el resto del libro, consideramos dos situaciones hipotéticas comunes, a saber que la  $\vec{a}$  depende exclusivamente del tiempo o que esta cantidad depende del vector de estado.

**5.1.5. Integración por cuadraturas****Ejemplo 1: movimiento con tirón constante**

Considerese el caso simple de una partícula que esta sometida a un tirón  $\vec{j} : (j_0, 0, 0)$  constante en el tiempo. Suponga además que en  $t = 0$  la aceleración de la partícula es nula.

En estas condiciones la función de aceleración, en cualquier tiempo, se puede escribir como:

$$\vec{a}(t) : (j_0 t, 0, 0),$$

Por tanto, la e.d.m., escrita en términos de las componentes del vector posición (Ec. 5.9) será:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= j_0 t \\ \ddot{y} &= 0 \\ \ddot{z} &= 0 \end{aligned} \tag{5.12}$$

Si bien una solución a esta ecuación diferencial puede encontrarse fácilmente por tanteo, p.e.  $x(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$ , un procedimiento cuidadoso de solución nos permitirá a continuación revelar algunas propiedades interesantes del sistema dinámico y, más importante aquí, ilustrar un método de solución de ecuaciones diferenciales que será de gran utilidad en los siguientes capítulos.

Reescribamos la ecuación para  $x$  en el sistema de Ecs. (5.12) de la forma:

$$\frac{d}{dt}\dot{x} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}ct^2\right). \quad (5.13)$$

La clave de este procedimiento de solución esta en la posibilidad de escribir, en función de sus respectivas antiderivadas, ambos lados de la ecuación diferencial. Esta es la razón por la que llamaremos a este método, **método de las cuadraturas** en referencia al término que introdujimos en la Sección 4.1.7 para referirnos a la integral definida de una función.

Reuniendo los términos de la Ec. (5.13) en un mismo lado obtenemos:

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{x} - \frac{1}{2}ct^2\right) = 0.$$

Si bien no hemos resuelto la ecuación todavía, está última manera de escribirla nos permite que la *fórmula* que aparece entre paréntesis y que combina la velocidad y el tiempo, sin importar el estado de la partícula o el instante de tiempo, siempre será constante (su derivada con respecto al tiempo es cero):

$$\dot{x} - \frac{1}{2}ct^2 = I_x \quad (5.14)$$

Decimos que  $C_{I_x}(t, \dot{x}) \equiv \dot{x} - ct^2/2$  es una **integral**, una **cuadratura** o una **constante de movimiento** del sistema. En este caso  $I_x$  es el valor que esta constante adopta para un conjunto específico de condiciones iniciales.

### Definición 5.1

**Constante de movimiento de un sistema dinámico.** Si una función  $f(t, \vec{r}, \vec{v})$  es tal que:

$$C_I(t, \vec{r}, \vec{v}) = I$$

Donde  $I$  es una cantidad que solo depende de las condiciones iniciales, decimos que  $C_I(t, \vec{r}, \vec{v})$  es una **constante de movimiento**. La llamaremos también una **integral** o **cuadratura** del sistema <sup>a</sup>.

<sup>a</sup>En términos rigurosos la *constante de movimiento* es la función  $C_I(t, \vec{r}, \vec{v})$  no su valor numérico  $I$  que por definición es un número real y por lo tanto es constante.

Es fácil verificar que otras constantes de movimiento de este sistema son  $\dot{y} = I_y$  y  $\dot{z} = I_z$ .

### Ejemplo 2: movimiento oscilatorio

Considere ahora el caso en el que una partícula tiene una aceleración dada por:

$$\vec{a}(t) : (-\omega x, 0, 0),$$

donde  $\omega$  es una cantidad constante. Como vemos, cuando la partícula se aleja del origen la aceleración apunta de nuevo hacia allí. Sabemos que este tipo de aceleración producirá un movimiento oscilatorio.

En este caso la e.d.m. para la componente  $x$  será:

$$\ddot{x} = -\omega x.$$

La integración de esta ecuación por tanteo ya no es tan trivial. Tampoco lo es intentar expresar ambos lados de la ecuación como derivadas respecto al tiempo de otras funciones (como lo hicimos para encontrar la Ec. 5.13).

Sin embargo, si multiplicamos ambos lados de la ecuación por la función  $\dot{x}$ :

$$\dot{x}\ddot{x} = -\omega x\dot{x},$$

la nueva ecuación puede escribirse, convenientemente, de la forma:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \dot{x}^2 \right) = \frac{d}{dt} \left( -\frac{1}{2} \omega x^2 \right).$$

Allí podemos identificar una constante de movimiento del sistema:

$$\frac{1}{2} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \omega x^2 = I_x. \quad (5.15)$$

Como la multiplicación de la e.d.m. original por la función  $\dot{x}$  nos permitió encontrar una integral de la ecuación, llamamos a  $\dot{x}$ , un *factor integrante*.

¿De qué sirve encontrar las constantes de movimiento de un sistema si lo que queremos en realidad es hallar la forma explícitas para las funciones  $\vec{r}(t)$ ,  $\vec{v}(t)$ ?

Las constantes de movimiento pueden ofrecernos información sobre la dinámica del sistema, incluso en situaciones en las que no es posible obtener una solución. Note, por ejemplo, cuan diferentes son las constantes de movimiento de los sistemas en los ejemplos 1 y 2. Aunque no resolvimos ninguno de los dos problemas, sus cuadraturas nos dan pistas sobre como se relacionan la posición y velocidad de la partícula en cualquier instante del tiempo. Más adelante mostraremos que es incluso posible dar una interpretación física a estas constantes (en términos de cantidades dinámicas conocidas tales como la energía, el momentum lineal, el momentum angular, o incluso de cantidades desconocidas pero útiles) y su relevancia para la comprensión del sistema será aún mayor.

Ahora bien, siendo las cuadraturas  $C(t, \vec{r}, \vec{v})$  funciones de las variables que deseamos encontrar, si se obtienen suficientes constantes de movimiento (tantas como variables), habremos, técnicamente, obtenido la solución.

En otras palabras, un número suficiente de cuadraturas o de constantes de movimiento permite convertir la solución de una ecuación diferencial, en la solución a un sistema algebraico de ecuaciones (aquel formado por las cuadraturas).

Para ilustrarlo volvamos a la e.d.m. del sistema en el ejemplo 1:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= j_0 t \\ \ddot{y} &= 0 \\ \ddot{z} &= 0 \end{aligned}$$

Es posible mostrar que este sistema tiene 6 constantes de movimiento (ya habíamos introducido tres de ellas):

$$\begin{aligned}
 \dot{x} - \frac{1}{2}j_0 t^2 &= I_x \\
 \dot{y} &= I_y \\
 \dot{z} &= I_z \\
 x - \frac{1}{6}j_0 t^6 - I_x t &= S_x \\
 y - I_y t &= S_y \\
 z - I_z t &= S_z
 \end{aligned} \tag{5.16}$$

El valor de las cantidades  $I_x, I_y, I_z, S_x, S_y, S_z$  se obtiene reemplazando las condiciones iniciales en el lado izquierdo de estas ecuaciones.

Si se resuelve simultáneamente el sistema de ecuaciones algebraicas (5.16) se obtiene, finalmente, la solución al problema original:

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \frac{1}{3}j_0 t^3 + I_x t + S_x \\
 y(t) &= I_y t + S_y \\
 z(t) &= I_z t + S_z \\
 \dot{x}(t) &= \frac{1}{2}j_0 t^2 + I_x \\
 \dot{y}(t) &= I_y \\
 \dot{z}(t) &= I_z
 \end{aligned} \tag{5.17}$$

Un procedimiento análogo puede usarse para encontrar la solución a la e.d.m. del sistema del ejemplo 2 (vea los problemas al final del capítulo.)

Es posible que nadie escoja un procedimiento tan elaborado para encontrar la solución a la e.d.m. de estos dos sistemas dinámicos simples. Claramente, existen procedimientos más sencillos (incluyendo una solución por tanteo.) Sin embargo, usar el método de las cuadraturas aquí, con sistemas cuya solución se puede obtener con métodos más directos, nos permite ilustrar el poder que tiene el método de las cuadraturas, que será el preferido para encontrar la solución de la e.d.m. de sistemas dinámicos mucho más complejos en mecánica celeste.

### 5.1.6. Integración numérica de la e.d.m.

En aquellos sistemas dinámicos en los que resolver la e.d.m. o encontrar *todas* las constantes de movimiento (resolver por cuadratura el sistema), sea imposible matemáticamente o simplemente muy difícil, es posible buscar una solución aproximada usando los métodos numéricos que estudiamos al final de la [Sección 4.1.9](#).

Como vimos allí, para hacerlo, es necesario primero escribir la e.d.m. como el conjunto de 6 ecuaciones diferenciales de primer orden con la forma general (Ec. 4.27):

$$\{\dot{Y}_i = f_i(t, \{Y_k\})\}_6 \tag{5.18}$$

Donde  $Y_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, 5$ ) son las denominadas funciones auxiliares que reemplazan aquí a las cantidades claves del sistema dinámico (las componentes de  $\vec{r}$  y  $\vec{v}$ ). En física, llamaremos a las Ecs. (5.18), *ecuaciones de movimiento reducidas* del sistema o *e.d.m.r.*



Si comparamos la forma general de las e.d.m.r. en la Ec. (5.18) con las ecuaciones de primer orden (5.10), podemos hacer la siguiente identificación para las variables auxiliares  $Y_i$ :

$$\begin{aligned} Y_0 &= x, & Y_1 &= y, & Y_2 &= z \\ Y_3 &= v_x, & Y_4 &= v_y, & Y_5 &= v_z \end{aligned} \quad (5.19)$$

Por otro lado, las funciones  $f_i$  serán:

$$\begin{aligned} f_0(t, \{Y_k\}) &= v_x = Y_3, & f_1(t, \{Y_k\}) &= v_y = Y_4, & f_2(t, \{Y_k\}) &= v_z = Y_5 \\ f_3(t, \{Y_k\}) &= a_x, & f_4(t, \{Y_k\}) &= a_y, & f_5(t, \{Y_k\}) &= a_z \end{aligned}$$

Con esta identificación, una forma compacta de escribir las e.d.m.r., muy útil a la hora de preparar algoritmos, es:

$$\dot{Y}_i = \begin{cases} Y_{3+i} & , \quad 0 \leq i < 3 \\ a_{i-3} & , \quad 3 \leq i < 6 \end{cases} \quad (5.20)$$

Donde hemos introducido la notación  $\{a_0, a_1, a_2\} \equiv \{a_x, a_y, a_z\}$ .

#### Integración numérica de las e.d.m. del ejemplo 1

El sistema dinámico del ejemplo 1 introducido en Sección 5.1.5 se caracteriza por tener una aceleración del tipo  $\vec{a} : (j_0 t, 0, 0)$ . En términos de la parametrización de la e.d.m.r. en la Ec. (5.20), esto significa que  $\{a_0, a_1, a_2\} = (j_0 t, 0, 0)$ .

El sistema de ecuaciones diferenciales que describe el sistema puede implementarse en Python usando la rutina:

(Algoritmo 5.1)

```
def edm_ejemplo1(Y,t,j0=1):
    dYdt=[0,0,0,0,0,0]

    dYdt[:3]=Y[3:]
    dYdt[3:]=[j0*t,0,0]

    return dYdt
```

Aunque al final de la Sección 4.1.9 nos habíamos familiarizado con este tipo de rutinas, el diseño de está en particular merece algunos comentarios:

- Como sabemos, el propósito de esta rutina es calcular la lista de los valores de las funciones  $f_i$  (lado derecho de las Ecs. 5.18) que son iguales a las primeras derivada en el tiempo de las variables auxiliares  $\dot{Y}_i$ . En la rutina, para hacer más explícito su significado, hemos decidido llamar a esta lista  $dYdt$  en lugar de  $f$ . Los nombres de las variables no afectan la funcionalidad de las rutinas, pero pueden hacerla más legible y modificable.
- Para asignar los valores de la lista  $dYdt$  hemos aprovechado el poder de Python para sacar trozos, porciones o tajadas (*slices* en inglés) de listas y arreglos. Así el trozo  $dYdt[:3]$  corresponde a las primeras tres componentes  $dYdt[0]$ ,  $dYdt[1]$ ,  $dYdt[2]$  (nótese que, por empezar en 0, este trozo no

incluye la componente  $\text{dYdt}[3]$ .) Por otra parte el trozo  $Y[3:]$  de esta lista, corresponde a las componentes  $Y[3]$ ,  $Y[4]$ ,  $Y[5]$ . Por tanto, la igualdad  $\text{dYdt}[:3]=\text{dYdt}[3:]$  equivale a escribir explícitamente  $\text{dYdt}[0]=Y[3]$ ,  $\text{dYdt}[1]=Y[4]$ ,  $\text{dYdt}[2]=Y[5]$  que justamente implementa la parte  $\dot{Y}_i = Y_{i+3}$  de la Ec. (5.20)

Una vez escrita la rutina, la solución se obtiene siguiendo los algoritmos introducidos al final de la [Sección 4.1.9](#):

```
#Valor del tiron
j0=0.5

#Condiciones iniciales
from numpy import array
Yos=array([1,0,0,-3,0,0])

#Tiempos para obtener la solución
from numpy import linspace
ts=linspace(0.0,5.0,20)

#Solución con odeint
from scipy.integrate import odeint
Ys=odeint(edm_ejemplo1,Yos,ts,args=(j0,))
```

Solucion, Ys:

```
[[ 1.          0.          0.         -3.          0.          0.         ]
 [ 0.21204503  0.          0.         -2.98268698  0.          0.         ]
 [-0.56679785  0.          0.         -2.93074792  0.          0.         ]
 [-1.32741651  0.          0.         -2.84418283  0.          0.         ]
 [-2.06069881  0.          0.         -2.72299169  0.          0.         ]]
...
```

Podemos, finalmente, visualizar la solución a la e.d.m.r. haciendo un gráfico de la coordenada  $x$  (columna  $Ys[:,0]$  de la matriz de solución) como función del tiempo  $ts$ :

(Algoritmo 5.2)

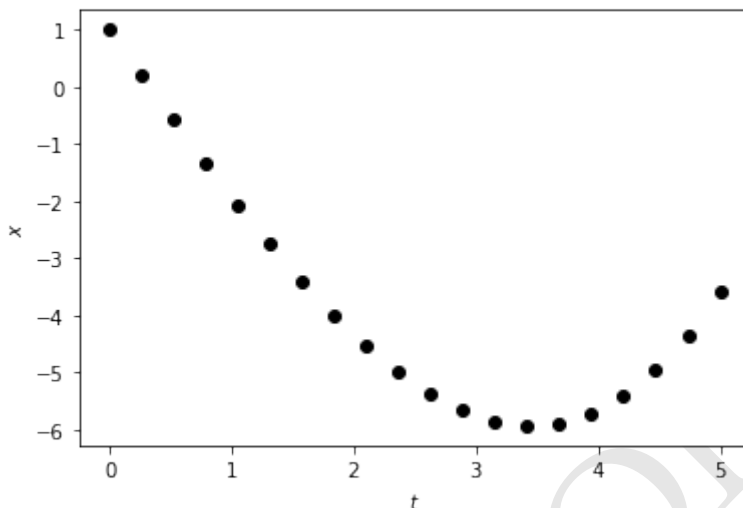
```
import matplotlib.pyplot as plt
plt.figure();
plt.plot(ts,Ys[:,0], 'ko');

plt.xlabel("$t$");
plt.ylabel("$x$");
plt.show();
```

ver Figura 5.1

¿Cómo saber si la solución obtenida con `odeint` y mostrada en la [Figura 5.1](#) es la correcta?

Existen dos maneras de comprobarlo. La primera es verificar que las posiciones y velocidades obtenidas satisfagan las constantes de movimiento que escribimos en las Ecs. (5.16).



**Figura 5.1:** Figura correspondiente al código 5.2. La figura muestra la solución numérica a la e.d.m. de un sistema sometido a un tirón constante  $\vec{j} = j_0 \hat{e}_x$ .

Así por ejemplo, podemos verificar que el valor de  $I_x$  y  $S_x$  sean efectivamente constantes:

```
#Extraemos los valores de x y dx/dt de la solución
xs=Ys[:,0]
xdots=Ys[:,3]

#Fórmula de la constante C_Ix
C_Ixs=xdots-0.5*j0*ts**2

#Fórmula de la constante C_Sx
C_Sxs=xs-(1./6)*j0*ts**3-C_Ixs*ts
```

Valores de  $C_{Ix} = [-3. -3. -3. -3. -3.] \dots$

Valores de  $C_{Sx} = [1. 1. 1. 1. 1.] \dots$

Comprobamos así que las fórmulas  $C_{Ix} = \dot{x} - j_0 t^2/2$  y  $C_{Sx} = x - j_0 t^3/6 - I_x t$ , tienen el mismo valor para todos los tiempos en los que integramos la e.d.m.r., es decir, son, por definición, constantes de movimiento. La solución numérica, por tanto, satisface nuestras expectativas matemáticas.

La segunda manera de verificar que nuestra solución numérica coincida con la analítica es compararla con la solución explícita escrita en las Ecs. (5.17):

$$x(t) = \frac{1}{6} j_0 t^3 + I_x t + S_x$$

Aquí, los valores de  $I_x$  y  $S_x$  pueden obtenerse de las condiciones iniciales.

Una comparación gráfica entre ambas soluciones se consigue con este algoritmo:

(Algoritmo 5.3)

```

#Valor de las constantes de movimiento
Ix=Yos[3]-0.5*j0*ts[0]**2
Sx=Yos[0]-(1./6)*j0*ts[0]**3+Ix*ts[0]

#Lista más completa de valores del tiempo
from numpy import linspace
tas=linspace(ts[0],ts[-1],100)

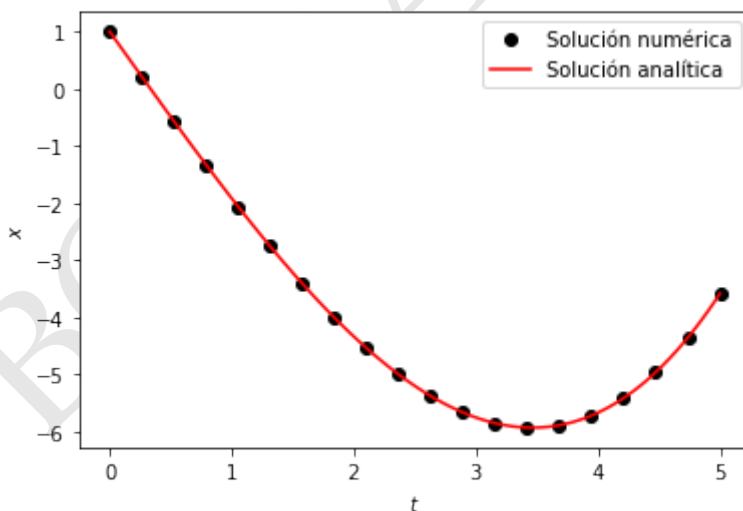
#Solución analítica
xs=(1./6)*j0*tas**3+Ix*tas+Sx

#Gráfico
plt.figure();
plt.plot(ts,Ys[:,0], 'ko',label="Solución numérica");
plt.plot(tas,xs, 'r-',label="Solución analítica");

plt.xlabel("$t$")
plt.ylabel("$x$")
plt.legend();
plt.show();

```

ver Figura 5.2



**Figura 5.2:** Figura correspondiente al código 5.3. Comparación de la solución numérica (puntos) y la solución analítica (línea continua) de la e.d.m. de un sistema con tirón constante  $j_0 = 0,5$ .

La coincidencia entre la solución analítica y la solución numérica mostrada en la Figura 5.2 es casi perfecta.

### Integración numérica de las e.d.m. del ejemplo 2

Usando las mismas herramientas y algoritmos análogos a los usados antes, podemos ahora resolver el ejemplo 2 de la [Sección 5.1.4](#).

De nuevo, las ecuaciones reducidas del sistema serán, como en el ejemplo 1, las mismas de la Ec. (5.20), pero ahora  $\{a_i\} = \{-\omega Y_0, 0, 0\}$  (nótese que hemos reemplazado  $x$  por la variable auxiliar  $Y_0$  de acuerdo a las reglas en Ec. 5.19).

La rutina que implementa las edm en este caso será:

```
def edm_ejemplo2(Y,t,omega):
    dYdt=[0,0,0,0,0,0]

    dYdt[:3]=Y[3:]
    dYdt[3:] = [-omega*Y[0], 0, 0]

    return dYdt
```

La solución al sistema, una comprobación de que la constante  $C_{Ix}$  en la Ec. (5.15) es en realidad una constante, y una gráfica de la posición como función del tiempo, se muestra en el siguiente algoritmo:

(Algoritmo 5.4)

```
#Propiedades del sistema
omega=2.5

#Condiciones iniciales
from numpy import array
Yos=array([1,0,0,0,0,0])

#Tiempos
from numpy import linspace
ts=linspace(0,10.0,100)
#Solución
Ys=odeint(edm_ejemplo2,Yos,ts,args=(omega,))

#Constante de movimiento
xs=Ys[:,0]
xdots=Ys[:,3]
C_Ixs=0.5*xdots**2+0.5*omega*xs**2

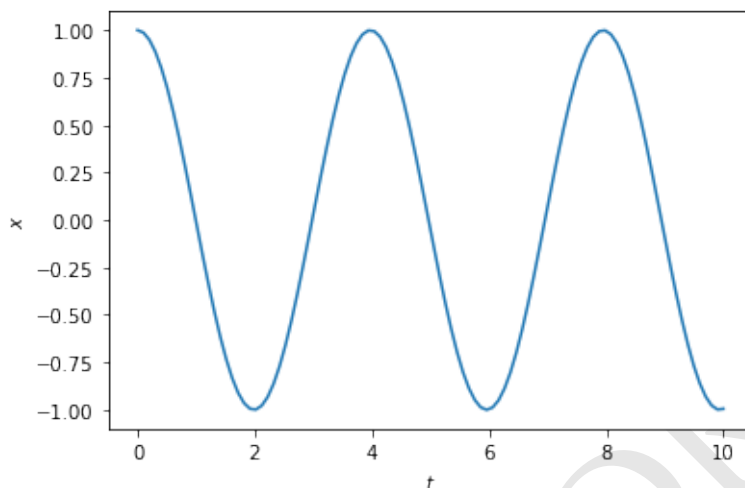
#Gráfico
fig=plt.figure();
plt.plot(ts,Ys[:,0]);

plt.xlabel("$t$");
plt.ylabel("$x$");
plt.show();
```

ver Figura 5.3

Valores de  $C_{Ix}$ : [1.25 1.25 1.25 1.25 1.25]...

Podemos comprobar al examinar la [Figura 5.3](#) nuestra intuición inicial de que



**Figura 5.3:** Figura correspondiente al código 5.4. Solución numérica de la e.d.m. de un sistema dinámico con aceleración  $\vec{a} : (-2,5x, 0, 0)$ .

la dinámica del sistema correspondía a la de un movimiento oscilatorio.

## 5.2. Dinámica

### 5.2.1. Cantidades dinámicas

Las cantidades dinámicas son aquellas que son requeridas para describir la relación entre las causas del movimiento y su descripción. Las más usadas se describen a continuación:

- **Masa,  $m$ .**

- Definición: Escalar que mide (en el contexto de la mecánica Newtoniana): (1) la cantidad de materia contenida en un cuerpo,  $m = \int \rho dV$  donde  $\rho$  es la densidad y la integral se realiza sobre el volumen del cuerpo, (2) la *inercia* o resistencia del cuerpo a moverse y (3) la intensidad de la atracción gravitacional que experimenta o produce en otros cuerpos (ver la [Sección 5.2.13](#)).
- Patrón:  $[m] = M$ .
- Unidad del SI<sup>18</sup>: kg.

- **Momento lineal,  $p$ :**

- Definición:  $\vec{p} \equiv m\vec{v} = m\dot{\vec{r}}$ .
- Patrón:  $[p] = M L T^{-1}$ .
- Unidad del SI: kg m s<sup>-1</sup>.

- **Momentum angular,  $L$ :**

<sup>18</sup>Sistema Internacional de Unidades

- Definición:  $\vec{L} \equiv \vec{r} \times \vec{p}$ .
- Una propiedad para partículas puntuales ( $m$  constante):  $\vec{L} = m\vec{r} \times \dot{\vec{r}}$ .
- Patrón:  $[L] = \text{M L}^2 \text{T}^{-1}$ .
- Unidad del SI:  $\text{kg m}^2 \text{s}^{-1}$ .

■ **Fuerza resultante,  $\vec{\mathcal{F}}$ :**

- Definición:  $\vec{\mathcal{F}} \equiv \dot{\vec{p}}$ .
- Una propiedad para partículas puntuales ( $m$  constante),  $\vec{\mathcal{F}} = m\ddot{\vec{r}}$ .
- Patrón:  $[\mathcal{F}] = \text{M L T}^{-2}$ .
- Unidad del SI:  $\text{kg m s}^{-2} \equiv \text{N (Newton)}$ .

■ **Momento de fuerza o torca,  $\vec{\tau}$ :**

- Definición:  $\vec{\tau} \equiv \vec{r} \times \vec{\mathcal{F}}$ .
- Una propiedad para partículas puntuales ( $m$  constante):  $\vec{\tau} = \dot{\vec{L}}$ .
- Patrón:  $[\tau] = \text{M L}^2 \text{T}^{-2}$ .
- Unidad del SI:  $\text{kg m}^2 \text{s}^{-2}$ .

■ **Energía cinética o *vis viva*,  $K$ :**

- Definición:  $K \equiv m\vec{v}^2/2$ .
- Patrón:  $[K] = \text{M L}^2 \text{T}^{-2}$ .
- Unidad del SI:  $\text{kg m}^2 \text{s}^{-2} \equiv \text{J (Joule, pronunciado "syul"}^{19})$ .

■ **Trabajo,  $W$ :**

- Definición:  $W = \int \mathcal{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$ .
- Patrón:  $[W] = \text{M L}^2 \text{T}^{-2}$ .
- Unidad del SI: J.

### 5.2.2. Partículas y fuerzas

Hay tres conceptos centrales en la dinámica newtoniana: partícula, fuerza y masa.

Entenderemos aquí por partícula o **partícula puntual** a una entidad material de tamaño insignificante, sin estructura, ni volumen (independientemente de que se las represente gráficamente como esferas.)

Un sistema de muchas partículas puntuales puede formar: una "nube", un cuerpo (rígido o elástico) o un fluido. En lo que resta de este libro nos concentraremos únicamente en la dinámica de partículas individuales o "nubes" de partículas.

#### Nota

**Masa constante para partículas puntuales.** A diferencia de lo que pasa con un sistema de partículas, en la que el número de constituyentes puede variar debido al intercambio de materia con otros sistemas, en lo sucesivo asumiremos que la masa de las partículas puntuales es constante en el tiempo e independiente del sistema de referencia.

<sup>19</sup><https://forvo.com/search/Joule/fr/>

El concepto de fuerza es uno de los más esquivos de la Física [11]. Para los propósitos de este libro nos apegaremos a “definiciones” prácticas del concepto, cercanas pero no en exceso a las introducidas originalmente por Newton en los *Principia*.

Distingamos dos cantidades físicas a las que llamaremos *fuerza*:

- La **fuerza resultante**,  $\vec{F}$  es el nombre que daremos aquí a la razón instantánea de cambio en el momento lineal,  $\mathcal{F} \equiv \dot{\vec{p}}$ , independiente de cuál sea la causa de ese cambio.
- La **fuerza aplicada**,  $\vec{F}$ , es un concepto eminentemente newtoniano y, en términos modernos, pobremente definido. En general, la fuerza aplicada es una medida la intensidad de la *interacción* entre una partícula y su entorno (otras partículas, medios materiales o campos). El valor de la fuerza aplicada difícilmente puede derivarse de primeros principios y normalmente se postula (p.e. la fuerza gravitacional) o se construye a partir de modelos simplificados de las interacciones (p.e. las fuerzas de fricción.)

En la mecánica Newtoniana se reconocen dos tipos básicos de *fuerza aplicada*:

- **Fuerzas de contacto:** Fuerzas que resultan de la interacción por contacto de una partícula con otras partículas (p.e. fuerzas en choques), con medios (p.e. fricción en un fluido) o con fronteras materiales (p.e. fuerzas normales o de fricción).
- **Fuerzas de campo o de acción a distancia:** Fuerzas que resultan de la interacción de las partículas con otras partículas o cuerpos materiales, sin que medie el contacto directo (a distancia); también están en este grupo las fuerzas que resultan de la interacción con un *campo* (por ejemplo los campos electromagnéticos).

Existe una tercera categoría de fuerzas, pero a diferencia de las anteriores no corresponden a *fuerzas aplicadas* sino un tipo específico de *fuerzas resultantes*:

- **Fuerzas ficticias:** Son fuerzas resultantes que se manifiestan al estudiar la dinámica en ciertos sistema de referencia (por ejemplo en sistemas de referencia rotantes). Entre ellas están la *fuerza centrífuga* y la *fuerza de Coriolis* que estudiaremos en la ???. El adjetivo de *ficticias* viene precisamente del hecho de que no son producto de interacciones con otras partículas o cuerpos materiales.

### 5.2.3. Sistemas de referencia inerciales

La introducción del concepto de fuerza ficticia permite definir un concepto central en la mecánica newtoniana:

#### Definición 5.2

**Sistema de referencia inercial.** Decimos que un sistema de referencia es inercial si todas las fuerzas resultantes en el sistema son causadas por fuer-



**Definición (Cont.)**

zas aplicadas, es decir si todos los cambios en los momentos lineales de las partículas pueden rastrearse hasta interacciones entre ellas, con medios materiales o con campos.

Demostrar en la práctica que un sistema de referencia es inercial, que implica rastrear todas las causas físicas de los cambios en los momentos lineales de las partículas de un sistema de prueba, puede ser muy complicado sino imposible. Existe, sin embargo, un teorema que puede ser de gran utilidad para este propósito:

**Teorema 5.1**

**Sistemas de referencia con velocidad relativa constante.** Si un sistema de referencia  $R$  se mueve con velocidad constante respecto a un sistema de referencia inercial  $I$ , entonces  $R$  es también un sistema de referencia inercial.

Este teorema es una consecuencia directa de las transformaciones de Galileo que postulamos en la [Sección 5.1.2](#) (ver sección de problemas al final del capítulo).

Para los propósitos de la mecánica Newtoniana, basta que identifiquemos al menos un sistema de referencia inercial en el Universo para que, midiendo la velocidad relativa respecto a él, podamos determinar si otros sistemas de referencia son también inerciales.

En la práctica la “inercialidad” de un sistema de referencia (el centro de masa del sistema solar, el centro de la galaxia, la radiación cósmica de fondo) se postula (o se considera como una aproximación en los modelos) y a partir de ellos a través del Teorema (??) se construyen otros sistemas de referencia inerciales.

**5.2.4. Postulado de fuerzas**

La manera original en la que Newton formuló sus postulados clásicos sobre la relación entre las fuerzas aplicadas y el movimiento resultante, ha cambiado mucho en los 350 años que nos separan de la publicación de los *Principia*. Hoy, existen maneras alternativas de formular estos principios y leyes (algunas de las cuáles serán desarrolladas en el libro) manteniendo los efectos prácticos de la teoría.

A continuación usaremos una presentación de la mecánica newtoniana muy propia del estilo de este libro y que sintetiza en un esquema formal, sobre la base de los conceptos y cantidades definidas en las secciones anteriores, sus postulados (leyes) y teoremas.

**Nota**

**Una formulación original.** El lector puede encontrar relativamente extraña nuestra formulación (muy diferente a la que encontrará en los textos de mecánica básica.) La razón de fondo estriba esencialmente en la manera como hemos definido antes el concepto de fuerza. Esta formulación sin embargo, como veremos a lo largo del libro, además de

**Nota (Cont.)**

contener los resultados básicos de la teoría conocidos por todos, ofrece algunas ventajas para su formulación en teorías del movimiento más general como la teoría de la relatividad.

La ley física en el corazón de la mecánica newtoniana se conoce como el **postulado de fuerza**:

**Postulado 5.2**

**Postulado de Fuerzas.** Si en un sistema de referencia inercial, una partícula esta sometida a una fuerza neta aplicada  $\vec{F}$  (suma vectorial de las fuerzas aplicadas correspondientes a cada interacción que sufre la partícula en ese instante) su momento lineal cambiará instantáneamente a razón de:

$$\dot{\vec{p}} = \vec{F}$$

En otros términos, la fuerza resultante es siempre igual la fuerza neta aplicada:

$$\vec{F} = \vec{F}$$

Aunque esta última expresión parece obvia y universal, no lo es. Recordemos que la fuerza aplicada  $\vec{F}$  es una propiedad de las interacciones y su valor se calcula a partir de los modelos específicos que las describen. En contraposición, la fuerza resultante  $\vec{F}$  (la razón de cambio del momento lineal) es un efecto observado en el movimiento de la partícula. El postulado fuerzas básicamente plantea que en todas las interacciones a las que se somete una partícula, la causa (fuerza aplicada) y el efecto (fuerza resultante o razón de cambio del momento lineal) tienen el mismo valor.

Es importante resaltar la condición de que el sistema de referencia sea inercial para que el postulado de fuerzas sea válido. En otras palabras, en sistemas de referencia *no* inerciales, la fuerza resultante no es igual a la fuerza aplicada. Volveremos sobre este caso en la ??.

Por la suposición que hemos hecho desde el principio de que la masa de las partículas es constante, el postulado de fuerzas nos permite calcular la función de aceleración de las partículas que usamos en la e.d.m. (ver Ec. 5.7). Si reconocemos que por definición para una partícula  $\vec{p} = m\vec{a}$ , el postulado de fuerzas se puede escribir como:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

La e.d.m. de una partícula en función de las fuerzas aplicadas queda:

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{\vec{F}}{m}. \quad (5.21)$$

**Nota**

**Ecuación de movimiento con fuerzas resultantes.** Una relación idéntica a la Ec. (5.21) es válida en el caso de las fuerzas resultantes:

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{\vec{F}}{m} \quad (5.22)$$

Esta ecuación sin embargo no es un postulado de la mecánica, sino una forma de la definición misma de fuerza aplicada  $\vec{F}$  que introdujimos en la Sección 5.2.1.

Aunque la identidad matemática de las Ecs. (5.21) y (5.22) nos permite escribir la ecuación de movimiento sin distinguir que tipo fuerzas están involucradas, no debemos olvidar la diferencia conceptual entre una aceleración producto de las interacciones (fuerza aplicada, Ec. 5.21) y aquella que es simplemente una manifestación del cambio en el momento lineal (fuerza aplicada, Ec. 5.22).

La igualdad matemática, en sistemas inerciales, postulada entre la fuerza neta aplicada sobre una partícula y la fuerza resultante, permite extrapolar la definición de trabajo que presentamos en la Sección 5.2.1 y derivar un importante teorema de la mecánica newtoniana:

**Teorema 5.3**

**Teorema del trabajo y la energía.** Si una partícula que en un sistema de referencia inercial, se mueve sobre una trayectoria entre dos puntos  $\vec{r}_1$  (donde tiene velocidad  $\vec{v}_1$ ) y  $\vec{r}_2$  (donde tiene velocidad  $\vec{v}_2$ ), esta sometida a una fuerza neta aplicada  $\vec{F}$  que cambia de acuerdo a una función conocida y continua sobre la trayectoria, entonces, el trabajo realizado por la fuerza aplicada es  $W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$  y la siguiente igualdad es válida:

$$W = \Delta K$$

Donde  $K = mv^2/2$ .

**5.2.5. Fuerzas conservativas y no conservativas**

Una clasificación adicional de las fuerzas (tanto resultantes como aplicadas) surge al estudiar su *circulación*  $\oint \vec{F} \cdot d\vec{r}$  (ver Sección 4.1.7.) En términos físicos, la circulación de una fuerza (resultante o aplicada) es el trabajo total realizado por ella a lo largo de una trayectoria cerrada.

De acuerdo con la circulación las fuerzas se clasifican en:

- **Fuerzas conservativas:** Una fuerza es conservativa si y solo si, su circulación es nula:

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \quad (5.23)$$

Una manera más frecuente (y física) de expresar esta propiedad (ver problemas al final del capítulo) es diciendo que el trabajo realizado por una fuerza conservativa entre dos puntos del espacio, es independiente de la trayectoria que esta siga entre esos puntos.

Por el teorema del trabajo y la energía, la circulación nula implica que la energía cinética de una partícula sometida a una fuerza conservativa, es la misma antes y después de recorrer una trayectoria cerrada. Este es precisamente el origen del adjetivo *conservativo*.

- **Fuerzas no conservativas o disipativas:** Una fuerza es *no* conservativa si su circulación es distinta de cero. En este caso, en virtud del teorema del trabajo y la energía, la energía cinética de la partícula antes y después de realizar el recorrido cerrado, será diferente. Es por esta razón que a este tipo de fuerzas se las llama también *fuerzas disipativas*.

#### Nota

**La fuerza como campo vectorial.** Nótese que al definir la circulación o al hablar aquí del trabajo realizado sin importar el camino seguido por la partícula, estamos asumiendo que en todos los puntos del espacio a los que tiene acceso la partícula, podemos calcular el valor de la fuerza  $\vec{F}$ . En este sentido la fuerza ya no es simplemente un vector más, sino que se convierte en lo que en el cálculo se conoce como un *campo vectorial*, es decir, una función que asocia a cada punto del espacio un vector (ver [Sección 4.1.3.](#))

La propiedad expresada en la Ec. (5.23) implica, por el corolario al teorema de Stokes (Cor. 4.6) que las fuerzas conservativas se pueden escribir como:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U = -\partial_i U \quad (5.24)$$

donde el signo menos, que parece arbitrario, es una convención usada frecuentemente en física (y que se justificará en la siguiente sección.)

En mecánica llamamos a  $U$  la **función de energía potencial** de la fuerza conservativa.

Las fuerzas conservativas pueden describirse o bien usando un campo escalar  $U$  (el campo de energía potencial) o bien usando un campo vectorial  $\vec{F}$  (como se acostumbra con todas las fuerzas, conservativas o no). El uso de una descripción o de la otra dependerá de la situación que estemos considerando.

### 5.2.6. Energía mecánica

Con la definición de la función de energía potencial, el trabajo realizado por una fuerza conservativa se puede escribir como:

$$\begin{aligned}
 \int \vec{F} \cdot d\vec{r} &= - \int \partial_{\vec{r}} U \cdot d\vec{r} \\
 &= - \int dU \\
 &= -[U(\vec{r}_2) - U(\vec{r}_1)] \\
 &= -\Delta U
 \end{aligned}$$

donde hemos usado, en su orden, la regla de la cadena (Teo. 4.1) y la rela de Newton-Leibniz (Teo. ??).

El teorema del trabajo y la energía (Teo. ??) para una fuerza conservativa se escribe entonces como:

$$\begin{aligned}
 -\Delta U &= \Delta K \\
 \Delta(K + U) &= 0.
 \end{aligned}$$

Este último resultado implica que la cantidad  $E \equiv K + U$  se conserva durante el movimiento de una partícula bajo la acción de una fuerza conservativa. Llamaremos a esta cantidad en lo sucesivo **energía mecánica** y a esta interesante propiedad (que es producto del teorema del trabajo y la energía), **conservación de la energía mecánica**.

El resultado anterior puede generalizarse cuando sobre la partícula actúan todo tipo de fuerzas, aplicadas o resultantes, conservativas o no conservativas:

#### Teorema 5.2

**Conservación de la energía.** Si una partícula se mueve en el espacio mientras esta sometida a fuerzas conservativas y no conservativas, el trabajo total realizado por las fuerzas no conservativas  $W_{NC}$  entre dos puntos cualquiera de la trayectoria es:

$$W_{NC} = \Delta E$$

Donde  $E \equiv K + \sum U_i$ , siendo  $\{U_i\}$  las funciones de energía potencial asociadas a todas las fuerza conservativas que actúan sobre la partícula. Llamamos a  $E$  la energía mecánica total de la partícula.

#### 5.2.7. ¿Ley de inercia?

En la historia de la mecánica, el concepto de *inercia* o *movimiento inercial*, y la *ley de inercia* de Newton, jugaron un papel fundamental en la ruptura con los conceptos dinámicos de la física Aristotélica que postulaban que todo movimiento necesitaba una *causa motriz* (una *fuerza aplicada* en nuestro caso.)

En los Principia y en sus reformulaciones posteriores [4], la inercia aparece postulada como la primera ley movimiento.

En el esquema con el que hemos sintetizado la mecánica newtoniana aquí, la inercia no tiene que postularse, sino que en realidad es un teorema muy sencillo que se sigue (casi trivialmente) del postulado de fuerzas:

**Teorema 5.3**

**Teorema de inercia.** Si la fuerza resultante o la fuerza neta aplicada sobre una partícula es nula durante un cierto intervalo de tiempo  $[t_1, t_2]^a$ , su momento lineal en ese intervalo será constante e igual al momento lineal que tenía en  $t_1$ :

$$\vec{F}(t \in [t_1, t_2]) = \vec{0} \iff \vec{p}(t \in [t_1, t_2]) = \vec{p}(t_1)$$

En otras palabras durante el intervalo considerado la partícula estará en reposo (si  $\vec{p}(t_1) = \vec{0}$ ) se moverá siguiendo una trayectoria rectilínea y con velocidad constante  $\vec{v} = \vec{p}(t_1)/m$ .

<sup>a</sup>El intervalo es cerrado en  $t_1$  en tanto en algún momento tiene que comenzar la condición de movimiento libre de fuerzas, mientras que es abierto en  $t_2$  en tanto esa condición podría extenderse para siempre

**5.2.8. Postulado de acción y reacción****Postulado 5.3**

**Acción y reacción.** En un sistema de referencia inercial en el que dos partículas 1 y 2 interactúan mutuamente, sea a través de fuerzas de contacto o de campo, se cumple que:

- **(Forma débil del postulado de acción y reacción)** la fuerza  $\vec{F}_{12}$  que la partícula 1 experimenta por la interacción con la partícula 2 (que llamaremos *acción*), es igual pero de sentido contrario a la fuerza  $\vec{F}_{21}$  que la partícula 2 experimenta por la interacción con la partícula 1 (que llamaremos *reacción*; ver panel izquierdo de la [Figura 5.6](#).)

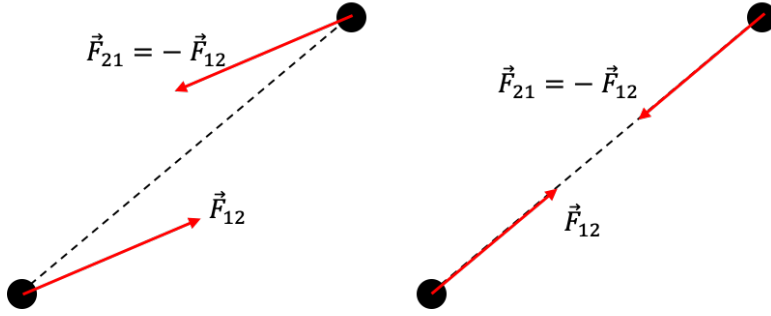
o bien,

- **(Forma fuerte de la ley de acción y reacción)** las fuerzas de acción y reacción, definidas arriba, son además paralelas a la línea que une las posiciones de las partículas (ver panel derecho de la [Figura 5.6](#)).

Las consecuencias de este postulado son fundamentales en la mecánica y serán discutidas en la ??.

**5.2.9. Postulado de gravitación universal**

Una de los más atrevidos y visionarios postulados de Newton sobre la naturaleza del movimiento de los cuerpos y en general del Universo, se conoce como la **ley o postulado de gravitación universal** que en su forma moderna propone:



**Figura 5.4:** Dos formas del postulado de acción y reacción: a la izquierda el postulado débil, en el que las fuerzas son iguales y de sentido contrario, pero no son paralelas a la línea que une las partículas; a la derecha el postulado fuerte en el que la acción y reacción actúan sobre la línea que une a las partículas.

#### 5.4

**Postulado de gravitación universal.** Una partícula de masa  $m_1$  situada en  $\vec{r}_1$  ejerce sobre cualquier otra partícula de masa  $m_2$  situada en un  $\vec{r}_2$ , una fuerza instantánea a distancia dada por:

$$\vec{F} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\hat{r}$$

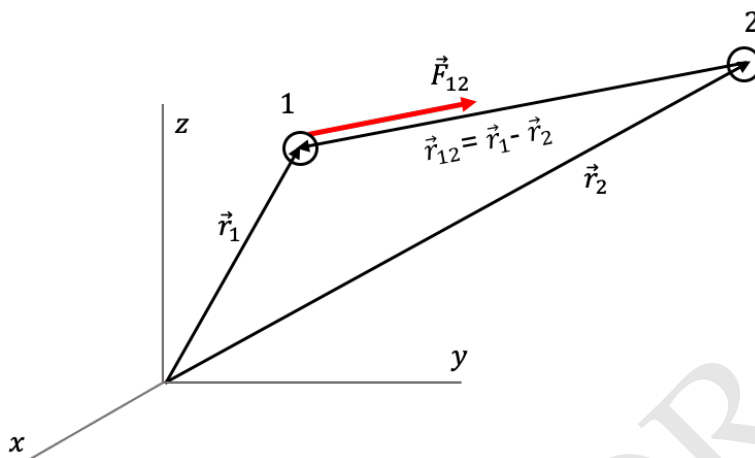
donde  $\vec{r} \equiv \vec{r}_2 - \vec{r}_1$  y  $G = 6,67408(31) \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2} = (6,67408 \pm 0,00031) \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$  es una constante de la naturaleza conocida como la *constante de gravitación universal* o *constante de Cavendish*.

En lo sucesivo usaremos la notación más precisa y consistente (ver Figura 5.5):

$$\vec{F}_{12} = -\frac{Gm_1m_2}{r_{12}^3}\vec{r}_{12} \quad (5.25)$$

Donde  $\vec{r}_{12} \equiv \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ .

Nótese que esta forma del postulado de gravitación universal, ofrece una expresión para la fuerza *sobre* la partícula 1 en lugar de la que ella ejerce sobre la partícula 2 (aunque por el postulado de acción y reacción son iguales). Además, el vector relativo  $\vec{r}_{12}$  (ver Figura 5.5) va de la partícula 2 a la partícula 1 (en lugar de  $\vec{r}$  que en el enunciado del postulado que va de la 1 a la 2). Asegúrese de entender claramente la definición y el sentido de estos vectores que serán usados con mucha frecuencia a lo largo del texto.



**Figura 5.5:** Definición de los vectores de posición, vector relativo y vector de fuerza en el postulado de gravitación universal.

#### Nota

**La fuerza de gravedad y la ley de acción y reacción.** Como puede verse de la definición matemática de la fuerza de gravitación (Ec. 5.25), tanto ella como su reacción, satisfacen las condiciones del postulado fuerte de acción y reacción, lo que tendrá consecuencias fundamentales cuando estudiemos las simetrías y cantidades conservadas en sistemas de varias partículas interactuando gravitacionalmente.

### 5.2.10. La fuerza gravitacional de la Tierra, el Sol y la Luna

Para poner en un contexto práctico las ideas de la sección anterior, calcularemos aquí la fuerza gravitacional ejercida por el Sol y la Tierra sobre la Luna.

Si bien el postulado de gravitación universal (Ec. 5.25), aplica solamente para partículas puntuales, como se explico desde el principio, dadas las dimensiones del Sistema Solar, podemos asumir que los tres cuerpos en cuestión son muy pequeños.

El cálculo de la Fuerza requiere que compilemos primero la información sobre las masas y distancias de estos cuerpos:

```
# Constante de gravitación
G=6.67408e-11 #m^3/kg s^2

#Masa de los cuerpos
M_tierra=5.97e24 #kg
M_luna=7.34e22 #kg
M_sol=1.98e30 #kg

#Distancia entre ellos
```



```
d_sol_tierra=149600000*1000 #m
d_tierra_luna=385000*1000 #m
d_sol_luna=d_sol_tierra-d_tierra_luna
```

Aunque la distancia entre el Sol y la Luna cambia continuamente debido al complejo movimiento de nuestro satélite, asumiremos, para nuestro sencillo cálculo, la mínima distancia entre ellos, es decir la distancia a la que se encuentran en la fase de Luna Nueva (cuando la Luna esta entre la Tierra y el Sol.)

Las fuerzas entre ellos serán por tanto:

```
F_sol_tierra=G*M_sol*M_tierra/d_sol_tierra**2

F_sol_luna=G*M_sol*M_luna/d_sol_luna**2

F_tierra_luna=G*M_tierra*M_luna/d_tierra_luna**2
```

```
F_sol_tierra = 3.525069974834854e+22 N
F_sol_luna = 4.356399422118894e+20 N
F_tierra_luna = 1.9730602178040146e+20 N
```

Si bien, fuerzas tan grandes son difíciles de interpretar en términos cotidianos (la fuerza gravitacional que ejerce la Tierra sobre una persona con una masa de 60 kg es de apenas 590 N), un hecho “inesperado” llama la atención: la fuerza que ejerce el Sol sobre la Luna es más del doble que la que ejerce la Tierra sobre ella. ¿Será porque usamos la distancia de la Luna en la fase de nueva cuando está más cerca al Sol? ¿cuanto disminuirá la fuerza del Sol sobre la Luna si la ponemos en una posición cercana la fase de Luna Llena? ¿a qué distancia debería estar la Luna de la Tierra para que la fuerza de nuestro planeta sobre la primera igualará a la que siente del Sol? ¿órbita entonces la Luna al Sol o a la Tierra? y si ese es el caso ¿por qué la hemos considerado siempre nuestro “satélite”?

Dejamos al lector la discusión y solución de estas preguntas (algunas de las cuáles serán ampliadas en la sección de problemas al final del capítulo), pero no podemos dejar de mencionar que una importante motivación para los desarrollos de la mecánica celeste posteriores a los tiempos de Newton, fue precisamente resolver la última de esas preguntas. Volveremos a este asunto en un capítulo posterior.

### 5.2.11. El campo gravitacional

Otra forma de escribir el postulado de gravitación, es reconocer que la fuerza gravitacional que produce una partícula de masa  $M$  sobre cualquier otra partícula de masa  $m$  situada en un punto arbitrario con posición relativa  $\vec{r}$  (donde  $\vec{r}$  es el vector que va de la posición de  $M$  a la del punto arbitrario) es:

$$\vec{F} = m \left( -\frac{GM}{r^3} \vec{r} \right) \quad (5.26)$$

De aquí podemos postular que el *campo vectorial*:

$$\vec{g} \equiv -\frac{GM}{r^3} \vec{r}, \quad (5.27)$$

*existe* independiente de si hay una masa  $m$  que pueda sentirlo. A esta cantidad vectorial (¿entidad física?) la llamaremos en lo sucesivo el **campo gravitacional** producido por la partícula puntual  $M$ .

En términos del campo gravitacional, la fuerza que experimenta una partícula de prueba situada en  $\vec{r}$  respecto a  $M$  se escribe:

$$\vec{F} = m\vec{g} \quad (5.28)$$

Esta última relación está lejos de ser trivial. En realidad la extenderemos para denotar, de manera general, la fuerza gravitacional experimentada por una partícula en un campo gravitacional  $\vec{g}$ , independientemente de si el campo es producido por una partícula puntual, por un sistema de partículas, un cuerpo rígido o un fluido.

### 5.2.12. Energía potencial gravitacional

Es posible demostrar (ver problemas al final de este capítulo) que la fuerza gravitacional de la Ec. (5.26), es una fuerza conservativa con función de energía potencial igual a:

$$U = -\frac{GMm}{r}, \quad (5.29)$$

Dado que la energía potencial de cualquier partícula, sometida a la fuerza gravitacional de  $M$  es proporcional a su masa  $m$ , es posible definir la **función de potencial gravitacional** o simplemente el **potencial gravitacional**:

$$V \equiv \frac{U}{m} = -\frac{GM}{r} \quad (5.30)$$

$V$  es un campo escalar (de acuerdo a las definiciones de Sección 4.1.3) y como sucede con el campo vectorial  $\vec{g}$ , en muchas aplicaciones es la representación matemática del *campo gravitacional* producido por una partícula. En términos de  $V$ , la energía potencial de una partícula de masa  $m$  sumergida en un campo gravitacional y la fuerza experimentada por ella, se pueden escribir como:

$$\begin{aligned} U &= mV \\ \vec{F} &= -m \partial_{\vec{r}} V \end{aligned} \quad (5.31)$$

De nuevo, junto con la Ec. (5.28) estas relaciones aplican, independientemente de si el campo gravitacional, cuantificado por  $V$  o  $\vec{g}$ , es producido por una partícula o un cuerpo extendido. Una última relación interesante que resulta de comparar la Ec. (5.31) con la Ec. (5.28) es la siguiente:

$$\vec{g} = -\partial_{\vec{r}} V \quad (5.32)$$

que es análoga a la definición de  $U$  (ver Ec. 5.24),  $\vec{F} = -\partial_{\vec{r}} U$ .

### 5.2.13. Masa y principio de equivalencia

La masa, como aparece en la Ec. (5.30), es tanto una medida de la capacidad de un cuerpo para producir campo gravitacional (y afectar a otras partículas), o,

como se expresa en 5.28, una medida de su “sensibilidad” al campo gravitacional producido por otros cuerpos <sup>20</sup>.

La masa, así concebida, es muy diferente, conceptualmente, a la que usamos (y uso Newton originalmente) para definir las cantidades dinámicas en la **Sección 5.2.1**. Por ello es necesario precisar la diferencia entre esos dos tipos de masa con una definición:

#### Definición 5.4

**Masa inercial y masa gravitacional.** En mecánica Newtoniana distinguimos dos tipos de masa conceptualmente diferentes:

Llamamos **masa inercial**  $m_I$  a la razón entre las magnitudes del momento lineal de una partícula y su velocidad, a saber  $m_I = p/v$ . La masa inercial de una partícula es la que aparece en la ecuación de movimiento  $\ddot{\vec{r}} = \vec{F}/m_I$  y en la energía cinética  $K = m_I v^2/2$ .

Por otro lado la **masa gravitacional**  $m_G$  es la masa que determina la intensidad del campo gravitacional producido por una partícula  $V = Gm_G/r$  (masa gravitacional activa) o la intensidad de la fuerza que ella experimenta en un campo gravitacional de otro cuerpo,  $\vec{F} = m_G \vec{g}$  (masa gravitacional pasiva).

Si usamos el postulado de fuerza (Ec. ??) y la expresión para la fuerza gravitacional escrita en la Ec. (5.28), encontramos que la aceleración que sufre una partícula de masa inercial  $m_I$  y masa gravitacional (pasiva)  $m_G$  en un campo gravitacional  $\vec{g}$  es:

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{m_G}{m_I} \vec{g} \quad (5.33)$$

La razón  $m_G/m_I$ , ha sido medida cuidadosamente en el laboratorio desde finales del siglo 1500 (ver recuadro **Un poco de historia: El experimento de Eötvös**), con un resultado ampliamente conocido: el valor numérico de la masa gravitacional (pasiva) coincide con el de la masa inercial hasta la onceava cifra significativa [10].

#### Un poco de historia

**El experimento de Eötvös.** La pregunta de si dos cuerpos de distinta masa caen al mismo tiempo cuando son lanzadas desde la misma altura (que, en términos modernos, es igual a la pregunta de si tienen la misma aceleración), ha ocupado a pensadores desde la antigüedad.

El primer experimento preciso de este tipo fue realizado por Simon Stevin (1548-1620), un matemático, filósofo e ingeniero *flamenco* (es decir de la región que hoy llamamos Bélgica) que hizo importantes contribuciones

<sup>20</sup>En términos estrictos, la masa que produce el campo y la masa que lo siente, deberían diferenciarse también. La primera sería una masa gravitacional activa y la segunda una masa gravitacional pasiva. En lo que sigue nos ocuparemos únicamente de la masa gravitacional pasiva, o para acortar, la masa gravitacional.

### Un poco de historia (Cont.)

tempranas a la mecánica prenewtoniana.



**Figura 5.6:** El único retrato disponible de Simon Stevin (ca. 1548). Crédito: Colección Universidad de Leiden.

En 1586, Stevin lanzó dos esferas de acero que tenían una masa diferente por un factor de 10, desde una altura de aproximadamente 10 metros. Registro la diferencia en el tiempo de caída escuchando el golpe que hacían las esferas al golpear el suelo [5]. El resultado fue contundente: las dos esferas caían casi exactamente al mismo tiempo (al menos dentro de la sensibilidad del experimento.)

Posteriormente Galileo (quien citaría a Stevin en sus libros) realizó comprobaciones similares usando planos inclinados <sup>a</sup>. Newton y Bessel intentaron resolver también la cuestión, esta vez usando péndulos (el período de un péndulo depende también de la aceleración que sufre el cuerpo) con resultados similares a Stevin: todos los cuerpos sin importar su masa y composición, tienen la misma aceleración en el campo gravitacional de la Tierra. En términos de la Ec. (5.33),  $m_G / m_I = 1$ .

Las medidas más precisas de la razón entre las masas gravitacional e inercial fueron realizadas entre 1889 y 1909 por el físico húngaro Roland von Eötvös (“fon otfosh”<sup>b</sup>) y sus colaboradores, usando para ello un instrumento conocido como la balanza de torsión (similar al usado para medir la constante de gravitación universal.) Los experimentos probaron la igualdad entre la masa gravitacional y la masa inercial hasta la octava cifra significativa y fueron repetidos en la segunda mitad de los 1900 hasta alcanzar la precisión mencionada en el texto: once dígitos significativos [10].

<sup>a</sup>La idea de que Galileo realizó un experimento similar al de Stevin, lanzando objetos desde lo alto de la Torre de Pisa no ha podido ser confirmado y podría tratarse de una anécdota apócrifa.

<sup>b</sup><https://es.forvo.com/search/E%C3%B6tv%C3%B6s/hu/>

La igualdad entre la masa gravitacional e inercial ha sido elevada hoy a la altura de un principio fundamental de la mecánica, el **principio de equivalencia**:

### Principio 5.1

**Principio de equivalencia (versión débil).** <sup>a</sup> La aceleración de de una partícula puntual en un campo gravitacional depende únicamente del valor del campo y es independiente de la masa y composición de la partícula. En términos matemáticos, en la mecánica newtoniana,  $m_G = m_I$ .

<sup>a</sup>El adjetivo débil, hace referencia al hecho de que existe un principio de equivalencia más fundamental sobre el que se sustenta la teoría de la relatividad general.

Por la igualdad numérica (mas no conceptual) entre la masa gravitacional (pasiva) y la mas inercial, en el contexto de la mecánica newtoniana, usaremos en lo sucesivo el símbolo  $m$  para referirnos a la masa sin distinguir si se trata de la una o la otra.

### 5.3. Sistemas de partículas

Una vez definidas las cantidades y conceptos básicos de la mecánica y formulados los principios, postulados y teoremas que nos permiten describir el movimiento de partículas puntuales, tenemos los elementos necesarios para abordar la cinemática y dinámica de sistemas formados por muchas partículas.

Los sistemas considerados aquí, sin embargo, estarán constituidos por partículas que interactúan a distancia, con fuerzas relativamente débiles y en números relativamente pequeños. La mecánica de sistemas con partículas unidas por fuerzas intensas y que mantienen su posición relativa de forma estable (cuerpos rígidos) o aquellos formados por *moles* de partículas individuales, y cuya mecánica es descrita por leyes empíricas macroscópicas o por reglas estadística, está más allá del interés del libro.

Una buena parte de los desarrollos teóricos contenidos en esta sección vienen originalmente del texto clásico de Goldstein, Poole & Saffo, "*Classical mechanics*" [6] y que estaremos citando con alguna frecuencia en el resto de este libro.

#### 5.3.1. Fuerzas y centro de masa

Cada partícula en nuestro sistema esta sometida a dos tipos de fuerzas: (1) las fuerzas externas  $\vec{F}_i^E$ , producidas por cuerpos externos o campos diferentes a los producidos por las componentes del sistema y (2) las fuerzas entre las partículas  $\vec{F}_{ij}$ .

La evolución del sistema se obtiene resolviendo simultáneamente el conjunto de las e.d.m. de cada partícula, que se puede escribir en términos de las fuerzas externas e internas como:

$$\left\{ m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i^E + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} \right\}_N$$

Si sumamos todas las e.d.m. y suponemos que las fuerzas entre partículas satisfacen la ley de acción y reacción (débil o fuerte), esto es  $\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij}$ , podemos escribir:

$$\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_i \vec{F}_i^E$$

o bien:

$$\frac{d^2}{dt^2} \left( \sum_i m_i \vec{r}_i \right) = \sum_i \vec{F}_i^E$$

Si definimos:

$$\vec{R} \equiv \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{M} \quad (5.34)$$

donde  $M = \sum_i m_i$  es la masa total del sistema, las e.d.m. de todas las partículas del sistema se transforman en una sola ecuación, que tiene exactamente la misma forma que la e.d.m. de una sola partícula de masa  $M$  y posición  $\vec{R}$  sometida a una fuerza total  $F^E = \sum_i \vec{F}_i^E$ :

$$M\ddot{\vec{R}} = \vec{F}^E \quad (5.35)$$

Este sencillo resultado tiene implicaciones trascendentales. Significa, esencialmente, que muchos de las cantidades cinemáticas y dinámicas definidas hasta ahora para partículas individuales, así como algunos de los resultados vistos antes, se aplican también cuando describimos sistemas de partículas, siempre y cuando nos ocupemos del movimiento de un punto imaginario localizado en la posición  $\vec{R}$  dada por la Ec. (5.34). Llamamos a este punto el **centro de Masa** del sistema.

Para ilustrar numéricamente el concepto de centro de masa consideremos un sistema de  $N$  partículas con posiciones y masas aleatorias sobre el plano  $xy$ .

Para ello generemos valores uniformemente distribuidos en el intervalo  $[0, 100]$  que corresponderán a la masa de las partículas en kg. La posición de las partículas se generara asumiendo que sus coordenadas se encuentran restringidas al interior de un cuadrado de lado 2 m y apoyado sobre el origen del sistema de coordenadas. Por su lado, supondremos que las componentes de la velocidad están restringidas al intervalo  $[-0.2, 0.2]$  m/s.

El algoritmo para preparar las masas, posiciones y velocidades de las partículas será:

(Algoritmo 5.5)

```
#Número de partículas
N=3

#Semilla de números aleatorios
from numpy.random import seed
seed(30)

#Valores aleatorios de las masas
from numpy.random import uniform
ms=uniform(0,100,size=N)

#Masa total
M=ms.sum()

#Tabla de posiciones
rs=uniform(0,2,size=(N,3))
#Ponemos todos los valores de z en 0
rs[:,2]=0

#Tabla de velocidades
vs=uniform(-0.2,0.2,size=(N,3))
#Ponemos todos los valores de vz en 0
```

```
vs[:,2]=0
```

Masas:

```
[64.41 38.07 66.3 ]...
```

Posiciones:

```
[[0.33 1.93]
```

```
 [1.98 0.47]
```

```
 [0.81 0.27]]
```

...

Velocidades:

```
[[ 0.01  0.11]
```

```
 [-0.16 -0.12]
```

```
 [-0.11 -0.1 ]]
```

...

### Nota

**semilla de números aleatorios.** La mayoría de los algoritmos de generación de números aleatorios, lo hacen partiendo de una *semilla entera*, a partir del cuál generan secuencias de números perfectamente predecibles pero que a los ojos de un ser humano parecen completamente al azar (pseudo-aleatorios).

En el Alg. (5.5) hemos generado las propiedades del sistema físico fijando la semilla en un valor arbitrario de 30 (de allí el comando `seed(30)`.)

De este modo, al correr este algoritmo siempre obtendremos las mismas propiedades.

Si el lector desea generar un conjunto completamente diferente puede cambiar este número por cualquier otro (siempre que sea entero.) Más interesante aún es comprobar el efecto que tienen eliminar (o comentar esta línea.)

Usando la Ec. (5.34), podemos calcular la posición y velocidad del centro de masa con el siguiente algoritmo:

(Algoritmo 5.6)

```
from numpy import array
R_CM=sum(ms[:,None]*rs)/M
V_CM=sum(ms[:,None]*vs)/M
```

Posición centro de masa: [0.89 0.95]

Velocidad centro de masa: [-0.08 -0.03]

### Nota

**Operaciones entre vectores y matrices.** En lo que queda de esta sección, pero también en algunos de los capítulos posteriores, nos enfrentaremos con mucha frecuencia a situaciones en las que es necesario realizar operaciones entre vectores y matrices (como `ms` y `rs` en el algoritmo anterior), que merecen un poco de atención.

El cálculo, en una sola línea de código, de la posición del centro de

**Nota (Cont.)**

masa que hicimos en el Alg. (5.6) no es para nada trivial.

Si quisieramos hacerlo paso a paso el código (uno de los muchos posibles) sería bastante bastante engorroso:

```
R_CM=[0,0,0]
for i in range(3):
    for k in range(N):
        R_CM[i]=R_CM[i]+ms*rs[k,i]
```

En este ineficiente algoritmo (el único posible en lenguajes como C), el primer ciclo for es para recorrer las componentes del vector  $R\_CM$  y el segundo para recorrer las partículas del sistema.

Si tuvieramos que escribir todas las expresiones vectoriales usando algoritmos como aquel, este texto tendría miles de páginas y posiblemente se convertiría en un aburrido libro de “programación ineficiente” (cuando en realidad lo emocionante está en la física.)

Hay cinco trucos entonces que debemos reconocer para todos los algoritmos sucesivos:

1. Si queremos multiplicar un vector por una matrix, por ejemplo para calcular  $\{m_i \vec{r}_i\}$  no podemos simplemente escribir  $ms*rs$  (aunque el sistema eventualmente no produzca ningún error el resultado será equivocado). Para hacer correctamente esta multiplicación, debemos asegurarnos que  $ms$  (que es un vector de dimensiones  $1 \times N$ , donde  $N$  es el número de partículas) se convierta en un vector columna  $N \times 1$ . El truco en Python para ello es escribir simplemente  $ms[:,None]$ .
2. Si queremos sumar las filas de una matrix  $N \times M$  basta usar la rutina `sum` incorporada en la biblioteca base del lenguaje. Así `sum(rs)` produce un vector de  $M$  componentes que tiene la suma *vectorial* de todas las filas de la matriz  $rs$ . Este y el anterior truco, son los que permiten escribir en una línea las componentes de  $\vec{R}$ :  $R\_CM=sum(ms[:,None]*rs)/M$ .
3. Si queremos restar a la matriz  $rs$  un vector constante  $R\_CM$ , la operación  $rs-R\_CM$  producirá un error. La razón es que el operador `-` asume que los dos arreglos tienen el mismo tamaño; en realidad  $rs$  es una matriz  $N \times 3$  y  $R\_CM$  un vector simple de 3 componentes. Para restar cada fila de la matriz  $rs$  por el vector  $R\_CM$  se debe usar la rutina `subtract` de NumPy: `subtrac(rs,R_CM)`.
4. Las operaciones vectoriales `cross` (producto cruz) y `dot` (producto punto) del paquete NumPy, aplicadas sobre dos matrices  $N \times 3$  (como las matrices de posiciones  $rs$  y velocidades  $vs$  de las partículas del sistema), realizan las operaciones fila por fila (cada fila de la matriz se considera un vector.) Así `cross(rs,vs)` es igual al



**Nota (Cont.)**

conjunto  $\{\vec{r}_i \times \vec{v}_i\}$  y es en sí misma una matriz  $N \times 3$ . Lo mismo sucede con  $\text{dot}(\text{rs}, \text{rs})$ , aunque en este último caso el resultado es un vector columna  $N \times 1$  con los productos punto  $\{\vec{r}_i \cdot \vec{r}_i\}$ .

5. La operación `norm` (que esta en el subpaquete `linalg` de NumPy) y que permite calcular la magnitud euclidiana de un vector, se puede aplicar sobre una matriz como `vs` para obtener la magnitud de cada fila; pero no de cualquier manera. `norm(vs)` devuelve un solo número. Pero `norm(vs, axis=1)` devuelve la magnitud de cada fila (el `axis=1` le indica a `norm` que recorra la matriz por filas; alternativamente `axis=0` le dirá a que lo haga por columnas, que no es nuestro interés aquí.) Así el código `norm(vs, axis=1)**2` permite calcular el conjunto  $\{v_i^2\}$ .

Un gráfico de la posición y velocidad de las partículas del sistema y de la posición y velocidad del centro de masa puede obtenerse con el siguiente algoritmo:

(Algoritmo 5.7)

```
import matplotlib.pyplot as plt
fig=plt.figure();

#Etiquetas sobre las partículas
for i in range(N):
    plt.text(rs[i,0],rs[i,1],i,color="cyan",
             ha='center',va='center')

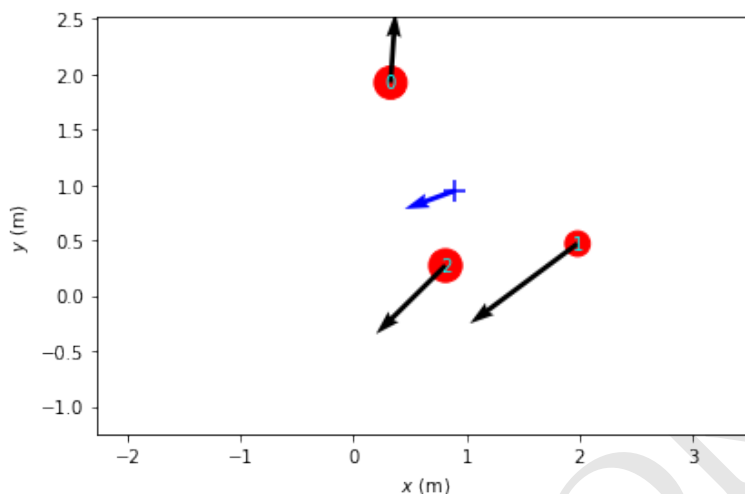
#Posiciones y velocidades de las partículas
plt.scatter(rs[:,0],rs[:,1],s=5*ms,c='red',marker='o')
plt.quiver(rs[:,0],rs[:,1],vs[:,0],vs[:,1],scale=1)

#Posiciones y velocidad del centro de masa
plt.scatter(R_CM[0],R_CM[1],s=M,c='blue',marker='+')
plt.quiver(R_CM[0],R_CM[1],V_CM[0],V_CM[1],color='blue',scale=1)

#Decoración
plt.xlabel("$x$ (m)");
plt.ylabel("$y$ (m)");

#Ajusta gráfico
from pymcel.plot import fija_ejes_proporcionales
fija_ejes_proporcionales(fig.gca(),(rs,R_CM),margin=0.4);
plt.tight_layout();
plt.show();
```

ver Figura 5.7



**Figura 5.7:** Figura correspondiente al código 5.7. Un sistema de tres partículas. El tamaño del círculo que representa cada partícula es proporcional a su masa. La cruz y la flecha adherida a ella muestran la posición y velocidad del centro de masa.

#### Nota

**Escala de los ejes en el espacio.** La rutina `fija_ejes_proporcionales` del paquete `pymcel` que viene con la versión electrónica de este libro y que utilizamos en el Alg. (5.7), juega en ese algoritmo un papel muy importante.

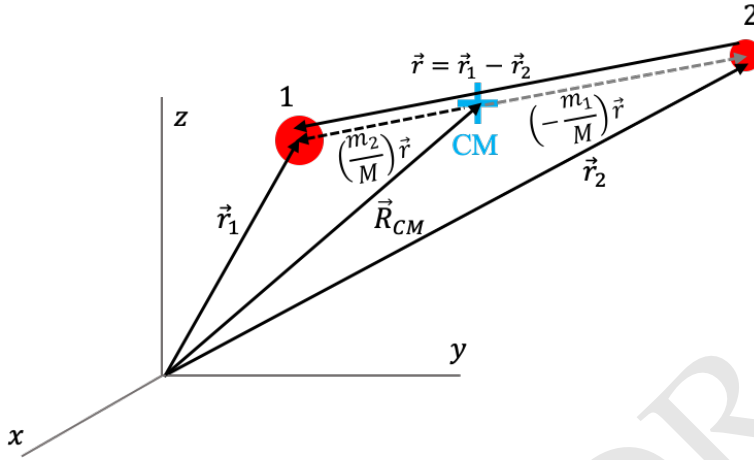
En lo sucesivo, al representar la posición de partículas en el espacio coordenado, es indispensable que la escala de los ejes sea exactamente la misma. El lector puede verificar con una regla, que una unidad sobre el eje horizontal en la Figura 5.7 mide exactamente lo mismo que una unidad del eje vertical. De este modo las posiciones o los vectores representados no estarán deformados, un efecto que crea distorsiones en nuestra interpretación de esas cantidades (más adelante veremos que solo usando esta rutina, las trayectorias circulares aparecerán efectivamente como círculos.)

El código de esta rutina es muy elaborado como para reproducirlo en el libro. El lector curioso puede encontrar todos los algoritmos del paquete `pymcel` en el material distribuido con la [versión electrónica del libro](http://mybook.org)<sup>a</sup>.

<sup>a</sup><http://mybook.org>

### 5.3.2. Centro de masa de un sistema de dos partículas

De particular de interés para la mecánica celeste son las propiedades del centro de masa de un sistema formado por solo dos partículas:



**Figura 5.8:** Relación entre la posición del centro de masa  $\vec{R}$ , el vector relativo  $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$  y la posición de las partículas en un sistema de dos cuerpos.

$$\vec{R}_{CM} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{M}$$

Es fácil mostrar que en este caso, el centro de masa siempre se encuentra en la línea que une a las dos partículas (ver problemas al final del capítulo.)

Si introducimos el vector relativo  $\vec{r} \equiv \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ , es posible mostrar que la posición de cada partícula se puede escribir en términos de la posición del centro de masa  $\vec{R}_{CM}$  y el vector  $\vec{r}$  como:

$$\vec{r}_1 = \vec{R}_{CM} + \frac{m_2}{M} \vec{r} \quad (5.36)$$

$$\vec{r}_2 = \vec{R}_{CM} - \frac{m_1}{M} \vec{r} \quad (5.37)$$

Como vemos la distancia del centro de masa a cada partícula es directamente proporcional a la masa de la otra partícula. Así, si llamamos  $\vec{r}'_i = \vec{r}_i - \vec{R}$  al vector que va del centro de masa a la posición de cada partícula, entonces:

$$\frac{r'_1}{r'_2} = \frac{m_2}{m_1} \quad (5.38)$$

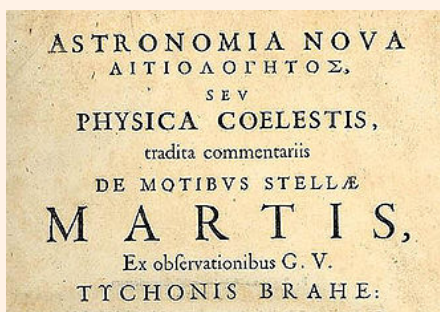
### Un poco de historia

**Kepler y el centro de masa.** Muchos años antes de que Newton hubiera formalizado las leyes de la mecánica, antes de que apareciera el concepto de masa, fuerza o el postulado de acción y reacción, todos los cuales son requeridos para la deducción formal de la relación expresada en la Ec. (5.38), Kepler había ya intuido este resultado. En su obra cumbre *Astronomía Nueva* de 1609, presentó, entre los que denomino sus 8 axiomas de una teoría

### Un poco de historia (Cont.)

verdadera de la gravedad, la siguiente afirmación:

*“Si la Tierra y la Luna no fueran mantenidas en sus respectivas órbitas por una fuerza espiritual o de alguna otra naturaleza equivalente, la Tierra ascendería hacia la Luna 1/54 de la distancia y la Luna descendería las restantes 53 partes del intervalo y así se unirían. Pero este cálculo presupone que ambos poseen la misma densidad.”<sup>a</sup>*



**Figura 5.9:** Primera página de la obra cumbre de Kepler *Astronomía Nova*.

Este hecho pone en evidencia dos cosas: (1) la clarividencia del matemático alemán, quién entre otras cosas además de la citada, intuyó algunas importantes propiedades de la gravedad y de sus efectos sobre el movimiento planetario 80 años antes que Newton y sus contemporáneos; y (2) que las ideas de la mecánica que hoy atribuimos exclusivamente a Newton estaban “flotando” en el ambiente intelectual de su época desde hacía casi 100

años. Newton, como lo sería también Maxwell un siglo y medio después en el caso de la electricidad y el magnetismo, fue en cierto sentido un compilador de la sabiduría “mecánica” de su época.

<sup>a</sup>En realidad el centro de masa del sistema Tierra-Luna está a 1/81 de la distancia entre ambos (la masa de la Tierra es 81 veces la de la Luna.) Sin embargo, la estimación de Kepler, como bien lo aclara al final de esta cita sin que terminemos de entenderle, se basaba en la suposición de que la masa de nuestro satélite se puede estimar exclusivamente a partir de su tamaño. Usando el valor contemporáneo del radio de la Luna y de la Tierra, la masa estimada de nuestro satélite, a partir de su tamaño y suponiendo densidades iguales, sería  $(R_{\text{Luna}}/R_{\text{Tierra}})^3 = (1737/6371)^3 = 1/49$  de la masa de la Tierra, que es cercano al valor de 1/54 usado por Kepler.

### 5.3.3. Teoremas de conservación

Usando la e.d.m. para un sistema de partículas (Ec. 5.10) y algunas de las deducciones que ya habíamos realizado en el caso de partículas individuales, podemos deducir algunos teoremas mecánicos de gran importancia.

#### Teorema 5.4

**Teorema de conservación del momentum lineal.** Si la fuerza externa total sobre un sistema de partículas es nula, el momentum total del sistema se mantiene constante. En términos matemáticos:

**Teorema (Cont.)**

$$\vec{F}^E = \sum_i \vec{F}_i^E = 0 \iff \vec{P} = \vec{P}_{CM}$$

Donde  $\vec{P}_{CM}$  es un vector constante.

Este teorema ocupa un lugar central en la mecánica y sus implicaciones no son para nada triviales. Piense tan solo en el hecho de que aún si un sistema contiene un enorme número de partículas, que rebotan entre sí o se dispersan unas contra otras, procesos en los cuáles el momento de las partículas se modifica de formas a veces inesperadas, la suma de todos los momentos individuales producirá siempre el mismo número.

Premultiplicamos ahora la e.d.m. en la Ec. (5.35) por el factor integrante  $\vec{r}_i \times$  y sumando sobre todas las partículas:

$$\sum_i m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \left( \vec{F}_i^E + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} \right)$$

El lado izquierdo izquierdo de esta última ecuación se puede expresar en términos de cuadraturas (ver [Sección 5.1.4](#)), de modo que la ecuación adopta la forma más conveniente de:

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_i m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i \right) = \sum_i \vec{r}_i \times \left( \vec{F}_i^E + \vec{F}_{ij} \right),$$

donde reconocemos, del lado izquierdo al momento angular total  $\vec{L} = \sum m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i$  y del derecho la torca neta:

$$\vec{\tau} = \sum_i \vec{r}_i \times \left( \vec{F}_i^E + \vec{F}_{ij} \right). \quad (5.39)$$

En términos de estas cantidades, la e.d.m. de un sistema de partículas se puede escribir, alternativamente, como:

$$\dot{\vec{L}} = \tau \quad (5.40)$$

Volvamos a la torca. Por el postulado de acción y reacción (Pos. 5.3) las torcas de las fuerzas entre las partículas se pueden agrupar por pares de la forma:

$$\vec{r}_k \times \vec{F}_{lk} + \vec{r}_l \times \vec{F}_{kl} = -\vec{r}_{lk} \times \vec{F}_{lk},$$

donde  $\vec{r}_{lk} = \vec{r}_l - \vec{r}_k$  es el vector relativo, y hemos usado índices  $l, k$  distintos a los originales  $i, j$  de la e.d.m. para evitar confusiones.

Si adicionalmente, las interacciones son tales que el postulado de acción y reacción fuerte se cumple, es decir si  $\vec{r}_{lk} \parallel \vec{F}_{lk}$ , entonces todas las torcas internas se cancelan mutuamente y como consecuencia:

$$\vec{\tau} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^E, \quad (5.41)$$

de donde, finalmente, la e.d.m. del sistema de partículas (Ec. 5.40) tiene la forma explícita:

$$\dot{\vec{L}} = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i^E$$

Esta última ecuación conduce a un segundo importante teorema de conservación:

#### Teorema 5.5

**Teorema de conservación del momentum angular.** Si la torca externa total sobre un sistema de partículas es nula, el momento angular total del sistema se mantiene constante. En términos matemáticos:

$$\vec{\tau} = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i^E = \vec{0} \iff \vec{L} = \vec{L}_0$$

Donde  $\vec{L}_0$  es un vector constante.

Es claro que la condición básica del teorema de conservación del momento angular (torque neto nulo) se cumple también en el caso en el que las fuerzas externas son nulas. Es decir, en un sistema aislado de partículas, tanto el momento lineal como el momento angular se conservan.

De nuevo, por trivial que nos parezca el teorema de conservación del momento angular, esta lejos de serlo. La cantidad implicada aquí es mucho más compleja que el momento lineal y resulta sencillamente increíble que bajo una condición tan particular como la que supone el teorema, una combinación no trivial de cantidades cinemáticas produzcan un vector constante.

Pongamos a prueba el teorema usando el sistema de partículas que habíamos introducido en la [Sección 5.3.1](#). Para ello calculemos el momento angular total del sistema:

(Algoritmo 5.8)

```
#Momento angular de cada partícula
from numpy import cross
Ls=ms[:,None]*cross(rs,vs)

#Momento angular total
L=sum(Ls)
```

Momentos angulares individuales:

```
[[ 0.   0.   1.35]
 [ 0.  -0.  -6.25]
 [ 0.  -0.  -3.72]]
```

Momento angular total:

```
[ 0.   0.  -8.62]
```

Propaguemos ahora sus posiciones y velocidades asumiendo que las partículas se mueven con velocidad constante, es decir, sin experimentan ninguna fuerza de interacción mutua, y más importante, ninguna fuerza externa. En esta condición dinámica las velocidades no se modifican:

```
#Tiempo futuro
t=10.0

#Posición y velocidad de las partículas en t
rs_t=rs+10*vs
vs_t=vs
```

Posiciones iniciales: rs =

```
[[0.33 1.93 0. ]
 [1.98 0.47 0. ]
 [0.81 0.27 0. ]]
```

Posiciones finales: vs =

```
[[ 0.4  2.99 0. ]
 [ 0.34 -0.75 0. ]
 [-0.25 -0.77 0. ]]
```

Véamos ahora cuánto valen los momentos angulares individuales y total, después de que las partículas se propagaran:

```
#Momento angular de cada partícula
from numpy import cross
Ls_t=ms[:,None]*cross(rs_t,vs_t)

#Momento angular total
L_t=Ls_t.sum(axis=0)
```

Momentos angulares después:

```
[[ 0.  0.  1.35]
 [ 0. -0. -6.25]
 [ 0.  0. -3.72]]
```

Momento angular total después:

```
[ 0.  0. -8.62]
```

El momento angular total después de la propagación resulta igual al momento angular antes de ella (Alg. 5.8) con lo que comprobamos que en la ausencia de fuerzas externas, incluso frente a modificaciones no triviales de las posiciones, el momento angular se mantiene constante.

#### 5.3.4. Dinámica referida al centro de masa

Una forma especial de las e.d.m. de un sistema de partículas, se obtiene cuando lo describimos desde un sistema de referencia “atado” del centro de masa (origen en el centro de masa y velocidad igual a él.)

Usando las transformaciones de Galileo (Pos. 5.1) la posición y velocidad de cada partícula referida al centro de masa será (Ecs. 5.5 y 5.4):

$$\begin{aligned}\vec{r}_i(t) &= \vec{R}_{\text{CM}}(t) + \vec{r}'_i(t) \\ \vec{v}_i(t) &= \vec{V}_{\text{CM}}(t) + \vec{v}'_i(t)\end{aligned}\tag{5.42}$$

Aquí, las cantidades primadas están referidas al nuevo sistema de referencia. En general  $\vec{R}_{\text{CM}}(t) = \int \vec{V}_{\text{CM}}(t) dt$  será la posición del centro de masa en  $t$ .

### Momento angular total del sistema

En el sistema de referencia del centro de masa el momentum angular es:

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i \\ &= \sum_i m_i (\vec{R}_{CM} + \vec{r}'_i) \times (\vec{V}_{CM} + \vec{v}'_i) \\ &= (\sum_i m_i) \vec{R}_{CM} \times \vec{V}_{CM} + \vec{R}_{CM} \times (\sum_i m_i \vec{v}'_i) + (\sum_i m_i \vec{r}'_i) \times \vec{V}_{CM} + \sum_i (m_i \vec{r}'_i \times \vec{v}'_i)\end{aligned}$$

En esta expresión  $\sum m_i \vec{r}'_i$  y  $\sum m_i \vec{v}'_i$  son, respectivamente, vectores proporcionales a la posición y velocidad del centro de masa (ver Ec. 5.34), pero medidos en el sistema de referencia del mismo centro de masa; por definición, ambas cantidades son entonces nulas (para una sencilla comprobación numérica, ver algoritmos abajo.)

Finalmente, el momento angular total del sistema se puede escribir como:

$$\vec{L} = \vec{R}_{CM} \times \vec{P}_{CM} + \sum_i \vec{r}'_i \times \vec{p}'_i \quad (5.43)$$

es decir, **el momento angular total de un sistema de partículas** es igual a la suma del **momento angular del centro de masa** y el **momentum angular total de las partículas en el sistema de referencia del centro de masa**.

Nuevamente podemos comprobar este resultado usando el sistema de ejemplo que introdujimos en [Sección 5.3.1](#).

Calculemos primero el momento angular del centro de masa del sistema:

```
#Momento angular del centro de masaa
from numpy import cross
L_CM=M*cross(R_CM,V_CM)
```

Momento angular del centro de masa:  
[ 0. -0. 7.96]

Para calcular el momento angular de las partículas en el sistema de referencia del centro de masa, debemos primero calcular la posición y velocidad de ellas en ese sistema usando las Ecs. (5.42):

```
#Posición y velocidad referida al centro de masa
from numpy import subtract
rps=subtract(rs,R_CM)
vps=subtract(vs,V_CM)
```

Posiciones respecto al CM:

```
[[-0.56  0.98]
 [ 1.09 -0.48]
 [-0.08 -0.68]]
```

Velocidades respecto al CM:

```
[[ 0.08  0.13]
 [-0.09 -0.09]
 [-0.03 -0.08]]
```



Con este resultado podemos verificar la afirmación que habíamos hecho en la deducción de la Ec. (5.43), en la que habíamos dicho que  $\sum m_i \vec{r}'_i$  y  $\sum m_i \vec{v}'_i$  son vectores nulos:

```
R_CM_CM=sum(ms[:,None]*rps)/M
V_CM_CM=sum(ms[:,None]*vps)/M
```

Posiciones del CM respecto al CM:

```
[1.53e-16 0.00e+00]
```

Posiciones del CM respecto al CM:

```
[-3.95e-18 5.26e-18]
```

Hecha esta verificación, podemos ahora calcular el momento angular total de las partículas en el sistema de referencia del centro de masa:

```
#Momento angular de cada partícula
from numpy import cross
Lps=ms[:,None]*cross(rps,vps)

#Momento angular total
Lp=sum(Lps)
```

Momento angular total referido al centro de masa:

```
[ 0.    0.   -16.58]
```

Ciertamente este vector no coincide con el momentum angular total referido al origen que habíamos calculado en el Alg. (5.8); pero esto es natural puesto que no hemos sumado el momento angular del centro de masa que calculamos antes:

```
#Momento angular total
L=L_CM+Lp
```

Momento angular total:

```
[ 0.    0.   -8.62]
```

Que coincide con el obtenida con el Alg. (5.8). Con esto hemos comprobado la relación expresada en la Ec. (5.43).

### Energía cinética total del sistema

Una relación similar a la encontrada en la Ec. (5.43) para el momento angular, puede deducirse también para el caso de la energía cinética total  $K$ .

Usando el teorema del trabajo y energía (Teo. 5.3) puede probarse que en el caso de un sistema de partículas  $K$  es:

$$K = \frac{1}{2} \sum m_i v_i^2$$

Reemplazando en esta expresión la velocidad de cada partícula en el sistema original por su velocidad en el sistema de referencia del centro de masa,  $\vec{v}_i = \vec{v}'_i + \vec{V}$  (Ec. 5.42) se obtiene:

$$K = \frac{1}{2} \sum m_i \vec{V}^2 + \vec{V} \cdot \frac{d}{dt} (\sum m_i \vec{r}'_i) + \frac{1}{2} \sum m_i \vec{v}'_i{}^2$$

de donde por los mismos argumentos en la deducción de la Ec. (5.43) obtenemos finalmente:

$$K = \frac{1}{2} MV^2 + \frac{1}{2} \sum m_i v_i'^2, \quad (5.44)$$

es decir la **energía cinética total del sistema** es igual a la **energía cinética del centro de masa** más la **energía cinética total referida al centro de masa** (energía interna.)

De nuevo podemos verificar este resultado usando el sistema de ejemplo.

Para ello, primero calculemos la energía cinética total usando las velocidades referidas al sistema de referencia original:

(Algoritmo 5.9)

```
#Magnitud de las velocidades de las partículas
from numpy.linalg import norm
vmags=norm(vs,axis=1)

#Energía cinética individual de cada partícula
Ks=0.5*ms*vmags**2

#Energía cinética total
K=sum(Ks)
```

Energía cinética de las partículas:

[0.37 0.79 0.73]

Energía cinética total: 1.90

Ahora podemos hacerlo usando la nueva expresión:

```
#Energía cinética del centro de masa:
K_CM=0.5*M*norm(V_CM)**2

#Magnitud de las velocidades
vpmags=norm(vps,axis=1)

#Energía cinética individual de cada partícula
Kps=0.5*ms*vpmags**2

#Energía cinética en el centro de masa
Kp=Kps.sum()

#Energía total
K=K_CM+Kp
```

Energía cinética del CM: 0.5505136059795793

Energía cinética de las partículas (respecto al CM): [0.8 0.32 0.22]

Energía cinética total (respecto al CM): 1.35

Energía cinética total: 1.90

De nuevo, la energía cinética calculada con la Ec. (5.44) coincide con la obtenida en el Alg. (5.9).

BORRADOR

# Bibliografía

- [1] T. M. APOSTOL, *CALCULUS volume I One-Variable Calculus, with an Introduction to Linear Algebra*, Blaisdell Publishing Company, John Wiley & Sons, 1967.
- [2] T. M. APOSTOL, *Calculus, Volume II: Multi-Variable Calculus and Linear Algebra, with Applications to Differential Equations and Probability*, John Wiley & Sons, 1969.
- [3] K. BATYGIN AND M. E. BROWN, *Evidence for a distant giant planet in the solar system*, The Astronomical Journal, 151 (2016), p. 22.
- [4] S. CHANDRASEKHAR, *Newton's Principia for the common reader*, Oxford University Press, 2003.
- [5] J. T. DEVREESE AND G. V. BERGHE, *'Magic is no magic': the wonderful world of Simon Stevin*, WIT Press, 2008.
- [6] H. GOLDSTEIN, C. POOLE, AND J. SAFKO, *Classical mechanics*, 2002.
- [7] A. C. HINDMARSH, *Odepack, a systematized collection of ode solvers*, Scientific computing, (1983), pp. 55–64.
- [8] I. NEWTON AND E. HALLEY, *Philosophiae naturalis principia mathematica*, vol. 62, Jussu Societatis Regiae ac typis Josephi Streater, prostant venales apud Sam ..., 1780.
- [9] W. H. PRESS, S. A. TEUKOLSKY, W. T. VETTERLING, AND B. P. FLANNERY, *Numerical recipes 3rd edition: The art of scientific computing*, Cambridge university press, 2007.
- [10] P. G. ROLL, R. KROTKOV, AND R. H. DICKE, *The equivalence of inertial and passive gravitational mass*, Annals of Physics, 26 (1964), pp. 442–517.
- [11] F. WILCZEK, *Whence the force of  $f=ma$ ? i: Culture shock*, Physics Today, 57 (2004), pp. 11–12.