Tema 9

Álgebra y Matemática discreta

Grafos

Índice

Esquema 3

Ideas clave 4

9.1 Introducción y objetivos 4

9.2 Definiciones 7

9.3 Relación de vecindad 10

9.4 Operaciones entre grafos 13

9.5 Familias notables de grafos simples 13

9.6 Grafos bipartidos 15

9.7 Representación de grafos 18

9.8 Isomorfismo 20

9.9 Conectividad en grafos 21

9.10 Referencias bibliográficas 29

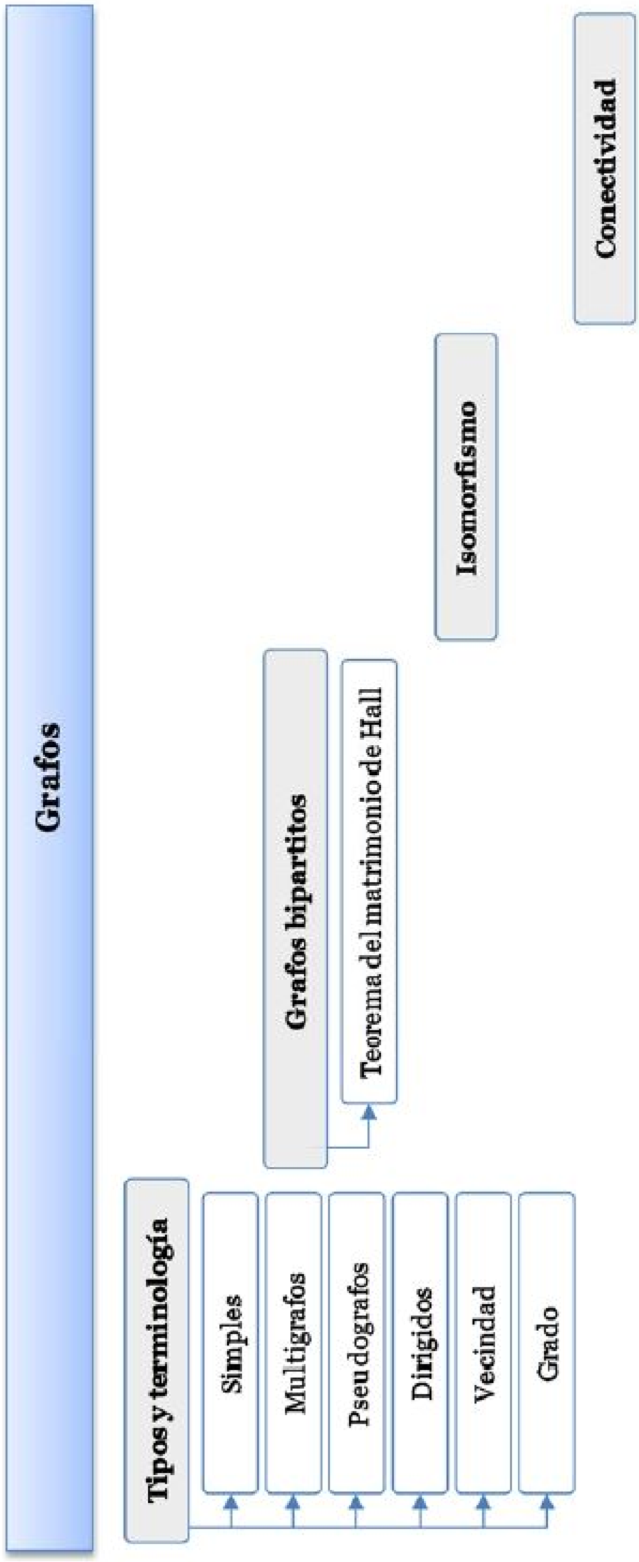
9.11 Cuaderno de ejercicios 30

9.12 Soluciones cuaderno de ejercicios 33

9.13 A fondo 37

9.14 Test 39

Esquema


Grafos
Tipos y terminología
Simples
Multigrafos
Pseudografos
Dirigidos
Vecindad
Grado
Grafos bipartitos
Teorema del matrimonio de Hall
Isomorfismo
Conectividad

9.1 Introducción y objetivos

En el tema 4 se han estudiado el concepto de *relación* en matemáticas. En este tema se presentan los grafos, como una forma particular de representar relaciones, entendidas como asociación entre dos o más objetos, donde uno de los objetos puede estar relacionado con varios objetos diferentes y que tienen su origen en el trabajo que LEONHARD EULER(1707–1783) publicó, en 1736, titulado: *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*, que resolvía de forma general el famosos problema de los siete puentes de Königsberg. Posteriormente, en 1852, FRANCIS GUTHRIE planteó el problema de los cuatro colores que consiste en colorear cualquier mapa de países, utilizando solamente cuatro colores, de tal forma que dos países vecinos nunca tengan el mismo color. De esta forma, se extendía el uso de la teoría de grafos para modelizar todo tipo de problemas relacionados con las redes, como por ejemplo, problemas de transporte, optimización de rutas, telecomunicaciones, circuitos, teoría de juegos, y en general, con diversas aplicaciones en distintos ámbitos de la ciencia y de la técnica.

En la teoría de grafos, los objetos son representados por nodos o vértices, y las relaciones son representadas por aristas o conexiones entre los nodos. Por lo tanto, se puede decir que un grafo es una representación visual de una relación entre objetos. La utilidad de la teoría de grafos es grande en el ámbito de la ingeniería informática, dado que permiten para representar estructuras de datos complejas, como por ejemplo la jerarquía de un sitio web o las relaciones entre diferentes elementos de un sistema y su uso es cada vez más importante a medida que los sistemas informáticos se vuelven más grandes y complejos.

Por tanto, encontramos numerosas aplicaciones en distintas áreas de la ingeniería informática, que van desde el modelado de la estructura de las redes de computadoras, permitiendo analizar su capacidad, velocidad, seguridad y otros aspectos, hasta el análisis de algoritmos, creación de bases de datos, donde se pueden representar y analizar las relaciones entre los distintos elementos y tratarlos como elementos de un grafo, o incluso en la optimización de algoritmos de búsqueda.

En este tema, se dará por tanto una introducción a la teoría de grafos, partiendo de las definiciones mínimas necesarias para comprender el tema y presentando a continuación distintos tipos de grafos, sus propiedades y su representación.

En concreto, en este capítulo, se pretende alcanzar los siguientes objetivos:

- Conocer la terminología básica y los distintos tipos de grafos.
- Comprender los conceptos de caminos y ciclos.
- Entender las diferencias ente grafos bipartidos, isomorfos o subgrafos.
- Analizar y entender el concepto de conectiviad de un grafo.
- Conocer las formas en que se representa un grafo.

Para alcanzar estos objetivos, se propone la siguiente subdivisión del contenido de este tema:

- Introducción y objetivos.
- Definiciones
- Relación de vecindad
- Operaciones entre Grafos
- Familias notables de grafos simples
- Grafos bipartidos

- Representación de grafos
- Isomorfismo
- Conectividad en grafos

9.2 Definiciones

Un grafo $G = (V; E)$ es un par formado por dos conjuntos V y E. El conjunto V es un conjunto finito de **vértices** o **nodos**, mientras que $E \subseteq V \times V$ es un conjunto también finito de pares de elementos de V, cuyos elementos reciben el nombre de **aristas** o **ramas**, que están constituidos por pares no ordenados de vértices distintos.

Habitualmente, se escribe $G = (V, E)$ y decimos que $V = V(G)$ es el conjunto de vértices y $E = E(G)$ el conjunto de aristas. Los vértices de un grafo suelen representarse a través de puntos y las aristas a través de líneas que unen dichos puntos. Ha de tenerse en cuenta que que dos vértices pueden estar unidos por más de una arista, por lo que habría que especificar qué arista estamos tomando en cada caso. A continuación se definen una serie de concretos básicos necesarios para comprender la teoría de grafos:

- **Orden** de un grafo es el número total de sus vértices.
- **Tamaño o medida** de un grafo es el número total de sus aristas o lados.
- Dado un grafo G y una **arista** a, b de G, ésta se representa por $e = ab$.
- Dos vértices a y b se dice que son adyacentes si y sólo si a, b es una arista del grafo.
- Un grafo de orden p y medida q se denomina un $(p, q) - grafo$.
- Si $e = ab$ es una arista de un grafo G, entonces diremos que e y a (respectivamente e y b), son incidentes.
- Si e y f son dos aristas distintas que son incidentes en un vértice común, entonces se denominan aristas adyacentes.

Además, dado un vértice x de un grafo, se define el **grado del vértice** ($deg(x)$) como el número de aristas incidentes sobre él o el número de vértices adyacentes a él. Y de forma particular, se dice que el vértice es aislado cunado su grado es cero mientras que se tratará de un vértice final si su grado es uno.

Atendiendo al grado de los vértices que forman parte de un grafo, podemos definir el grado de este. Así, el grado máximo de un grafo es igual al máximo grado de sus vértices y se denota por Δ. De igual forma, el grado mínimo será el mínimo de los grados de sus vértices y se denota por δ. En caso de que $\Delta = \delta$, se dice que el $\Delta - grafo$ es regular de grado Δ. Se dice que un grafo es **regular** si es $\Delta - regular$ para algún entero Δ no negativo. Se dice que es **completo** si cada vértice es adyacente con todos los otros $n-1$ vértices y se denota k_n Un grafo $G=(V,E)$ se dice bipartido o **bipartito** si $V(G) = V_1 \cup V_2$ puede ser dividido en dos conjuntos no vacíos V_1 y V_2 tal que cada arista de G une un vértice de V_1 y un vértice de V_2, siendo $V_1 \cap V_2 = \phi$.
En cuanto a las formas que pueden tomar los grafos en relación a las conexiones que se dan entre sus vértices, nos encontramos con las siguientes definiciones:

- Un grafo $G = (V, E)$es un **multigrafo** si, para a, bVy $a \neq b$, existen dos o más aristas de la forma a, b en el grafo. Las aristas que unen los mismos vértices, se llaman **aristas paralelas**

- Cuando un vértice está unido consigo mismo por una arista, diremos que esta es un **bucle o lazo** y en ese caso, el grafo es un **pseudografo**.

- Un grafo que está formado por un solo vértice, recibe el nombre de **trivial** o **degenerado**.

- Cuando un grafo no posee aristas paralelas ni bucles, diremos que se trata de un **grafo simple**.

- **El complemento** $\bar{G}$ de un grafo G es otro grafo con $V(\bar{G}) = V(G)$ y tal que a, b es una arista de $\bar{G}$ si y sólo si a, b no es una arista de G.

Se puede ver en la siguiente figura distintos tipos de grafos.

Normalmente los grafos que hemos descrito con la correspondiente representación, se refieren a grafos bidireccionales, pero en ocasiones, puede ser necesario indicar que la arista de un grafo unicamente permite la conexión en una dirección. En tal caso, estaremos hablando de grafos dirigidos:

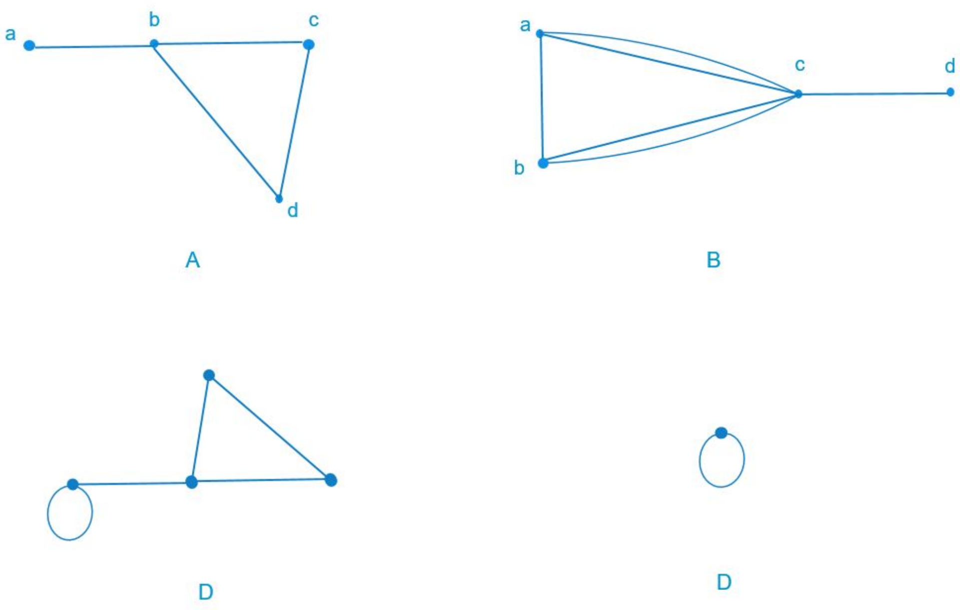


Figura 1: Tipos de grafos: (A) grafo simple, (B) multigrafo, (C) pseudografo y (D) grafo trivial o degenerado

Definición 1

Un**digrafo** o grafo dirigido $D = (V; E)$ consta de un conjunto V de vértices y de un conjunto E de aristas, que son *pares ordenados* de elementos de V.

Como se puede apreciar, la diferencia con la definición de grafo, radica en que en este caso, existe una ordenación para los vértices. Gráficamente esta ordenación, se representa mediante una flecha, tal como se puede ver en la siguiente figura:

Los grafos dirigidos, también pueden contener bucles o ser degenerados, pero no admiten aristas paralelas con la misma ordenación (misma dirección), pero dos vértices si pueden estar unidos por dos arcos si éstos tienen distintas direcciones. También se dice que a es el origen del arco (a, b) y b es el destino o final del arco.

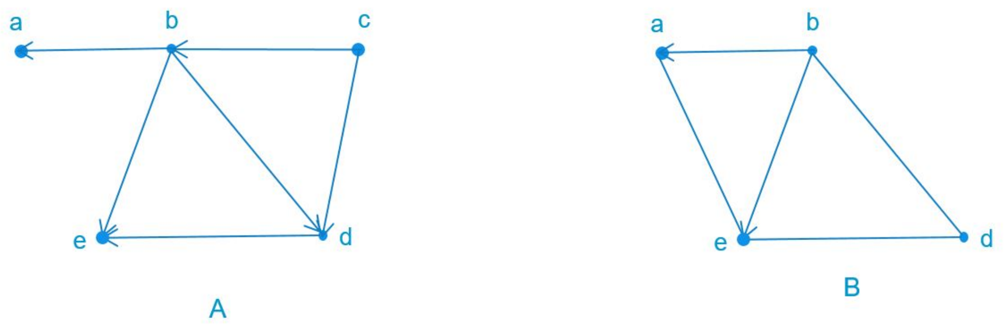


Figura 2: Tipos de grafos: (A) grafo dirigido, (B) mixto.

9.3 Relación de vecindad

Decimos que dos vértices de un grafo no dirigido u, v son *adyacentes* o *vecinos* en el grafo G si existe un arco de G que una u y v. Si e une u y v, se dice que la arista e es incidente con los vértices v, u. También se dice que la arista e conecta u con v.

Dado un vértice v, se llama vecindad (neighborhood) $N(v)$ al conjunto de vértices vecinos con v. Si $G = (V; E)$ es un grafo y A es un subconjunto de vértices de V, $N(A)$ es el conjunto de vértices de G que son adyacentes con al menos un elemento de A, es decir:

$$N(A) = \bigcup_{v \in A} N(v)$$

Se llama **grado** (degree) de un vértice v y notamos $deg(v)$, al número de arcos incidentes con él. En el caso de los bucles incidentes con el vértice v, estos contribuyen al computo en dos unidades.

A los vértices v con $deg(v) = 0$ se les llama vértices **aislados**. Si $deg(v) = 1$ se llama vértice **colgante** (pendant) u hoja, es decir un vértice con $deg(v) = 1$ es adyacente con solo otro vértice.

Lema 1

El lema del apretón de manos:

Sea $G = (V, E)$ un grafo de orden $p = |V|$ y medida $q = |E|$, con $V(G) = \{v_1, v_2, ..., v_p\}$. Entonces:

$$\sum_{j=1}^{p} deg(v_j) = 2q$$

es decir, la suma de los grados de todos los vértices de un grafo es el doble del número de aristas.

Al sumar los grados de los vértices, cada bucle se cuenta dos veces (contribuye con dos unidades al calcular el grado de ese vértice) y cualquier otra arista también dos veces, una por cada vértice que contiene. En consecuencia, el número total de vértices de grado impar es par. Por tanto, no existe ningún grafo $3 - regular$ de orden 5, ya que ningún grafo contiene un número impar de vértices impares.

Ejemplo 1.

¿Cuántas aristas hay en un grafo con diez vértices, cada uno de los cuales tiene grado seis?

Solución: Como la suma de los grados de los vértices es $6 \cdot 10 = 60$, se sigue que $2e = 60$. Por lo tanto, $e = 30$.

En un grafo dirigido o digrafo, el **grado de entrada de un vértice** $\delta^-(v)$ o $deg^-(v)$ es el número de arcos que entran en este vértice y el **grado de salida de un vértice** $\delta^+(v)$ o $deg^+(v)$ es el número de arcos que salen de ese vértice.

Se dice que un digrafo D es regular si $\delta^-(v) = \delta^+(v) = \delta(v), \ \forall v \in V(D)$

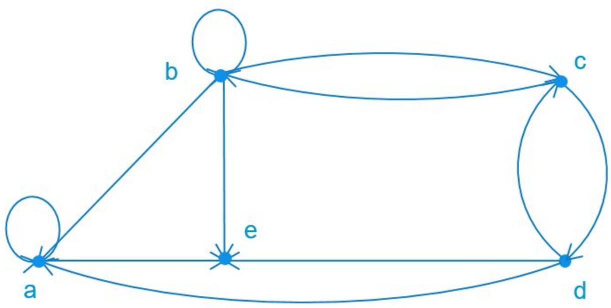


Figura 3: Digrafo o Grafo dirigido D_1.

Teorema 1

Sea $D = (V, E)$ un grafo dirigido. Entonces:

$$|E| = \sum_{v \in V}^{p} deg^{-}(v) = \sum_{v \in V}^{p} deg^{+}(v)$$

Es decir, el número de arcos es igual al grado de entrada de los vértices, e igual al grado de salida de los vértices.

Ejemplo 2.

Calcular los grados de entrada y salida de cada vértice del grafo dirigido D_1 de la figura 3.

solución:

Los grados de entrada de G_1 son: $\delta^{-}(a) = 2$, $\delta^{-}(b) = 4$, $\delta^{-}(c) = 2$, $\delta^{-}(d) = 3$, $\delta^{-}(e) = 0$; los grados de salida son: $\delta^{+}(a) = 3$, $\delta^{+}(b) = 2$, $\delta^{+}(c) = 2$, $\delta^{+}(d) = 1$, $\delta^{+}(e) = 3$.

Por tanto, $|E| = 11$

Dado un digrafo D, un vértice con grado de entrada cero se denomina **fuente** y un vértice con grado de salida cero se denomina **sumidero**.

9.4 Operaciones entre grafos

Sean $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ dos grafos tales que $V_1 \cap V_2 = \phi$. Entonces, se definen las siguientes operaciones:

- Unión de grafos:

  El grafo unión $G_1 \cup G_2$ es el grafo cuyo conjunto de vértices es $V(G_1 \cup G_2) = V_1 \cup V_2$ y de aristas $E(G_1 \cup G_2) = E_1 \cup E_2$.

- Suma de grafos:

  El grafo suma $G_1 + G_2$ es el grafo cuyo conjunto de vértices es $V(G_1 + G_2) = V_1 \cup V_2$ y de aristas $E(G_1 + G_2) = \{\{u, v\} /u \in G_1, v \in G_2\} \cup E_1 \cup E_2$.

- Producto de grafo:

  El grafo producto $G_1 \times G_2$ es el grafo cuyo conjunto de vértices es $V(G_1 \times G_2) = V_1 \times V_2$ y si dos vértices $\{u_1, u_2\}$, $\{v_1, v_2\}$ son adyacentes en $G_1 \times G_2$ si $u_1 = v_1$ y $\{u_2, v_2\} \in E_2$ o bien $u_2 = v_2$ y $u_1, v_1 \in E_1$.

9.5 Familias notables de grafos simples

De las definiciones previas, surgen familias de grafos que merecen una especial atención, pues generan una topología que tiene aplicación concreta en ciertos ámbitos, así, tenemos:

- **Grafos completos** K_n donde los n vértices están contados con los restantes $n - 1$ unicamente con una arista. vértices.
- **Ciclos** C_n donde los vértices están conectados formando una circunferencia.
- **Ruedas** W_n donde los vértices además de formar una circunferencia, hay uno que actúa como eje de la rueda.

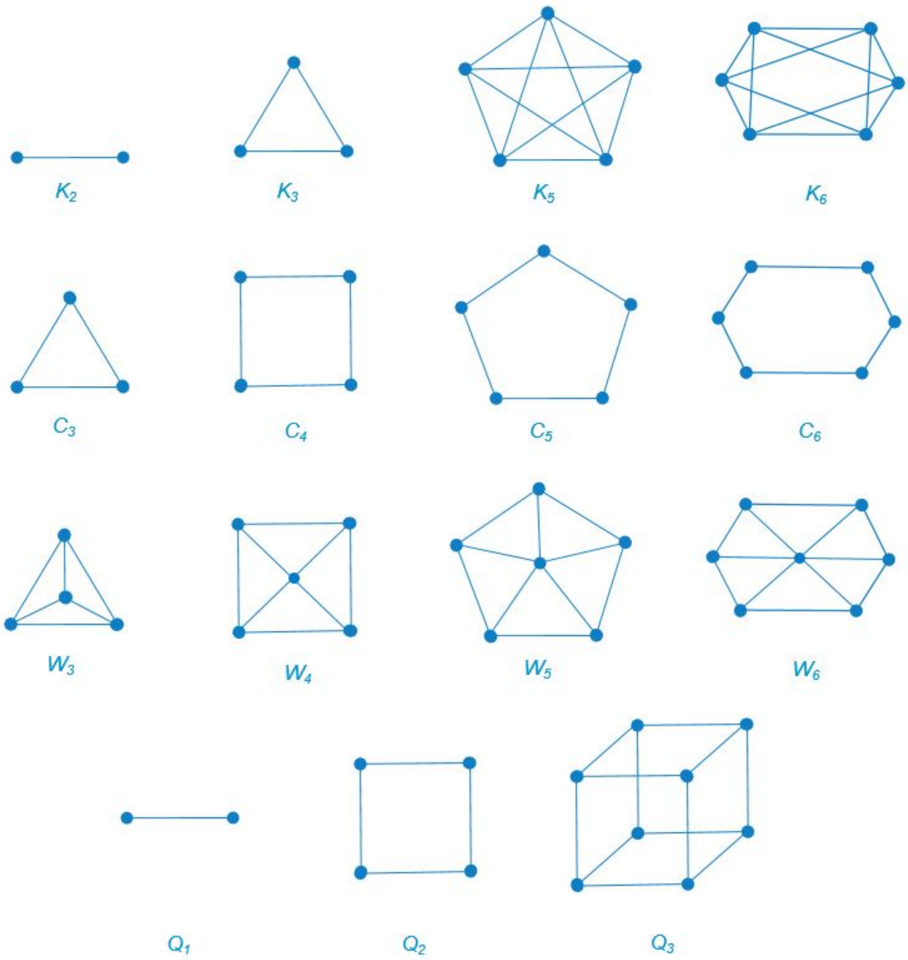


Figura 4: Familias notables de grafos simples.

- **n-Cubos** Q_n donde los vértices forman un cubo n-dimensional.

En la figura 4 se pueden ver algunos ejemplos de este tipo de grafos simples

Que tienen aplicaciones en al ámbito de la informática como:

- En el desarrollo de redes de área local, que suelen tener topologías de anillo o estrella.
- Mallas de computación paralela en las que los procesadores que computan en paralelo utilizan arquitecturas en forma de maya n-dimensionales, representadas por grafos n-cubo

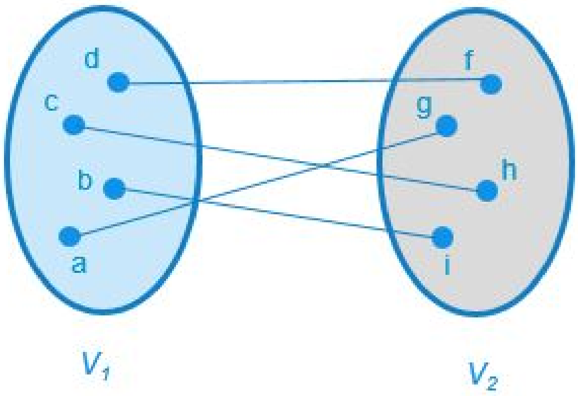


Figura 5: Grafo bipartido.

- Sistemas de sensores distribuidos: en los sistemas de sensores distribuidos, los grafos de rueda se utilizan para modelar la topología de la red de sensores.
- Sistemas de bases de datos distribuidos: en los sistemas de bases de datos distribuidos, los grafos de rueda se utilizan para modelar la topología de la red de servidores de bases de datos.

9.6 Grafos bipartidos

Anteriormente se hizo una definición de los grafos bipartidos, que también cuentan con una serie de aplicaciones propias de interés. Introducimos aquí una forma alternativa para conocer si un grafo es bipartido de forma visual:

Teorema 2

n grafo simple es bipartito si, y solo si, se pueden colorear los vértices de dos colores diferentes de forma que no hay vértices adyacentes del mismo color

Se puede ver un ejemplo en la siguiente figura, en la que los vértices del grafo V se pueden dividir en dos conjuntos V_1 y V_2 coloreados en distinto color y en los que no hay ningún vértice adyacente dentro.

Además, definimos un grafo bipartito completo $k_{m,n}$ como aquel cuyos vértices se pueden particionar en dos subconjuntos de m y n vértices donde existe un arco entre cada par de vértices de cada subconjunto.

Para ampliar el entendimiento de este tipo de grafos, se puede visualizar el siguiente video en el que se describen los grafos bipartitos y los grafos bipartitos completos y se ponen varios ejemplos.

Accede al vídeo: Grafos bipartitos y grafos bipartitos completos

Grafos bipartidos para problemas de emparejamiento

Los grafos bipartitos se pueden usar para estudiar la relación entre dos conjuntos o resolver problemas de emparejamiento. Algunos ejemplos serían:

- **Asignación de tareas**. Un problema en el que tememos m empleados y n tareas representadas como un grafo bipartito que indica las tareas que sabe hacer cada empleado.
- **Sistemas de recomendación:** Los grafos bipartidos se utilizan en sistemas de recomendación para modelar la relación entre los usuarios y los elementos recomendados (por ejemplo, películas, libros, productos, etc.).
- **Modelado de bases de datos:** Los grafos bipartidos se utilizan en el modelado de bases de datos para representar las relaciones entre diferentes entidades.
- **Modelado de redes sociales:** Para modelar las relaciones entre los usuarios y los grupos en las redes sociales. En este tipo de grafos, los nodos se dividen en dos conjuntos: los usuarios y los grupos. Las aristas se utilizan para conectar a los usuarios con los grupos a los que pertenecen.

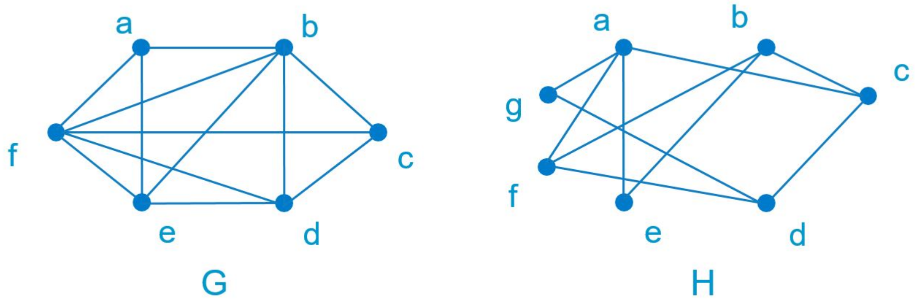


Figura 6: Grafo bipartido.

Un **emparejamiento** de un grafo bipartito es un subconjunto de aristas que no comparten ningún extremo. Se llama **emparejamiento máximo** al emparejamiento con el máximo número de aristas que se puede hacer en un grafo bipartito.

Se llama **emparejamiento completo** de V_1 a V_2 a un emparejamiento en el que todos los vértices de V_1 aparecen en alguna arista del emparejamiento.

Ejemplo 3.

¿Son bipartitos los grafos G y H que se muestran en la Figura 6?

Solución:

El Grafo G no es bipartito, ya que no se puede dividir en ningún subconjunto de vértices de modo que existan vértices que no sean adyacentes.

El grafo H es bipartito, ya que está formado por la unión de dos conjuntos en los que no existen vértices adyacentes, formados por los vértices $\{a, b, d\}$ y $\{c, e, f, g\}$.

Subgrafos

Dado un grafo $G = (V, E)$, decimos que $H = (W, F)$ es un subgrafo de G si $W \subseteq V$ y $F \subseteq E$. Además, decimos que H es un **subgrafo propio** de G si $H \neq G$.

Sea$G = (V, E)$ un grafo simple y W un subconjunto de V, decimos que $H = (W, F)$ es un **grafo inducido** por W si F contiene los arcos de E que conectan extremos que ambos forman parte de W.

La unión de dos grafos simples $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$, denotada como $G_1 \cup G_2$, es un grafo simple cuyo conjunto de vértices es $V_1 \cup V_2$ y cuyo conjunto de aristas es $E_1 \cup E_2$.

9.7 Representación de grafos

Existen tres maneras en las que podemos representar un grafo. Estas son:

1. Listas de adyacencia
2. Matriz de adyacencia
3. Matriz de incicencia

Las listas de adyacencia indican los vértices que son adyacentes a cada vértice. Si el grafo es dirigido, lo que indican son los vértices hasta los que parte un arco desde cada vértice inicial.
Las matrices de adyacencia son matrices en las que para cada vértice se indica si hay un arco hacía el vértice de la otra entrada.
Las matrices de incidencia son matrices donde una entrada representa los vértices y otra entrada representa los arcos. El contenido de la matriz muestra cuando un vértice es incidente con un arco.

Matriz de adyacencia del grafo G

Sea $G = (V, E)$ un grafo con $|V| = n$ y $V = v_1, v_2, ..., v_n$. La matriz de adyacencia del grafo G es una matriz $A = (a_{ij})$ booleana de tamaño $n \times n$ tal que:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \; si \quad \{v_i, v_j\} \in E \\ 0 \; otro \; caso \end{cases}$$

Obsérvese que la matriz A es simétrica. Y además, si el grafo es simple, al no tener bucles, será: $a_{ii} = 0$.

La matriz de adyacencia puede emplearse para representar multigrafos con bucles. En tales casos, la matriz A no tiene que ser booleana.

También se puede emplear la matriz de adyacencias para representar digrafos o multigrafos, con o sin bucles. Si se trata de digrafos, A es booleana; en el caso de multidigrafos, no lo es. En este caso, A no tiene por qué ser simétrica.

El número de elementos iguales a 1 de una $(i\text{–}sima)$fila o columna de A, es el grado del vértice i, es decir, el número de caminos simples de longitud 1 que comienzan en v_i.

Matriz de incidencia del grafo G

Sea $G = (V, E)$ un grafo con $|V| = n$ y $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ y $E(G) = \{e_1, e_2, ...e_m\}$. La matriz de incidenci del grafo G es una matriz $B = (b_{ij}) = B(G)$ de G booleana de tamaño $n \times m$ tal que:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 \; si \quad e_j \; es \; incidente \; con \; v_i \\ 0 \; otro \; caso \end{cases}$$

El número de unos de la fila i de B corresponde al grado del vértice v_i. En cambio, cada columna tiene exactamente dos unos.

9.8 Isomorfismo

Definición 2

Sean $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ dos grafos simples. Se dice que G_1 y G_2 son grafos isomorfos si existe una aplicación biyectiva $\phi : V_1 \longrightarrow v_2$ tal que $\{a, b\} \in E_1$ si y sólo si $\{\phi(a), \phi(b)\} \in E_2$, para todo $a, b \in V_1$.

Dos grafos son iguales si $V_1 = V_2$ y si $E_1 = E_2$.

Resulta difícil determinar si dos grafos son isomorfos, ya que comprobar si dos grafos con n vértices son isomorfos implica probar el isomorfismo en las $n!$ permutaciones de los vértices, por lo que se deben observar otras propiedades que el isomorfismo conserva. Entre esas propiedades están:

- G_1 y G_2 tienen el mismo número de vértices y de aristas.
- Si $deg_{G_1}(v_j) = k$, entonces $deg_{G_2}(\phi(v_j) = k$.

Que dicho en otras palabras equivale a comprobar que conservan:

- El mismo número de vértices
- El mismo número de arcos
- Los mismos grados para los vértices

Dos aplicaciones comunes del isomorfismo de grafos serían:

1. Identificar que dos moléculas son iguales por mantener los mismos átomos y los mismos enlaces.

2. Determinar que dos circuitos integrados son equivalentes por tener los mismos componentes y las mismas conexiones.

9.9 Conectividad en grafos

Definición 3

Dados dos vértices x e y cualesquiera de un grafo G. Se define un camino o recorrido de x a y como una sucesión alternada de vértices x_j y aristas e_j de G (sin lazos)

$$x = x_0, e_1, x_1, e_2, x_2, ..., e_{n\text{-}1}, x_{n\text{-}1}, e_n, x_n = y$$

que comienza en el vértice x y cuyo extremo es y y que contiene n aristas $e_j = \{x_{j\text{-}1}, x_j\}$, con $1 \leq j \leq n$.

Consideraciones:

- La longitud de un camino es n, el número de aristas que hay en el camino.
- Cuando $n = 0$ no existen aristas y el camino se dice que es trivial.
- Un camino es cerrado si $x = y$; en caso contrario, el camino es abierto.
- Dado un grafo G, recibe el nombre de **camino simple** todo camino sin aristas o lados repetidos, es decir, un camino que no pasa dos veces por la misma arista. Obsérvese que un camino simple puede tener vértices repetidos.
- Dado un grafo G, recibe el nombre de **camino elemental** todo camino simple sin vértices repetidos, es decir, un camino que no pasa dos veces por la misma arista ni por el mismo vértice.
- Dado un grafo G, un **circuito** , es un camino simple cerrado, es decir, camino sin aristas repetidas en el que coinciden los vértices inicial y final. Este concepto implica la presencia, al menos, de una arista. Cuando no existe más que una arista el circuito es un *bucle*.
- Dado un grafo G, un **ciclo** es un camino elemental cerrado. El concepto de ciclo implica la presencia, al menos, de tres aristas distintas de un grafo, por lo que la longitud de un ciclo es mayor o igual que 3. Todo ciclo es un circuito.

- Dado un grafo G, una cadena es un camino elemental abierto.

Conectividad en grafos no dirigidos

Decimos que un grafo no dirigido es **conexo** si existe un camino para cada par de vértices del grafo. En caso contrario decimos que el grafo es **disconexo**.

Un grafo disconexo es la unión de dos o más subgrafos conexos que entre ellos no tienen **ningún vértice en común**. A estos subgrafos conexos disjuntos se les llama **componentes conexas** del grafo.

Se llama **vértice de corte o punto de articulación** a un vértice que, si se elimina, produce un grafo con más componentes conexas. Análogamente, se llama **arco de corte o puente** a un arco que, si se elimina, produce más componentes conexas en el grafo. Llamamos grafo no separable a un grafo sin vértices de corte.

Se llama **conectividad de los vértices** de un grafo G y notamos $k(G)$ al mínimo número de vértices que deben eliminarse de G para desconectarlo, o bien alcanzar un grafo con un solo vértice. En los grafos disconexos $k(G) = 0$ y en los grafos con vértices de corte $k(G) = 1$.

Análogamente, en un grafo conectado G se llaman arcos de corte a los arcos que, si eliminamos alguno de G, obtenemos un grafo disconexo. Se llama **conectividad de los arcos** y notamos $\lambda(G)$ al número mínimo de arcos que deben eliminarse de G para desconectarlo.

Conectividad en grafos dirigidos

Decimos que un grafo dirigido es **fuertemente conexo** si para cada par de vértices a, b del grafo existe un camino entre a y b y un camino entre b y a. Decimos que un grafo dirigido es **débilmente cone**xo si para cada par de vértices existe un camino entre a y b, o bien un camino entre b y a, es decir, en el grafo no conectado subyacente existe un camino para cada par de vértices a, b del grafo. En caso contrario decimos que el grafo es **disconexo**.

Dado un grafo dirigido no fuertemente conexo, este es la unión de dos o más subgrafos fuertemente conexos. A estos subgrafos conexos disjuntos se les llama **componentes conexas fuerte**s del grafo.

Aplicaciones de la longitud de los caminos

Sabemos que tres propiedades invariantes de los grafos son el número de vértices, el número de arcos y el grado de los vértices. Otra propiedad invariante de los grafos es la longitud de los caminos. La longitud de los caminos se puede usar para determinar que dos grafos no son isomorfos por no tener caminos de la misma longitud.
El número de caminos entre dos vértices vi, vj de un grafo se puede determinar usando su matriz de adyacencia gracias al siguiente teorema.

Teorema 3

El total de caminos diferentes en un grafo, multigrafo o digrafo G, de longitud r, desde el vértice v_i al v_j , es igual al elemento i, j de la matriz de A^r, es decir, $(A^r)_{i,j}$, siendo A la matriz de adyacencia.

Consecuencia: la suma de los elementos de la diagonal principal (traza) de A^2 es la suma de los grados de todos los vértices de G.

Este teorema también se puede utilizar para encontrar el camino más corto entre dos vértices.

Grafos planos

Para finalizar el tema, introducimos en esta sección dos conceptos relacionados con los caminos de los grafos, con aplicaciones importantes en el ámbito de la informática. Nos planteamos lo siguiente:

- ¿qué grafos pueden dibujarse en un plano sin que se corte ningún par de aristas? (grafos planos).
- ¿Podemos movernos por las aristas de un grafo comenzando en un vértice y volviendo a él después de haber pasado por cada arista del grafo exactamente una vez? (circuitos eulerianos)
- Análogamente, ¿podemos desplazarnos por las aristas de un grafo comenzando en un vértice y volviendo a él después de haber visitado cada vértice del grafo exactamente una vez? (circuitos hamiltonianos)

Un grafo o multigrafo G se dice que es un grafo plano si es posible dibujarlo en un plano de manera que ningún par de sus aristas se corte, a no ser únicamente en los vértices con los que son incidentes. A este dibujo se le denomina representación plana del grafo. El que un grafo sea o no plano desempeña un importante papel en el diseño de circuitos impresos.
Euler demostró que todas las representaciones planas de un determinado grafo dividen al plano donde reside dicho grafo en el mismo número de regiones.

Fórmula de Euler: Sea G un grafo plano simple conexo con orden n y medida m. El número de regiones del plano de cualquier realización plana de G es:

$$r = m - n + 2.$$

Definición 4

Sea $G = (V, E)$ un grafo o multigrafo sin vértices aislados. Un camino simple de G desde a hasta b que pase por todos los lados de G sólo una vez, recibe el nombre de **camino simple de Euler** o **recorrido de Euler**.

Se denomina **circuito de Euler** del grafo G, a todo circuito del mismo que pase por todos los lados de G pero sólo una vez, por tanto si G posee un circuito de Euler, se dice que es un **grafo euleriano**

Teorema 4

Sea G un grafo (no digrafo) o multigrafo sin vértices aislados. Entonces, G posee un circuito de Euler si y sólo si es conexo y cada vértice de G es de grado par.

Con este teorema queda probado que el problema de los siete puentes de Königsberg no tiene solución ya que, en el grafo correspondiente, todos los vértices son de grado impar.
Otros problemas que requieren encontrar circuitos y caminos de Euler son: el problema de la limpieza de las calles, el diseño de circuitos impresos, las redes de multidifusión y problemas de secuenciar el ADN en biología molecular.

El **algoritmo de Euler** para encontrar un circuito euleriano E en un grafo G euleriano (grafo conexo con vértices de grado par) consiste en:

- Comenzar en cualquier vértice
- Mientras lados de G no estén contenidos en E, hacer:

- Elegir cualquier vértice w de E incidente con lado no utilizado.
- Comenzar en w y construir un camino simple cerrado con lados no utilizados.
- Ampliar E añadiendo camino simple cerrado en vértice w.

▶ Volver a hacer.

Nota: Puseto que G es conexo, al suprimir de G los lados utilizados, el subgrafo obtenido tiene, al menos, un vértice común con el circuito suprimido.

La idea desarrollada sobre los grafos eulerianos, puede ser ampliada a los digrafos:

Teorema 5

Teorema de Euler para digrafos: Sea $G = (V, E)$ un digrafo o multigrafo, conexo y sin vértices aislados. Entonces, G posee un circuito dirigido de Euler si y sólo si $\delta^-(v_j) = \delta^+(v_j)$, para todo vértice $v_j \in V$.

Nos planteamos determinar condiciones necesarias y suficientes para la existencia de caminos y circuitos simples que pasen exactamente una vez por cada vértice del grafo.

Definición 5

Sea $G = (V, E)$ un grafo con $|V| \geq 3$ sin vértices aislados. Un camino elemental de G que contiene todos sus vértices recibe el nombre de **camino de Hamilton**.

Se denomina **ciclo de Hamilton** del grafo G, a todo ciclo del mismo que contenga todos los vértices de V. Por tanto si G posee un ciclo de Hamilton, se dice un **grafo hamiltoniano**.

El origen de esta terminología es un juego, el juego icosiano o la vuelta al mundo, inventado en 1857 por WILLIAM ROWAN HAMILTON (1805–1865).

Consistía en un dodecaedro de madera (un poliedro de 12 caras, cada una de las cuales es un pentágono regular) con un alfiler saliendo de cada uno de sus 20 vértices, etiquetados con el nombre de distintas ciudades del mundo.

El objetivo del juego era comenzar en una ciudad, viajar siguiendo las aristas del dodecaedro visitando cada una de las otras 19 ciudades exactamente una vez y terminar el viaje en la primera ciudad.

El circuito seguido se marcaba utilizando una cuerda y los alfileres.

pesar de ser nociones próximas, la propiedad de ser euleriano o hamiltoniano son independientes.

No existen condiciones necesarias y suficientes para encontrar caminos o ciclos de Hamilton de un grafo, por lo que el problema de concluir si un grafo es o no hamiltoniano puede llegar a ser complicado, sobre todo si el grafo es grande. A veces, resulta muy sencillo aplicar las siguientes propiedades:

- Un grafo con un vértice de grado uno no posee un ciclo de Hamilton, puesto que en tales ciclos cada vértice es incidente con dos lados del mismo.
- Si un vértice del grafo tiene grado dos, entonces las dos aristas que son incidentes con ese vértice tienen que formar parte de cualquier ciclo de Hamilton.
- Cuando se construye un ciclo de Hamilton y éste ha pasado por un vértice, pueden descartarse todas las aristas incidentes con ese vértice que no sean las dos usadas en el ciclo.
- Un ciclo de Hamilton no puede contener otro ciclo más pequeño, dentro de él. Tampoco puede contener un vértice de corte o articulación.
- Todo grafo completo K_n es hamiltoniano.
- Si G tiene un ciclo de Hamilton, entonces para todo $v \in V$ se verifica que el$deg(v) \geq 2$.

Condición necesaria: Si G es un grafo hamiltoniano entonces para todo subconjunto V_1 no vacío de vértices de G, el número de componentes de G– $\{V1\}$ verifica: $k(G$– $\{V_1\}) \leq |V1|$.

El famoso problema del viajante pregunta cuál es la ruta más corta que debe seguir un viajante para visitar un conjunto de ciudades, y regresar al punto de partida, minimizando el coste: número de kilómetros recorridos, el tiempo empleado, etc.

Este problema se reduce al de hallar un circuito hamiltoniano en un grafo completo de forma que el peso total de sus aristas sea tan pequeño como sea posible. La forma más directa es examinar todos los posibles circuitos hamiltonianos y elegir uno de longitud total mínima. Por ejemplo, para 25 vértices habría que considerar un total de $24!/2$ circuitos diferentes.

En la actualidad, no se conoce ningún algoritmo eficiente para resolver dicho problema. Un enfoque práctico para resolver el problema del viajante cuando hay muchos vértices que visitar es utilizar un algoritmo de aproximación.

Se recomienda la lectura del siguiente artículo:

Z. ZHANG y H. LI, *Algorithms for long paths in graphs Theoretical Computer Science*, 377, (2007), pp. 25–34.

9.10 Referencias bibliográficas

Rosen K. (2012). Discrete.Mathematics.and ItsApplications. Mac Graw Hill.

Valiente, G. (2007). Algorithms on Trees and Graphs. Berlín: Springer.

Leiserson, C., Rivest, R., Stein, C. (2009). Introduction to Algorithms, 3rd edtion. Massachusetts: MIT Press.

Grimaldi, R.P., (2004). Discrete and combinatorial mathematics (5th ed). Pearson.

Hunter, D.J., (2017). Essentials of discrete mathematics (3rd edition). Jones & Bartlett and Hall Learning.

9.11 Cuaderno de ejercicios

Ejercicio 1.

Calcula la vecindad y grado de los vértices del siguiente grafo. Indica qué vértices son hojas o aislados.

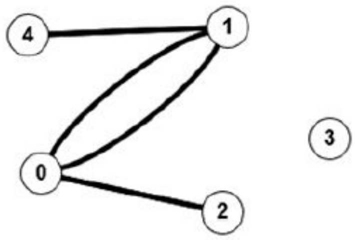


Figura 7: Ejercicio 1.

Ejercicio 2.

El problema de los puentes de Köningsberg (ver grafo que representa esquemáticamente el problema: las aristas son los puentes y los vértices las islas y orillas del río) pregunta si es posible encontrar un ciclo que recorra todos los puentes (aristas) una sola vez. Demuestra que no es posible. Si en vez de ciclo buscamos un camino, ¿es posible resolver el problema?

Ejercicio 3.

¿Cuál de los siguientes grafos es bipartito?

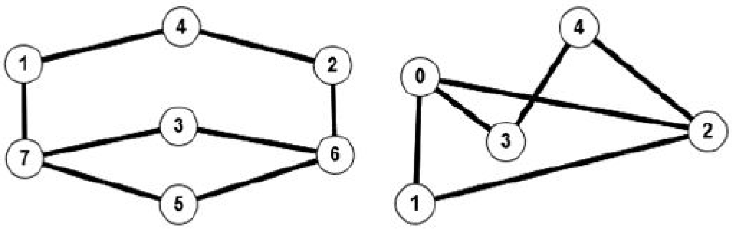


Figura 8: Ejercicio 3.

Ejercicio 4.

Encuentra un emparejamiento máximo del siguiente grafo bipartito.

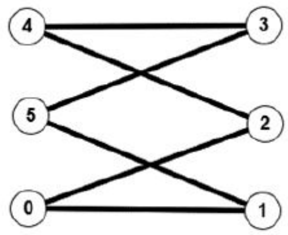


Figura 9: Ejercicio 4.

Ejercicio 5.

Encuentra el subgrafo inducido por los vértices $\{2, 4, 5, 6\}$

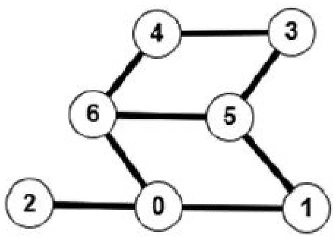


Figura 10: Ejercicio 5.

Ejercicio 6.

Representa este grafo con lista de adyacencias, matriz de adyacencias y matriz de incidencia.

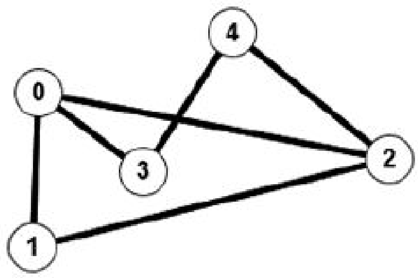


Figura 11: Ejercicio 6.

Ejercicio 7.

Los siguientes grafos son isomorfos. Encuentra la biyección que los relaciona.

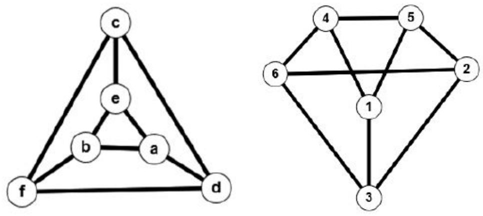


Figura 12: Ejercicio 7.

Ejercicio 8.

Calcula la conectividad de vértices y de arcos de K_5, C_6, W_6 y Q_3.

Ejercicio 9.

¿La conectividad de vértices y de arcos es siempre igual? Encuentra un grafo en que no sea así.

Ejercicio 10.

Calcular la unión de los grafos G_1 y G_2 de la figura.

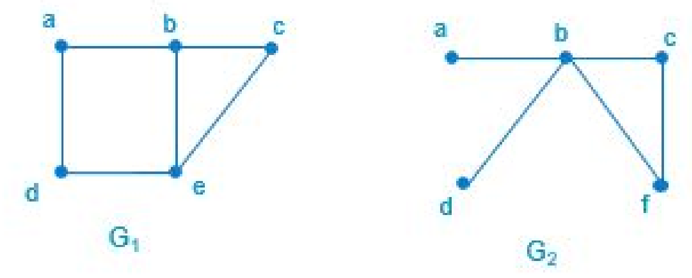


Figura 13: Ejercicio 10.

9.12 Soluciones cuaderno de ejercicios

Solución 1.

- $N(0) = \{1, 2\}, deg(0) = 3$
- $N(1) = \{0, 4\}, deg(1) = 3$
- $N(2) = \{0\}, deg(2) = 1$ Es una hoja.
- $N(3) = \{\}, deg(3) = 0$ Es un vértice aislado.
- $N(4) = \{1\}, deg(2) = 1$ Es una hoja.

Solución 2.

Un camino que recorra el grafo siempre que entre por un vértice sale por otra arista de este. Si un vértice tiene un número impar de aristas, cada vez que pasamos por él gastamos dos y al final llegaremos al vértice por la última arista y no podremos salir.

Por consiguiente, un camino con la propiedad que no puede repetir aristas y recorra todos los vértices solo puede tener 2 vértices con grado impar: el de salida y el de llegada. Si consideramos que un ciclo el vértice de salida es el mismo que el de llegada, luego ningún vértice puede tener grado impar.

En el grafo de los puentes de Köningsberg hay 5 vértices con grado impar, por lo que es imposible encontrar ni un ciclo ni un camino con las propiedades que piden.

Solución 3.

El primer grafo es bipartito ya que puede ser coloreado de forma alternada $1, 2, 3, 5$. El segundo no es bipartito; no se puede encontrar ningún vértice que no tenga vértices adyacentes.

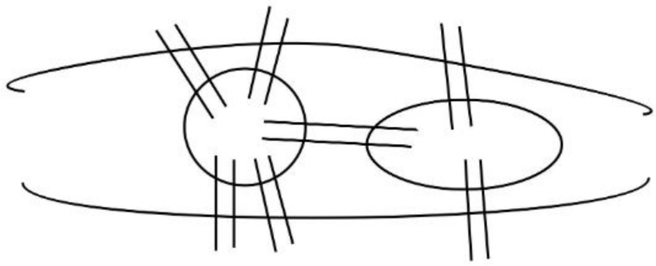


Figura 14: Esquema de los puentes de Könisberg (Alemania).

Solución 4.

Un posible emparejamiento puede ser:

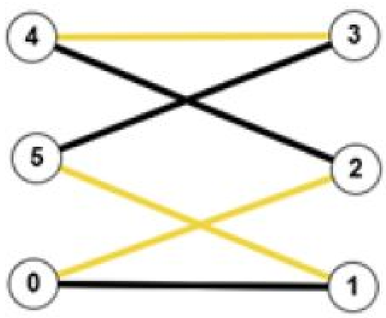


Figura 15: Solución ejercicio 4.

Solución 5.

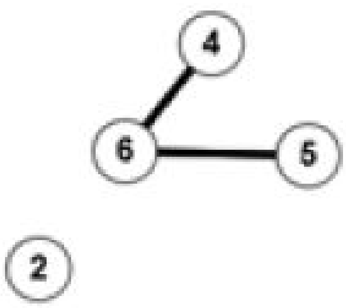


Figura 16: Solución ejercicio 5.

Solución 6. La lista de adyacencias es: $\{(0,1),(0,2),(0,3),(1,2),(2,4),(3,4)\}$

La matriz de adyacencias es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz de incidencias es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En la matriz de incidencias los arcos forman las columnas de la matriz y están ordenados en el orden en el que se escribe la lista de adyacencias

Solución 7. Una posible biyección es:

$g(a) = 5, g(b) = 4, g(c) = 3, g(d) = 2, g(e) = 1, g(f) = 6$

Solución 8.

- $k(K_5) = 4, k(C_6) = 2, k(W_6) = 3, k(Q_3) = 3$
- $\lambda(K_5) = 4, \lambda(C_6) = 2, \lambda(W_6) = 3, \lambda(Q_3) = 3$

Solución 9.

Pueden ser distintos. Por ejemplo, el siguiente grafo queda desconectado cuando quitamos el vértice 2, por lo que su conectividad por vértices es 1. En cambio, necesitamos quitar al menos dos aristas para hacerlo disconexo, por lo que su conectividad por arco es 2.

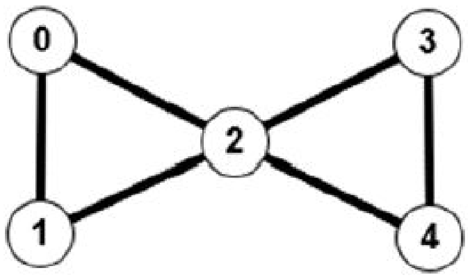


Figura 17: Solución ejercicio 9.

Solución 10.

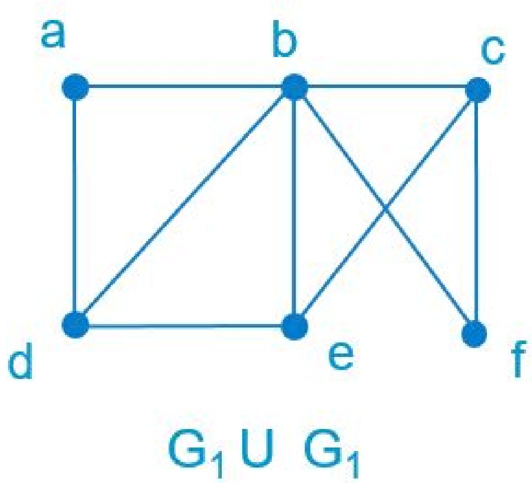


Figura 18: Solución ejercicio 10.

9.13 A fondo

A fondo

El teorema de los cuatro colores: la teoría de grafos al servicio del coloreado de mapas

Este artículo repasa la evolución histórica del conocido problema de colorear regiones en un mapa y cómo se afronta este problema mediante teoría de grafos.

Diamond. (25 de abril de 2013). *El teorema de los cuatro colores: la teoría de grafos al servicio del coloreado de mapas.* Gaussianos. https://www.gaussianos.com/el-teorema-de-los-cuatro-colores-la-teoria-de-grafos-al-servicio-del-coloreado-de-mapas/

Graph Theory

La cuarta edición de este libro de texto de la teoría de grafos moderna ha sido cuidadosamente revisada, actualizada y ampliada. Cubre todos sus principales desarrollos recientes y puede ser utilizado tanto como un libro de texto para un curso de introducción, como un texto de grado. En cada tema se cubre todo el material básico con todo detalle y añade uno o dos resultados más profundos (de nuevo con las pruebas detalladas) para ilustrar los métodos más avanzados de ese campo.

Diestel, R. (2010*). Graph Theory.* Springer.

Wolfram Mathematica

Mathematica dispone de una excelente herramienta, denominada COMBINATORICA, para el estudio de la teoría de grafos, cuya documentación se encuentra en el libro:

Computational Discrete Mathematics: Combinatorics and Graph Theory with Mathematica, de STEVEN SKIENA y SRIRAM PEMMARAJU, publicado por Cambridge University Press, 2003

9.14 Test

Test

1. ¿Qué no tiene un multigrafo?

A. Vértices aislados.

B. Vértices hoja.

C. Arcos múltiples.

D. Bucles.

2. ¿Qué es un grafo mixto?

A. Un grafo que tiene vértices y arcos.

B. Un grafo que incluye varios arcos entre dos vértices.

C. Un grafo que incluye arcos unidireccionales y bidireccionales.

D. Un grafo que representa relaciones y bucles.

3. ¿Qué es el grado de un vértice?

A. El valor asociado al vértice.

B. El tamaño del vértice.

C. El número de vértices a su alrededor.

D. El número de arcos que lo alcanzan.

4. Todo grafo no dirigido tiene:

A. Un número impar de vértices con grado impar.

B. Un número impar de vértices con grado impar.

C. Un número par de vértices con grado impar.

D. Un número par de vértices con grado par.

5. Un grafo simple es bipartito si y solo si no es posible trazar un camino que empiece y termine en un vértice _______:

A. Atravesando un número par de vértices distintos.

B. Atravesando un número par de vértices iguales.

C. Atravesando un número impar de vértices distintos.

D. Atravesando un número impar de vértices iguales.

6. El teorema del matrimonio de Hall afirma que, dado un grafo bipartito con bipartición V_1,V_2, existe un emparejamiento completo de V_1 aV_2 si y solo si:

A. $|N(V1)| \geq |A|$ para algún subconjunto A de$V1$.

B.$|N(V1)| \geq |A|$ para todos los subconjuntos A de $V1$.

C. $|N(A)| \geq |A|$ para algún subconjunto A de $V1$.

D. $|N(A)| \geq |A|$ para todos los subconjuntos A de $V1$.

7. Sea G=(V,E) un grafo simple y W un subconjunto de V, decimos que H = (W,F) es un grafo inducido por W si:

A. E contiene los arcos de F que conectan extremos, ambos forman parte de V.

B. F contiene algún arco de E que conecta extremos, ambos forman parte de V.

C. F contiene los arcos de E que conectan extremos, ambos forman parte de W.

D. F contiene algún arco de E que conecta extremos, ambos forman parte de W.

8. Dos grafos son isomorfos y sabemos que uno de ellos tiene exactamente un ciclo de longitud d. ¿Qué podemos decir de los ciclos del otro grafo?

A. Tiene exactamente un ciclo de longitud d.

B. Tiene exactamente un ciclo, pero la longitud puede ser distinta.

C. Tiene al menos un ciclo.

D. No hay relación entre los ciclos de ambos grafos.

9. ¿Cuál de estas propiedades no son invariantes para los grafos?

A. El número de vértices.

B. El número de arcos.

C. El grado de los vértices.

D. Las tres anteriores son invariantes.

10. Al remover n vértices de un grafo G, obtenemos un grafo disconexo. ¿Qué podemos decir con seguridad de su conectividad de vértices?

A. $k(G) \leq n$.

B. $k(G) < n$

C. $k(G) \geq n$

D. $k(G) = n$.