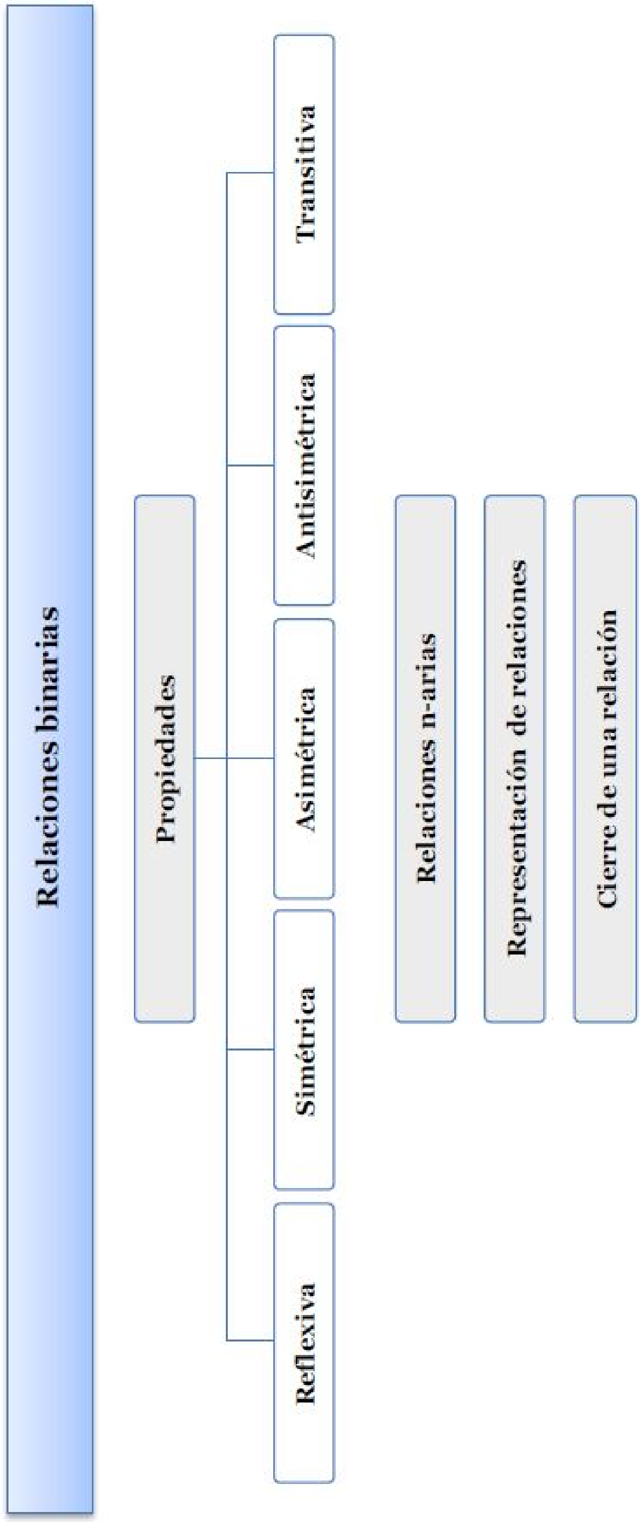
Álgebra y Matemática discreta

Relaciones

Índice

Esquema



Relaciones binarias
Propiedades
Reflexiva
Simétrica
Asimétrica
Antisimétrica
Transitiva
Relaciones n-arias
Representación de relaciones
Cierre de una relación

8.1 Introducción y objetivos

Las relaciones son un concepto fundamental en las matemáticas que se utilizan para describir la conexión o la correspondencia entre dos conjuntos de elementos. Una relación puede ser vista como un conjunto de pares ordenados, donde cada par representa una conexión entre un elemento del primer conjunto y otro elemento del segundo conjunto.

Existen varios tipos de relaciones en matemáticas en función de las propiedades que cumplan dicha relación, incluyendo relaciones de equivalencia, relaciones de orden y relaciones de función o funciones, que fueron estudiadas en el tema anterior. Las relaciones de equivalencia son aquellas que cumplen con ciertas propiedades, como la reflexividad, simetría y transitividad, y se utilizan para clasificar elementos en grupos de equivalencia. Las relaciones de orden, por otro lado, se utilizan para comparar elementos y establecer un orden entre ellos, tal como se introdujo con el principio de la buena ordenación a lo largo del tema 2. Finalmente, las relaciones de función o funciones, son aquellas que relacionan cada elemento del primer conjunto con exactamente un elemento del segundo conjunto, tal como se estudió en el tema anterior.

Las relaciones se utilizan en muchas áreas de las matemáticas, como en la teoría de conjuntos, la teoría de gráficas, la geometría y el análisis matemático. Además, son un concepto clave en la programación, la teoría de bases de datos y otras áreas de la informática.

A lo largo del presente tema, se analizan las relaciones de forma genérica y sus propiedades, para analizar con mas detalle las relaciones binarias y extender el concepto a las n-arias. Finalmente, se estudiará la representación gráfica de las relaciones.

Por tanto, se persiguen en este tema los siguientes objetivos:

- Comprender el concepto de relación.
- Conocer las propiedades de las relaciones.
- Estudiar las relaciones Binarias.
- Conocer la representación gráfica de las relaciones.

Para alcanzar estos objetivos, se propone la siguiente subdivisión del contenido de este tema:

- Relaciones binarias.
- Propiedades de las relaciones.
- Relaciones n-arias.
- Representación de una relación.
- Cierre de una relación.

8.2 Relaciones binarias

Una relación binaria es un tipo de relación que se establece entre dos conjuntos. En una relación binaria, cada elemento del primer conjunto se relaciona con cero o más elementos del segundo conjunto. Por ejemplo, si tenemos dos conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b, c\}$, una posible relación binaria entre ellos podría ser $R = \{(1, a), (1, b), (2, c), (3, a)\}$. Esta relación establece que el elemento 1 del conjunto A se relaciona con los elementos a y b del conjunto B, el elemento 2 se relaciona con el elemento c, y el elemento 3 se relaciona con el elemento a.

Definición 1

Dados dos conjuntos A, B, una relación binaria de A en B es un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$. Dada la relación R, estos pares ordenados se representan como $(a, b) \in \mathbb{R}$.

Por tanto, una relación binaria entre A y B es un conjunto R de pares ordenados y se denota como aRa, para indicar que $(a, b) \in R$ y $a\not{R}b$ cuando se quiere indicar que a y b no están relacionados.

Ejemplo 1.

En el ámbito de la informática, encontramos numerosos ejemplos de relación, así, cuando un compilador traduce un programa, construye una tabla de símbolos, los atributos asociados a cada nombre y las operaciones que el programa realiza con los nombres. Así pues, si S es el conjunto de los símbolos, A es el conjunto de los posibles atributos y P es el conjunto de las sentencias de programa, entonces el compilador, establece las relaciones binarias S en A y S en P.

Tal como se ha comentado en la introducción, una función, es un tipo de relación. Basta fijarse en la definición de gráfica de una función ($Graf(f)$) dada en el tema anterior, como un conjunto de pares ordenados $(a, b) \in A \times B$, que cumple la propiedad de que cada elemento de A es siempre el primer elemento de cada par ordenado que pertenece a la relación. Además, cada elemento de A se relaciona únicamente con un elemento del conjunto B.

Por tanto, podemos en cierta medida decir que una relación es una generalización del concepto de función, que permite una expresar una mayor cantidad de conjuntos.

Un caso particular de relación binaria es la que se puede dar entre elementos de un mismo conjunto:

Definición 2

Una *relación* ***en un conjunto*** A, es una relación de A en$A$.

De esta forma, una relación de A en A es un subconjunto de $A \times A$. Veámoslo en un ejemplo:

Ejemplo 2.

Sea A el conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$ y buscamos los pares ordenados que están relacionados de tal manera que dado un par (a, b), a divide b, es decir:

$$R = \{(a, b) \mid a\ divide\ a\ b\}$$

Solución

$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}$.

En los ejemplos que hemos visto hasta el momento, se daban relaciones entre conjuntos finitos, pero las relaciones también se pueden dar entre conjuntos infinitos, como las relaciones en el conjunto de los números enteros que se muestran en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3.

Las siguientes son relaciones en el conjunto de los números enteros:

- $R_1 = \{(a, b) \mid a \leq b\}$
- $R_2 = \{(a, b) \mid a > b\}$
- $R_3 = \{(a, b)$ mín $a = b$ o $a = -b\}$
- $R_4 = \{(a, b) \mid a = b\}$

Tal como se estableció para las funciones, se definen para una relación, los conjuntos dominio e imagen, referidos a los conjuntos a los que pertenecen los elementos que cumplen una determinada relación:

Definición 3

Dada una relación R de A en B, se llama dominio de una relación R al conjunto de todos los primeros elementos de los pares ordenados que pertenecen a R.

$$Dom(R) = \{a \in A \mid \exists b \in B \wedge (a, b) \in R\}$$

Se llama imagen de una relación R al conjunto de todos los segundos elementos de los pares ordenados que pertenecen a R

$$Img(R) = \{b \in B \mid \exists a \in A \wedge (a, b) \in R\}$$

Como hemos visto, se pueden dar multitud de relaciones, cada una de ellas, contendrá un número de elementos o pares ordenados, que puede ser un conjunto de cardinal finito o infinito. Además, se pueden definir una serie de propiedades que dependiendo de las que se cumplan para una relación concreta, dará lugar a los diferentes tipos de relaciones mencionadas en la introducción de este tema.

8.3 Propiedades de una relación

En esta sección vamos a definir las propiedades mas importantes que cumplen las relaciones que se dan *en* un conjunto, es decir, las relaciones de A en A. Así, dependiendo de las propiedades que cumpla cada relación, podremos clasificarlas en distintos tipos.

Definición 4: Reflexividad

Una relación binaria $\mathcal{R}$ sobre un conjunto A se dice que es reflexiva, cuando cada elemento de A está relacionado consigo mismo. Es decir:

$$\mathcal{R}\, es\, reflexiva \Leftrightarrow \forall a(a \in A \Longrightarrow a\mathcal{R}a)$$

La equivalencia anterior también puede ser escrita de la siguiente forma utilizando la notación de equivalencias lógicas vista en el tema 1:

$$\mathcal{R}\, es\, reflexiva \Leftrightarrow \forall a\left[\neg(a \in A) \vee a\mathcal{R}a\right]$$

Negando ambos miembros, tenemos:

$$\mathcal{R}\, no\, es\, reflexiva \Leftrightarrow \exists a : \neg[(\neg(a \in A) \vee a\mathcal{R}a)]$$

Que resulta equivalente a:

$$\mathcal{R}\, no\, es\, reflexiva \Leftrightarrow \exists a : (a \in A \wedge a\not\mathcal{R}a)$$

Por tanto, atendiendo a esta definición, si encontramos al menos un elemento a en el conjunto A el cual no esté relacionado consigo mismo, podremos concluir que la relación $\mathcal{R}$ no es reflexiva.

Ejemplo 4.

Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2)(3, 3), (3, 2), (4, 4)\}$ una relación definida en A.

¿Es esta relación reflexiva?

Solución: Ciertamente, $\mathcal{R}$ es reflexiva dado que para cada elemento $a \in A$ el par (a, a) está dentro de los elementos que forman la relación.

Por tanto, para concluir si una relación es reflexiva o no lo es, hemos de estudiar si todos los elementos que forman parte de dicha relación pertenecen a ella.

Ejemplo 5.

Estudiar la reflexividad de las relaciones *"mayor que"* y *"menor o igual que"* definidas sobre el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$

Solución:

- Analizamos la relación: $a\mathcal{R}b \iff a \leq b$.

  Vemos que para cualquier entero a, se cumple trivialmente que $a = a$, y por tanto se cumple la sentencia $a = a \vee a < a$, es decir, $a \leq a$.

  De esta forma, podemos escribir: $\forall a(a \in \mathbb{Z} \implies a\mathcal{R}a)$ y por tanto, la relación *"menor o igual que"* es una relación *reflexiva*.

- Para la relación: $a\mathcal{R}b \iff a < b$, procedemos de la misma forma:

  Nuevamente vemos que para cualquier entero a, se cumple trivialmente que $a = a$ y por tanto, a no es menor que a, de tal forma que $a\not\mathcal{R}a$, es decir, la relación *"menor que"*, no es una relación reflexiva.

Definición 5: Simetría

Una relación binaria $\mathcal{R}$ sobre un conjunto A se dice que es simétrica si para cada par $(a, b) \in \mathcal{R}$, el par (b, a) también pertenece a la relación, es decir:

$$\mathcal{R}\ es\ simtrica \iff \forall a, b \in A(a\mathcal{R}b \implies b\mathcal{R}a)$$

Podemos escribir esta definición siguiendo al notación de equivalencias lógicas como:

$$\mathcal{R}\ es\ simtrica \Leftrightarrow \forall a, b \in A\,[(a\mathcal{R}b \vee b\mathcal{R}a)]$$

Negando ambos miembros de la ecuación, nos queda que:

$$\neg(\mathcal{R})\ es\ simtrica \Leftrightarrow \forall a, b \in A \neg\,[(a\mathcal{R}b \vee b\mathcal{R}a)]$$

Que es equivalente a:

$$(\mathcal{R})\ no\ es\ simtrica \Leftrightarrow \forall a, b \in A \wedge \left[(a\mathcal{R}b \vee b\not{\mathcal{R}}a)\right]$$

Ejemplo 6.

Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)(2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$ una relación definida en A.

¿Es esta relación simétrica?

Solución: Ciertamente, $\mathcal{R}$ es simétrica, ya que para cada par $(a, b) \in \mathcal{R}$, el par (b, a) también pertenece a $\mathcal{R}$.

Por lo tanto, si encontramos dos elementos a y b pertenecientes al conjunto A de tal forma que a esté relacionado con b pero b no esté relacionado con a, entonces decimos que la relación $\mathcal{R}$ no es simétrica.

Es importante tener en cuenta que los términos simétrico y antisimétrico no son opuestos, puesto que una relación puede tener ambas propiedades o puede carecer de ambas. Una relación no puede ser a la vez simétrica y antisimétrica si contiene algún par de la forma (a, b) con $a \neq b$.

Definición 6: Asimetría

Una relación binaria $\mathcal{R}$ sobre un conjunto A se dice que es asimétrica si cuando $a\mathcal{R}b$, entonces $b\not{\mathcal{R}}a$, es decir:

$$\mathcal{R}\ es\ asimtrica \iff \forall a, b \in A(a\mathcal{R}b \implies b\not{\mathcal{R}}a)$$

Ejemplo 7.

Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $\mathcal{R} = \{(1, 2), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (4, 3)\}$ una relación definida en A.

¿Es esta relación asimétrica?

Solución: Ciertamente, $\mathcal{R}$ es asimétrica, ya que para cada par $(a, b) \in \mathcal{R}$, el par (b, a) NO pertenece a $\mathcal{R}$.

Definición 7: Antisimetría

Una relación binaria $\mathcal{R}$ sobre un conjunto A se dice que es antisimétrica si cuando $a\mathcal{R}b$ y $b\mathcal{R}a$, entonces $a = b$, es decir:

$$\mathcal{R}\ es\ antisimtrica \iff \forall a, b \in A(a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}a \implies a = b)$$

Podemos escribir esta definición siguiendo al notación de equivalencias lógicas como:

$$\mathcal{R}\ es\ antisimtrica \Leftrightarrow \forall a, b \in A\left[\neg(a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}a) \vee (a = b)\right]$$

Negando ambos miembros de la ecuación, nos queda que:

$$(\mathcal{R})\ no\ es\ antisimtrica \Leftrightarrow \exists a, b \in A : (a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}a \wedge a \neq b)$$

Es decir, si podemos encontrar dos elementos a y b tales que a está relacionado con b y b está relacionado con a, siendo a y b distintos, entonces la relación no es antisimétrica.

Ejemplo 8.

Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $\mathcal{R} = \{(1, 2), (2, 2), (3, 4)(4, 1)\}$ una relación definida en A.

¿Es esta relación antisimétrica?

Solución: Se puede ver que:

- $1 \neq 2$ y $(1, 2) \in \mathcal{R}$, pero $(2, 1) \notin \mathcal{R}$, es decir, $1\mathcal{R}2 \wedge 2\not\mathcal{R}1$.
- $1 \neq 3$ y $(1, 3) \notin \mathcal{R}$ y $(3, 1) \notin \mathcal{R}$, es decir, $1\not\mathcal{R}3 \wedge 3\not\mathcal{R}1$.
- $1 \neq 4$ y $(4, 1) \in \mathcal{R}$, pero $(1, 4) \notin \mathcal{R}$, es decir, $4\mathcal{R}1 \wedge 1\not\mathcal{R}4$.
- $2 \neq 3$ y $(2, 3) \notin \mathcal{R}$, $(3, 2) \notin \mathcal{R}$, es decir, $2\not\mathcal{R}3 \wedge 3\not\mathcal{R}2$.
- $2 \neq 4$ y $(2, 4) \notin \mathcal{R}$, $(4, 2) \notin \mathcal{R}$, es decir, $2\not\mathcal{R}4 \wedge 4\not\mathcal{R}2$.
- $3 \neq 4$ y $(3, 4) \in \mathcal{R}$, pero $(4, 3) \notin \mathcal{R}$, es decir, $3\mathcal{R}4 \wedge 4\not\mathcal{R}3$.

  Por tanto, si $a \neq b$ entonces $(a, b) \notin \mathcal{R}$ ó $(b, a) \notin \mathcal{R}$ y se obtiene que $\mathcal{R}$ es antisimétrica.

Ciertamente, $\mathcal{R}$ es asimétrica, ya que para cada par $(a, b) \in \mathcal{R}$, el par (b, a) NO pertenece a $\mathcal{R}$.

Veamos ahora otro ejemplo:

Ejemplo 9.

En el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros, consideramos la siguiente relación:

$$\mathcal{R} = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : a \leq b\}$$

Estudiar la simetría y antisimetría.

Solución:

Estudiamos en primer lugar la *Simetría*:

Si consideramos los enteros 1 y 2, se ve claramente que 1 es menor que 2 y 2 no es menor que 1, es decir:

$$1\mathcal{R}2 \;\; y \;\; 2\not\mathcal{R}1$$

Y por tanto, $\exists a, b \in \mathbb{Z} : (a\mathcal{R}b \wedge b\not\mathcal{R})$.

De esta forma, podemos asegurar que la relación no es simétrica.

Antisimetría: Dados a y b, dos enteros cualesquiera, se cumple que:

$$\begin{aligned} a \neq b &\Longrightarrow a < b \vee b < a \\ &\Longrightarrow \neg(b \leq a) \vee \neg(a \leq b) \\ &\Longrightarrow a\not\mathcal{R}a \vee b\not\mathcal{R}a \end{aligned}$$

Y así se tiene que:

$$\forall a, b \in A(a \neg b \Longrightarrow a\not\mathcal{R}b \vee b\not\mathcal{R}a)$$

Por tanto, la relación propuesta es *antisimétrica*.

Definición 8: Transitividad

Se dice que una relación $\mathcal{R}$ definida en un conjunto A es transitiva si cuando $(a, b) \in \mathcal{R}\, y\, (b, c) \in \mathcal{R}$, entonces$(a, c) \in \mathcal{R}$. Es decir,

$$\mathcal{R}\ es\ transitiva \iff \forall a, b, c \in A(a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}c \Longrightarrow a\mathcal{R}c)$$

Atendiendo a esta definición, podemos decir que una relación no es transitiva si podemos encontrar elementos $a, b, c, \in A$, tales que $a\mathcal{R}b, b\mathcal{R}c$, pero $a\not\mathcal{R}c$.

Toda aquella relación que es reflexiva, simétrica y transitiva, se dice que es una **relación de equivalencia**. Por ejemplo la relación de igualdad $(=)$, es una relación de equivalencia.

Una relación reflexiva, antisimétrica y transitiva, es una **relación de orden**. Las desigualdades $(\ \leq\ y\ \geq)$ son relaciones de orden.

Para finalizar con esta sección en la que se analizan las propiedades de las relaciones binarias, introducimos los conceptos de combinación y composición de relaciones y el de relación potencia.

Composición de relaciones

Al igual que ocurre con las con las funciones, como ya hemos visto, las relaciones entre A y B, son un subconjunto de del producto cartesiano $A \times B$ y por tanto, se pueden aplicar todas las operaciones conocidas para los conjuntos (unión, intersección, diferencia...). Por tanto, también se puede definir la composición de relaciones:

Definición 9

Dada una relación $\mathcal{R}$ de un conjunto A en un conjunto B y otra relación $\mathcal{S}$ de B a C, se define la relación compuesta de $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$ como el conjunto de pares ordenados (a, c) donde $a \in A, c \in C$ y existe un elemento $b \in B$ tal que $(a, b) \in \mathcal{R}$ y $(b, c) \in S$.

La relación compuesta de $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$ se denota $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$.

Encontrar los elementos que forman la composición de dos relaciones supone construir el conjunto de elementos que sean el segundo elemento de algún par ordenado de la primera relación y el primer elemento de algún par ordenado de la segunda, tal como se puede ver en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 10.

Encontrar la composición de las relaciones $\mathcal{R}\ y\ \mathcal{S}$ donde:

- $\mathcal{R}$ es la relación desde $\{1, 2, 3\}$ hasta $\{1, 2, 3, 4\}$

  con $\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 4), (2, 3), (3, 1), (3, 4)\}$

- $\mathcal{S}$ es la relación desde $\{1, 2, 3, 4\}$ hasta $\{0, 1, 2\}$

  con $\mathcal{S} = \{(1, 0), (2, 0), (3, 1), (3, 2), (4, 1)\}$

  Solución:

  $\mathcal{S} \circ \mathcal{R} = \{(1, 0), (1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 0), (3, 1)\}$ ya que estos pares se ha formado con el primer elemento de los pares de $\mathcal{R}$ y el segundo elemento de todos los pares de $\mathcal{S}$, que cumplen la condición de que el segundo elemento de cada par ordenado de $\mathcal{R}$ es igual al primer elemento de $\mathcal{S}$.

A partir de la definición de composición de relaciones, podemos definir la potencia de una relación, de forma recursiva:

Definición 10

Sea $\mathcal{R}$ una relación en un conjunto A. Las potencias $\mathcal{R}^n, n = 1, 2, 3, ...$ se definen de forma recursiva como:

$$\mathcal{R}^1 = \mathcal{R};\;\; \mathcal{R}^{n+1} = \mathcal{R}^n \circ \mathcal{R}$$

Ejemplo 11.

Dada la relación $\mathcal{R} = \{(1,1),(2,1),(3,2),(4,3)\}$, obtener las potencias $\mathcal{R}^2$ y $\mathcal{R}^3$.

Solución:

- $\mathcal{R}^2 = \mathcal{R} \circ \mathcal{R} = \{(1,1),(2,1),(3,1),(4,2)\}$, ya que cada par ordenado del conjunto solución se obtiene seleccionando como primer elemento el de aquellos pares cuyo segundo elemento sea igual al primero de algún otro par. Así, $(2,1)$ y $(3,2)$, generan el par $(3,1)$.
- De la misma forma se obtiene $\mathcal{R}^3 = \mathcal{R}^2 \circ \mathcal{R} = \{(1,1),(2,1),(3,1),(4,1)\}$.

8.4 Relaciones *n-arias*

En muchas ocasiones, se pueden establecer relaciones entre mas de dos conjuntos, como puede ser la que se establece al relacionar los estudiantes matriculados en una determinada titulación, con su número de expediente y su nota media. Así, se definen las relaciones *n-arias* de la siguiente manera:

Definición 11

Dados los conjuntos $A_1, A_2, A_3..., A_n$ se define una relación *n-aria* entre dichos conjuntos, como un subconjunto de $A_1 \times A_2 \times A_3... \times A_n$, donde los *dominios* de la relación son los conjuntos $A_1, A_2, A_3..., A_n$ y el *grado* de la relación es el número de conjuntos (n).

Ejemplo 12.

Dada la relación entre $\mathcal{R}$ establecida en $(N \times N \times N)$, que contiene las ternas (a, b, c) siendo estos enteros positivos, con $a < b < c$, entonces $(1, 2, 3) \in \mathcal{R}$, pero $(3, 7, 6) \notin \mathcal{R}$

8.5 Representación de relaciones

Resulta interesante utilizar otro tipo de representación para las relaciones, además de la representación de pares, ternas o -uplas ordenadas vista hasta el momento. Dos de las más comunes son a través de matrices y grafos dirigidos.

En la representación matricial, se utiliza una matriz para representar las relaciones entre los objetos o entidades. Cada elemento de la matriz representa una posible relación entre dos objetos, y el valor de cada elemento indica si existe o no una relación entre ellos. Por otro lado, en la representación gráfica o mediante grafos dirigidos, se utiliza un grafo para representar las relaciones entre los objetos o entidades.

Representación matricial

Aunque no es en el próximos capítulo en el que se estudian las matrices, introducimos ahora la definición e estas, dada su importancia para representar relaciones:

Definición 12

Una matriz es un conjunto de elementos a_{ij} ordenados en forma de tabla, donde i es el número de fila y j es el número de columna que ocupa cada elemento.

En nuestro caso particular, nos interesan las *matrices cero-uno* o *matrices boleanas*, que son aquellas matrices cuadradas en las que cada elemento de la matriz es verdadero (representado por el valor 1) o falso (representado por el valor 0). Pro tanto, la matriz que representa una relación $\mathcal{R}$ entre $A = \{a_1, a_2 ... a_n\}$ y $B = \{b_1, b_2 ... b_n\}$, tiene un 1 como elemento (i, j) si a_i tiene relación con b_j y un 0 en caso contrario.

Ejemplo 13.

Dada la relación entre los conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{1, 2\}$ que contiene a los elementos (a, b) tales que $a > b$, obtener la matriz que representa a $\mathcal{R}$.

Solución: Como los elementos que forman la relación son:

$\mathcal{R} = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2)\}$ entonces, la matriz que representa la relación $\mathcal{R}$ es:

$$M_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 14.

Dados los conjuntos $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ y $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$ indicar los pares que están en la relación $\mathcal{R}$ representada por la matriz:

$$M_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución: Como $\mathcal{R}$ está formada por pares ordenados (a_i, b_j) con $m_{ij} = 1$, se tiene: $\mathcal{R} = \{(a_1, b_2), (a_2, b_1), (a_2, b_3), (a_2, b_4), (a_3, b_1), (a_3, b_3), (a_3, b_5)\}$

En el caso de que la matriz de una relación en un conjunto sea cuadrada, se puede obtener información sobre las propiedades de dicha relación analizando la matriz.

La matriz de una relación reflexiva se caracteriza por tener todos los elementos de su diagonal principal iguales a uno. Es decir, si $M_{\mathcal{R}} = (r_{ij})$, entonces:

$$\mathcal{R} \text{ es reflexiva} \iff r_{ii} = 1, \forall i$$
$$\mathcal{R} \text{ no es reflexiva} \iff \exists\, i : r_{ii} = 0$$

Ejemplo 15.

Obtener la matriz de la relación definida en el ejemplo 4.

Solución: Recordemos $\mathcal{R} = \{(1,1),(1,2),(2,2),(3,3),(3,2),(4,4)\}$

por tanto, se tiene que:

$$M_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En la que se puede observar que todos los elementos de la *diagonal principal* son igual a 1 y por tanto, la relación que representa es reflexiva.

La matriz $\mathcal{R} = (m_{ij})$ de una relación simétrica, posee la propiedad de que todo par de elementos colocados simétricamente respecto de la diagonal principal son iguales. Luego si $M_{\mathcal{R}} = (r_{ij})$ es la matriz de $\mathcal{R}$, entonces:

$$\mathcal{R} \text{ es simétrica} \iff r_{ij} = r_{ji}, \forall i, j$$
$$\mathcal{R} \text{ no es simétrica} \iff \exists\, i, j : r_{ij} \neq r_{j,i}$$

Ejemplo 16.

Obtener la matriz de la relación definida en el ejemplo 6.

Solución: Recordemos $\mathcal{R} = \{(1,1),(1,2),(2,1)(2,3),(3,2),(3,3)\}$

por tanto, se tiene que:

$$M_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En la que se puede observar que existe *simetría* de todos los elementos respecto de la *diagonal principal* y por tanto, la relación que representa es reflexiva.

La matriz $M_{\mathcal{R}}$ de una relación asimétrica, satisface la propiedad de que si $i \neq j$, entonces $r_{ij} = 0$ ó $r_{ji} = 0$.

Ejemplo 17.

Obtener la matriz de la relación definida en el ejemplo 7.

Solución: Recordemos $\mathcal{R} = \{(1,2),(1,4),(2,3),(2,4),(3,1),(4,3)\}$

por tanto, se tiene que:

$$M_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz $M_{\mathcal{R}} = (rij)$ de una relación antisimétrica, satisface la propiedad de que si $i \neg j$, entonces $r_{ij} = 0$ ó $r_{ji} = 0$. Es decir,

$$\mathcal{R} \text{ es antisimétrica} \iff \forall i \neq j, r_{ij} = 0 \vee r_{ji} = 0.$$

$$\mathcal{R} \text{ no es antisimétrica} \iff \exists i, j : r_{ij} = 1 \wedge i \neq j$$

Ejemplo 18.

Obtener la matriz de la relación definida en el ejemplo 8.

Solución: Recordemos $\mathcal{R} = \{(1,2),(2,2),(3,4),(4,1)\}$

por tanto, se tiene que:

$$M_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es posible caracterizar una relación transitiva por su matriz $M_{\mathcal{R}} = (r_{ij})$,

$$\mathcal{R} \text{ es transitiva} \iff r_{ij} = 1 \wedge r_{jk} = 1 \implies r_{ik} = 1$$

$$\mathcal{R} \text{ no es transitiva} \iff r_{ij} = 1 \wedge r_{jk} = 1 \wedge r_{ik} = 0$$

Ejemplo 19.

Sea $A = \{1,2,3,4\}$ y $\mathcal{R} = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3)\}$ una relación definida sobre A. ¿Es transitiva? Escribir la matriz de la relación.

Solución: $\mathcal{R}$ es transitiva ya que si $(a,b) \in \mathcal{R}$ y $(b,c) \in \mathcal{R}$, también está en $\mathcal{R}$ el par (a,c).

Además:

$$M_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La representación matricial de una relación tiene además otras ventajas importantes y es que facilita el cálculo de operaciones entre relaciones, así, la unión o la intersección de dos relaciones, se puede obtener fácilmente mediante la unión o intersección de las matrices que representan dichas relaciones.

Si dos relaciones ($\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$) en un conjunto A, están representadas por sus respectivas matrices $M_{\mathcal{R}1}$ y $M_{\mathcal{R}2}$, la unión y la intersección de las relaciones se obtiene aplicando las operaciones boleanas (las cuales se analizan en el tema siguiente) sobre dichas matrices. Veamos un ejemplo:

Ejemplo 20.

Dadas las relaciones $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ en un conjunto A, cuyas matrices son:

$$M_{\mathcal{R}1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad M_{\mathcal{R}2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Obtener las matrices que representan a $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ y $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$.

Solución:

$$M_{\mathcal{R}1 \cup \mathcal{R}2} = M_{\mathcal{R}1} \vee M_{\mathcal{R}2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_{\mathcal{R}1\cap\mathcal{R}2} = M_{\mathcal{R}1} \wedge M_{\mathcal{R}2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De forma análoga, se puede obtener la composición de relaciones utilizando al representación matricial, utilizando la operación producto boleano entre las matrices que representan a cada relación. Por tanto, dadas dos relaciones $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$, la matriz que representa a la composición $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ se obtiene como:

$$M_{\mathcal{S}\circ\mathcal{R}} = M_{\mathcal{R}} \odot M_{\mathcal{S}}$$

Ejemplo 21.

Dadas las relaciones $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$ en un conjunto A, cuyas matrices son:

$$M_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad M_{\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Obtener las matriz de $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$.

Solución:

$$M_{\mathcal{S}\circ\mathcal{R}} = M_{\mathcal{R}} \odot M_{\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nota: En el tema 5 se estudiarán en detalle las operaciones boleanas con matrices.

Representación gráfica. Grafos dirigidos

La tercera forma en que se pueden representar las relaciones es mediante el uso de grafos dirigidos, En ellos, la representación de la relación se hace mediante puntos y flechas. cada punto representa un elemento del conjunto y cada para ordenado, está representado mediante una flecha.

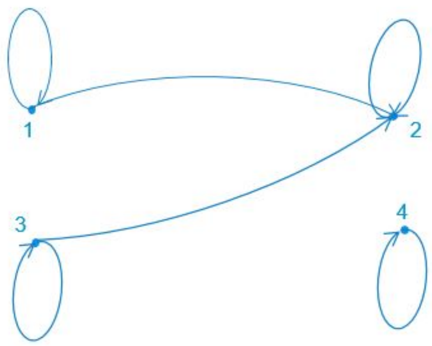
Definición 13

Un grafo dirigido o digrafo, consta de un conjunto de vértices o nodos y un conjunto de pares ordenados de dichos vértices llamados aristas. Al vértice a, se le llama vértice inicial de la arista (a, b) y b, por tanto, es el vértice final de dicha arista.

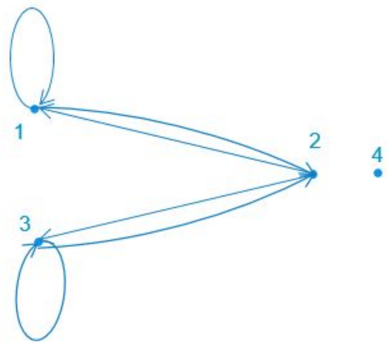
Los grafos dirigidos ofrecen, de manera visual. la información acerca de las relaciones. Por ello se usan con frecuencia para estudiar relaciones y sus propiedades. A continuación, se muestran los grafos dirigidos de los ejemplos 4 (relación reflexiva), 6, (relación simétrica), 8(relación antisimétrica) y 19 (relación transitiva).

Podemos ver que una relación es reflexiva si, y sólo si, hay un bucle en cada vértice del grafo, de modo que todos los pares ordenados de la forma (x, x) pertenecen a la relación. Una relación es simétrica si y sólo si, para cada arista entre vértices distintos de su digrafo existe una arista en sentido opuesto, de modo que (y, x) esta en la relación siempre que (x, y) lo está.

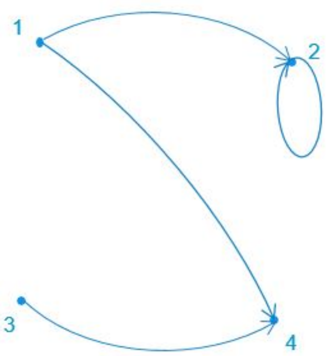
Análogamente, una relación es antisimétrica si, y sólo si no hay ninguna pareja de aristas con sentidos opuestos uniendo dos vértices distintos. Finalmente, una relación es transitiva si, y sólo si, siempre que hay una arista uniendo un vértice x con un vértice y y una arista uniendo el vértice y con un vértice z hay una tercera arista que une x con z.



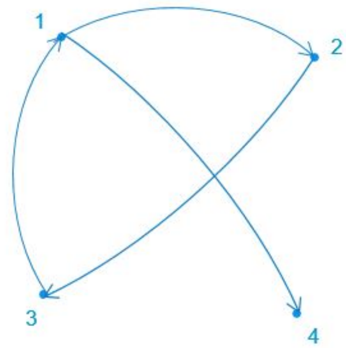
Ejemplo 4, relación reflexiva.



Ejemplo 6, relación simétrica.



Ejemplo 8, relación antisimétrica.



Ejemplo 19, relación transitiva.

8.6 Cierre de relaciones

Se dice que el conjunto A es un conjunto cerrado bajo una operación si la ejecución de esa operación siempre produce elementos del conjunto.

Definición 14

Sea A un conjunto, $\mathcal{R}$ una relación definida como un subconjunto de los pares ordenados $(a, b) \in A \times A$, y p una propiedad de la relación $A \times A$ (que se puede cumplir o no en $\mathbb{R}$), se dice que $\mathcal{S}$ es un cierre de la relación $\mathbb{R}$ bajo la propiedad p si $\mathcal{S}$ es el conjunto de pares más pequeño que cumple $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$ y $p(\mathcal{S})$.

Por tanto, tendremos distintos cierres de relaciones dependiendo de la propiedad p

para la que se cumple la condición de ser el conjunto mas pequeño de elementos perteneciendo a la relación, también cumplan la propiedad. En particular, analizaremos la propiedad reflexiva, simétrica y la transitiva.

Dado un conjunto A y la relación $\mathcal{R}$, decimos que $\mathcal{S}$ es el **cierre reflexivo** de la relación $\mathcal{R}$, si $\mathcal{S}$ es el conjunto mas pequeño que cumple $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$ y $\forall a \in A : (a, a) \in \mathcal{S}$. $\mathcal{S}$ se puede calcular como:

$$\mathcal{S} = \mathcal{R} \cup \{(a, b) \mid a \in A\}$$

Decimos que $\mathcal{S}$ es el **cierre simétrico** de la relación $\mathcal{R}$, si $\mathcal{S}$ es el conjunto mas pequeño que cumple $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$ y $\forall a, b \in A \in: \mathcal{S} \longrightarrow (b, a) \in \mathcal{S}$. $\mathcal{S}$ se puede calcular como:

$$\mathcal{S} = \mathcal{R} \cup \{(a, b) \mid ((b, a) \in \mathcal{R}\}$$

Decimos que $\mathcal{S}$ es el **cierre transitivo** de la relación $\mathcal{R}$, si $\mathcal{S}$ es el conjunto mas pequeño que cumple $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$ y $\forall a, b, c \in \mathcal{S} : (a, b) \in \mathcal{S} \wedge (b, c) \in \mathcal{S} \longrightarrow (a, c) \in \mathcal{S}$.

El cálculo del cierre transitivo no es tan trivial como el del cierre reflexivo o simétrico. En el siguiente vídeo, se explica un procedimiento general para el cálculo del cierre transitivo, y a continuación se introduce otro algoritmo más rápido llamado algoritmo de Warshall.

Accede al vídeo: Algoritmo de Warshall

8.7 Referencias bibliográficas

Rosen, K. H., & Morales, J. M. P. (2004). Matemática discreta y sus aplicaciones.

Koshy, T. (2004). Discrete mathematics with applications. Elsevier.

Grimaldi, R. P. (2006). Discrete and Combinatorial Mathematics, 5/e. Pearson Education India.

O´Donnel, J. & Hall, C. (2006). Discrete Mathematics Using a Computer. Londres: Springer.

8.8 Cuaderno de ejercicios

Ejercicio 1. Sea $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ y la relación $\mathcal{R} = \{(a, b) \mid a\ es\ mltiplo\ de\ b\}$. Escribe la relación explícitamente y determina sus propiedades.

Ejercicio 2. Considera la relación de número reales $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^3\}$. ¿Cuáles son sus propiedades?, ¿es una función?.

Ejercicio 3.

Sea el conjunto $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ y la relación $\mathcal{R} = \{(a, b) \mid a - b\ \ es\,par\ \ 0\}$, escribe la relación explícitamente y determina sus propiedades.

Ejercicio 4.

Sea $A = \{a, b, c, d, f\}$, calcula la matriz cero-uno de la relación:

$\mathcal{R} = \{(a, b), (a, c), (b, b), (b, d), (c, d), (d, c), (e, b), (e, d)\}$

Ejercicio 5.

Calcula el grafo dirigido de la relación del ejercicio 4:

Ejercicio 6.

Calcula el cierre reflexivo de la relación del ejercicio 4.

Ejercicio 7.

Calcula el cierre simétrico de la relación del ejercicio 4.

Ejercicio 8.

Calcula el cierre transitivo de la relación del ejercicio 4.

Ejercicio 9.

Considera la relación ternaria $\mathcal{B}$ que contiene tríos de vectores si forman base. Es decir, tres vectores están $\mathcal{B}$-relacionados si forman una base. Dados los vectores $u = (1,0,0), v = (1,1,0), w = (2,2,0), z = (0,0,1)$, ¿qué tripletas de estos vectores pertenecen a la relación $\mathcal{B}$?

Ejercicio 10.

Considera la relación $\mathcal{R}$ del ejercicio 4. Calcula $\mathcal{R}^2$.

8.9 Soluciones cuaderno de ejercicios

Solución 1.

$$\mathcal{R} = (10,2),(10,5),(9,3),(8,4),(8,2),(6,3),(4,2),(10,10),(9,9),(8,8),(7,7),$$
$$(6,6),(5,5),(4,4),(3,3),(2,2)$$

La relación $\mathcal{R}$ es reflexiva, transitiva y antisimétrica. Es una relación de orden.

Solución 2.

No es reflexiva, no es transitiva, no es simétrica, pero es antisimétrica: si $(y,x),(x,y) \in \mathcal{R}$, entonces $y = x^3$ y $x = y^3$, es decir $x = x^9$, que solo se cumple para $x = 0$ ó $x = 1$. En los dos casos, tenemos que $x = y$.

Es una función ya que para cualquier valor x, multiplicarlo por sí mismo tres veces siempre se puede hacer y da un único resultado.

Solución 3.

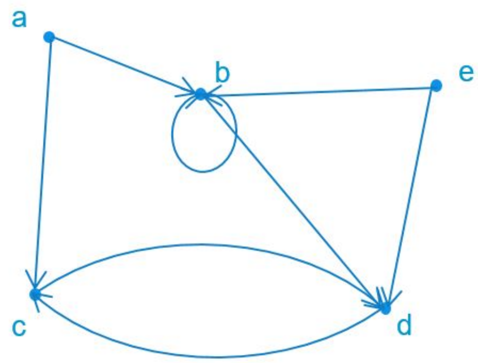
$$\mathcal{R} = (2,2),(2,4),(2,6),(3,3),(3,5),(4,4),(4,6),(4,2),(5,3),(5,5),$$
$$(6,2),(6,4),(6,6)$$

Es reflexiva, transitiva y simétrica. Es una relación de equivalencia.

Solución 4.

$$M_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución 5.



Solución 6.

El cierre reflexivo es $\mathcal{R}$, añadiendo los pares $(a, a), (c, c), (d, d)$ y (e, e).

Solución 7.

El cierre simétrico es $\mathcal{R}$, añadiendo los pares $(b, a), (c, a), (d, b), (b, e)$ y (e, d).

Solución 8.

El cierre transitivo es $\mathcal{R}$ añadiendo los pares $(a, d), (b, c), (c, c), (d, d)$ y (e, c).

Solución 9.

Pertenecen a la relación las tripletas (u, v, z),(u, w, z) y sus permutaciones, ya que ser base no depende del orden:

$(u, z, v), (v, u, z), (v, z, u), (z, u, v), (z, v, u), (u, z, w), (w, u, z), (w, z, u), (z, u, w)$ y (z, w, u).

Solución 10.

$\mathcal{R}^2 = \{(a,b),(a,d),(b,b),(b,c),(b,d),(c,c),(d,d),(e,b),(e,c),(e,d)\}$

8.10 A fondo

A fondo

Relaciones de equivalencia.

En este documento, Francisco José González Gutiérrez explica qué son y para qué sirven las relaciones de equivalencia en teoría de conjuntos.

Accede al documento desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:

http://www2.uca.es/matematicas/Docencia/ESI/1710003/Apuntes/Leccion8.pdf

Álgebra relacional

Este vídeo revisa los cinco operadores básicos del álgebra relacional.

Accede al vídeo desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:

http://www.youtube.com/watch?v=Y06LEKqkdz0

Functions versus Relations

Este artículo disponible online presenta un estudio gráfico e ilustrativo de las funciones y las relaciones. Los ejemplos lo hacen ideal para autoestudio. No se requieren conocimientos previos de programación funcional, el artículo y la documentación en línea ofrecen todo lo necesario.

Accede al artículo desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:

http://www.purplemath.com/modules/fcns.htm

Recursos externos

Dev-C++

Dev-C + + es un entorno de desarrollo integrado libre (IDE) distribuye bajo la Licencia Pública General de GNU para la programación en C y C + +. MinGW, un compilador libre, se entrega junto con él. El IDE está escrito en Delphi.

http://www.bloodshed.net/devcpp.html
Manual: http://www.bloodshed.net/dev/doc/

Xcode

Xcode es un entorno de desarrollo integrado (IDE), que contiene un conjunto de herramientas desarrollados por Apple para el desarrollo de software para OS X y iOS.
https://developer.apple.com/xcode/

NetBeans

NetBeans es un entorno de desarrollo integrado (IDE) multiplataforma para el desarrollo principalmente con Java, pero también con otros lenguajes, como PHP, C / C+ + y HTML5.

https://netbeans.org/
Manual: https://netbeans.org/kb/docs/java/quickstart.html

8.11 Test

Test

1. El principio de la buena ordenación:

A. Es una forma de resolver problemas matemáticos.

B. Permite hacer prueba directa.

C. Permite hacer prueba indirecta.

D. Sirve para demostrar que la inducción es válida.

2. La hipótesis inductiva es:

A. Lo que asumimos cierto para hacer inducción.

B. Lo que vamos a demostrar por inducción.

C. El antecedente del paso inductivo.

D. El consecuente del paso inductivo.

3. ¿Qué significa cuando deducimos que n=n+1 en una prueba de inducción?

A. Que hay un error de deducción en algún paso.

B. Que el paso inductivo ha sido usado erróneamente.

C. Que la proposición que intentamos deducir inductivamente es errónea.

D. Las tres anteriores son posibles.

4. ¿Cuáles de los siguientes métodos son equivalentes?

A. Solo el principio de buena ordenación y principio de inducción ordinaria.

B. Ninguno.

C. Solo el principio de inducción ordinaria y el de inducción fuerte.

D. Los principios de buena ordenación, de inducción ordinaria y de inducción fuerte son equivalentes.

5. ¿Entre la inducción ordinaria y fuerte, cuál resuelve más problemas?

A. No se sabe cuál resuelve más problemas.

B. La inducción ordinaria puede resolver más problemas.

C. La inducción fuerte puede resolver más problemas.

D. Ambos resuelven el mismo número de problemas.

6. La triangulación en geometría computacional permite:

A. Localizar la posición de un objeto.

B. Dividir un polígono de n lados en n-2 triángulos.

C. Dividir un polígono de n-2 lados en n triángulos.

D. Determinar los n-2 puntos singulares de una figura.

7. Las funciones recursivas en matemáticas nos permiten:

A. Demostrar teoremas inductivamente.

B. Demostrar teoremas recursivamente.

C. Demostrar teoremas por contraposición.

D. Definir el paso inductivo de una hipótesis inductiva.

8. Se puede definir de forma recursiva:

A. Solo las funciones.

B. Las funciones y los conjuntos.

C. Solo los conjuntos.

D. Ninguna de las tres respuestas anteriores son correctas.

9. La inducción estructurada se utiliza para demostrar:

A. Proposiciones sobre conjuntos definidos recursivamente

B. Proposiciones sobre listas.

C. Proposiciones sobre polígonos.

D. Proposiciones sobre números.

10. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones respecto a una función recursiva es cierta?:

A. No se utilizan en programación.

B. Siempre termina, dando suficiente tiempo de computación.

C. Tiene infinitos pasos, ya que están definidas para todos los números naturales

D. Puede tener un solo paso.