Asignatura	Datos del alumno	Fecha
Álgebra y Matemática Discreta	Apellidos: Simanca Castro	09/09/2024
	Nombre: Deisy Jimena	

Álgebra y matemática discreta

Nombre: Deisy Jimena

Apellidos: Simanca Castro

09/09/2024

Docente: Iván Darío Maldonado

Actividad: Laboratorio. Implementación del método de eliminación gaussiana por el método del pivotaje parcial escalado

Fundación Universitaria Internacional de La Rioja (UNIR Colombia)

Para este laboratorio decidí utilizar Python para la resolución de una matriz 4x4 con pivotaje parcial escalado y llegando a la resolución de X_1, X_2, X_3, y X_4.

Aquí está el código implementado para dicha solución:

```
import numpy as np

def eliminacion_gaussiana_ppe(A, b):
    n = len(A)
    # Matriz extendida
    Ab = np.hstack([A, b.reshape(-1, 1)])  # Agregar la columna del vector b a la matriz
A

    # Vector de escala
    escala = np.max(np.abs(A), axis=1)

    for i in range(n-1):
        # Pivotaje parcial escalado
        razones = np.abs(Ab[i:n, i]) / escala[i:n]
        pivot = np.argmax(razones) + i

        if pivot != i:
            # Intercambio de filas
            Ab[[i, pivot], :] = Ab[[pivot, i], :]
            escala[[i, pivot]] = escala[[pivot, i]]

        # Eliminación
        for j in range(i+1, n):
            factor = Ab[j, i] / Ab[i, i]
            Ab[j, i:] = Ab[j, i:] - factor * Ab[i, i:]
```

```
    # Devolver la matriz triangular superior y el vector b modificado
    return Ab[:, :-1], Ab[:, -1]

def sustitucion_regresiva(U, b):
    n = len(b)
    x = np.zeros(n)

    # Resolver desde la última ecuación hacia atrás
    for i in range(n-1, -1, -1):
        suma = np.dot(U[i, i+1:], x[i+1:])
        x[i] = (b[i] - suma) / U[i, i]

    return x

# Ejemplo de uso
A = np.array([[6.0, -2.0, 2.0, 4.0],
              [12.0, -8.0, 6.0, 10.0],
              [3.0, -13.0, 9.0, 3.0],
              [-6.0, 4.0, 1.0, -18.0]])

b = np.array([ 16.0, 26.0, -19.0, -34.0])

# Limitar la impresión de decimales a 2
np.set_printoptions(precision=2, suppress=True)

# Imprimir la matriz original y el vector b
print("Matriz original A:")
print(A)
print("Vector original b:")
print(b)
```

```
# Paso 1: Obtener la matriz triangular superior y el vector modificado
A_triangular, b_modificada = eliminacion_gaussiana_ppe(A, b)

print("\nMatriz triangular superior A:")
print(A_triangular)
print("Vector b modificado:")
print(b_modificada)

# Paso 2: Sustitución regresiva para obtener los valores de x
x = sustitucion_regresiva(A_triangular, b_modificada)

print("\nSolución del sistema (x1, x2, x3, x4):")
print(x)
```

A continuación adjunto pruebas del funcionamiento del código:

Aquí podemos ver la matriz A original y el vector B original:

```
Matriz original A:
[[  6.  -2.   2.   4.]
 [ 12.  -8.   6.  10.]
 [  3. -13.   9.   3.]
 [ -6.   4.   1. -18.]]
Vector original b:
[ 16.  26. -19. -34.]
```

Luego tenemos la matriz triangular superior y el vector B original:

```
Matriz triangular superior A:
[[  6.    -2.     2.     4.   ]
 [ -6.   4.   1. -18.]]
Vector original b:
[ 16.  26. -19. -34.]
```

```
Matriz triangular superior A:
[[  6.    -2.     2.     4.   ]
Vector original b:
[ 16.  26. -19. -34.]

Matriz triangular superior A:
[[  6.    -2.     2.     4.   ]
[ 16.  26. -19. -34.]

Matriz triangular superior A:
[[  6.    -2.     2.     4.   ]
```

Acá vemos la matriz triangular superior y el vector B modificado:

```
Matriz triangular superior A:
[[  6.    -2.     2.     4.   ]
[[  6.    -2.     2.     4.   ]
 [  0.   -12.     8.     1.   ]
 [  0.     0.     4.33 -13.83]
 [  0.     0.     0.    -0.46]]
Vector b modificado:
[ 16.   -27.   -22.5   -0.46]
```

Por último, la resolución para X1, X2, X3, y X4

```
Solución del sistema (x1, x2, x3, x4):
[ 3.  1. -2.  1.]
```

Ahora para comprobar que el código está bien y la resolución es la correcta, voy a resolver la matriz manualmente

Sistema de ecuaciones:

6 -2 2 4 = 16

12 -8 6 10 = 26

3 -13 9 3 = -19

-6 4 1 -18 = -34

Paso 1: Matriz Aumentada Inicial

La matriz aumentada del sistema es:

[6	-2	2	4	|	16]
[12	-8	6	10	|	26]
[3	-13	9	3	|	-19]
[-6	4	1	-18	|	-34]

Paso 1.1: Eliminación en la primera columna

Debemos encontrar el factor de escala para cada fila. El factor de escala es el mayor valor absoluto en cada fila (considerando los elementos del lado izquierdo de la barra, es decir, los coeficientes de las incógnitas).

- **Fila 1**: mayor valor absoluto = max(6,2,2,4)=6
- **Fila 2**: mayor valor absoluto = max(12,8,6,10)=12
- **Fila 3**: mayor valor absoluto = max(3,13,9,3)=13
- **Fila 4**: mayor valor absoluto = max(6,4,1,18)=18

Entonces, los factores de escala para cada fila son:

$S_1=6$, $S_2=12$, $S_3=13$, $S_4=18$

Paso 1.2: Elección del pivote en la columna 1

Dividimos el primer elemento de cada fila por su respectivo factor de escala y elegimos el mayor valor absoluto.

- $6/6 = 1/$
- $12/12 = 1$
- $3/13 \approx 0.23$
- $-6/18 = -1/3 \approx -0.33$

El mayor valor absoluto es 1, y como aparece en la fila 1 y la fila 2, elegimos la **fila 2** como pivote.

Nueva matriz después del intercambio de filas (intercambiamos fila 1 y fila 2):

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 12 & -8 & 6 & 10 & 26 \\ 6 & -2 & 2 & 4 & 16 \\ 3 & -13 & 9 & 3 & -19 \\ -6 & 4 & 1 & -18 & -34 \end{array}\right]$$

Paso 1.2: Eliminación de la columna 1:

Hacemos ceros debajo del pivote de la primera columna (fila 1, columna 1), usando operaciones de fila.

Para la fila 2:

$F_2 \leftarrow F_2 - 6/12\ F_1 = F_2 - 0.5F_1$

Operamos la fila 2:

$(6,-2,2,4,|16) - 0.5(12,-8,6,10,|26) = (6-6,-2+4,2-3,4-5,|16-13) = (0,2,-1,-1,|3)$

Para la fila 3:

$F_3 \leftarrow F_3 - 3/12\ F_1 = F_3 - 0.25F_1$

Operamos la fila 3:

$(3,-13,9,3,|-19) - 0.25\ (12,-8,6,10,|26) = (3-3,-13+2,9-1.5,3-2.5,|-19-6.5) = (0,-11,7.5,0.5,|-25.5)$

Para la fila 4:

$F_4 \leftarrow F_4 + 6/12F_1 = F_4 + 0.5F_1$

Operamos la fila 4:

$(-6,4,1,-18,|-34) + 0.5(12,-8,6,10,|26) = (-6+6,4-4,1+3,-18+5,|-34+13) = (0,0,4,-13,|-21)$

La matriz resultante después de esta etapa es:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 12 & -8 & 6 & 10 & 26 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & -11 & 7.5 & 0.5 & -25.5 \\ 0 & 0 & 4 & -13 & -21 \end{array}\right]$$

Paso 1.3: Eliminación de la columna 2:

Hacemos ceros debajo del pivote en la columna 2 (fila 2, columna 2).

Para la fila 3:

$F_3 \leftarrow F_3 - (-11/2)F_2$

Operamos la fila 3:

$(0,-11,7.5,0.5,|-25.5) + 5.5(0,2,-1,-1,|3) = (0,-11+11,7.5-5.5,0.5-5.5,|-25.5+16.5)$

$= (0,0,2,-5,|-9)$

La fila 4 ya tiene un 0 en la columna 2, por lo que no necesita cambio.

La matriz es ahora:

[12	-8	6	10	|	26]
[0	-2	-1	-1	|	3]
[0	0	2	-5	|	-9]
[0	0	4	-13	|	-21]

Paso 1.4: Eliminación de la columna 3:

Hacemos ceros debajo del pivote en la columna 3 (fila 3, columna 3).

Para la fila 4:

$F_4 \leftarrow F_4 - 4/2F_3$

Operamos la fila 4:

$(0,0,4,-13,|-21) - 2(0,0,2,-5,|-9) = (0,0,4-4,-13+10,|-21+18) = (0,0,0,-3,|-3)$

La matriz queda como:

[12	-8	6	10	|	26]
[0	-2	-1	-1	|	3]
[0	0	2	-5	|	-9]
[0	0	0	-3	|	-3]

Paso 2: Sustitución hacia atrás

Ahora resolvemos el sistema usando sustitución hacia atrás.

De la fila 4: $-3x_4=-3$, por lo tanto, $x_4=1$

De la fila 3: $2x_3-5x_4=-9$, sustituyendo $x_4=1$:$2x_3-5 = -9$, $2x_3 =-4$, por lo tanto, $x_3 = -2$

De la fila 2: $2x_2 - x_3 - x_4 = 3$, sustituyendo $x_3 = -2$ y $x_4 = 1$: $2x_2 + 2 - 1 = 3$, $2x_2 = 2$, por lo tanto, $x_2 = 1$

De la fila 1: $12x_1 - 8x_2 + 6x_3 + 10x_4 = 26$ sustituyendo $x_2 = 1$ $x_3 = -2$ $x_4 = 1$: $12x_1 - 8 - 12 + 10 = 26$, por lo tanto $x_1 = 3$

Solución Final:

Ecuaciones correspondientes:

1. $12x_1 - 8x_2 + 6x_3 + 10x_4 = 26$
2. $2x_2 - x_3 - x_4 = 3$
3. $2x_3 - 5x_4 = -9$
4. $-3x_4 = -3$

Paso 1: Resolver para x_4

De la ecuación 4:

$-3x_4 = -3 \implies x_4 = 1$

Paso 2: Resolver para x_3

Usamos la ecuación 3:

$2x_3 - 5x_4 = -9$

Sustituimos $x_4 = 1$

$2x_3 - 5(1) = -9 \implies 2x_3 - 5 = -9 \implies 2x_3 = -4 \implies x_3 = -2$

Paso 3: Resolver para x_2

Usamos la ecuación 2:

$2x_2 - x_3 - x_4 = 3$

Sustituimos $x_3 = -2$ y $x4 = 1$

$2x_2 - (-2) - 1 = 3 \implies 2x_2 + 2 - 1 = 3 \implies 2x_2 + 1 = 3 \implies 2x_2 = 2 \implies x_2 = 1$

Paso 4: Resolver para x_1

Usamos la ecuación 1:

$12x_1 - 8x_2 + 6x_3 + 10x_4 = 26$

Sustituimos $x_2 = 1$, $x_3 = -2$ y $x_4 = 1$

$12x_1 - 8(1) + 6(-2) + 10(1) = 26 \implies 12x_1 - 8 - 12 + 10 = 26$

Simplificando:

$12x_1 - 10 = 26 \implies 12x_1 = 36 \implies x_1 = 3$

Solución final:

Las incógnitas son:

$x_1=3$, $x_2=1$, $x_3=-2$, $x_4=1$

Conclusiones

1. **Optimización en la resolución de sistemas:** La eliminación gaussiana permite resolver sistemas de ecuaciones lineales de manera eficiente, lo cual es fundamental en aplicaciones de ingeniería, física y matemáticas aplicadas.

2. **Estabilidad numérica:** El pivotaje parcial escalado mejora la estabilidad de los cálculos al minimizar errores numéricos que podrían surgir por divisiones entre números pequeños, asegurando resultados más precisos.

3. **Versatilidad y aplicabilidad:** Dominar estos métodos facilita el análisis y resolución de problemas en distintas áreas como las simulaciones computacionales, donde los sistemas de ecuaciones lineales son recurrentes.