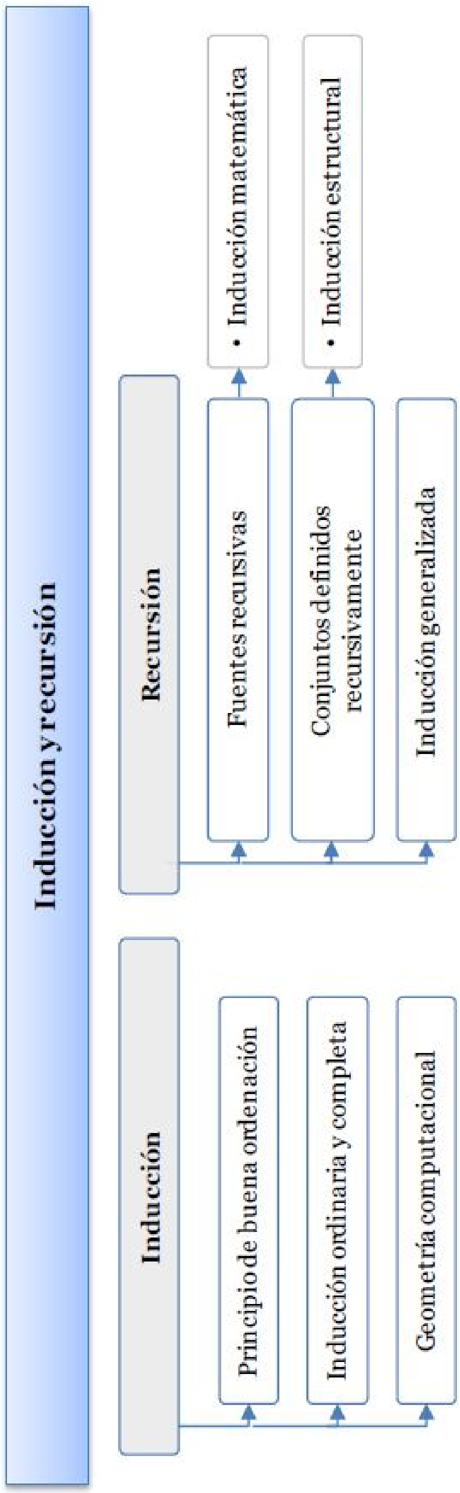
Álgebra y Matemática discreta

# Inducción y recursión

# Índice

# Esquema



Inducción y recursión
Inducción
Principio de buena ordenación
Inducción ordinaria y completa
Geometría computacional
Recursión
Fuentes recursivas
Conjuntos definidos recursivamente
Inducción generalizada
• Inducción matemática
• Inducción estructural

## 2.1 Introducción y objetivos

En el primer capítulo de la asignatura, se ha introducido elementos sobre lógica y se han presentado una serie de métodos de prueba que permitan alcanzar demostraciones de forma lógica. Como se explicó en el tema, son muchos los métodos, pero hay dos de ellos que merecen una atención especial y por ello se dedica este tema. Se trata del método de inducción y de recursión. Ambos son dos conceptos similares que se emplean para demostrar proposiciones sobre conjuntos de números naturales y con los que seguramente te has topado en tu formación matemática, e incluso tal vez antes. Muchas veces se llegan a confundir ambos conceptos, ya que ambos tienen una fuerte relación con el 5° axioma de Peano, sin embargo, son principios bien disintos, por una parte el principio de inducción es una propiedad que de los números naturales y por ello, este principio, nos permite demostrar que todos los naturales satisfacen una determinada proposición, por tanto, se trata de un método de demostración.

Por otro lado, el principio de recursión, es un resultado que permite dar una definición para todos los números naturales, basándonos en una proposición que cumple su antecesor, es por tanto una estrategia de definición que aporta lo que se conoce como definición por recursión o definición recursiva. Así, se pueden sintetizar de forma recursiva, extensos desarrollos o procesos iterativos, convirtiéndose por tanto en una herramienta fundamental en la programación de algoritmos.

Los objetivos que nos proponemos alcanzar en este tema son los siguientes:

- Ampliar el conocimiento de los métodos de prueba.

- Conocer el método matemático de inducción.
- Aplicar el método de inducción para la demostración de teoremas.
- Conocer el principio de recursión.
- Aplicar el principio de recursión para la demostración de teoremas

Para alcanzar estos objetivos, se propone la siguiente subdivisión del contenido de este tema:

- Inducción matemática.
  - Principio de buen orden.
  - Inducción ordinaria.
- Principio de recursión.
  - Fuentes recursivas.
  - Conjuntos y funciones definidas recursivamente.

## 2.2 Inducción matemática

La inducción matemática es un método de demostración que se utiliza cuando se trata de establecer la veracidad de una lista infinita de proposiciones, por ejemplo cuando se pretende demostrar que una proposición o predicado es cierto para todos los números enteros positivos. El método es bastante natural para usarse en una variedad de situaciones en la ciencia de la computación. Así, es típico encontrar demostraciones para el buen funcionamiento de una programa de computación o un algoritmo. En resumen, el método de inducción, permite demostrar proposiciones del tipo $\forall n P(n)$ *(para todo $n$ se cumple $p(n)$)*.

En base al quinto axioma de Peano, que dice que si el $0$ pertenece a un conjunto y dado un número natural cualquiera ($(n)$), el sucesor de este también pertenece al conjunto, entonces todos los números naturales pertenecen al conjunto, tenemos la siguiente proposición:

**Proposición 1**

**Principio de inducción matemática**

Sea $P(n)$ un predicado o una proposición matemática que depende de un entero $n$. Si se tiene que:

1. $p(0)$ es cierta y
2. Si $p(n)$ es cierta, también es cierta $p(n+1)$

Entonces, $p(n)$ es cierta para todos los números naturales.

De esta forma, aplicando el primer principio de inducción, la demostración de un predicado $\forall n \in \mathrm{N} P(n)$, se realiza en dos pasos:

1. **Paso base.** Se demuestra que $P(n)$ es cierto para un número natural (normalmente $p(1)$).
2. **Paso inductivo.** Se demuestra la sentencia condicional $\forall k \in \mathrm{N} P(k) \Rightarrow P(k+1)$, es decir, se asume que $P(k)$ es cierta y se concluye que entonces $P(k+1)$ es cierta para todo entero positivo $k$.

Nótese, que en ningún momento se realiza ni exige la demostración de que $p(k)$ sea verdadera, si no que en el supuesto de que lo sea, entonces podemos decir que $p(k+1)$, es verdadera. Veamos un ejemplo en el que se aplica el principio de inducción para demostrar un predicado:

**Ejemplo 1.**

*Definición: Un número entero $n$ es par, si existe un entero $k$ tal que $n = 2k$ y es impar si existe un entero $k$ tal que $n = 2k + 1$.*

Dada la definición de número par y número impar, demostrar de forma directa que « Si $n$ es un entero impar, entonces $n^2$ es un número entero impar».

***Solución***: Suponemos cierta la hipótesis de que la implicación es verdadera, es decir, que $n$ es un número impar. Entonces , $n = 2k + 1$, siendo $k$ un número entero. Calculamos por tanto $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$. Como se puede ver, el resultado es el doble del entero mas una unidad, por tanto es también un número impar.

Antes de continuar con mas ejemplos del procedimiento inductivo para la demostración de algún teorema, conviene distinguir entre dos posibles métodos de inducción, el método de **inducción fuerte** y el método de **inducción ordinaria**.

La inducción ordinaria consiste en asumir en la hipótesis inductiva que $p(n)$ es cierto, tal como se ha realizado en el ejemplo anterior. Sin embargo, cuando no resulta fácil alcanzar la demostración bajo esta suposición, se puede aplicar la inducción fuerte en la que se asume que $\forall 1 \leq j \leq s, p(j)$, basado en el principio de inducción fuerte o segundo principio de inducción matemática.

**Proposición 2**

**Principio de inducción matemática fuerte**

Sea $P(n)$ un predicado o una proposición matemática que depende de un entero $n$. Si se tiene que:

1. $p(0)$ para algunos $n_0, n_1, ... \in \mathbb{N}$, con $n_0 \leq n_1$ y
2. Si $p(n)$ es cierta, también es cierta $p(n+1)$

Entonces, $p(n)$ es cierta para todos los números naturales.

Veamos el principio de inducción fuerte, aplicado para demostrar que la factorización en números primos existe:

**Ejemplo 2.**

Demostrar que cualquier entero mayor que uno se puede escribir como un producto de números primos.

***Solución***:

1. *Caso base:* $n = 2$ es primo y por tanto es trivialmente un producto de primos.

   Hacemos la hipótesis de inducción: Sean $n \leq 2$. Para un $m$ con $2 \leq m \leq n$, $m$ se puede escribir como un producto de primos.

2. *Paso de inducción*: consideramos $n+1$ con n$\leq 2$. se tiene que $n+1$ es primo o $n+1$ es compuesto. Si es compuesto, existen r,s con $2 \leq r, s \leq n$ tal que $n+1 = rs$. Por hipótesis de inducción, sabemos que $r$ y $s$ se pueden escribir como producto de primos: $r = p_1 p_2 ... p_k$ y $s = q_1 q_2 ... q_l$ para algunos enteros $k, l$, donde $p_1$ y $q_i$ son primos. Entonces:

$$\begin{aligned} n+1 &= rs \\ &= (p_1 p_2 ... p_k) \cdot (q_1 q_2 ... q_l) \\ &= p_1 p_2 ... p_k q_1 q_2 ... q_l \end{aligned}$$

   Así que podemos concluir que $n+1$ se puede escribir como un producto de números primos.

Hemos de decir que ambos métodos de demostración son equivalentes, esto es, con ambos se pueden realizar exactamente las mismas demostraciones, nótese que para resolver un problema de inducción fuerte por inducción ordinaria bastaría con tener como sentencias condicionales $p_1, p_2, ..., p_n$.

En el siguiente ejemplo, tomado de Rosen, K. H., & Morales, J. M. P. (2004) (Matemática discreta y sus aplicaciones), veremos la demostración del mismo ejercicio utilizando el método de inducción ordinaria e inducción fuerte.

**Ejemplo 3.**

Demostrar que cualquier franqueo postal de $12$ o mas céntimos se puede completar empleando solamente sellos de 4 y 5 céntimos.

En primer lugar aplicamos el principio de inducción matemática (método de inducción ordinaria) y posteriormente se aplicará el método de inducción fuerte.

***Solución:***

Comenzamos con el **principio de inducción**.

1. **Paso base:** Se consigue realizar un franqueo de $12$ céntimos empleando tres sellos de $4$ céntimos.
2. **Paso de inducción:** Supongamos que $P(k)$ es verdadera, por lo que podemos completar un franqueo de $k$ céntimos usando sellos de $4$ y $5$ céntimos. Si utilizamos al menos un sello de $4$ céntimos, podemos reemplazar este por uno de $5$ para obtener un franqueo de $k+1$ céntimos. Si no se ha utilizado ningún sello de $4$ céntimos, el franqueo de $k$ céntimos se formó usando sellos de $5$ céntimos. Como $k \geq 12$, se emplearon al menos tres sellos de $5$ céntimos. Por tanto, si se reemplazan tres sellos de $5$ céntimos por cuatro sellos de $4$ céntimos, formamos un franqueo de $k+1$ céntimos. De esta forma se completa el paso de inducción y queda demostrada la proposición.

Pasamos ahora a emplear el **segundo principio de inducción matemática** y así demostrar utilizando el método de inducción fuerte el mismo predicado.

Para ello, demostraremos que se pueden formar franqueos de $12$, $13$, $14$ y $15$ céntimos y luego que se pueden obtener franqueos de $k+a$ céntimos, con $k \geq 15$ a partir de franqueos de $k-3$ céntimos.

1. **Paso base:** Podemos formara franqueos de $12$, $13$, $14$ y $15$ céntimos utilizando tres sellos de $4$, dos sellos de $4$ y uno de $5$, uno de $4$ y dos de $5$ y tres de $5$ céntimos respectivamente.
2. **Paso de inducción:** Sea $k \geq 15$. Suponemos que podemos formar franqueos de $j$ céntimo, para $12 \leq j \leq k$. Para formar un franqueo de $k+1$ céntimos, usamos el franqueo de $k-3$ céntimos y añadimos un sello de $4$ céntimos. Con esto se completa el paso de inducción y queda demostrado el predicado mediante el método de inducción fuerte.

La validez de los métodos o principios de inducción, esta basada en una propiedad fundamental del conjunto de los números enteros, que es el principio de buen orden y que en cierta medida podemos decir que es equivalente a dicho principio. El principio del buen orden, no dice que si $A$ es un conjunto no vacío de números naturales existe un elemento mínimo en $A$

**Principio del buen orden:**

$$\exists m \in A, / \forall n \in A, m < n$$

La razón de que la inducción matemática sea una técnica válida para realizar demostraciones, se basa precisamente en el principio de buen orden que se cumple en el conjunto de los números enteros. Si conocemos que un predicado $P(1)$ es verdadero, y que la proposición $P(k) \longrightarrow P(k+1)$ también lo es, para demostrar que $P(n)$ es verdadera, busquemos un entero positivo $n$ para el cual la proposición sea falsa.

Entonces, el conjunto de los enteros positivos para los que $P(n)$ es falsa, será un conjunto no vacío. En este caso, y en virtud de la propiedad del buen orden, el conjunto de los elementos par alos que $p(n)$ es falsa, tiene un elemento mínimo que llamaremos $m$. Sanemos que $m$ no puede ser 1, ya que hemos dicho que $p(1)$ es verdadero. Como $m$ es un número positivo, y mayor que 1, $m-1$ debe ser un entero positivo y como $m-1$ es un número menor que $m$, no puede estar dentro del conjunto de los elemntos que no cumplen $p(n)$, ya que hemos dicho que $m$ es el elemento mínimo de dicho conjunto, por tanto, $p(m-1$ tiene que ser verdadera) y como $p(m-1) \longrightarrow P8m)$ tiene que ser verdadera, hemos encontrado una contradicción con respecto a $m$, esto es, $P(m)$ no puede ser verdadera y falsa a la vez. Por tanto, se demuestra que $P(n)$ es verdadera para to $n$ entero positivo.

Para finalizar esta sección haremos una referencia a la **geometría computacional**, entendida como la parte de la matemática discreta que estudia problemas computacionales referidos a objetos geométricos. Se trata, de forma resumida, de la conjunción de la Geometría Clásica con la Informática. Se encarga por tanto del desarrollo de herramientas y técnicas matemáticas que buscn dar respuesta a problemas de naturaleza geométrica. Por ejemplo, la geometría computacional, nos ayudaría a resolver el problema de encontrar la mejor ubicación posible para los repetidores wifi en un edificio de tal forma que todo el edificio tenga cobertura, suministrada por al menos un repetidor, instalando el menor número de aparatos.

Así, podemos usar la inducción, en lo que consideramos geometría computacional, para demostrar un teorema muy importante para la representación de gráficos en el ordenador, que es el teorema que demuestra que todo polígono con $n \geq 3$ lados puede ser triangulado, es decir dividido, en $n$−$2$ triángulos.

**Teorema 1**

Todo polígono de $n \geq 3$ lados, puede ser triangulado en $n$−$2$ triángulos.

Vamos a demostrar este teorema mediante el método de inducción.

**Demostración:**

1. **Paso base:** Consideramos $n = 3$. Este polígono es un triángulo, luego puede ser dividido en $3–2 = 1$ triangulo de forma trivial.

2. **Paso de inducción:** Supongamos el caso $n$, es decir, que cualquier polígono de $n$ lados puede ser triangulado en $n–2$ triángulos. Vamos a probar el caso $n + 1$.

   Supongamos que tenemos un polígono con $n + 1$ lados. Este polígono define una región interior y otra exterior. Buscamos dos lados consecutivos que formen un ángulo interior menor que $180°$ (tienen que existir para que el polígono cierre). Trazamos una línea entre los extremos de estos lados dividiendo el polígono en dos. Por un lado, tenemos un triángulo formado por los dos lados cuyo ángulo forma menos de $180°$ y la línea trazada y, por otro, tenemos un polígono de $n$ lados, formado por los restantes $n–1$ lados restantes (los $n + 1$ lados del polígono original, menos los dos lados que hemos utilizado para formar el triángulo) más la línea trazada para dividir el polígono.

   Este nuevo polígono puede triangularse con $n–2$ triángulos según la hipótesis de inducción. En consecuencia, el polígono original puede dividirse en $n–2 + 1$, es decir, en $n–1$ triángulos que podemos escribir como $(n + 1) - 2$, demostrando así el caso de $n + 1$ lados y por tanto el teorema que se quería demostrar.

## 2.3 Recursión

En ciertas ocasiones puede resultar difícil definir ciertos objetos o funciones, pero resulta mas sencillo hacer una definición en función de ellos mismos, es decir partiendo de un elemento conocido, definir el resto. Este modo de hacer definiciones es lo que se conoce como el proceso de **recursión**. De esta forma, las **funciones recursivas** son aquellas que se definen en función de sí mismas. De la misma forma se pueden definir conjuntos o sucesiones de forma recursiva. Así, podemos definir una sucesión, o un conjunto, dando la definición del primer término y una regla para encontrar el resto de elementos.

Al definir una función de forma recursiva, llamando a términos anteriores para encontrar el siguiente, podemos utilizar la inducción para demostrar resultados relacionados con la sucesión. Fíjese en la similitud entre el concepto de inducción y recursión, en la que especificamos un paso base para definir los elementos iniciales, para construir en el paso recursivo, el resto de elementos a partir de los que ya tenemos.

Atendiendo al concepto de recursión, veamos en algún ejemplo la forma en que se define una función de forma recursiva en el dominio de los números enteros no negativos, para lo que debemos seguir los siguientes pasos:

1. Paso base: En este paso se especifica el valor de la función en el cero o en el valor inicial.
2. Paso recursivo: Se proporciona una regla que permite obtener el valor de un elemento que pertenece a la imagen de la función, partiendo de un valor obtenido en el paso anterior.

**Ejemplo 4.**

Supongamos que tenemos una función definida recursivamente como:

$$f(0) = 3$$
$$f(n+1) = 3f(n) - 1$$

Y nos piden obtener el valor de $f(1), f(2)$ y $f(3)$.

**Solución:** Partiendo de la definición recursiva, obtenemos cada uno de los valores:

- $f(1) = 3f(0) - 1 = 3 \cdot 3 - 1 = 8$
- $f(2) = 3f(1) - 1 = 3 \cdot 8 - 1 = 23$
- $f(3) = 3f(2) - 1 = 3 \cdot 23 - 1 = 68$

Téngase en cuenta que una función recursiva puede entrar en un loop infinito si nunca llega al paso base. Es importante vigilar esta eventualidad cuando se diseña una función recursiva.

Ahora vemos en el siguiente ejemplo como dar la definición de una función de forma recursiva.

**Ejemplo 5.**

Dar una definición recursiva de la función $F(n) = n!$ es decir, la función factorial de un número.

**Solución**: Podemos definir la función factorial dando el valor inicial y una regla para obtener el resto de elementos que permitan obtener $F(n+1)$ a partir del valor de $F(n)$. Fijándose en la definición de la función, que nos dice que $F(n) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$, se puede ver que se obtiene el valor de $F(n+1)$ cuando se realiza la operación $(n+1)F(n)$

Como consecuencia del primer principio de inducción matemática, las funciones definidas de forma recursiva, son funciones bien definidas.

Veamos en el ejemplo de la función de Fibonacci como en ocasiones, la definición de una función de forma recursiva, puede expresarse mediante mas de un valor inicial.

**Definición 1: Sucesión de Fibonacci**

Los números de Fibonacci se definen de forma recursiva como:

$$\mathrm{f}_0 = 0, f_1 = 1$$

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

Para $n = 2, 3, 4, \ldots$

**Ejemplo 6.**

Obtener los números de Fibonacci $f(2), f(3), f(4), f(5) y f(6)$.

**Solución:** De la primera parte de la definición, son conocidoa los valores de $f_0 = 0$ y $f_1 = 1$. Aplicando la regal recursiva, se obtienen los siguientes elementos de la función:

- $f_(2) = f_0 + f_1 = 0 + 1 = 1$
- $f_(3) = f_1 + f_2 = 1 + 1 = 2$
- $f_(4) = f_2 + f_3 = 1 + 2 = 3$
- $f_(5) = f_3 + f_4 = 2 + 3 = 5$
- $f_(6) = f_4 + f_3 = 3 + 5 = 8$

Vemos entonces, que el proceso para construir funciones (o sucesiones) recursivamente puede verse como:

1. **Paso base:** Especifica el valor de terminación de la llamada recursiva, cuando se alcanza un valor entero pequeño.
2. **Paso recursivo:** Da una regla para encontrar el valor de la función para un entero, como el resultado de operar el valor con enteros menores.

En el siguiente vídeo se puede ver una explicación detallada de las funciones recursivas junto con algunos ejemplos.

Accede al vídeo: Funciones recursivas

Además de las funciones, los conjuntos también se pueden definir recursivamente dando lugar a los llamados conjuntos definidos recursivamente, que son conjuntos para los cuales un algoritmo puede decidir en un número finito de iteraciones si un elemento pertenece o no al conjunto. Veamos algunos ejemplos de definición recursiva para funciones, conjuntos o estructuras:

**Ejemplo 7.**

- La sucesión formada por los números naturales múltiplos de 2:

$$(a_1, a_2, ..., a_n, ... = (2, 4, ..., 2n, ...)$$

  Puede expresarse de forma recursiva como:

$$a_1 = 2$$
$$a_n = 2a_{n-1}, \text{ para } n > 1$$

- Una función que actúa sobre el conjunto $\mathbb{N}$ puede definirse, por ejemplo, mediante la fórmula de recursión:

$$f_1 = 0, f_{n+1} = 2f_n + 3; n > 1$$

En el último tema se estudian los árboles con detalle, sin embargo, merece la pena introducir este tema ahora, para mostrar como estos se pueden definir de forma recursiva. Comenzamos dando la definición de árbol:

**Definición 2**

Un **árbol con raíz** consiste en un conjunto de vértices, de entre los cuales, existe un vértice distinguido, al que llamaremos raíz, y un conjunto de aristas que conectan cada uno de estos vértices entre si.

Y ahora veamos como se puede definir el conjunto de los árboles con raiz, se puede definir de forma recursiva mediante los siguientes pasos:

- **Paso base:** Un vértice individual $r$, es un árbol con raíz.
- **Paso recursivo:** Supongamos que $T_1, T_2, ..., T_n$, son árboles con raíz, cuyas raíces son respectivamente $r_1, r_2, ..., R_n$. Entonces, el grafo que se forma comenzando por una raíz $r$, que no está en ninguno de los árboles $T_1, T_2, ..., T_n$, y añadiendo una arista desde $r$ a cada uno de los vértices $r_1, r_2, ..., r_n$ es también un árbol.

Para probar que el método de recursión es válido para crear objetos, también se emplea el método de inducción, aunque en la práctica, para probar resultados sobre conjuntos como listas, árboles, o grafos, es habitual realizar demostraciones por recursión siguiendo la forma conocida como **inducción estructural**. Una demostración por inducción estructural consta de dos partes, que son:

- **Paso base**: mostrar que el resultado es válido para todos los elementos especificados en el paso base del proceso recursivo.
- **Paso inductivo:** probar que, si el resultado es válido para cada elemento utilizado para crear nuevos elementos en el paso recursivo de creación del conjunto, entonces, el resultado es válido para dichos nuevos elementos.

La validez de la inducción estructural se puede demostrar siguiendo el principio de inducción matemática para enteros no negativo. En el siguiente ejemplo se puede ver la aplicación del método de inducción estrucural para demostrar predicados sobre las fórmulas lógicas bien definidas:

En primer lugar, definimos las *fórmulas bien construidas* en lógica de proposiciones, como el conjunto de fórmulas bien construidas con variables proposicionales, operadores lógicos del conjunto $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$ y los valores **V** y **F**.

**Ejemplo 8.**

Demuestra que en toda fórmula bien construida, se abren el mismo número de paréntesis que se cierran. **Demostración:**

- Paso base: Las fórmulas **V**, **F** y $p$, no contienen paréntesis, por lo que claramente se abren y se cierran el mismo número de paréntesis.

- Suponemos que $p$ y $q$ son fórmulas bien construidas, por tanto, ambas tienen el mismo número de paréntesis de apertura y de cierre, es decir, si se abren $a_p$ y $a_q$ paréntesis en $p$ y$q$ respectivamente, se cierran $c_p$ y $c_q$ paréntesis y además, $a_p = c_p$ y $a_q = c_q$. Además, se en la s fórmulas ($\neg p$) se abren $a_p + 1$ y se cierran $c_p + 1$ paréntesis. En las fórmulas ($q \vee p$), ($q \wedge p$), ($q \to p$) y ($q \leftrightarrow p$) se abren $a_p + a_q + 1$ y se cierran $c_p + c_q + 1$ paréntesis y como sabemos que $a_p = c_p$ y $a_q = c_q$, se puede concluir que en estas cuatro expresiones, se abren los mismos paréntesis que se cierran. De esta forma, se demuestra por inducción estructural la premisa del enunciado, ya que se ha realizado la demostración para cada uno de los elementos con los que se cuenta para crear nuevos elementos en los pasos recursivos.

Por último, decir, que se puede extender el concepto de inducción matemática que hemos definido para el conjunto de los número enteros en lo que se conoce como **inducción generalizada**, para aquellos conjuntos en los que se cumpla la propiedad del buen orden, ya que como se ha definido, es en base a esta en la que se apoya el principio de inducción.

## 2.4 Referencias bibliográficas

Rosen, K. H., & Morales, J. M. P. (2004). Matemática discreta y sus aplicaciones.

Koshy, T. (2004). Discrete mathematics with applications. Elsevier.

Grimaldi, R. P. (2006). Discrete and Combinatorial Mathematics, 5/e. Pearson Education India.

O´Donnel, J. & Hall, C. (2006). Discrete Mathematics Using a Computer. Londres: Springer.

## 2.5 Cuaderno de ejercicios

**Ejercicio 1.**

Demostrar mediante prueba directa que todo número impar puede escribirse como la diferencia de dos cuadrados.

**Ejercicio 2.**

Encontrar un contraejemplo a la proposición «todo entero positivo puede ser escrito como la suma de los cuadrados de tres números enteros».

**Ejercicio 3.**

Conjeture la fórmula para la suma de los primeros $n$ naturales impares y pruébese mediante inducción.

**Ejercicio 4.**

Demuestre por inducción la siguiente fórmula para cualquier valor natural $n$, y cualquier valor real $r \neq 1$.

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \sum_{k=1}^{n} r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

**Ejercicio 5.**

Demuestre por inducción que $n(n^2 + 5)$ es divisible por 6 para cualquier valor natural $n$.

**Ejercicio 6.**

Considere la siguiente función recursiva:

$$F(n) = \begin{cases} 1 \ si \ n = 1 \text{ (paso base)} \\ n + F(n-1) \ si \ n > 1 \text{(paso recursivo)} \end{cases}$$

Obtener F(5) y F(100).

**Ejercicio 7.**

Escriba una forma recursiva para calcular $2^n$

**Ejercicio 8.**

Describa el conjunto de números naturales definidos mediante la siguiente regla recursiva:

- Paso base: El conjunto empieza con los elementos $1$ y $6$.
- Paso recursivo: Si dos elementos $a$ y $b$ pertenecen al conjunto, entonces la parte entera superior de $\frac{a+b}{2}$ también.

## 2.6 Solución cuaderno de ejercicios

**Solución 1.**

Basta considerar $x = 2k + 1$ y ver que $x = 2k1 + k^2 - k^2 = (k + 1)^2 - k^2$.

**Solución 2.**

Consideremos el número $n = 7$. Si intentamos expresar $7$ como la suma de los cuadrados de tres números enteros, tendríamos que encontrar números enteros $a$, $b$ y $c$ tales que $a^2 + b^2 + c^2 = 7$. Sin embargo, no es posible encontrar tales números enteros que satisfagan esta ecuación.

**Solución 3.**

La fórmula buscada es $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n–1) = n^2$

**Solución 4.**

- Paso base: Para $n = 1$ se tiene: $1 + r = \frac{1-r^2}{1-r} = \frac{(1-r)(1+r)}{(1-r)}$
- Paso inductivo: Suponemos que $1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$, entonces vamos a comprobar si se cumple para $n + 1$: $1 + r + r^2 + \cdots + r^n + r^{n+1} = \frac{1-r^{n+1}}{1-r} + r^{n+1} = \frac{1-r^{n+1}+r^{n+1}-r^{n+2}}{1-r} = \frac{1-r^{n+2}}{1-r}$. Por tanto, como se cumple para $n + 1$, por el principio de inducción, la formula queda demostrada.

**Solución 5.**

- Paso base: Para $n = 1$ se tiene: $1(1 + 5) = 6$, que trivialmente es divisible por $6$.
- Paso inductivo: Suponemos que $n(n^2 + 5)$ es divisible por 6 y probamos si se cumple para $n+1$, entonces: $(n+1)((n+1^2)+5) = (n+1)(n^2+2n+6) = n(n^2 + 5) + 3n(n + 1) + 6$. Y vemos que el primer sumando es divisible por $6$ por la hipótesis de inducción. El tercer término de la suma es trivialmente divisible por 6 y en el segundo sumando encontramos un término con factor 3 y $n(n + 1)$ que es divisible por 2. Así, como la suma de términos divisibles

por un número, siguen siendo divisibles, tenemos que $(n+1)((n+1^2)+5)$ es divisible por 6, cumpliéndose la demostración solicitada.

**Solución 6**.

$F(5) = 5 + F(4) = 5 + 4 + F(3) = 5 + 4 + 3 + F(2) = 5 + 4 + 3 + 2 + F(1) = 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15.$

Se puede demostrar por inducción que $F(n) = 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$ (se propone al lecctor realizar dicha demostración).

Por tanto, $F(100) = \frac{(100(101))}{2} = 5050.$

**Solución 7**.

$$F(n) = \begin{cases} 2 & si\ n = 1 \text{ (paso base)} \\ 2 \cdot F(n-1) & si\ n > 1 \text{ (paso recursivo)} \end{cases}$$

**Solución 8**.

Empezamos con el conjunto $U_0 = 1, 6$. Aplicando los 4 primeros pasos obtenemos consecutivamente:

1. $U_1 = 1, 4, 6.$
2. $U_2 = 1, 3, 4, 5, 6.$
3. $U_3 = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$
4. $U_3 = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$

## 2.7 A fondo

# A fondo

**Números naturales y recursividad.**

En este documento los profesores Rafael Issac y Sonia Sabogal explican los principios de la inducción ordinaria y fuerte y cómo se hacen definiciones recursivas.

Accede al documento desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:

https://docplayer.es/37046970-Numeros-naturales-y-recursividad.htm

**Discrete Mathematics DeMYSTiFieD**

Gallier, J. (2011). *Discrete mathematics*. Springer Science & Business Media.

Si estás interesado en aprender los fundamentos de la matemática discreta, esta fácil guía repasa los conceptos esenciales.

Escrito por el galardonado profesor Steven Krantz, Discrete Mathematics Demystified explica un tema difícil de una manera eficaz y esclarecedora. El libro trata acerca de la lógica, las pruebas, funciones, matrices, secuencias, series y mucho más. Explicaciones concisas, ejemplos del mundo real y el trabajo, hace que sea fácil de entender el material. Los ejercicios de fin de capítulo y un examen final ayudan a reforzar el aprendizaje.

## 2.8 Test

# Test

**1.** El principio de la buena ordenación:

A. Es una forma de resolver problemas matemáticos.

B. Permite hacer prueba directa.

C. Permite hacer prueba indirecta.

D. Sirve para demostrar que la inducción es válida.

**2.** La hipótesis inductiva es:

A. Lo que asumimos cierto para hacer inducción.

B. Lo que vamos a demostrar por inducción.

C. El antecedente del paso inductivo.

D. El consecuente del paso inductivo.

**3.** ¿Qué significa cuando deducimos que n=n+1 en una prueba de inducción?

A. Que hay un error de deducción en algún paso.

B. Que el paso inductivo ha sido usado erróneamente.

C. Que la proposición que intentamos deducir inductivamente es errónea.

D. Las tres anteriores son posibles.

**4.** ¿Cuáles de los siguientes métodos son equivalentes?

A. Solo el principio de buena ordenación y principio de inducción ordinaria.

B. Ninguno.

C. Solo el principio de inducción ordinaria y el de inducción fuerte.

D. Los principios de buena ordenación, de inducción ordinaria y de inducción fuerte son equivalentes.

**5.** ¿Entre la inducción ordinaria y fuerte, cuál resuelve más problemas?

A. No se sabe cuál resuelve más problemas.

B. La inducción ordinaria puede resolver más problemas.

C. La inducción fuerte puede resolver más problemas.

D. Ambos resuelven el mismo número de problemas.

**6.** La triangulación en geometría computacional permite:

A. Localizar la posición de un objeto.

B. Dividir un polígono de n lados en n-2 triángulos.

C. Dividir un polígono de n-2 lados en n triángulos.

D. Determinar los n-2 puntos singulares de una figura.

**7.** Las funciones recursivas en matemáticas nos permiten:

A. Demostrar teoremas inductivamente.

B. Demostrar teoremas recursivamente.

C. Demostrar teoremas por contraposición.

D. Definir el paso inductivo de una hipótesis inductiva. (Las funciones recursivas permiten obtener las hipótesis)

**8.** Se puede definir de forma recursiva:

A. Solo las funciones.

B. Las funciones y los conjuntos.

C. Solo los conjuntos.

D. Ninguna de las tres respuestas anteriores son correctas.

**9.** La inducción estructurada se utiliza para demostrar:

A. Proposiciones sobre conjuntos definidos recursivamente.

B. Proposiciones sobre listas.

C. Proposiciones sobre polígonos.

D. Proposiciones sobre números.

**10.** ¿Cuál de las siguientes afirmaciones respecto a una función recursiva es cierta?:

A. No se utilizan en programación.

B. Siempre termina, dando suficiente tiempo de computación.

C. Tiene infinitos pasos, ya que están definidas para todos los números naturales

D. Puede tener un solo paso.