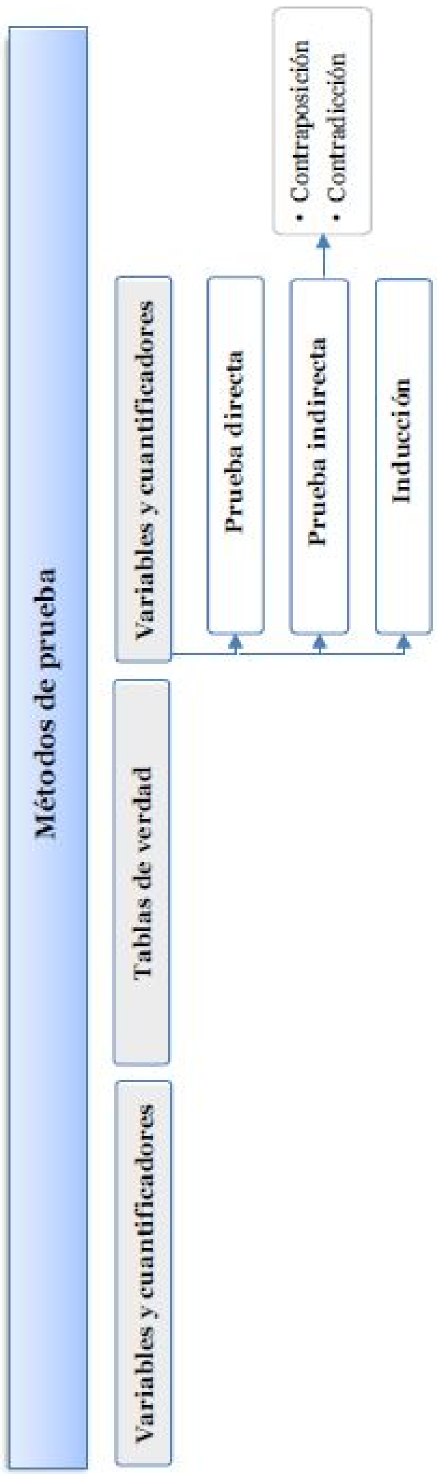
Álgebra y Matemática discreta

# Métodos de prueba

# Índice

# Esquema


Métodos de prueba
Variables y cuantificadores
Tablas de verdad
Variables y cuantificadores
Prueba directa
Prueba indirecta
Inducción
• Contraposición
• Contradicción

## 1.1 Introducción y objetivos

En el estudio de las matemáticas, existen dos temas fundamentales que se deben tener presentes en todo momento. Estos son el saber cuando un argumento que se plantea es correcto y en relación con este, conocer cuáles son los métodos o técnicas que podemos usar para construir dichos argumentos matemáticos. Para ello, debemos comenzar con analizar la lógica de primer orden, también llamada lógica de predicados, que es un sistema formal diseñado para estudiar la inferencia en los lenguajes de primer orden. Los lenguajes de primer orden son lenguajes formales con cuantificadores que alcanzan sólo a variables individuales, y con predicados y conectores cuyos argumentos son sólo constantes o variables de individuo. La lógica de primer orden tiene el poder expresivo suficiente para definir a prácticamente todas las matemáticas.

Por tanto, en este primer tema abordaremos los elementos básicos relacionados con la lógica de primer orden y los métodos de prueba, los cuales nos permiten expresar en lenguaje matemático las afirmaciones con las que se construyen los teoremas. De esta forma, encontraremos herramientas que nos permiten justificar razonamientos o silogismos y hacer demostraciones de los distintos teoremas o proposiciones mediante las reglas de inferencia.

Para ello, debemos enriquecer nuestra teoría con la introducción de predicados que se puedan aplicar a individuos y colectivos de individuos y conectores que relacionan dichos predicados. Con esta finalidad introducimos el cálculo de predicados y el concepto de cuantificador. Seguidamente, mostramos distintos métodos (directos e indirectos) para justificar la validez cierta afirmación matemática cuya formulación contiene predicados. Por último, presentamos el método de inducción que trata de demostrar resultados donde los predicados hacen referencia al conjunto de los números naturales.

Los métodos de demostración que se abordan en este tema, son importantes, por varias razones, en primer lugar, por que nos sirven para demostrar teoremas matemáticos, pero también, por que tienen gran aplicación en ciencias de la computación, para la demostración de algoritmos, la verificación de la seguridad de un sistema operativo o para comprobar que un determinado programa funciona de forma correcta.

Los objetivos que nos proponemos alcanzar en este tema son los siguientes:

- Conocer el contexto en el que se enmarcan los métodos de prueba, tanto desde el punto de vista matemático como computacional.
- Conocer el modo de expresar los argumentos matemáticos, a través de los predicados y los cuantificadores
- Utilizar adecuadamente predicados y cuantificadores para describir proposiciones ciertas.
- Crear las tablas de la verdad.
- Demostrar proposiciones ciertas y sencillas utilizando las técnicas de prueba directa, contraposición, reducción al absurdo o inducción.
- Encontrar contraejemplos para proposiciones falsas.
- Comprender el razonamiento matemático de inducción y recursividad.
- Definir sucesiones y estructuras mediante recursión.

Para alcanzar estos objetivos, se propone la siguiente subdivisión del contenido de este tema:

- Variables y cuantificadores.

- Métodos de prueba.
  - Métodos directos.
  - Métodos indirectos.
- Inducción.
- Recursión.

## 1.2 Variables y cuantificadores

El desarrollo de la matemática a través de los siglos ha llevado siempre implícita la necesidad de argumentar de forma consistente las proposiciones que pueden llegar a ser los teoremas en los que se apoya la teoría matemática. Así, es importante comenzar este tema con algunas definiciones:

**Definición 1: Predicado**

Un **predicado** $p(x)$ es una expresión lingüística que puede conectarse con una o varias otras expresiones para formar una oración o *proposición*.

**Definición 2: Proposición**

Una **proposición** es una afirmación de la cual se puede decir sin ambigüedad (y de forma excluyente) que es verdadera $V$ o falsa $F$. Las proposiciones se suelen representar mediante las letras minúsculas o mayúsculas $p, q, r \ldots$

Para crear una proposición, debemos definir la variable el valor de x, para lo cual, podemos asignar una valor a la variable o cuantificarla. Cuando la variable no tiene restricciones se llama **variable libre**, mientras que si restringimos el valor de la variable se llama **variable cuantificada**.

Por ejemplo, en la oración «Marte es un planeta», la expresión «es un planeta» es *un predicado* que se conecta con la expresión «Marte» *(variable libre)* para formar una oración o proposición. De forma análoga, en la oración «Júpiter es más grande que Marte», la expresión «es más grande que» es un *predicado* que se conecta con dos expresiones, «Júpiter» *(variable cuantificada)* y «Marte» *(variable libre)*, para formar una proposición.

**Definición 3: Cuantificador**

Un **cuantificador** es una expresión que afirma que una condición se cumple para un cierto número de individuos.

En la lógica clásica, los dos cuantificadores más estudiados son el **cuantificador universal** y el **cuantificador existencial**. El primero afirma que una condición se cumple para todos los individuos de los que se está hablando. Se denota por el símbolo $\forall$, usando la sintaxis $\forall x\ p(x)$ y se lee "para todo valor de $x$, la propiedad $p$ es cierta"; el segundo que se cumple para al menos uno de los valores de la variable. Se denota con el símbolo $\exists$, usando la sintaxis $\exists x : p(x)$ y se lee "existe algún valor de $x$ tal que $p$ es cierta".

Por ejemplo, la expresión "para todo $x$ ($\forall x$)" es un cuantificador universal, que antepuesto a "$x < 3$", produce: para todo $x$, $x < 3$, $\quad (\forall x < 3)$. Esta es una expresión con valor de verdad, en particular, una expresión falsa, pues existen muchos números (muchos $x$) que son mayores que tres. Anteponiendo en cambio la expresión "para al menos un $x$", un cuantificador existencial, se obtiene: Para al menos un $x, x < 3$, ($\exists x < 3$). La cual resulta ser una expresión verdadera.

Se ha de tener en cuenta que es posible intercambiar los cuantificadores usando una negación, así, podemos realizar las siguientes transformaciones:

$$\neg(\forall x, p(x)) \iff \exists x, \neg p(x)$$

$$\neg(\exists x, p(x)) \iff \forall x, \neg p(x)$$

La primera se lee como “ no para todo $x$ se cumple $p(x)$”, que es equivalente a decir “ existe algún $x$ para el que no se cunple $p(x)$.” Por otra parte, la segunda se lee “ no existe ningún $x$ para el que se cumpla $p(x)$” que es equivalente a decir “ para todo $x$ no se cumple $p(x)$”

Las proposiciones se pueden combinar entre ellas, para crear nuevas que reflejen afirmaciones mas complejas. La combinación entre ellas se realiza mediante los **conectores lógicos** , los cuales tienen sus propios símbolos de representación. Los conectores mas habituales son los siguientes:

- Negación “no” ($\neg$)

  La proposición ($\neg$p), que se lee como “no $p$”, es cierta cuando la proposición $p$ es falsa. Des esta forma, cuando la proposición $p$ es verdadera, lógicamente la proposición $\neg$p será falsa. Por ejemplo, si la $p$ es que “nieve no es blanca”, sabemos que esta proposición es falsa, por tanto la proposición $\neg p$, (la nieve es blanca), será cierta.

- Conjunción “y” ($\wedge$)

  La proposición $p \wedge q$, que se lee “$p$ y $q$”, será cierta cuando *las dos* proposiciones que se relacionan, sean ciertas. Esto implica que basta que una de ellas es falsa, la conjunción de ambas también será falsa. Así, la proposición $p \wedge q$ donde $p =$ La nieve es blanca y $q =$ París es la capital de Italia, es falsa, ya que la proposición “$q$” lo es.

- Disyunción “o ” ($\vee$)

  La proposición $p \vee q$, que se lee,“$p$ o $q$”, es cierta siempre que *al menos* una de las proposiciones p y q lo sea. Eso quiere decir que $p \vee q$ es cierta en tres casos: cuando p es falsa y q es verdadera, cuando p es cierta y q es falsa y cuando p y q son ciertas. En el Ejemplo 1, $p \vee q$ es la proposición «la nieve es blanca o la nieve es roja».

- Condicional “si . . .” entonces “. . .” ($\longrightarrow$)

  La proposición $p \longrightarrow q$ (se lee si *p* entonces *q*) es falsa solo cuando *p* es cierta y *q* es falsa. Debe entenderse el significado de este conector: lo que afirma es que si *p* es una proposición cierta, entonces *q* también lo es; sin embargo, no se afirma nada acerca de la certeza de *p* y *q*. Por ejemplo, la proposición "si la nieve no es blanca entonces 2+3=7" es cierta ya que las proposiciones "la nieve no es blanca" y "2+3=7" son ambas falsas.

- Bicondicional "sí y solo sí" ($\longleftrightarrow$)

  La proposición $p \longleftrightarrow q$ (se lee p sí y solo si q) es cierta cuando las dos proposiciones p y q son ciertas y también cuando ambas proposiciones son falsas. Por ejemplo "la nieve es blanca sí y solo sí París es la capital de Francia".

Los conectores se pueden utilizar para unir o relacionar las distintas proposiciones, de tal forma que se pueden obtener, partiendo de proposiciones sencillas, otras mas complejas.

**Definición 4**

Se denomina **proposición atómica** a aquellas que no incluyen conectores (son las mas simples), mientras que se denominan **proposiciones moleculares** a aquellas que están compuestas por dos o mas proposiciones atómicas unidas mediante conectores.

Cuando una proposición molecular incluye varios átomos o diversos conectores puede ser de utilidad utilizar el paréntesis para evitar ambigüedades:

«En este momento llueve y hace sol o está nevando»: $p \wedge q \vee r$

No es clara salvo que utilicemos algún signo de puntuación, tal como se puede ver a continuación:

«En este momento llueve, y hace sol o está nevando»: $p \wedge (q \vee r)$.

«En este momento llueve y hace sol, o está nevando»: $(p \wedge q) \vee r$.

Al igual que en las otras operaciones matemáticas, para reducir el número de paréntesis necesarios para representar las fórmulas proposicionales complejas se establece una jerarquía de los conectores. Esta es, de mayor a menor tal como se indica:

$$\longleftrightarrow, \longrightarrow, \wedge\vee, \neg$$

El hecho de que la jerarquía de un conector sea más grande que la del otro quiere decir que, en ausencia de paréntesis, el segundo se ejecuta antes que el primero. Por ejemplo, en la expresión $\neg p \longleftrightarrow q$ la negación se debe aplicar únicamente a la proposición $p$ antes de aplicar el bicondicional, es decir, es equivalente a $(\neg p) \longleftrightarrow q$. Cabe notar que los conectores de disyunción y conjunción tienen la misma jerarquía, así que en ningún caso podemos escribir $p \wedge q \vee r$ porque no hay manera de saber si esta expresión representa $(p \wedge q) \vee r$ o $p \wedge (q \vee r)$.

**Ejemplo 1.**

Estudiar la posibilidad de suprimir paréntesis en la proposición compuesta: «si hoy llueve, entonces mañana no saldremos a pescar o cogeremos un resfriado». Definiendo las proposiciones:

$p$: hoy llueve; $q$: mañana saldremos a pescar $r$: cogeremos un resfriado.

Podemos escribir la proposición como $p \longrightarrow ((\neg q) \vee r)$. Pero como el condicional tiene preferencia sobre la disyunción y esta sobre la negación, podemos suprimir todos los paréntesis y escribir $p \longrightarrow \neg q \vee r)$.

**Definición 5**

Podemos distinguir distintos tipos de proposiciones, así, una proposición compuesta que siempre es cierta para cualquiera de los valores de sus proposiciones atómicas recibe el nombre de **tautología**. La negación de una tautología, es decir,

> una proposición compuesta que siempre es falsa, recibe el nombre de **contradicción**. Si unas veces es falsa y otras cierta, recibe el nombre de **contingencia**.

Además de los conectores lógicos que acabamos de ver, podemos encontrar con otro tipo de relaciones entre las proposiciones y que serán de interés para construir los razonamientos lógicos que permiten obtener las demostraciones de teoremas o proposiciones complejas.

Se dice que dos proposiciones atómicas (o compuestas) cualesquiera $p$ y $q$ constituyen una **relación de implicación**, cuya sintaxis es $p \Rightarrow q$ (se lee *p implica q*) sí y solo si la implicación $p \rightarrow q$ es una tautología.

Por último, se dice que dos proposiciones atómicas (o compuestas) cualesquiera $p$ y $q$ son **lógicamente equivalentes,** denotado por $p \iff q$, sí y solo si la bicondicional $p \leftrightarrow q$ es una tautología.

## 1.3 Tablas de verdad

Para saber si una proposición compuesta es o no cierta se utilizan las tablas de verdad, cuadros donde se muestran los valores de verdad de esta proposición en función de los valores de verdad de las proposiciones que la componen.

**Definición 6: Tabla de verdad**

Una tabla de verdad es una matriz que contiene los valores de verdad de una proposición en función de los valores de verdad de las proposiciones atómicas que la componen.

A continuación, se muestran las tablas de verdad para los conectores analizados anteriormente:

| Negación ¬ | |
|---|---|
| $p$ | $\neg p$ |
| V | F |
| V | F |

| Conjugación ∧ | | |
|---|---|---|
| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ |
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | F |
| F | F | F |

| Disyunción ∨ | | |
|---|---|---|
| $p$ | $q$ | $p \vee p$ |
| V | V | V |
| V | F | V |
| F | V | V |
| F | F | F |

| Condicional → | | |
|---|---|---|
| $p$ | $q$ | $p \rightarrow q$ |
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | F | V |
| F | V | V |

| Bicondicional ↔ | | |
|---|---|---|
| $p$ | $q$ | $p \leftrightarrow p$ |
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | F | V |
| F | V | F |

Figura 1: Tablas de verdad. Fuente: Elaboración propia

Tal como se ha comentado, las tablas de verdad permiten analizar las proposiciones, atómicas o moleculares, así, podemos decir que $p \vee \neg q$ es una tautología, mientras que $p \wedge \neg q$ es una contradicción, como se puede ver en la siguiente tabla de la verdad:

| $p$ | $\neg p$ | $p \vee \neg p$ | $p \wedge \neg p$ |
|---|---|---|---|
| F | V | V | F |
| V | F | V | F |

Y para terminar esta sección, analizamos el siguiente ejemplo:

**Ejemplo 2.**

Probar la equivalencia lógica de las siguientes proposiciones

$$(p \vee q)y(q \wedge p)$$

Para ello, debemos construir la tabla de la verdad para cada una de las proposiciones, como se muestra a continuación:

| $p$ | $q$ | $p \vee p$ | $p \wedge p$ |
|---|---|---|---|
| F | F | F | F |
| F | V | V | V |
| V | F | V | V |
| F | V | V | V |

Dado que las dos últimas columnas contienen los mismos resultados, la relación $(p \vee q) \leftrightarrow (q \wedge q)$ es una tautología.

## 1.4 Métodos de prueba

A continuación, vamos a introducir los métodos de prueba que permiten demostrar que un teorema es verdadero mediante una secuencia de sentencias que constituyen un argumento al que llamamos demostración. Un teorema es una sentencia que se puede demostrar que es verdadera y para ello, se siguen una serie de métodos que permiten obtener sentencias nuevas en base a las anteriores, es decir, los métodos de prueba utilizan predicados y conectores para construir nuevos predicados o proposiciones, que de forma lógica concluyen la veracidad de la sentencia o teorema que se quiere demostrar.

Para ello se utilizan las reglas de inferencia, que enlazan cada uno de los pasos que forman la demostración. Así, las reglas de inferencia, constituyen cada uno de los pasos lógicos que nos llevan de $p$ a $q$ para demostrar una sentencia condicional $(p \longrightarrow q)$. A la primera parte de la sentencia condicional se la llama **premis**a, **antecedente** o **hipótesis** y a la segunda, **conclusión**, **consecuencia** o **tesis**.

Son muchas las reglas de inferencia que podemos manejar, de las cuales son especialmente importantes el **Modus ponens** y **Modus tollens**, cuya sintaxis es la siguiente:

**Modus ponens**:

$p$

$p \rightarrow q$

$$\overline{\because q}$$

Que se lee: "si $p$ implica $q$ y $p$ es cierto, entonces $q$ es cierto".

**Modus tollens**:

$\neg q$

$p \rightarrow q$

$$\overline{\because \neg p}$$

Que se lee: "si $q$ es falso y $p$ implica $q$, entonces $p$ es falso".

| Reglas de inferencia | |
|---|---|
| Doble negación | $p \Leftrightarrow \neg\neg p$ |
| Simplificación | $p \wedge q \Longrightarrow p$ o $p \wedge q \Longrightarrow q$ |
| Adición | $p \Rightarrow p \vee q$ |
| Transitividad | $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \Rightarrow (p \rightarrow r)$ |
| Transposición | $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$ |
| Leyes de Morgan | $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$<br>$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ |
| *Modus ponens* | $((p \rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$ |
| *Modus tollens* | $((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \Rightarrow \neg p$ |
| *Modus tollendo ponens* | $(p \vee q) \wedge \neg p) \Rightarrow q$ |

Figura 2: Reglas de inferencia. Fuente: Elaboración propia

La siguiente tabla muestra algunas de ellas. Todas pueden demostrarse fácilmente utilizando tablas de verdad.

Los métodos de prueba que se utilizan para la demostración de teoremas o sentencias son muchos y dependiendo de la sentencia que se desee demostrar, será mas conveniente la utilización de uno u otro. Los mas importantes que se verán en este tema y en el tema siguiente son el *Método de prueba directo*, el *Método de prueba indirecto* y los *Métodos de inducción*.

Dada una sentencia condicional ($p \rightarrow q$) la diferencia fundamental entre los métodos directos e indirectos, radica en que si aplicamos un método directo, lo que hacemos es estudiar la premisa $p$ para sacar conclusiones sobre la $q$. En cambio, si el método es indirecto, se estudia $q$ para sacar conclusiones sobre $p \rightarrow q$

**Demostraciones directas**: Una implicación condicional (Ej.- $p \rightarrow q$), se puede demostrar de forma directa, analizando $p$. Si esta es verdadera, entonces $q$ también es verdadera. y por tanto, nunca ocurrirá que $q$ sea falsa. Para realizar este tipo de demostraciones, suponiendo que $p$ es verdadera, se buscan reglas de inferencia y teoremas que ya han sido demostrados para demostrar que $q$ debe ser también verdadera.

**Ejemplo 3.**

*Definición: Un número entero $n$ es par, si existe un entero $k$ tal que $n = 2k$ y es impar si existe un entero $k$ tal que $n = 2k + 1$.*

Dada la definición de número par y número impar, demostrar de forma directa que « Si $n$ es un entero impar, entonces $n^2$ es un número entero impar».

***Solución***: Suponemos cierta la hipótesis de que la implicación es verdadera, es decir, que $n$ es un número impar. Entonces , $n = 2k + 1$, siendo $k$ un número entero. Calculamos por tanto $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$. Como se puede ver, el resultado es el doble del entero mas una unidad, por tanto es también un número impar.

Si tenemos en cuenta que la implicación $p \rightarrow q$ es equivalente a su contrarecíproca, es decir $\neg q \rightarrow \neg p$, podemos realizar el análisis de veracidad de la sentencia estudiando la veracidad de la contrarecíproca. Este argumento es el que se conoce como **demostración indirecta**. Veamos un ejemplo:

**Ejemplo 4.**

Demostrar que hay infinitos números primos (resultado de Euclides).

***Solución***: Supongamos que los números primos no son infinitos. Entonces, serían finitos:

$$2, 3, 5, 7, ...P$$

Siendo $P$ el mayor de todos los números primos.

Consideramos ahora el número $H = (2·3·5·7·...·P) + 1$

$H$ no es primo, pues es mayor que P. Entonces H debe tener algún divisor primo. Pero si dividimos $H$ por cualquiera de los números primos, obtendremos resto 1, por la forma en que se ha definido $H$.

De esta forma hemos llegado a una contradicción. Luego la afirmación inicial es cierta.

En este ejemplo se han combinado dos métodos de prueba, la demostración indirecta, ya que para demostrar el teorema, lo que hemos hecho es rechazar su contrario y posteriormente, para refutar este, hemos llegado a una contradicción, utilizando así el método de demostración por reducción al absurdo.

Este vídeo explica 2 métodos de demostración matemática, uno es la demostración directa y otro es una demostración indirecta llamada demostración por contraposición, y pone varios ejemplos.

Accede al vídeo: Demostración directa y Demostración indirecta por contraposición

Finalmente, cabe destacar que los métodos vistos hasta ahora, son métodos de razonamiento deductivo porque van desde proposiciones generales a conclusiones particulares. Por contraposición, el *razonamiento inductivo* construye proposiciones generales a partir de observaciones particulares. El método de demostración por inducción que se abordará en el siguiente tema.

## Estrategias de demostración

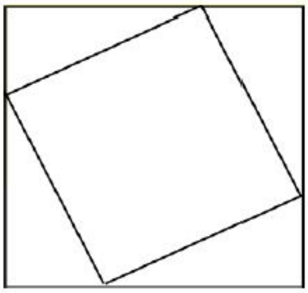
Una vez se han definido los métodos mas utilizados para realizar demostraciones, cabe la pregunta ¿cúal es el método mas apropiado utilizar para demostrar un teorema?. La respuesta no siempre es única y en ocasiones dependerá de la experiencia o intuición o la dificulta de la demostración que se pretende obtener. En cambio, si podemos dar unas pautas o pistas que ayuden en el proceso. En primer lugar, debemos evaluar la eficacia de una demostración directa. Debemos desarrollar las definiciones que vienen dadas en la hipótesis inicial y luego comenzar a razonar con ellas, teniendo en cuenta también los axiomas o teoremas que puedan ser necesarios. En caso de no encontrar ningún argumento que nos lleva a alguna conclusión, debemos intentar el mismo procedimiento mediante la demostración indirecta, asumiendo que la conclusión de la implicación que buscamos demostrar es falsa. En cualquier caso, tal como se comentó, el llegar a obtener una demostración, en ciertas ocasiones puede resultar complicado y requiere de cierta habilidad en el manejo de teoremas, axiomas y uso de conectores. Tres importantes estrategias de demostración son las siguientes:

- **Razonamiento hacia delante y hacia atrás**. Esta es una de las estrategias mas común para demostrar razonamientos relativamente sencillos. En este caso, la idea es comenzar con la hipótesis e ir elaborando una secuencia de pasos que lleven a la conclusión. Si queremos realizar un razonamiento indirecto, se puede comenzar por la conclusión y mediante una secuencia lógica de pasos, llegar a la negación de la hipótesis. Es lo que se conoce como *razonamiento hacia delante*. Desgraciadamente, en muchas ocasiones, la conclusión puede encontrarse lejos de la hipótesis, por lo que resultará complicado llegar a ella por este camino. En esa situación, puede ser interesante utilizar el razonamiento hacia atrás, que consiste en demostrar la sentencia $q$ con la propiedad $p \longrightarrow q$.

**Ejemplo 5.**

Demuestra el teorema de Pitágoras.

*Solución:* dado un triángulo rectángulo con catetos que miden $a$ y $b$, e hipotenusa que mide $h$, construimos la siguiente figura geométrica:



El cuadrado interior tiene lado $h$, mientras que el cuadrado mayor tiene lado $a+b$. La suma del área del cuadrado interior más cuatro veces el área de los triángulos equivale al área del cuadrado grande. Es decir, se cumple la siguiente igualdad:

$$h^2 + 4\frac{ab}{2} = (a+b)^2 \longrightarrow h^2 + 2ab = a^2 + 2ab + b^2 \longrightarrow h^2 = a^2 + b^2$$

Quedando así demostrado de forma directa el teorema de Pitágoras

- **Demostración por casos**. Esta estrategia consiste en demostrar la proposición para cada uno de los casos. Se utiliza cuando no se encuentra de forma evidente la manera de comenzar la demostración, pero si que se encuentra en cada caso cierta información que permite dar pasos hacia la demostración de la proposición. Por ejemplo para hacer demostraciones sobre números, se puede comenzar estudiando la proposición para los números pares o los impares... de tal manera que podamos encontrar ciertas conclusiones que ayuden a finalizar la demostración. Un error común en este procedimiento, es no considerar todos los casos.

- **Adaptación de demostraciones conocidas**. Una buena forma de encontrar demostraciones, es partir de otras conocidas. En muchas ocasiones, una demostración conocida se puede adaptar para crear una nueva demostración. El simple entendimiento de una demostración, puede dar pistas o estrategias que se pueden aplicar en la demostración de otros teoremas. Por ello es importante detenerse en comprender los pasos lógicos de aquellas demostraciones que se conocen.

## Errores en demostración

Conviene terminar este tema comentando que en ocasiones se puede llegar a conclusiones o demostraciones erróneas debido a fallos en la construcción de la propia demostración. Uno de los fallos mas comunes es el de cometer fallos en la aritmética y álgebra básica, que suelen darse cuando se realizan demostraciones de fórmulas especialmente complejas. Por ello es importante revisar cuidadosamente los pasos realizados. Cada paso en la demostración debe ser correcto y la conclusión se debe obtener de los pasos que se han seguido de forma lógica. Vamos a ilustrar con el famosos ejemplo de la supuesta demostración de que $1 = 2$:

**Ejemplo 6.**

«***Demostración***»: Consideramos los siguientes pasos:

| Paso | Razonamiento |
|---|---|
| (1) $a = b$ | Dato |
| (2) $a^2 = ab$ | Multiplicando ambos lados de (1) por a |
| (3) $a^2 - b^2 = ab - b^2$ | Restando $b^2$ a ambos lados de (2) |
| (4) $(a - b)(a + b) = b(a - b)$ | Factorizando ambos lados de (3) |
| (5) $a + b = b$ | Dividiendo por $(a - b)$ ambos lados de (4) |
| (6) $2b = b$ | Reemplazando $a$ por $b$ en (5), por que $a = b$, y simplificando |
| (7) $2 = 1$ | Dividiendo ambos lados de (6) por $b$ |

***Solución:*** Todos los pasos son correctos salvo el paso $(5)$, ya que se ha dividido en ambos lados de la ecuación por $(a - b)$, pero esto no se puede hacer ya que $(a - b)$, de acuerdo con $(1)$, es igual a cero.

## 1.5 Referencias bibliográficas

Rosen, K. H., & Morales, J. M. P. (2004). Matemática discreta y sus aplicaciones.

Koshy, T. (2004). Discrete mathematics with applications. Elsevier.

Grimaldi, R. P. (2006). Discrete and Combinatorial Mathematics, 5/e. Pearson Education India.

## 1.6 Cuaderno de ejercicios

**Ejercicio 1.** Busca las leyes de Morgan que relacionan la conjunción «y» la disyunción «o» y la negación.

*Solución*:

$$\neg(A \wedge B) \iff \neg A \vee \neg B$$

$$\neg(A \vee B) \iff \neg A \wedge \neg B$$

En palabras: la negación de «A y B» es «no A, o no B». La negación de «A o B» es «no A y no B».

**Ejercicio 2.** Demuestra que es cierta la siguiente afirmación de números enteros

$$\forall x, \exists y, x + y = 0$$

**Ejercicio 3.** El predicado $p(x)$ es cierto si y solo si $x$ es un número primo. Demuestra que la siguiente afirmación de números naturales es falsa:

$$\forall n, p(n) \longrightarrow p(2^n - 1)$$

Un contraejemplo es $n = 11$ ya que la hipótesis es cierta, es un número natural y es primo ($11$ es primo), pero hemos visto que $p(2^n–1)$ es falso ($2047$ no es primo), luego $p(n) \longrightarrow (2^n–1)$ es falso y la afirmación del enunciado también.

**Ejercicio 4.** Indicar si las siguientes fórmulas proposicionales son tautologías, contingencias o contradicciones.

- $\neg p \wedge \neg q$

- $\neg(p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow p)$
- $((p \longrightarrow q) \longrightarrow q) \longrightarrow (p \vee q)$

**Ejercicio 5.** Demuestra que hay infinitos números primos.

## 1.7 Soluciones cuaderno de ejercicios

**Solución 1**.

$$\neg(A \wedge B) \Longleftrightarrow \neg A \vee \neg B$$

$$\neg(A \vee B) \Longleftrightarrow \neg A \wedge \neg B$$

En palabras: la negación de «A y B» es «no A, o no B». La negación de «A o B» es «no A y no B».

**Solución 2**. Nos piden ver que para cualquier número entero , existe un número entero $y$ que, al sumarlos, el resultado es 0. Para demostrarlo, consideramos un  cualquiera (como tenemos que demostrarlo para cualquier valor, lo dejamos como variable), ahora hay que encontrar un $y$ correspondiente que cumpla la condición. Viendo la ecuación, se propone el siguiente: $y = -x$ (como $y$ es un número entero puede tomar valores negativos). y comprobamos que efectivamente $x + y = x + (-x) = 0$, por lo que la proposición es cierta.

**Solución 3**. En palabras, nos piden ver que no es cierto que 2 elevado a un número primo menos 1 siempre es un número primo. Tenemos que ver que una expresión que empieza por un cuantificador universal es falsa. Para ello es suficiente encontrar un caso en que falla: un contraejemplo. La condición $p(n) \longrightarrow p(2-1)$ siempre es cierta cuando $n$ no es primo. Tenemos que buscar un contraejemplo entre los números primos. Probaré primos hasta encontrar un contraejemplo:

- $n = 2 : 2^2-1 = 3.$
- $n = 3 : 2^3-1 = 7.$
- $n = 5 : 2^5-1 = 31.$
- $n = 7 : 2^7-1 = 127.$
- $n = 11 : 2^{1}1-1 = 2047 = 23\times 89.$

Un contraejemplo es $n = 11$ ya que la hipótesis es cierta, es un número natural y es primo ($11$ es primo), pero hemos visto que $p(2^n-1)$ es falso ($2047$ no es primo), luego $p(n) \longrightarrow (2^n-1)$ es falso y la afirmación del enunciado también.

**Solución 4**. Realizando las tablas de verdad, se concluye que son contingencia, contradicción y tautología, respectivamente.

**Solución 5**. Supongamos que es falso, es decir, solo hay una cantidad finita de números primos. Construimos un nuevo número, al que llamaré «q», multiplicando todos los primos y sumando 1. $q$ no es divisible por ningún número primo «p», ya que está formado por la suma de un múltiplo de $p$ más 1, que no es divisible por $p$. En consecuencia, $q$ es un número primo. Por como lo hemos construido, $q$ es mayor a cualquier número primo. Por consiguiente, es un nuevo número primo. Esto entra en contradicción con la suposición que habíamos empezado diciendo que hay un número finito de números primos. Por reducción al absurdo, concluimos que hay una cantidad infinita de números primos.

## 1.8 A fondo

**Método de demostración**

El capítulo de Miguel de Guzmán describe y ejercita las técnicas de demostración directa e indirecta.

Accede al artículo desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:

http://www.mat.ucm.es/cosasmdg/cdsmdg/05edumat/remediosfracasouniv/laboratorio99/segunda%20parte/cap2dem.doc

**La demostración por reducción al absurdo**

Este vídeo de Fernando Lazo explica cómo se hace una demostración por reducción al absurdo.

Accede al vídeo desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:

https://www.youtube.com/watch?v=kJ4we8gDMkI

**Discrete Mathematics Using a Computer**

Este libro presenta los principales temas de la matemática discreta con un fuerte énfasis en las aplicaciones a la informática. Se utilizan programas informáticos para aplicar e ilustrar las ideas matemáticas, ayudando al lector a obtener un entendimiento concreto de las matemáticas abstractas. Los programas también son útiles para los cálculos prácticos y pueden servir como una base para los paquetes de software más grandes.

Diseñado para el primer y segundo año de los estudiantes de pregrado, el libro también es ideal para autoestudio. No se requieren conocimientos previos de programación funcional, el libro y la documentación en línea ofrecen todo lo necesario.

Podrás encontrar información sobre el libro en su página oficial:

http://www.dcs.gla.ac.uk/~jtod/discrete-mathematics/

## 1.9 Test

# Test

**1.** ¿ Decir que $\forall x, \neg p(x)$ es equivalente a decir:

A. $\neg(\forall x, \neg p(x))$

B. $\neg(\forall x, p(x)$

C. $\neg(\exists x, p(x)$

D. $\exists x, p(x)$

**2.** ¿Cuál es la negación de la proposición $\forall \epsilon, \exists\ \delta, \forall$ x,p(x,$\epsilon$,$\delta$)?:

A. $\exists \epsilon$, $\forall\ \delta$, $\exists$ x, p(x,$\epsilon$,$\delta$ ).

B. $\exists \epsilon$,$\forall\ \delta$,$\exists$ x,$\neg$ p(x,$\epsilon$,$\delta$).

C. $\forall \epsilon$, $\exists\ \delta$, $\forall$ x, $\neg$p(x,$\epsilon$,$\delta$ ).

D. Ninguna de las anteriores.

**3.** ¿Qué podemos deducir del número x x a partir de la afirmación

$\exists y$, $\exists z$, y $\in Z \wedge z \in Z \wedge z \neq 0 \wedge x = y/z$

A. $x$ es un número natural.

B. $x$ es un número entero.

C. $x$ es un numero racional.

D. $x$ es par.

**4.** Cuando comparamos una proposición con un predicado encontramos que:

A. Ambos representan verdades matemáticas sobre una variable.

B. Ambos representan hechos desconocidos respecto a una variable

C. La proposición es una afirmación sobre una variable.

D. El predicado puede ser cierto o no.

5. Cuál de estas afirmaciones es falsa:

A. El modus ponens se aplica en la prueba directa.

B. El modus tollens se aplica en la prueba por inducción.

C. El modus tollens se aplica en la prueba por reducción al absurdo.

D. El modus tollens se aplica en la prueba por contraposición.

6. El teorema de Pitágoras que demuestra que no hay ningún número racional *x* que cumpla que x2=2 se demostró por:

A. Prueba directa.

B. Contradicción.

C. Contraposición.

D. Inducción.

7. La prueba por contraposición:

A. Es una forma de prueba indirecta.

B. Se opone a la reducción al absurdo.

C. La reducción al absurdo es una forma de contraposición.

D. Es una forma de prueba por inducción.

8. Qué podemos decir de la deducción «siempre que llueve, el autobús llega tarde. Como hoy el autobús ha llego tarde, esto quiere decir que llueve»?

A. Ha usado modus ponens.

B. Ha usado modus tollens.

C. No está lloviendo.

D. La deducción es errónea.

9. Cuál de las siguientes expresiones es una proposición?

A. «El Quijote»

B. $\forall\, x$

C. «Sueño despierto».

D. «Sin x »

**10.** Cuál de estas afirmaciones es cierta

A. La prueba indirecta es la forma de prueba por contradicción.

B. La prueba indirecta es la forma de prueba por contraposición.

C. La prueba por contraposición es una forma de prueba directa.

D. La prueba por contraposición y por contradicción son formas de prueba indirecta.