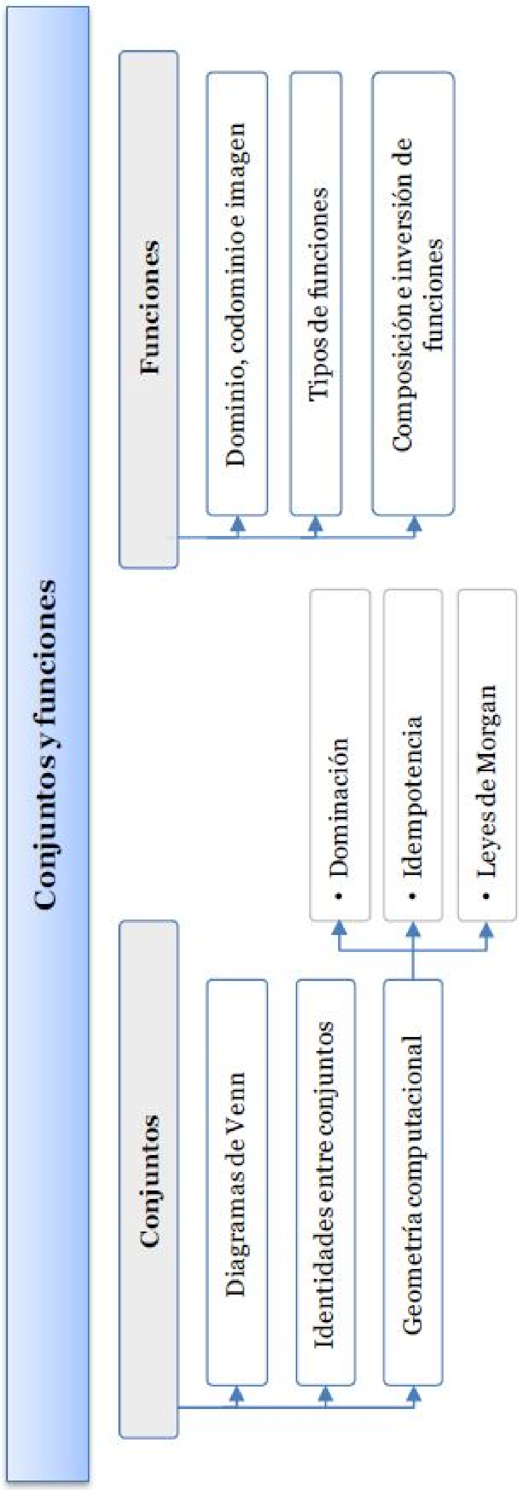
Álgebra y Matemática discreta

Conjuntos y funciones

Índice

Esquema


Conjuntos y funciones
Conjuntos
Diagramas de Venn
Identidades entre conjuntos
Geometría computacional
Dominación
Idempotencia
Leyes de Morgan
Funciones
Dominio, codominio e imagen
Tipos de funciones
Composición e inversión de funciones

7.1 Introducción y objetivos

Uno de los conceptos mas importantes en matemáticas, es el de conjunto. En base a la teoría de conjuntos, se podrían demostrar todos los resultados o teoremas matemáticos, ya que el conjunto, es la estructura discreta fundamental y a partir de esta, se pueden definir todas las demás estructuras discretas.

La primera definición formal de un conjunto, viene de la mano de George Cantor en 1895, como una colección de objetos basada en la noción intuitiva de lo que es un objeto. Esta definición, que fue en un principio aceptada por la comunidad científica, pronto dio lugar a aparición de las conocidas paradojas o inconsistencias lógicas, como la famosa paradoja del barbero, que para resolver, obligan a dar una definición axiomática para la definición de conjunto. En este tema, se estudiará la teoría de conjuntos en base a la definición de Cantor, sin entrar en ninguna de las definiciones axiomáticas que podemos encontrar para la definición de conjunto. Esto lo haremos, teniendo en cuenta que los conjuntos con los que trataremos a lo largo de esta asignatura, se pueden tratar de forma consistente a través de la definición original de Cantor. Por tanto, a lo largo de este tema en el que nos encontraremos con numerosa definiciones, se analizarán los distintos conjuntos que podemos encontrar así como las operaciones o el álgebra de estos.

En la segunda parte del tema,se abordará la definición de función, junto con los distintos tipos de funciones que podemos encontrar, atendiendo a como es el dominio o la imagen de estos.

Por tanto, se persiguen en este tema los siguientes objetivos:

- Manejar con soltura los conceptos de complementario, unión, intersección, diferencia y producto cartesiano de conjuntos.
- Definir funciones entre conjuntos e identificar si se trata de funciones inyectivas, suprayectivas o biyectivas.
- Aplicar el método de inducción para la demostración de teoremas.
- Calcular el cardinal de un conjunto dado y deducir si se trata de un conjunto numerable o no numerable.

Para alcanzar estos objetivos, se propone la siguiente subdivisión del contenido de este tema:

- Conjuntos.
  - Diagramas de Venn.
  - Identidades entre conjuntos.
  - Geometría computacional.
- Funciones.
  - Dominio, codominio, imagen...
  - Tipos de funciones.
  - Composición e inversión de funciones.

7.2 Conjuntos

Tal como se comentó en la introducción, existen distintas teorías de conjuntos, pero en nuestro caso, vamos a seguir la teoría de Cantor y para ello, comenzamos con la definición de conjunto:

Definición 1

Un **conjunto** es una colección desordenada de objetos.

Con esta primera definición de conjunto, debería quedar claro que es un conjunto. Además, se dice que *un conjunto contiene* a los objetos que lo forman, también llamados **elementos**.

Tal como se analizó en el Tema 2, una forma de describir un conjunto, es hacerlo de forma recursiva, pero esta no es la única; un conjunto se puede definir mediante:

- **Una enumeración**; cuando se explicitan todos los elementos que forman el conjunto. Esta forma de definir un conjunto es útil para conjuntos finitos de pequeños tamaño, por ejemplo, el conjunto Ã= 1, 2, 3, 4, formado por los 4 elementos.
- **Un intervalo**; Utilizando la relación de continuidad, por ejemplo $A = [1, 100]$ o utilizando una elipsis, ($A = [0, 1, ..., 100]$), evitando escribir todos los elementos que contiene el conjunto. (Téngase en cuenta que los símbolos $($ y $)$ se utiliza para limitar un intervalo en el que el primer o el último elemento de este, no pertenece al intervalo. Para intervalos en los cuales los límites si pertenecen al intervalo, se utiliza el símbolo $[$ ó $]$).
- **Una construcción**; Indicando en este caso, una propiedad que cumplen todos los elementos del conjunto, por ejemplo $A = x \in \mathbb{N} : x\, es\, par$

Existen por tanto infinidad de conjuntos, en los que la pertenencia de sus elementos al conjunto pueden guardar una relación entre ellos, como por ejemplo el conjunto de las letras del abecedario, o no tener ninguna relación mas que la propia pertenencia al conjunto (ej.- $A = 4, amarillo, Roberto$).

Son conjuntos notables, el **conjunto vacío**, frecuentemente representado por Φ, que es el conjunto que no tiene elementos y el conjunto unidad, que es un conjunto que contiene un único elemento.

Pero de entre todos los conjuntos, merece mención especial, aquellos que tienen importancia en el estudio de la matemática discreta, como pueden ser:

- $\mathbb{N} = 0, 1, 2, 3, ...,$. El conjunto de los números naturales.
- $\mathbb{Z} = ..., -2, -1, 0, 1, 2, ...$ El conjunto de los enteros.
- $\mathbb{Z}^+ = 1, 2, ...$ El conjunto de los enteros positivos.
- $\mathbb{Q} = p/q \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$. El conjunto de los racionales.
- $\mathbb{R}$. El conjunto de los números reales

**Nota: algunos autores, no consideran el 0 como un número natural.*

Para conocer un conjunto, es necesario conocer su tamaño, por ello surgen las siguientes definiciones:

Definición 2

Sea S un conjunto. Si en el hay exactamente n elementos distintos, siendo n un número entero no negativo, entonces se dice que S es un conjunto *finito* y n es su cardinal y se denota $\mid S \mid$.

Ejemplo 1.

Sea A el conjunto formado por los números impares menores que 15. Entonces el cardinal de A es $\mid A \mid= 7$.Teniendo en cuenta que el cero es un número par.

Definición 3

Se dice que un conjunto es *infinito*, si no es *finito*.

Diagrama de Venn

Como se ha visto, podemos describir un conjunto de muchas formas, incluso podemos realizar una representación gráfica de los conjuntos. Este tipo de representación, se conoce como los diagramas de Venn y resulta de gran utilidad para representar las relaciones entre conjuntos.

Un diagrama de Venn es una representación de conjuntos en la que el conjunto universal U se representa mediante un rectángulo que ocupa todo el papel y que en ocasiones se omite su representación. Cada región en la que dividimos el papel, mediante una figura geométrica (normalmente círculos, elipses o rectángulos), representa un conjunto y los elementos que pertenecen al conjunto se pueden o no representar mediante figuras geométricas (puntos, cuadrados, triángulos...), dentro del conjunto.

En la siguiente figura se puede ver un diagrama de Venn en el que se representa el conjunto A, cuyos elementos se representan con puntos. En la figura de la izquierda se representa el conjunto universal U, mientras que en la derecha, se omite la representación de este, siendo ambos gráficos equivalentes.

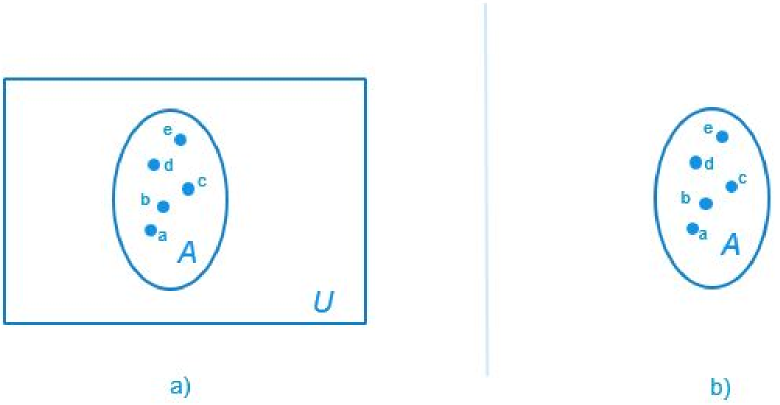


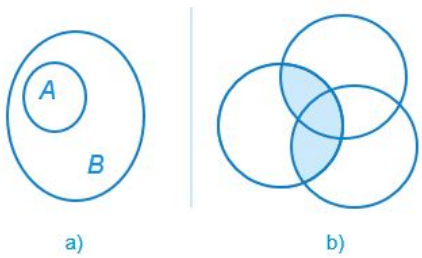
Diagrama de Venn. a) Conjunto universal y conjunto A. b) Conjunto A

También se puede ver, como normalmente, se utilizan las letras mayúsculas para nombrar conjuntos, mientras que las letras minúsculas se reservan para denotar a los elementos que forman dichos conjuntos.

Definición 4

El conjunto A se dice que es subconjunto de B si, y sólo si, todo elemento de A es también un elemento de B y se denota $A \subseteq B$. Análogamente, A es un subconjunto propio de B, y notamos como $A \subset B$, si, y solo si, cada elemento de A es un elemento de B y $A \neq B$.

Utilizando los diagramas de Venn, se puede, por ejemplo, visualizar de forma gráfica la definición de subconjunto, o la propiedad distributiva, A∩(B∪C)=(A∩B)∪(A∩C), tal como se ve en la figura de la derecha.



Definición 5

Dado un conjunto A se definen las partes de A, y se denota por $\mathcal{P}(A)$ al conjunto que tiene por elementos todos los subconjuntos de A; $\mathcal{P}(A) = \{B : B \subset A\}$

Además, si el conjunto A tiene n elementos, $\mathcal{P}(A)$ tiene 2^n elementos.

Ejemplo 2.

Veamos algunos ejemplos de partes de un conjunto.

- Si $A = \{a\}$, entonces $\mathcal{P}(A) = \{\phi, A\}$.
- $A = \{a, b\}$, entonces $\mathcal{P}(A) = \{\phi, A, \{a\}, \{b\}\}$.
- $A = \{a, b, , c\}$, entonces $\mathcal{P}(A) = \{\phi, A, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$.

Producto cartesiano

Tal como se ha definido, un conjunto, es una colección de elementos, en donde no exsite orden alguno entre ellos. Sin embargo, es necesario disponer de una estructura de elementos ordenados. Esta estructura es la n-upla

Definición 6

e llama *n-tupla ordenada* a una lista de elementos $(a_1, a_a, ..., a_n)$ donde a_1 es el primer elemento, a_2 el segundo, ... y a_n el elemento *n*-ésimo.

Por tanto, las *n*-uplas se usan para representar elementos cuando, a diferencia de los conjuntos, el orden de los elementos sí que importa.

Definición 7

Se llama *par ordenado* a *2*-uplas. Como en un par ordenado el orden importa, en general $(a, b) \approx (b, a)$.

Definición 8: Producto Cartesiano

Se llama producto cartesiano de dos conjuntos A, B, y se representa como $A \times B$ al conjunto de todos los pares ordenados (a, b) en los que $a \in A$ y $b \in B$.

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \, y \, b \in B\}.$$

Ejemplo 3.

¿Cuál es el producto cartesiano de $A \times B \times C$, donde $A = 0, 1, B = 1, 2$ y $C = 0, 1, 2?$

Solución: El producto cartesiano $A \times B \times C$ consiste en todas las ternas ordenadas (a, b, c), donde $a \in A, b \in B$ y $c \in C$. Por tanto: $A \times B \times C =$(0, 1, 0), (0, 1, 1), (0, 1, 2), (0, 2, 0), (0, 2, 1), (0, 2, 2), (1, 1, 0), (1, 1, 1), (1, 1, 2), (1,2,0), (1,2,1), (1, 2, 2).

En el tema siguiente se estudiaran en profundidad las Relaciones, pero se presenta aquí su definición por su estrecha relación con la definición de producto cartesiano.

Definición 9

Una **relación** del conjunto A en el conjunto B es un subconjunto R del producto cartesiano $A \times B$. Los elementos de R son pares ordenados, donde el primer elemento pertenece a A y el segundo a B.

Téngase en cuenta que los productos cartesianos $A \times B$ y $B \times A$ no son iguales, a no ser que $A = \phi$, $B = \phi$ ó $A = B$.

Álgebra de conjuntos. Identidades entre conjuntos

En esta sección se van a definir las principales operaciones que se pueden realizar para combinar conjuntos y obtener otros nuevos, que guardan una relación con los anteriores. Se utilizarán los diagramas de Venn para ilustrar de forma gráfica cada una de las operaciones. Además, se tomará para todas las definiciones, conjuntos pertenecientes a un conjunto universal U.

Definición 10

Se llama **complementario** de un conjunto $A \subset U$ y se denota por A^c o $\bar{A}$ al conjunto formado por los elementos de U que no están en A, es decir:

$$A^c = \{x \in U : x \notin A\}$$

y cumple las siguientes propiedades:

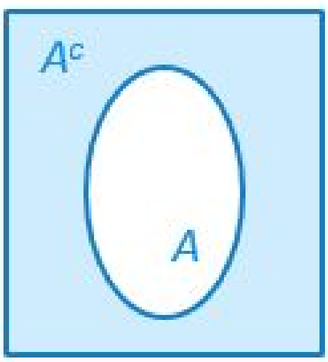
$U^c = \phi, \phi = U^c, (A^c)^c = A, A = B \Leftrightarrow A^c = B^c, B \subset A \Leftrightarrow A^c \subset B^c.$

Definición 11

Se llama diferencia de dos conjuntos A y B pertenecientes a U al conjunto: $A - B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$

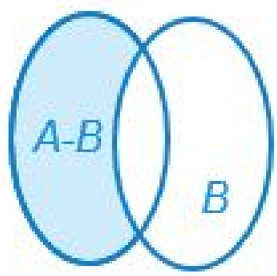
Es decir, es el conjunto de los elementos de a que no pertenecen a B.

En la siguiente figura se puede ver la representación del complementario (figura a) mediante un diagrama de Venn. El área sombreada se corresponde con A^c. En la figura b, se representa $A - B$ también en la zona sombreada.



a)

a) Conjunto complementario.



b)

b) Conjunto diferencia (A-B)

Definición 12

Sean A y B dos subconjuntos de U.

El **conjunto unión** de A y B se define como:

$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$.

El **conjunto intersección** de A y B se define como:

$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$.

Se dice que conjuntos son **disjuntos** si $A \cap B = \phi$.

Se puede ver en el diagrama de Venn de la figura siguiente, en sombreado azul, la unión (figura a) y la intersección (figura b) de dos conjuntos. Dos conjuntos en los que no exista ninguna ningún elemento común a ambos, son dos conjuntos disjuntos.

a) b)

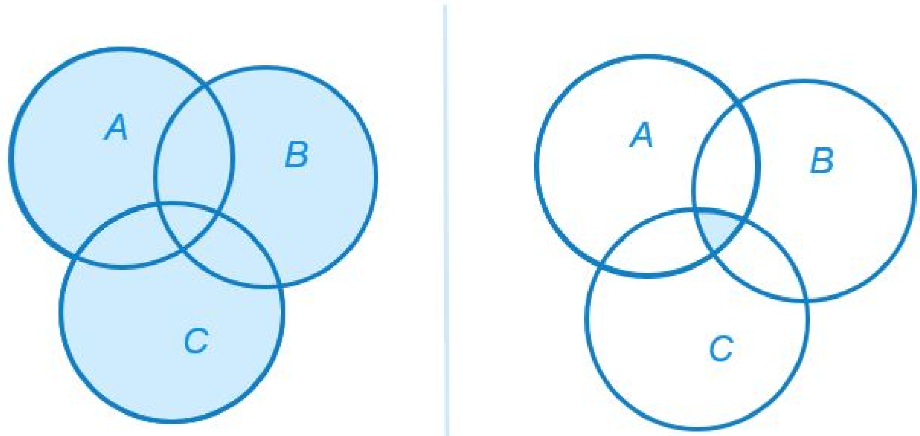
a) Conjunto Unión. b) Conjunto Intersección

Además, se definen en el álgebra de conjuntos una serie de relaciones de identidad entre conjuntos, que son relaciones de equivalencia y permiten operar y extraer conclusiones sobre las relaciones entre conjuntos.

En la tabla se pueden ver las mas importantes de las relaciones de equivalencia, que como podrá notar, existe una gran similitud entre estas identidades y las equivalencias lógicas vistas en el tema 1. Tanto es así, que estas identidades se pueden demostrar fácilmente mediante la aplicación de las equivalencias lógicas correspondientes.

Identidad	**Dominación**	**Idempotencia**	**Complementación**	**Complemento**
$A \cap U = A$ $A \cup \emptyset = A$	$A \cup U = U$ $A \cap \emptyset = \emptyset$	$A \cup A = A$ $A \cap A = A$	$\overline{\overline{(A)}}$=A	$A \cup \overline{A} = U$ $A \cap \overline{A} = \emptyset$
Conmutativa	**Asociativa**	**Distributiva**	**De Morgan**	**Absorción**
$A \cup B$ $= B \cup A$ $A \cap B$ $= B \cap A$	$A \cup (B \cup C)$ $= (A \cup B) \cup C$ $A \cap (B \cap C)$ $= (A \cap B) \cap C$	$A \cup (B \cap C) =$ $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) =$ $(A \cap B) \cup (A \cap C)$	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$

Para terminar esta sección, cabe mencionar que las operaciones de suma e intersección, se pueden extender a mas de dos conjuntos, gracias a que ambas satisfacen la propiedad asociativa. Así, dados tres conjuntos A, B y C, el conjunto $A \cup B \cup C$ es aquel que todos cuyos elementos están en A, B o en C y el conjunto $A \cap B \cap C$ contiene todos los elementos que están tanto en A como en B y en C. En la siguiente figura se muestra el diagrama de Venn para las operaciones suma e intersección de tres conjuntos. La extensión de estas operaciones a n conjuntos la da la siguiente definición.



a) Conjunto Unión de tres conjuntos.

b) Conjunto Intersección de tres conjuntos

Definición 13

La *unión* de una colección de conjuntos es el conjunto que contiene aquellos elementos que son miembros de al menos uno de los conjuntos de la colección. $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$

La *intersección* de una colección de conjuntos es el conjunto cuyos elementos son miembros de todos los conjuntos de la colección.

$$A_1 \cap A_2 \cup ... \cup A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

Ejemplo 4.

Sean los conjuntos $A = 1, 3, 5$ y $B = 1, 2, 3$ y $C = 3, 7, 9$ pertenecientes al conjunto de los números naturales menores que 10, entonces:

- $A^c = \{2, 4, 6, 7, 8, 9\}$
- $A - B = \{5\}$
- $A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$.
- $A \cap B = \{1, 3\}$
- $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$ y $A \cap B \cap C = \{3\}$

7.3 Funciones

En ocasiones, resulta necesario asignar a los elementos de un conjunto, los elementos de otro, por ejemplo cuando asignamos cada una de las butacas del conjunto de una determinada sala de cine, a cada uno de los asistentes que forman el conjunto del público...

Este tipo de asignaciones es lo que se conoce como funciones, las cuales son muy importantes en el álgebra discreta. Con ellas, se definen conceptos como las sucesiones o las series, o se utilizan para analizar el tiempo de cómputo de un determinado algoritmo en el ordenador. Ya se estudió en el tema anterior las funciones creadas recursivamente y en esta sección, se analizarán los conceptos básicos relacionados con las funciones con las que se trabaja en matemática discreta.

Definición 14

Sean dos conjuntos A y B. Una función es una relación entre ellos $f : A \longrightarrow B$ en la que se le asigna exactamente un elemento de $b \in B$ a cada elemento de $a \in A$ y se representa así:

$$f : A \longrightarrow B$$

Además se escribe $f(s) = b$ si b es el elemento de B asignado al elemento $a \in A$

Se dice que una función del conjunto a en el conjunto B, es una transformación de A en B. Las funciones se pueden representar de diversas formas, aunque las más habituales son mediante operaciones aritméticas (por ejemplo: $f(x) = x + 1$) y mediante pares ordenados (a, b) donde a cada elemento $a \in A$ se le hace corresponder otro elemento $b \in B$. Para todas ellas, independientemente de la forma en que estén definidas, se definen los siguientes elementos:

- Dada una función $f : A \longrightarrow B$, se llama **dominio** y se denota mediante $Dom(f)$

al conjunto de todos los valores $a \in A$ para los cuales la función está definida la función.

- Se llama **codominio** al conjunto de valores de $b \in B$ potencialmente alcanzables por la función (no todos los valores $b \in B$ tienen que ser alcanzados por algún $a \in A$).
- Llamaremos **imagen** o **rango** de f (y lo denotaremos por $Im(f)$) al conjunto de valores $b \in B$ que son alcanzados por uno o más valores $a \in A$. Al elemento $a \in A$ cuya imagen es un elemento $b \in B$ se le denomina preimagen de b.
- Llamaremos **gráfica** de f y lo denotaremos por $Graf(f)$ al conjunto de pares ordenados (a, b) del producto cartesiano $A \times B$.

Ejemplo 5.

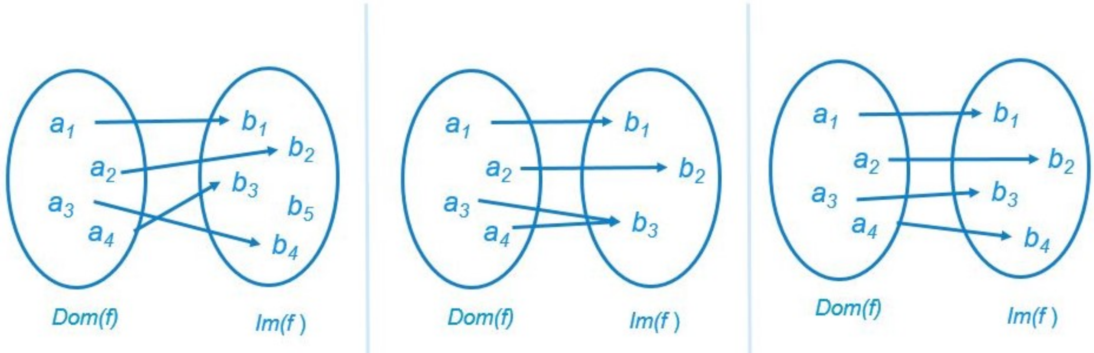
Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b, c, d\}$ y consideramos la función $f : A \longrightarrow B$ dada por los pares ordenados (1,b),(2,a),(3,b), o lo que es lo mismo, $f(1) = b$,$f(2) = a$ y $f(3) = b$. En este caso, el dominio es $A = \{1, 2, 3\}$, ya que sus tres elementos poseen imagen mediante f. El codominio es todo B, sin embargo, el rango o imagen es únicamente $Im(f) = \{a, b\}$ ya que son los únicos dos elementos de B que son alcanzados por valores del dominio.

Dados dos conjuntos dominio $Dom(f)$ e imagen $Im(f)$ de una función f, la relacióngue guardan entre ellos, esta marcada por la propia función y en dependiendo de como sea esa relación, podmeos clasificar las funciones en tres tipos:

- Funciones **Inyectivas** (one-to-one). Son funciones donde cada elemento del codominio $b \in B$ no es alcanzado por más de un elemento del dominio $a \in A$. Son funciones donde $f(a) = f(b)$ si y solo si $a = b$.
- Funciones **Suprayectivas** (onto). Son funciones donde cada elemento del codominio $b \in B$ es alcanzado por al menos un elemento del dominio$a \in A$. En las funciones suprayectivas el codiminio es igual a la imagen.

- Funciones **Biyectivas**. Son funciones inyectivas y suprayectivas al mismo tiempo.

En la siguiente figura se pueden ver de forma gráfica los tres tipos de funciones:



a) Función Inyectiva b) Función sobreyectiba a) Función Biyectiva

Ejemplo 6.

La función definida en el Ejemplo 5 no es inyectiva ya que $f(1) = f(3) = b$, y por tanto, un elemento del codominio es alcanzado por mas de un elemnto del dominio. Tampoco es suprayectiva ya que la imagen no coincide con el codominio, es decir, hay elementos del codominio que no tienen preimagen. Por tanto, tampoco puede ser biyectiva.

Consideramos ahora otra función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ (en la que los conjuntos son $A = B = \mathbb{R}$) dada por la expresión analítica $f(a) = 2a$. Se tiene que es una función inyectiva, ya que si $f(a_1) = f(a_2)$ se tiene que $2a_1 = 2a_2$ de donde simplificando se llega a $a_1 = a_2$. Por otra parte, se tiene que es una función suprayectiva, ya que para todo $b \in \mathbb{R}$ se tiene que $a = \frac{b}{2} \in \mathbb{R}$ cumple que $f(a) = b$.

Este vídeo explica que es las funciones biyectivas y pone varios ejemplos.

Accede al vídeo: Funciones biyectivas

En las debidas circunstancias, se pueden definir las operaciones suma o producto de funciones, pero en este caso, resulta de interés las operaciones de composición de funciones e inversión de funciones que se definen a continuación.

Definición 15

Se llama **composición de funciones** a la aplicación de una función g al resultado de otra función f. La composición de funciones se nota como $g \circ f$. Así, para las funciones $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$, la composición de f con g es: $g \circ f(a) = g(f(a))$.

Cabe notar que para que la composición de funciones esté bien definida es necesario que la imagen de f esté incluida en el dominio de g, es decir $Im(f) \subseteq Dom(g)$.

Ejemplo 7.

Consideramos la función $f : \{1, 2, 3\} \longrightarrow \{a, b, c, d\}$ dada en el Ejemplo 5 y una nueva función $g : \{a, b\} \longrightarrow \{A, B\}$ dada por $(a, B), (b, A)$. Podemos llevar a cabo la composición $g \circ f$, ya que $Im(f) = \{A, B\} = Dom(g)$. Por tanto, la composición $g \circ f : \{1, 2, 3\} \longrightarrow \{A, B\}$ da lugar a los pares ordenados $(1, A), (2, B), (3, A)$.

Dada una función biyectiva sobre un conjunto A en un conjunto B, todo elemento de B, será la imagen de algún elemento de A, además, por ser f inyectiva, todo elemento de B es imagen de un único elemento de A. de esta forma, podemos definir una nueva función que transforme los elementos de B en los elementos de A de esta forma, se define así la función inversa:

Definición 16

Se llama **función inversa** $f^{-1} : B \longrightarrow A$ a una función que deshace la acción de otra función $f : A \longrightarrow B$. Es decir, dada una función f definida como $f(a) = b$, su función inversa sería aquella que cumple que $f^{-1}(b) = a$.

Nótese que dada la definición de función inversa, esta sólo existe para las funciones biyectivas, ya que de no ser la función f una biyección, bien no todos los elementos de la imagen tienen una preimagen o bien algún elemnto de la imagen tiene mas de una preimagen, haciendo imposible que la imversa de f sea una función (por la propia definición de función).

Ejemplo 8.

En el ejemplo 6, la función inversa es $f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f^{-1}(b) = \frac{b}{2}$.

Para terminar este capítulo, retomamos la definición de cardinal de un conjunto para extender su significado a conjuntos infinitos.

Se llama **tamaño** o **cardinalidad** de un conjunto finito A, y se nota como $\mid A \mid$, al número de elementos del conjunto. La cardinalidad nos permite indicar cuándo dos conjuntos finitos tienen el mismo tamaño. Se puede extender el concepto de cardinalidad a conjuntos con infinitos elementos y decidir cuándo dos conjuntos infinitos tienen la misma cardinalidad. Dos conjuntos A, B infinitos tienen la misma cardinalidad si, y solo si existe una relación biyectiva entre ellos. En este caso escribimos $\mid A \mid = \mid B \mid$.

Si existe una relación inyectiva de A a B, entonces decimos que $\mid A \mid \leq \mid B \mid$. Finalmente, si existe una relación suprayectiva de A a B, entonces decimos que $\mid A \mid \geq \mid B \mid$.

Decimos que un conjunto infinito A es **contable** cuando tiene la misma cardinalidad que el conjunto de los naturales o es finita. En caso contrario el conjunto es **incontable**. Los conjuntos de números $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ son contables, pero no el conjunto de losnúmeros reales.

7.4 Referencias bibliográficas

Rosen, K. H., & Morales, J. M. P. (2004). Matemática discreta y sus aplicaciones.

Koshy, T. (2004). Discrete mathematics with applications. Elsevier.

Grimaldi, R. P. (2006). Discrete and Combinatorial Mathematics, 5/e. Pearson Education India.

O´Donnel, J. & Hall, C. (2006). Discrete Mathematics Using a Computer. Londres: Springer.

7.5 Cuaderno de ejercicios

Ejercicio 1. Considera los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $B = \{2, 6, 14\}$. Enumera los elementos de los conjuntos $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$ y $\mathcal{P}(B)$.

Ejercicio 2. Enumera los elementos del conjunto $A \times B$, donde:
$A = \{Ana, Marcos, Elena\}$ y $B = \{\square, \blacktriangle\}$.

Ejercicio 3. Describe como intervalos los siguientes conjuntos:

- $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 3\}$.
- $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x(x+1) \leq 0\}$.
- $C = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{x} < x\right\}$.
- $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 3x + 4\}$.
- $E = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x^2 < 4\}$.

Ejercicio 4. Lista los elementos del conjunto:
$A = \{x \mid x\ es\ el\ cuadrado\ de\ un\ nmero\ entero\ y\ x < 100\}$

Ejercicio 5. Indica el dominio e imagen de las siguientes funciones:

- $f(x) = x + 3$
- $g(x) = x^2$
- $h(x) = x^3$
- $i(x) = e^x$
- $j(x) = ln(x)$

Ejercicio 6.

Calcular el dominio y el rango de la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = \sqrt{1+x}$$

En el caso de que $f : Dom(f) \longrightarrow Im(f)$ sea biyectiva, calcula su inversa.

Ejercicio 7.

Usando las funciones definidas en el ejercicio 5, calcula $f \circ g, g \circ f, j \circ f, h \circ f \circ j \circ g$

Ejercicio 8.

Encuentra la función inversa de:

- $f(x) = 2x + 1$
- $g(x) = \frac{4+x}{2-x}$
- $h(x) = \sqrt{x+3}$
- $j(x) = ln(x^3 + 2)$
- $k(x) = 2^x$

7.6 Solución cuaderno de ejercicios

Solución 1.

- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 14\}$
- $A \cap B = \{2, 6\}$
- $A - B = \{1, 3, 4, 5\}$
- $\mathcal{P} = \{\{\}, \{2\}, \{6\}, \{14\}, \{2, 6\}, \{2, 14\}, \{6, 14\}, \{2, 6, 14\}\}$

Solución 2.

$A \times B =$

$\{(Ana, \square), (Ana, \blacktriangle), (Marcos, \square), (Marcos, \blacktriangle), (Elena, \square), (Elena, \blacktriangle)\}$

Solución 3.

- $A = (-\infty, 3]$
- $B = [-1, 0]$
- $C = (-1, 0) \cup (1 + \infty)$
- $D = [-1, 4]$
- $E = (-2, -1) \cup (1, 2)$

Solución 4.

$A = \{0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81\}$

Solución 5.

- $Dom(f) = \mathbb{R}, Im(f) = \mathbb{R}$
- $Dom(g) = \mathbb{R}, Im(g) = [0, +\infty)$
- $Dom(h) = \mathbb{R}, Im(h) = \mathbb{R}$

- $Dom(i) = \mathbb{R}, Im(f) = (0, +\infty)$
- $Dom(j) = (0, +\infty), Im(f) = \mathbb{R}$

Solución 6.

$f : Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq -1\}$.

$Im(f) = [0, +\infty)$

Se trata de una función biyectiva y su inversa es $g(y) = y^2 - 1$

Solución 7.

- $f \circ g(x) = f(g(x)) = x^2 + 3$
- $g \circ f(x) = g(f(x)) = (x + 3)^2$
- $j \circ f(x) = j(f(x)) = e^{x+3}$
- $h \circ f \circ j \circ g(x) = h(f(j(g(x)))) = \left((e^x)^2 + 3\right)^3$

Solución 8.

- $f^{-1}(y) = \frac{y-1}{2}$
- $g^{-1}(y) = \frac{2y-4}{y+1}$
- $h^{-1}(y) = y^2 - 3$
- $j^{-1}(y) = \sqrt[3]{e^y - 2}$
- $k^{-1}(y) = log_2 y$

7.7 A fondo

A fondo

Números naturales y recursividad.

En este documento los profesores Rafael Issacs y Sonia Sabogal explican los principios de la inducción ordinaria y fuerte y cómo se hacen definiciones recursivas.

Accede al documento desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:

https://docplayer.es/37046970-Numeros-naturales-y-recursividad.htm

Discrete Mathematics DeMYSTiFieD

Gallier, J. (2011). *Discrete mathematics*. Springer Science & Business Media.

Si estás interesado en aprender los fundamentos de la matemática discreta, esta fácil guía repasa los conceptos esenciales.

Escrito por el galardonado profesor Steven Krantz, Discrete Mathematics Demystified explica un tema difícil de una manera eficaz y esclarecedora. El libro trata acerca de la lógica, las pruebas, funciones, matrices, secuencias, series y mucho más. Explicaciones concisas, ejemplos del mundo real y el trabajo, hace que sea fácil de entender el material. Los ejercicios de fin de capítulo y un examen final ayudan a reforzar el aprendizaje.

7.8 Test

Test

1. El principio de la buena ordenación:

A. Es una forma de resolver problemas matemáticos.

B. Permite hacer prueba directa.

C. Permite hacer prueba indirecta.

D. Sirve para demostrar que la inducción es válida.

2. La hipótesis inductiva es:

A. Lo que asumimos cierto para hacer inducción.

B. Lo que vamos a demostrar por inducción.

C. El antecedente del paso inductivo.

D. El consecuente del paso inductivo.

3. ¿Qué significa cuando deducimos que n=n+1 en una prueba de inducción?

A. Que hay un error de deducción en algún paso.

B. Que el paso inductivo ha sido usado erróneamente.

C. Que la proposición que intentamos deducir inductivamente es errónea.

D. Las tres anteriores son posibles.

4. ¿Cuáles de los siguientes métodos son equivalentes?

A. Solo el principio de buena ordenación y principio de inducción ordinaria.

B. Ninguno.

C. Solo el principio de inducción ordinaria y el de inducción fuerte.

D. Los principios de buena ordenación, de inducción ordinaria y de inducción fuerte son equivalentes.

5. ¿Entre la inducción ordinaria y fuerte, cuál resuelve más problemas?

A. No se sabe cuál resuelve más problemas.

B. La inducción ordinaria puede resolver más problemas.

C. La inducción fuerte puede resolver más problemas.

D. Ambos resuelven el mismo número de problemas.

6. La triangulación en geometría computacional permite:

A. Localizar la posición de un objeto.

B. Dividir un polígono de n lados en n-2 triángulos.

C. Dividir un polígono de n-2 lados en n triángulos.

D. Determinar los n-2 puntos singulares de una figura.

7. Las funciones recursivas en matemáticas nos permiten:

A. Demostrar teoremas inductivamente.

B. Demostrar teoremas recursivamente.

C. Demostrar teoremas por contraposición.

D. Definir el paso inductivo de una hipótesis inductiva.

8. Se puede definir de forma recursiva:

A. Solo las funciones.

B. Las funciones y los conjuntos.

C. Solo los conjuntos.

D. Ninguna de las tres respuestas anteriores son correctas.

9. La inducción estructurada se utiliza para demostrar:

A. Proposiciones sobre conjuntos definidos recursivamente

B. Proposiciones sobre listas.

C. Proposiciones sobre polígonos.

D. Proposiciones sobre números.

10. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones respecto a una función recursiva es cierta?:

A. No se utilizan en programación.

B. Siempre termina, dando suficiente tiempo de computación.

C. Tiene infinitos pasos, ya que están definidas para todos los números naturales

D. Puede tener un solo paso.