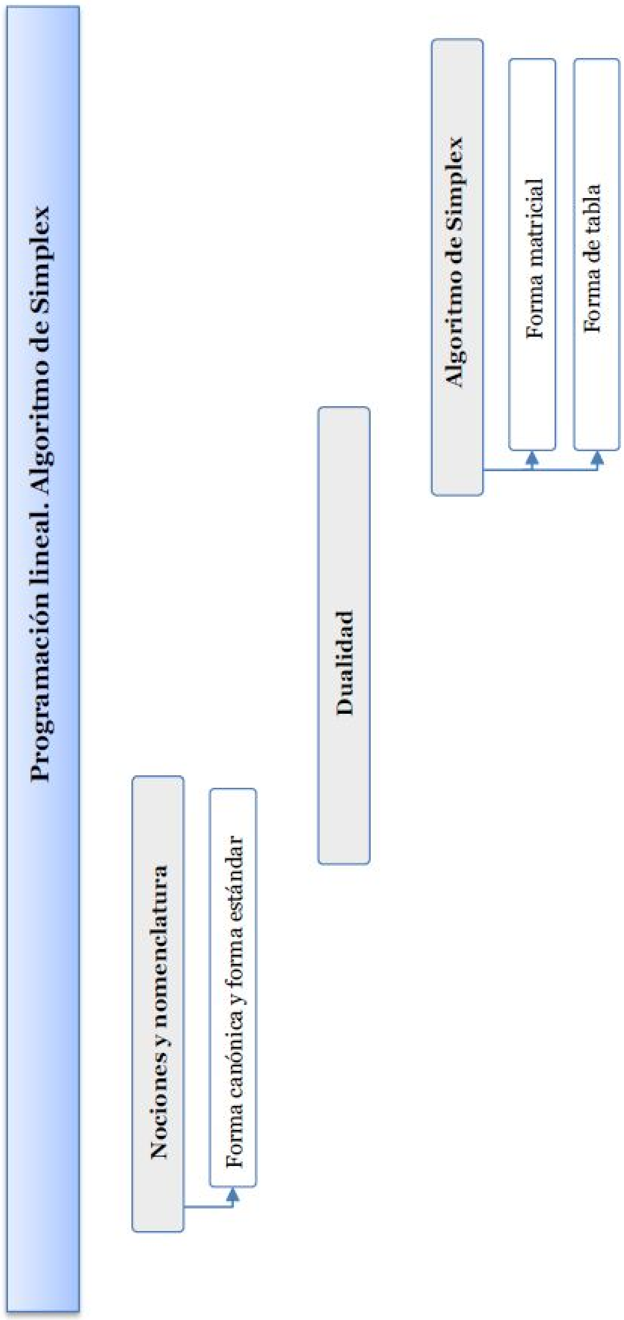
Álgebra y Matemática discreta

Programación lineal. Algritmo Simplex

Índice

Esquema



Programación lineal. Algoritmo de Simplex
Nociones y nomenclatura
Forma canónica y forma estándar
Dualidad
Algoritmo de Simplex
Forma matricial
Forma de tabla

Ideas clave

5.1 Introducción y objetivos

La programación lineal es una técnica matemática que se utiliza para resolver problemas de optimización lineal, en los cuales se busca maximizar o minimizar una función lineal sujeta a un conjunto de restricciones lineales. Aunque la programación lineal se suele asociar con el cálculo diferencial, también tiene una fuerte relación con el álgebra discreta y la teoría de grafos.

El problema de programación lineal se formula al especificar una función objetivo lineal y un conjunto de restricciones lineales, y se busca encontrar los valores de las variables de decisión que maximizan o minimizan la función objetivo mientras se satisfacen todas las restricciones. El objetivo es encontrar una solución óptima para un problema de optimización lineal con un conjunto de restricciones lineales. Las soluciones óptimas se encuentran utilizando algoritmos especializados de programación lineal, como puede ser el algoritmo Simplex que se verá en detalle en este tema.

La programación lineal se utiliza comúnmente en situaciones donde se desea maximizar o minimizar una función de costos o ingresos sujeto a restricciones y por ende, una amplia variedad de aplicaciones en la ingeniería informática. En particular, se utiliza para resolver problemas de optimización en sistemas de planificación de recursos, diseño de redes de comunicación, gestión de inventarios, asignación de recursos y muchos otros. En la ingeniería de redes de comunicación es habitual el uso de la programación lineal para resolver problemas de enrutamiento, asignación de recursos y gestión de congestión en redes de telecomunicaciones, redes de datos y otros sistemas de comunicación. También es frecuente utilizar la teoría de programación en la optimización de algoritmos y en la programación de sistemas. Por ejemplo, se utiliza para optimizar el rendimiento de los sistemas operativos, los compiladores y los sistemas de bases de datos.

En resumen, la programación lineal tiene una amplia variedad de aplicaciones en la ingeniería informática y se utiliza para resolver problemas de optimización en una amplia variedad de áreas, desde la planificación de recursos hasta la gestión de redes de comunicación y el diseño de algoritmos. La combinación de la programación lineal y la ingeniería informática ha llevado a importantes mejoras en la eficiencia y productividad de los sistemas informáticos de ahí la importancia de estudiar este tema en el marco del álgebra discreta aplicada a la ingeniería informática..

En concreto, en este capítulo, se pretende alcanzar los siguientes objetivos:

- Formalizar matemáticamente un problema de programación lineal.
- Comprender y encontrar el conjunto factible en un problema de programación lineal.
- Analizar la forma estándar del problema.
- Planteamiento del problema Dual.
- Resolución de un problema de programación lineal.

Para alcanzar estos objetivos, se propone la siguiente subdivisión del contenido de este tema:

- Forma canónica del problema de programación lineal
- Forma estándar
- Dualidad
- Algoritmo simplex matricial
- Algoritmo simplex en tabla

5.2 Nociones y nomenclatura

La programación lineal se refiere a un tipo de problema matemático en el que se busca optimizar una función llamada función objetivo, la cual es lineal en las variables del problema. Sin embargo, la función objetivo está sujeta a un conjunto de restricciones, las cuales pueden ser expresadas como igualdades o desigualdades matemáticas. En los problemas de programación lineal se pretende maximizar o minimizar una función objetivo $f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$, sometida una serie de restricciones.

Se dice que un problema de programación lineal (LPP) está formulado en **forma canónica** si viene expresado por:

$$\begin{cases} min \;\; f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \\ \quad s.a\; a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \geq b_1 \\ \qquad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \geq b_2 \\ \qquad\quad \vdots \\ \qquad a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \geq b_m \\ \qquad x_i \geq 0, \;\; i = 1, \cdots, n. \end{cases}$$

Donde las variables $x_1, \cdots, x_n$ se denominan *variables de decisión* y las constantes $c_1, ..., c_n$ son los *coeficientes de coste*, además, los coeficientes $a_{ij},\ b_i$ son constantes reales mientras que los x_i son los valores reales que se deben determinar.

Se puede escribir el sistema en forma compacta o matricial como:

$$\begin{cases} min \;\; c^t x \\ \quad s.a : Ax \geq b_i \\ \qquad x_i \geq 0. \end{cases}$$

Donde:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{, y} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

O bien:

$$\begin{cases} max \;\; c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \\ \quad s.a \; a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ \qquad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \qquad\quad \vdots \\ \qquad a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m \\ \qquad x_i \geq 0, \;\; i = 1, \cdots, n. \end{cases}$$

5.3 Forma estándar

Existen distintas formas de representar el conjunto de restricciones o la función objetivo, sin embargo, una forma aceptada de forma generalizada es la **forma estándar** y que permite resolver el problema de programación lineal aplicando algoritmos de programación, fácilmente implementables en el ordenador. Se trata de una representación matemática del problema consistente en escribir la función objetivo y las restricciones en términos de igualdades y variables de holgura o excedente.

Un LPP se dice que esta en forma estándar si y sólo si:

- Es un problema de *minimización*:

  min$Z = f(x) = c^t x, \;\; c \in \mathbb{R}$.

- Contiene solamente *restricciones de igualdad*:

  $Ax = b$, donde A es una matriz de tamaño $M \times n, \;\; m < n$ que contienes los coeficientes de las restricciones.

- El vector $b \in \mathbb{R}$ es *no negativo*:

  $b \geq 0$.

- Las variables x_i son *no negativas*:

  $x_j \geq 0, 1 \leq j \leq n$.

Téngase en cuenta que un problema de maximización es equivalente a un problema de minimización por un cambio de signo en la función objetivo, es decir, *maximizar* $Z_{max} = c^t x$, es equivalente a *minimizar* $Z_{min} = -c^t x$, cuando ambos problemas están sujetos a las mismas restricciones. Por tanto, los valores óptimos se alcanzarán en los mismos puntos pero con $Z_{max} = -Z_{min}$.

Por tanto, el problema estándar escrito en forma matricial, puede escribirse como:

$$\begin{cases} min \;\; f(x) = c^t x \\ \quad s.a : Ax = b \\ \qquad\quad x \geq 0. \end{cases}$$

Transformación a forma estándar

Para transformar un LPP en forma estándar, con el objetivo de resolverlo mediante algoritmos, se debe tener en cuenta lo siguiente:

- Las restricciones de desigualdad se pueden transformar en igualdades añadiendo variables. Estas variables se llaman **variables de holgura** (slack variables):
    - Si $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \leq b_i$, entonces existe una variable $x_{n+1} \geq 0$, tal que:

      $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n + x_{n+1} = b_i$,
    - Si $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \geq b_i$, entonces existe una variable $x_{n+1} \geq 0$, tal que:

      $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n - x_{n+1} = b_i$
- Las variables libres x_k, es decir, las variables para las que no existe la restricción de no negatividad, pueden sustituirse por diferencias de variables no-negativas. Para ello, si x_k no está restringida en signo, puede escribirse como una diferencia de dos variables no negativas:

$$x_k = u_k - v_k, \quad u_k \geq 0, \;\; v_k \geq 0.$$

Ejemplo 1.

Ejemplo expresar en forma estándar:

$$\begin{cases} max \;\; f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 - x_3 \\ \quad s.a: \;\; x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ \qquad\qquad x_1 - x_2 - x_3 \leq 1 \\ \qquad\qquad x_1 + x_3 \geq -1 \\ \qquad\qquad x_1 \geq 0 \end{cases}$$

Solución: Debemos transformar las restricciones del problema en igualdades. En este caso, la primera restricción ya es una igualdad, por tanto no se queda igual. La segunda restricción se trata de una desigualdad del tipo menor que, por ello, debemos añadir una variable de holgura (x_4), transformándola en la siguiente igualdad:

$$x_1 - x_2 - x_3 \leq 1 \longrightarrow x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 1$$

La tercera desigualdad es del tipo mayor que, por tanto, cambiamos el signo de la desigualdad multiplicando todos los términos por (-1) para después añadir la variable de holgura (x_5) quedando lo siguiente:

$$x_1 + x_3 \geq -1 \longleftrightarrow -x_1 - x_3 \leq 1 \longrightarrow -x_1 - x_3 + x_5 = 1$$

Por último,debemos transformar las variables libres (aquellas que no tienen restricción de no negatividad). Para ello, las escribimos como diferencia de dos variables no negativas:

$$x_2 \longrightarrow x_2 = u_2 - v_2; \quad x_3 = u_3 - v_3$$

Y por tanto el LPP en forma estándar es el siguiente:

$$\begin{cases} max \;\; f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 - x_3 \\ \quad s.a: \; x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ \qquad\quad x_1 - x_2 - x_3 + X_4 = 1 \\ \qquad\quad -x_1 - x_3 + x_5 = 1 \\ \qquad\quad x_1 \geq 0; \qquad x_2 = u_2 - v_2 \\ \qquad\quad x_4 \geq 0; \qquad x_3 = u_3 - v_3 \\ \qquad\quad x_5 \geq 0 \end{cases}$$

Dado un problema de programación lineal como el que acabamos de ver, se llama **región factible** al conjunto de vectores que satisfacen las restricciones del problema. Se denomina así mismo **punto factible** a cada uno de esos puntos que cumplen la restricción. Además, dado un LPP, se verifican las siguientes propiedades:

- Es *convexo* tanto si es de minimización como si es de maximización.
- La solución óptima, si existe, es global.
- Nunca existen óptimos locales que no sean globales.
- Puede tener o no solución. Si existe solución, esta se encuentra en un único punto o en infinitos puntos.

Soluciones de un LPP

Resolver un problema de programación lineal, supone encontrar una solución óptima, es decir, un conjunto de valores para las variables de decisión ($X = \{x_1, X_2, ..., x_3\}$) que maximizan o minimizan la función objetivo, mientras se cumplen todas las restricciones del problema.

Definición 1

Un punto $x = (x_1, x_2, ..., x_3)$ que satisface todas las restricciones $(Ax \geq b, x \geq 0)$ se denomina **solución admisible** o **solución factible**. Un punto admisible $\tilde{x}$ que cumple que $f(\tilde{x}) \leq f(x)$, para cualquier otro punto x, se denomina **solución óptima** del problema.

El conjunto de soluciones admisibles *(feasible solutions)* de un LPP que se define como:

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \ tal \ que \ Ax \geq b, \ x \geq 0\}$$

Es un politopo convexo y se denomina **región admisible** o **región factible** y esta puede ser acotada o no acotada. En función de como sea la región factible o el número de soluciones, podemos encontrarnos con que el LPP puede tener:

- **Una solución óptima única**. Es aquella que se produce cuando solo hay una combinación de valores de las variables de decisión que produce el valor óptimo de la función objetivo.

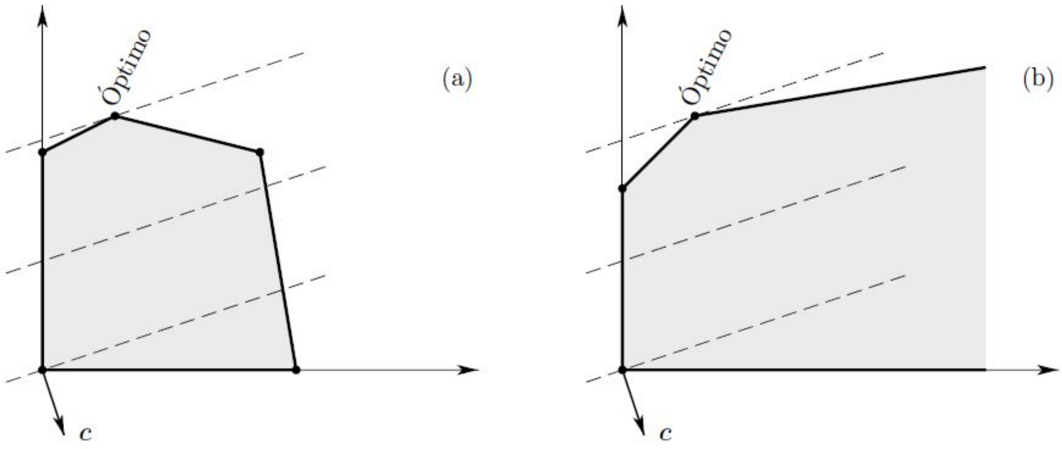


Figura 1: Solución única para: (a) región factible acotada y (b) región factible no acotada. Fuente J.L. de la Fuente O´Conor

- **Varias soluciones óptimas**. En este caso, el óptimo no es un valor único, si no un conjunto de valores que pertenecen a una de las caras de la región factible.
- **Solución óptima no acotada**. En este caso, no se encuentra una solución factible acotada, es decir, es posible desplazarse en la dirección de la función objetivo $(-c)$ sin encontrar ningún punto extremo o cara que limite en este desplazamiento.

Las imágenes de *J.L. de la Fuente O´Conor*, muestran gráficamente cada una de las situaciones que se acaban de describir; en la figura 1, se puede ver un LPP con solución única para: (a) región factible acotada y (b) región factible no acotada y en la figura 2, se muestra un problema de solución múltiple, la cual se encuentra en una cara del poliedro o región factible. Por último, en la figura 3 se puede ver una solución factible no acortada y una región factible vacía.

Fíjese que en las figuras se representa la dirección de la función objetivo en linea de puntos y como el objetivo es desplazarse en esta dirección $(-c)$ hasta encontrar la solución óptima para dicha función.

Teorema 1

Dado un politopo no vacío $P = \{x \in \mathbb{R}^n \ tal \ \ que \ \ Ax \geq b, \ x \geq 0\}$ de soluciones

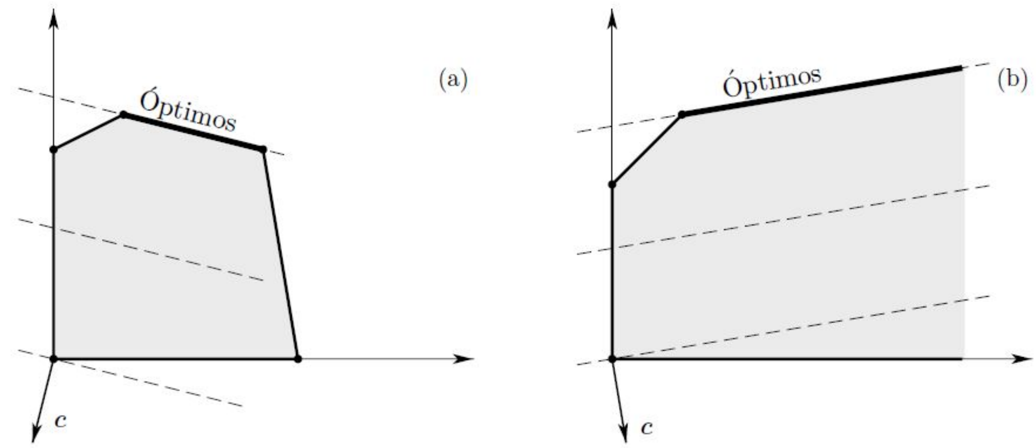


Figura 2: Solución múltiple para: (a) región factible acotada y (b) región factible no acotada. Fuente J.L. de la Fuente O´Conor

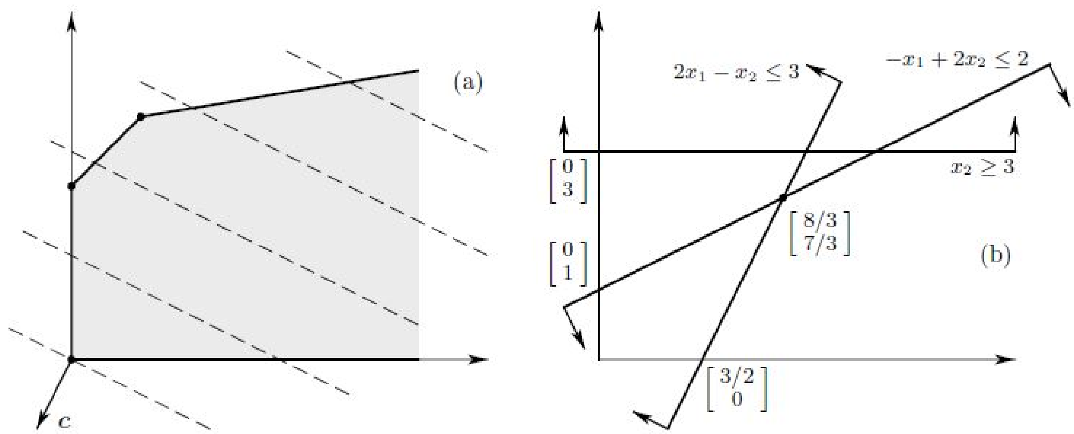


Figura 3: (a) Solución óptima no acotada y (b) región factible vacía. Fuente J.L. de la Fuente O´Conor

de un LPP, el valor mínimo de la función objetivo $c^T x$ en ese P, se alcanza en un punto extremo.

Teorema 2

Si el politopo $P = \{x \in \mathbb{R}^n \ tal \ que \ Ax \geq b, \ x \geq 0\}$ de un LPP es no vacío, tiene al menos un punto extremo o vértice.

Ejemplo 2.

Se considera el siguiente problema de programación lineal y se requiere obtener la solución del mismo:

$$\begin{cases} min \quad -2x_1 - 3x_2 \\ s.a \; x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Su forma estándar requiere añadir la variable de holgura x_3:

$$\begin{cases} min \quad -2x_1 - 3x_2 \\ s.a \; x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Por tanto, encontrar la solución al problema supone encontrar los escalares $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ que hagan mínima la función objetivo y cumplan las restricciones, es decir, encontrar los escalares que cumplan:

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_3 + = \begin{bmatrix} z \\ 2 \end{bmatrix},$$

La solución es $\tilde{z} = -4 \; con \; \tilde{x}_1 = 2 \; y \; \tilde{z}_2 = \tilde{x}_3 = 0.$

Si un LPP con dos variables tiene una solución óptima finita, ésta ocurre en un punto extremo de la región factible que delimitan las soluciones factibles.

Definición 2

Sea B una submatriz de tamaña $m \times m$ que se obtiene al agrupar columnas independientes de la matriz de coeficientes de la matriz A (matriz de coeficientes de las restricciones del problema).
A los m componentes que forman la matriz B se les denomina *variables básicas*. Los $n - m$ restantes componentes del vector (x_N), que no se asocian a las columnas de B, se denominan *variables no básicas*.
La solución de la ecuación $Ax = b$ en los m componentes, cuando las variables no básicas son cero, tiene como resultado una *solución básica asociada* a la matriz básica o base B.

Definición 3

Una solución básica en la que todos los componentes son no negativos $(x_i \geq 0)$, se denomina **solución básica factible**. En cambio, si alguno de los elementos es $x_i < 0$, entonces será una **solución no factible**. Si alguno de los valores $x_i = 0$, entonces se dice que es una **solución degenerada**.

Además, existe una correspondencia entre los puntos extremos o vértices del conjunto factible y las soluciones básicas factibles. Esta correspondencia entre soluciones básicas y puntos extremos, en general no es biunívoca. Este caso se dará si y solo si todas las soluciones básicas del problema sean no degeneradas. Diremos en tal caso que nos encontramos ante un problema no degenerado.

Definición 4

Sean A una matriz de tamaño$m \times n$ de rango m y $b \in \mathbb{R}^m$. Sea el politopo convexo:

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax = b,\ x \geq 0\}$$

Un vector $x \in P$ es un punto extremo de P si y solo si los vectores columna de la matriz A asociados a las componentes positivas de x son linealmente independientes.

Por tanto, un punto

$$x \in P = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax = b,\ x \geq 0\}$$

es un punto extremo de P si y solo si x es una solución básica factible de $Ax = b$, $x \geq 0$ asociada a una base B.

Ejemplo 3.

Sea el problema de programación lineal siguiente:

$$\begin{cases} min \quad -3x_1 + 4x_2 \\ \qquad s.a\ 2x_1 + 3x_2 \leq 10 \\ \qquad\quad x_1 + 3x_2 \geq 5 \\ \qquad\quad x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Encontrar las soluciones básicas factibles al problema.

Solución:

En primer lugar, escribimos el problema en forma estándar:

$$\begin{cases} min \quad -3x_1 + 4x_2 \\ \qquad s.a\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 10 \\ \qquad\quad x_1 + 3x_2 . x_4 = 5 \\ \qquad\quad x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Cuya matriz de coeficientes A es:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Y las posibles submatrices de variables básicas son:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}; B_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; B_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$B_4 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}; B_5 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}; B_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$$

Para obtener las soluciones básicas factibles, debemos resolver la ecuación $x_B = B_i^{-1}b$ con $X_N = 0$

Para la submatriz B_1 la solución factible asociada se calcula como sigue:

Sea $B_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y sea $x_B = (x_1, x_2) = B^{-1}b$ con $x_N = (x_3, x_4) = (0, 0)$

Se tienes que:

$$x_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0$$

Y por tanto, la solución factible asociada a la base B_1 es $\tilde{x}_1 = (5, 0, 0, 0)$, que por tener el valor de $x_2 = 0$ se dice que es una *solución degenerada*.

De igual forma se pueden obtener las soluciones factibles asociadas al resto de bases B_i:

Las soluciones factibles son: $\tilde{x}_4 = (0, 5/3, 5, 0), \tilde{x}_5 = (0, 10/3, 5, 0)$

Solución factible degenerada: $\tilde{x}_1 = \tilde{x}_2 = \tilde{x}_3 = (5, 0, 0, 0)$

Y la solución no factible asociada a la base $B_6 : \tilde{x}_6 = (0, 0, 10, -5)$.

En este caso se establece la siguiente correspondencia entre los extremos de la región factible y las soluciones básicas:

$$x_1 = (0, 5/3) \longrightarrow \tilde{x}_4 = (0, 5/3, 5, 0)$$
$$x_2 = (0, 10/3) \longrightarrow \tilde{x}_5 = (0, 10/3, 5, 0)$$
$$x_3 = (5, 0) \longrightarrow \tilde{x}_1 = (5, 0, 0, 0)$$

La solución de un problema de programación lineal se puede obtener de forma gráfica para el caso de problemas de dos variables, aunque la misma idea se puede extender a $\mathbb{R}^n$, en cuyo caso, la representación resulta mas complicada. Para obtener la solución de forma gráfica,se deben seguir los siguientes pasos:

1. Dibujar la gráfica de cada restricción sobre el mismo cuadrante no negativo.
2. Calcular la región factible P y sis vértices.
3. Dibujar una recta de la función objetivo que pase por el origen para obtener su pendiente.
4. Teniendo en cuenta si se trata de un problema de maximizar o minimizar, determinar el vértice de la función factible que esté sobe la recta de la función objetivo.
5. Los valores de las variables de decisión en ese vértice, dan la solución al problema.
6. El valor óptimo de la función objetivo se obtiene sustituyendo dichos valores en la función objetivo.

Ejemplo 4.

Resolver el siguiente problema de programación lineal de forma gráfica:

$$\begin{cases} min \ \ f(x_1, x_2) = -8x_1 - 11x_2 \\ \quad s.a \ 5x_1 + 4x_2 \leq 40 \\ \quad\quad -x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ \quad\quad x_1 \geq 0, \ \ x_2 \geq 0, \end{cases}$$

Solución

Para encontrar la solución, dibujamos en el primer cuadrante las dos zonas que delimitan la región factible las dos restricciones que tiene el problema. Seguidamente dibujamos la recta correspondiente con la función objetivo y hacemos sus paralelas hasta encontrar la que pasas por el vértice de la región factible. Se obtiene de esta forma la solución óptima $\tilde{x} = (72/19, 5.26)$ que se puede ver en la figura siguiente:

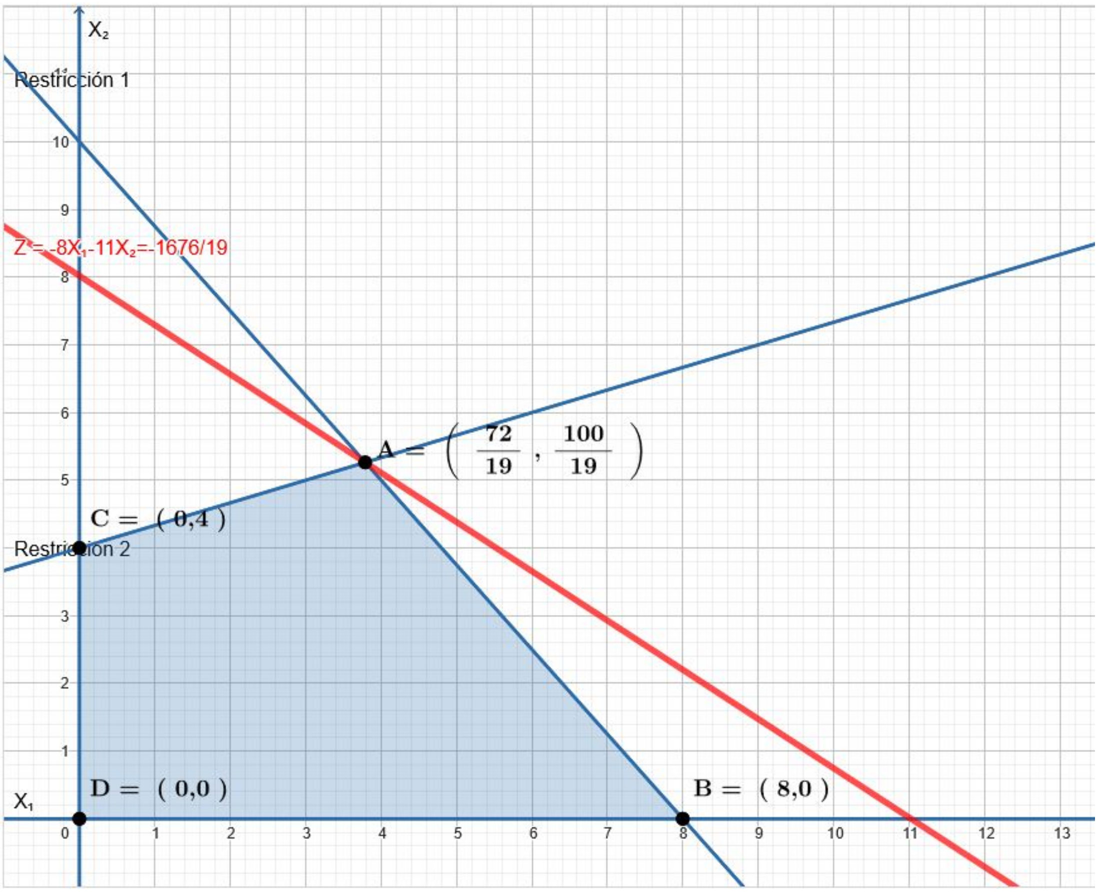


Figura 4: Solución gráfica del problema. Fuente https:/www.plandemejora.com

5.4 Dualidad

Hasta el momento se ha descrito el problema de programación lineal como un problema único, escrito en la forma canónica o en la forma estándar, pero cuando se habla de un LPP, este encierra dos problemas, el que hemos visto y que se conoce como *problema Primal* y que siempre lleva asociado el *problema Dual*, ambos estrechamente relacionados y que son útiles para resolver problemas de optimización.

El problema dual es un problema matemático que se puede obtener a partir del problema primal. En el se busca maximizar o minimizar una función objetivo, obtenida a partir de las restricciones que el problema primal.

Lema 1

Dado el problema de programación lineal Primal en su forma estándar:

$$\begin{cases} maximizar \ \ c^t x \\ s.a: Ax \leq b_i \\ x_i \geq 0. \end{cases}$$

Siempre se puede obtener el problema Dual siguiente:

$$\begin{cases} minimizar \ \ b^t y \\ s.a: A^t y \geq c_i \\ y_i \geq 0. \end{cases}$$

Fíjese que en el proceso de transformación de el problema primal al dual, se intercambian los vectores b y c y la matriz A está en su forma transpuesta y el signo de la desigualdad está cambiado en las restricciones del problema.

Teorema 3

Teorema de la dualidad de la programación lineal: (a) Si el problema primal o el

dual tiene una solución óptima finita la tiene el otro y $min.c^t x = max.b^t y$.
(b) Si el problema primal o el dual tiene una función objetivo no acotada el otro no tiene solución factible.

De esta forma, escribiendo el problema en forma dual, obtenemos un formulación alternativa a los problemas de optimización que permite encontrar las soluciones del problema primal.

5.5 Algoritmo simplex

Se ha analizado en las secciones anteriores las definiciones de los problemas de programación lineal y las posibles soluciones que pueden tener, siendo la optima, aquella que minimiza/maximiza la función objetivo. Para el caso particular de problemas de dos incógnita, se ha mostrado el método gráfico mediante el cual se puede obtener la solución óptima de forma sencilla.
Pero nos preguntamos ahora como saber cual es la solución optima de entre todas las factibles que se pueden encontrar, sin la necesidad de evaluar cada una de ellas en la función objetivo. Téngase en cuenta que en problemas en los que el número de incógnitas es elevado, resulta obviamente un procedimiento inalcanzable. La respuesta a esta cuestión, viene de la mano de George B. Dantzig, que en 1947, desarrolló el denominado **método del simplex.**, que ha resultado ser uno de los diez mejores algoritmos del siglo XX
El método está basado en la idea de encontrar una solución factible inicial o un punto extremo del politopo P; a continuación el algoritmo consiste en ir desplazándose de un extremo a otro a lo largo de una arista de P de tal forma que en cada paso, se minimice la función objetivo hasta encontrar la solución óptima. Veamos en detalle el algoritmo.

Sea el problema lineal:

$$\begin{cases} min \ c^t x \\ \quad s.a : Ax \leq b_i \\ \qquad x_i \geq 0. \end{cases}$$

con $b \geq 0$, A una matriz de tamaño $m \times n$ y $rango(A) = m < n$.
Sea B una submatriz inversible $(det(B) \neq 0)$ de A de tamaño m y sea N la submatriz de A formada por las columnas de A que no están en B, de modo que $A = (B|N)$. Sea x_B el vector constituido por las m componentes de x cuyos coeficientes en el sistema $Ax = b$ se recogen en la matriz B y sea c_N el vector formado por los elementos restantes de x. Entonces, se tiene que:

$$Ax = b \Leftrightarrow (B|N) \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = b \Leftrightarrow Bx_B + Nx_N = b$$

es decir, $x_b + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b$. Si ahora se hace $x_N = 0$, tal como se vio anteriormente, se obtendrá una solución básica del problema:

$$x = (x_B, x_N) = (B^{-1}b, 0),$$

y

$$c^t x = c_B x_B + c_N x_N = c_B B^{-1} b,$$

donde c_B son los coeficientes de la función objetivo correspondientes a las variables básicas.

Definido el problema, procedemos a describir el algoritmo simplex en forma matricial, en el que se comienza con un *Paso inicial* que consiste en encontrar una solución básica factible correspondiente a una submatriz B cuyo determinante debe ser distinto de cero de A. A continuación se aplica el *paso principal* del algoritmo:

1. Resolver el sistema $Bx_B = b \leftrightarrow x_B = B^{-1}b$ y obtener la primera solución factible

$x^1 = (x_B^1, x_N^1)$ donde $x_N^1 = 0$ y $x_B = B^{-1}b$ es una solución factible.

2. Calcular la matriz $Y = B^{-1}N$.

3. Hallar $z_j - c_j$ para cada variable no básica. Donde $z_j = \vec{c}_B\vec{y} : j$ ($\vec{c}$ es el vector de coeficientes de la función objetivo e $\vec{y_j}$ es la columna de la matriz Y que corresponde a la variable no básica x_j). Sea

$$z_k - c_k = max\,\{z_j - c_j/j \in J\}$$

siendo J el conjunto de los índices asociados a la s variables no básicas en cada etapa.

- Si $z_k - c_k \leq 0$, la solución básica factible actual es el óptimo del problema. Si $z_k - c_k = 0$, la solución no será única.
- si $z_k - c_k > 0$, pasamos a comprobar una nueva solución básica factible, en el punto 3.

4. Comprobar si existe $j \in J$ tal que $z_j - c_j > 0$ con $y_j \leq 0$. Si esto sucede, el problema no tiene óptimo finito. En caso contrario se continúa. Para la nueva solución, la variable x_p, correspondiente al $z_k - c_k = max\,\{z_k - c_k j \in J\}$, será la básica y dejará de serlo x_p, siendo p el índice que cumple:

$$\frac{x_p}{y_{pk}} = min\left\{\frac{x_i}{y_{ik}}/>0\right\}.$$

5. Se actualiza la matriz B y se vuelve al paso inicial del algoritmo.

Simplex en forma de tabla

Otra forma de aplicar el algoritmo simplex es realizando las mismas operaciones, pero presentándolas en forma de tabla.

Para un problema P en el que se tiene una solución básica inicial $\vec{x}^0 = (\vec{x}_B^0, \vec{x}_N^0)$

correspondiente a la submatriz B. Consideramos por simplicidad que las $\vec{x}_b$ variables básicas, son las m primeras variables. Podemos construir entonces la siguiente tabla:

	$x_1,...,x_m$	$x_{m+1},...,x_n$	
z	$z_1 - c_1, ...z_m - c_m$	$z_{m+1} - c_{m+1}, z_{m+2} - c_{m+2}, ..., z_n - c_n$	$\vec{c}_B\vec{x}_B^0$
$\vec{x}_B^0$	I_m	$B^{-1}N = Y$	$B^x\vec{b}$

En la cual se tiene:

- En la primera fila, todas las variables de decisión.
- En la segunda fila, los valores de $z_j - c_j$ para $j \in J$ y de $z_i - c_i$ para $i \in I$ y en la última casilla de esta fila, el valor de la función objetivo en $\vec{x}^0$.
- En la tercera fila, aparecen en primer lugar las variables básicas. En el bloque central, la matriz $(I_m|Y)$ y en la última fila, los valores de las variables básicas.

La aplicación del algoritmo simplex a partir de esta tabla, se debe hacer siguiendo estos pasos:

1. Si los elementos de la segunda fila $z_j - c_j$ son todos no positivos, entonces, $\vec{x}^0$ es la solución óptima. En caso contrario, la variable x_k tal que $z_k - c_k = max\,\{z_j - c_j/j \in J\}$, se considera no básica y la columna que la contiene, será la columna pivote.
2. Si $\exists\ y_j > 0$ se calcula:
$$min\left\{\frac{x_i}{y_{ik}}/y_{ik} > 0\right\} = \frac{x_l}{y_{lk}}$$
Y la variable x_{lk} pasa a ser no básica en la nueva solución y la fila que la contiene, será la fila pivote. El elemento y_{lk} será el pivote. Si este es ≤ 0, el problema carece de óptimo finito.
3. Se transforma la tabla pivotando el elemento y_{lk} buscando ceros en todos los elementos de la columna pivote y sin realizar intercambio de filas. Una vez obtenida la nueva tabla, se vuelve al paso 1.

A continuación se presenta un ejemplo de resolución de un problema programación lineal mediante el algoritmo simplex de forma matricial y en forma de tabla.

Ejemplo 5.

Resolver el siguiente problema de programación lineal de forma matricial y en forma de tabla mediante el algoritmo Simplex:

$$\begin{cases} max \;\; f(x_1, x_2) = 10x_1 + x_2 \\ \quad s.a\; x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ \qquad 2x_1 - x_2 \leq 4 \\ \qquad 5x_1 + 3x_2 \leq 15 \\ \qquad x_1 \geq 0, \;\; x_2 \geq 0, \end{cases}$$

Solución

En primer lugar, escribimos el problema en forma estándar:

$$\begin{cases} min \;\; f(x_1, x_2) = -10x_1 - x_2 \\ \quad s.a\; x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 6 \\ \qquad 2x_1 - x_2 + x_4 \leq 4 \\ \qquad 5x_1 + 3x_2 + x_5 \leq 15 \\ \qquad x_i \geq 0 \end{cases}$$

Siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 15 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -10 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Resolución matricialmente:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \; N = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$\vec{x} = (0, 0, 6, 4, 15)$ $\qquad f_{obj}(\tilde{x}) = 0$

$\vec{x}_B = (x_3, x_4, x_5)$

$\vec{x}_N = (x_1, x_2)$

$$Y = B^{-1}N = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \quad \vec{c}_B = (0, 0, 0)$$

$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ \vec{x}_l & \vec{x}_2 \end{matrix}$$

$$z_1 - c_1 = \vec{c}_B \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} - (-10) = 10; \quad z_2 - c_2 = \vec{c}_B \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} - (-1) = 1$$

$$\begin{matrix} \uparrow & \qquad\qquad\qquad & \uparrow \\ \vec{y}_1 & & \vec{y}_3 \end{matrix}$$

$max\,\{z_1 - c_1, z_2 - c_2\} = z_1 - c_1 = 10$

Por tanto entra en la nueva solución la variable x_1 Y deja de ser básica la variable x_4 ya que:

$$\frac{x_4}{y_{41}} = min \left\{ \frac{x_3}{y_{31}}, \frac{x_4}{y_{41}}, \frac{x_5}{y_{51}} \right\} = min \left\{ \frac{6}{1}, \frac{4}{2}, \frac{15}{5} \right\}$$

Se tiene una solución $\vec{x}$ con:

$\vec{x}_B = (x_3, x_1, x_5);$ $\qquad \vec{c}_B = (0, -10, 0)$

$x_N = \vec{(}x_2, x_4)$

Y por tanto, la nueva submatriz es:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Segunda iteración

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}; \ \tilde{N} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}; \ \tilde{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -5/2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\vec{x}_B = \tilde{B}^{-1}\bar{b} = \tilde{B}^{-1} \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

$\vec{x} = (2, 0, 4, 0, 5)$ $\qquad\qquad$ $f_{obj}(\tilde{x}) = -20$

$$\tilde{Y} = B^{-1}N = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 5/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \\ 11/2 & -5/2 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} \uparrow & \quad\uparrow \\ \vec{x}_2 & \quad\vec{x}_4 \end{matrix} \end{array} \begin{array}{l} \longleftarrow \ x_3 \\ \longleftarrow \ x_1 \\ \longleftarrow \ x_5 \\ \\ \\ \end{array}$$

Comprobamos si esta solución es la óptima o debemos continuar con el algoritmo.

Para ello se calculan los $z_j - c_j$ de cada variable no básica:

$$z_2 - c_2 = \vec{c}_B \underset{\substack{\uparrow \\ \vec{y}_2}}{\begin{pmatrix} 5/2 \\ -1/2 \\ 11/2 \end{pmatrix}} - (-1) = 6 > 0; \quad z_4 - c_4 = \vec{c}_B \underset{\substack{\uparrow \\ \vec{y}_4}}{\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ -5/2 \end{pmatrix}} - 0 = -5 < 0$$

Como:

$max\{z_2 - c_2, z_4 - c_4\} = z_2 - c_2 = 6 > 0$, la solución no es la óptima, por lo que continuamos el algoritmo, haciendo básica la variable x_2. Además, la variable x_5 deja de ser básica, ya que:

$$\frac{x_5}{y_{52}} = min\left\{\frac{x_3}{y_{32}}, \frac{x_5}{y_{52}}\right\} = min\left\{\frac{4}{5/2}, \frac{5}{11/2}\right\}$$

Tercera iteración

Se tiene una solución $\vec{x}$ con:

$\vec{x}_B = (x_3, x_1, x_2); \qquad \vec{c}_B = (0, -10, -1)$

$x_N = \vec{(}x_4, x_5)$

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}; \; \tilde{N} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \; \tilde{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 7/11 & -5/11 \\ 0 & 3/11 & 1/11 \\ 0 & -5/11 & 2/11 \end{pmatrix};$$

$$\vec{x}_B = \tilde{B}^{-1}\bar{b} = \begin{pmatrix} 19/11 \\ 27/11 \\ 10/11 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{Y} = B^{-1}N = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 7/11 & -5/11 \\ 3/11 & 1/11 \\ -5/2 & 2/11 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \longleftarrow \; x_3 \\ \longleftarrow \; x_1 \\ \longleftarrow \; x_2 \end{array} \\ \begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ \vec{x}_4 & \vec{x}_5 \end{array} \end{array}$$

$\vec{x} = (27/11, 10/11, 19/11, 0, 0) \qquad\qquad f_{obj}(\tilde{x}) = -280/11$

Comprobamos si la solución encontrada es la óptima:

$$z_4 - c_4 = \vec{c}_B \begin{pmatrix} 7/22 \\ 3/11 \\ -5/11 \end{pmatrix} = -25/11 < 0; \quad z_5 - c_5 = \vec{c}_B \begin{pmatrix} -5/11 \\ 1/11 \\ 2/11 \end{pmatrix} =$$

$-12/11 < 0$

$$\uparrow \qquad\qquad\qquad\qquad \uparrow$$

$$\vec{y}_4 \qquad\qquad\qquad\qquad \vec{y}_5$$

Como:

$max\,\{z_4 - c_4, z_5 - c_5\} < 0$, la solución es la óptima y además es única.

Resolución en formato de tabla:

Se resuelve a continuación el mismo problema, en forma de tabla. Partimos del problema en forma estándar y escribimos la primera tabla:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
z	-10	-1	0	0	0	0
x_3	1	2	1	0	0	6
x_4	$\boxed{2}$	-1	0	1	0	4
x_5	5	3	0	0	1	15

$$\uparrow \quad \underbrace{\qquad\qquad}_{} \qquad\qquad\qquad \uparrow$$

$V.B. \quad Y \qquad\qquad\qquad valor\ de\ las\ variables$

El primer paso es buscar el mayor elemento de la fila de z en este caso se tiene que $max\,\{10, 1\} = 10$. Por tanto, entra la variable x_1 y la columna de x_1 pasa a ser la columna pivote.

Para encontrar la variable que deja de ser básica, se calcula el cociente de la última columna con la columna pivote y se selecciona el mínimo que cumple que $y_i > 0$, es decir:

$$min\left\{\frac{6}{1},\frac{4}{2},\frac{15}{5}\right\}=2$$

que se corresponde con la variable x_4 y por tanto esta sale. Así, hemos encontrado el elemento pivote (enmarcado en la primera tabla), con el que realizaremos los cálculos encaminados a buscar la solución óptima. La nueva tabla, después de dividir la fila pivote por el valor del pivote, es la siguiente:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
z	10	1	0	0	0	0
x_3	1	2	1	0	0	6
x_4	1	-1/2	0	1/2	0	2
x_5	5	3	0	0	1	15

El siguiente paso es "hacer ceros" en todos los elementos por encima y por debajo del pivote. Para ello se realizan operaciones elementales estudiadas en el tema 6, salvo el intercambio de filas. El resultado es el siguiente:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
z	0	6	0	-5	0	-20
x_3	0	5/2	1	-1/2	0	4
x_1	1	-1/2	0	1/2	0	2
x_5	0	$\boxed{11/2}$	0	-5/2	1	5

Como se puede observar, aparecen los mismos elementos que encontramos en el cálculo matricial, así, en la fila de z aparecen los términos $z_j - c_j$ y en la última casilla, el valor de f_{obj}. Además, los elementos de la fila de x_2 y x_4, se corresponden con las columnas de la matriz $\tilde{Y}$.

Dado que en la fila de z encontramos elementos no negativos, la solución no es la óptima y pasmos a la siguiente iteración.

Como de los elementos de la fila z, el mayor se corresponde al de x_2, esta es la variable que entra y su columna pasa a ser la columna pivote. Dividiendo los elementos de esta entre los elementos de la última columna, encontramos que el valor mas pequeño es el de la variable x_5, que será la que sale en este caso, es decir:

$$\frac{x_5}{y_{52}} = min\left\{\frac{x_3}{y_{32}}, \frac{x_5}{y_{52}}\right\} = min\left\{\frac{4}{5/2}, \frac{5}{11/2}\right\}$$

Por tanto, el nuevo pivote es el elemento $11/2$ de la columna de x_2 y procedemos igual que en el paso anterior, primero dividiendo la fila pivote entre el valor del pivote $(11/2)$ y obtenemos la siguiente tabla:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
z	0	6	0	-5	0	-20
x_3	0	5/2	1	-1/2	0	4
x_1	1	-1/2	0	1/2	0	2
x_2	0	1	0	-5/11	2/11	10/11

Que se transforma en la siguiente tas las operaciones de pivoteo:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
z	0	0	0	-25/11	-12/11	-280/11
x_3	0	0	1	7/11	-5/11	19/11
x_1	1	0	0	3/11	1/11	27/11
x_2	0	1	0	-5/11	2/11	10/11

Y en la que vemos que todos los elementos de la fila de z son negativos o cero, lo que nos indica que hemos alcanzado el valor óptimo, siendo la solución optima:

$$f_{obj} = -280/11$$
$$x_1 = 27/11$$
$$x_2 = 10/11$$

Este vídeo explica cómo utilizar el Algoritmo Simplex en el caso de tener un problema de programación lineal con una minimización y con desigualdades de menor o igual, y pone un ejemplo.

Accede al vídeo: Minimización con el algoritmo Simplex

Además del método del simplex tal como se ha visto en el tema, existen otras formas de solucionar el problema de programación lineal que se pueden consultar en la bibliografía, como puede ser el método de penalización o el método de dos fases, aplicados a problemas en el que existen variables artificiales.

5.6 Referencias bibliográficas

de la Fuente, J. L. (1997). Técnicas de cálculo para sistemas de ecuaciones, programación lineal y programación entera: códigos en FORTRAN y C con aplicaciones de sistemas de energía eléctrica. Reverté.

O´Donnel, J. & Hall, C. (2006). Discrete Mathematics Using a Computer. Londres: Springer.

Cheney W. & Kincaid D. (2007). Numerical Mathematics And Computing, 6 edition. Cengage Learning.

Grimaldi, R.P., (2004). Discrete and combinatorial mathematics (5th ed). Pearson.

Hunter, D.J., (2017). Essentials of discrete mathematics (3rd edition). Jones & Bartlett and Hall Learning.

5.7 Cuaderno de ejercicios

Ejercicio 1.

Escribe el siguiente problema de optimización en forma canónica.

$$\begin{cases} maximizar \;\; z(x_1, x_2) = 3x_1 - x_2 - x_1 \\ \quad s.a : x_2 \leq 5 + x_1 \\ \qquad x_1 \geq 2x_2 + 8 \\ \qquad x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Ejercicio 2.

Escribe el siguiente problema de optimización en forma estándar:

$$\begin{cases} maximizar \;\; z(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \\ \quad s.a : x_2 + x_1 \leq 1 \\ \qquad x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ \qquad x_1 \geq x_2 + 4 \\ \qquad x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Ejercicio 3.

Escribe el siguiente problema de optimización en forma matricial.

$$\begin{cases} maximizar \;\; z(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ \quad s.a : x_1 + 5x_2 \leq 10 \\ \qquad x_1 - x_3 \leq -6 \\ \qquad x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Ejercicio 4.

Escribe el problema dual del anterior ejercicio.

Ejercicio 5.

Escribe el problema de programación lineal correspondiente con el siguiente enunciado:

En un centro de producción, se elaboran piezas de tipo A y B. Para elaborar una pieza de tipo A se necesitan 1200 gramos de acero y 500 gramos de aluminio. Para la pieza B, se necesitan 800 gramos de acero y 200 gramos de aluminio. En la fábrica se dispone de 60kg de acero y de 20kg de aluminio en el almacén para la elaboración de las piezas. Además, se requieren 3 horas de trabajo para producir una pieza tipo A y 2 horas para elaborar piezas tipo B y se disponen de 180 horas de trabajo total entre todos los trabajadores de la fábrica. Calcular el beneficio máximo que se podría obtener con la venta de las piezas, teniendo en cuenta que las piezas tipo A producen una ganancia neta de 25€ y las piezas tipo B de 15€.

Ejercicio 6.

Calcular la solución del siguiente problema de optimización mediante el algoritmo simplex en formato tabla :

$$\begin{cases} maximizar \;\; z(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 - 2x_2 + x_3 \\ \quad s.a : 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ \qquad\quad x_1 - 3x_2 + x_3 \leq 10 \\ \qquad\quad x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Ejercicio 7.

Calcular la solución del siguiente problema de optimización mediante el algoritmo simplex en formato tabla :

$$
\begin{cases}
maximizar \ \ z(x_1,x_2,x_3) = 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 5x_4 \\
\quad s.a : x_1 + 2x_2 + 4x3 - x_4 \leq 6 \\
\qquad 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 \leq 12 \\
\qquad x_1 + x_3 + x_4 \leq 4 \\
\qquad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.
\end{cases}
$$

Ejercicio 8.

Calcular la solución del siguiente problema de optimización mediante el algoritmo simplex en formato tabla :

$$
\begin{cases}
maximizar \ \ z(x_1,x_2,x_3) = x_1 + \frac{5}{2}x_2 + 3x_3 \\
\quad s.a : 2x_1 - x_3 \leq 4 \\
\qquad x_1 + 3x_2 + 6x_3 \leq 20 \\
\qquad x_1, x_2, x_3 \geq 0.
\end{cases}
$$

Ejercicio 9.

Escribe el problema de programación lineal correspondiente con el siguiente enunciado:

Supongamos que un equipo de desarrollo de software está trabajando en un proyecto y debe decidir cuánto tiempo dedicar a cada tarea para completar el proyecto en el menor tiempo posible. El equipo ha identificado tres tareas principales: desarrollo de la interfaz de usuario, codificación de la lógica del negocio y pruebas de calidad. El equipo ha estimado que la tarea de desarrollo de la interfaz de usuario requiere 40 horas de trabajo, la tarea de codificación de la lógica del negocio requiere 60 horas de trabajo y la tarea de pruebas de calidad requiere 20 horas de trabajo. Además, el equipo ha establecido las siguientes restricciones:

- El equipo tiene un total de 120 horas de trabajo disponibles para completar el proyecto.
- La tarea de desarrollo de la interfaz de usuario debe ser completada antes de

comenzar la codificación de la lógica del negocio.

- La tarea de pruebas de calidad debe ser completada después de la codificación de la lógica del negocio.

Además, el equipo considera la tarea de codificación de la lógica del negocio, la más importante.

Ejercicio 10.

Encontrar la solución al ejercicio anterior.

5.8 Soluciones cuaderno de ejercicios

Solución 1.

$$\begin{cases} minimizar \;\; z(x_1, x_2) = 2x_1 - x_2 \\ \quad s.a: \;\; x_1 - x_2 \geq 5 \\ \qquad\qquad x_1 - 2x_2 \geq 8 \\ \qquad\qquad x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Solución 2.

$$\begin{cases} maximizar \;\; z(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \\ \quad s.a: x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ \qquad\qquad x_1 + 2x_2 + x_4 = 6 \\ \qquad\qquad x_1 - x_2 - x_5 = 4 \\ \qquad\qquad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Solución 3.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \text{ y } \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Ya que $\vec{c}$ contiene los coeficientes de la ecuación objetivo, $\vec{b}$ los términos independientes y A es la matriz de los coeficientes de las restricciones del problema.

Solución 4.

$$\begin{cases} maximizar \;\; z(y_1, y_2) = 10y_1 - 6y_2 \\ \quad s.a : y_1 + y_2 \leq 1 \\ \qquad 5y_1 \geq 2 \\ \qquad -y_2 \geq 4 \\ \qquad y_1, y_2 \geq 0. \end{cases}$$

Ya que la ecuación objetivo se construye con los términos independientes de las restricciones del problema primal y las restricciones dl problema dual, están construidas con los elementos de las columnas de la matriz A de coeficientes de las restricciones del problema primal.

Solución 5.

$$\begin{cases} maximizar \;\; z(x_1, x_2) = 25x_1 + 15x_2 \\ \quad s.a : 12x_1 + 8x_2 \leq 600 \\ \qquad 5x_1 + 2x_2 \leq 200 \\ \qquad 3x_1 + 2X_2 \leq 180 \\ \qquad x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Siendo x_1 el componente tipo A y x_2 el componente tipo B.

Solución 6. En primer lugar escribimos el problema en forma estándar:

$$\begin{cases} minimizar \;\; z(x_1, x_2, x_3) = -3x_1 + 2x_2 - x_3 \\ \quad s.a : 2x_1 + x_2 + x_4 = 8 \\ \qquad x_1 - 3x_2 + x_3 + x_5 = 10 \\ \qquad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

Construimos la primer tabla, identificamos el elemento pivote (2) y realizamos las operaciones elementales:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
z	-3	2	-1	0	0	0
x_4	$\boxed{2}$	1	0	1	0	8
x_5	1	-3	1	0	1	10

$\overrightarrow{O.E.}$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
z	0	7/2	-1	3/2	0	12
x_1	1	1/2	0	1/2	0	4
x_5	0	-7/2	$\boxed{1}$	-1/2	1	6

Segunda iteración: buscamos el elemento pivote (1) y realizamos las operaciones elementales:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
z	0	0	0	1	1	18
x_1	1	1/2	0	1/2	0	4
x_3	0	-7/2	1	-1/2	1	6

Dado que en la la fila de z todos los elementos son negativos o cero, hemos alcanzado el valor óptimo, siendo la solución optima:

$f_{obj} = 18$

$x_1 = 4$

$x_2 = 0$

$x_3 = 6$

Solución 7. En primer lugar, se escribe la forma estándar del problema:

$$\begin{cases} minimizar \ \ z(x_1, x_2, x_3) = -2x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4 \\ \quad s.a : x_1 + 2x_2 + 4x3 - x_4 + x_5 = 6 \\ \qquad 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + x_6 = 12 \\ \qquad x_1 + x_3 + x_4 + x_7 = 4 \\ \qquad x_i \geq 0, i = 1, 2, .., .7. \end{cases}$$

Construimos la primer tabla, identificamos el elemento pivote (1), ya que la columna x_4 es la columna pivote por ser 5 el elemento mayor de la fila z y la fila de x_7 es la fila pivote, por ser $4/1 < 12$; téngase en cuanta que el elemento $6/-1$ no se contempla por ser $y_4 < 0$. A continuación, realizamos las operaciones elementales para hacer ceros por encima del elemento pivote:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
z	2	1	-3	5	0	0	0	0
x_5	1	2	4	-1	1	0	0	6
x_6	2	3	-1	1	0	1	0	12
x_7	1	0	1	$\boxed{1}$	0	0	1	4

$\overrightarrow{O.E.}$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
z	-3	1	-8	0	0	0	-5	20
x_5	2	2	5	0	1	0	1	10
x_6	1	$\boxed{3}$	-2	0	0	1	-1	8
x_4	1	0	1	1	0	0	1	4

Segunda iteración: buscamos el elemento pivote (3), por ser 1 el mayor elemento de la fila de z y por ser $8/3 < 10/3$ y realizamos las operaciones elementales:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
z	-10/3	0	-22/3	0	0	-1/3	-14/3	-68/3
x_5	4/3	0	19/3	0	1	-2/3	5/3	14/3
x_2	1/3	1	-2/3	0	0	1/3	-1/3	8/3
x_1	1	0	1	1	0	0	1	4

Y observamos que en la la fila de z todos los elementos son negativos o cero, por tanto, se ha alcanzado el valor óptimo, siendo la solución optima:

$f_{obj} = 68/3$

$x_1 = 0$

$x_2 = 8/3$

$x_3 = 0$

$x_4 = 4$

Solución 8.

En primer lugar escribimos el problema en forma estándar:

$$\begin{cases} maximizar \;\; z(x_1, x_2, x_3) = x_1 + \frac{5}{2}x_2 + 3x_3 \\ \quad s.a : 2x_1 - x_3 + x_4 = 4 \\ \qquad\quad x_1 + 3x_2 + 6x_3 + x_5 = 20 \\ \qquad\quad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

Construimos la primer tabla, identificamos el elemento pivote (2) y realizamos las operaciones elementales:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
z	-1	-5/2	-3	0	0	0
x_4	2	0	-1	1	0	4
x_5	1	3	$\boxed{6}$	0	1	20

$\overrightarrow{O.E.}$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
z	-1/2	-1	0	0	1/2	10
x_4	13/6	1/2	0	1	1/6	22/3
x_3	1/6	$\boxed{1/2}$	1	0	1/6	10/3

Segunda iteración: buscamos el elemento pivote (1/2) y realizamos las operaciones elementales:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
z	-1/6	0	2	0	5/6	50/3
x_4	$\boxed{2}$	0	-1	1	0	12/3
x_2	0	1/3	1	2	1/3	20/3

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
z	0	0	23/12	1/12	5/6	17
x_1	1	0	-1/2	1/2	0	2
x_2	0	1	13/6	-1/6	1/3	6

Y observamos que en la la fila de z todos los elementos son negativos o cero, por tanto, se ha alcanzado el valor óptimo, siendo la solución optima:

$f_{obj} = 17$

$x_1 = 2$

$x_2 = 6$

$x_3 = 0$

Solución 9.

$$\begin{cases} maximizar \;\; z(x_1) = 60x_1 \\ \quad s.a : 40x_1 + 60x_2 + 20x_3 \leq 120 \\ \qquad x_1 < x_2 \\ \qquad x_2 < x_3 \\ \qquad x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Donde x1, x2 y x3 representan el número de horas dedicadas a la tarea de desarrollo de la interfaz de usuario, la codificación de la lógica del negocio y las pruebas de calidad, respectivamente.

Solución 10.

$f_{obj} = 60x_2 = 60 \times 1$

$x_1 = 2/3$

$x_2 1$

$x_3 = 2/3$

5.9 A fondo

A fondo

Repaso del algoritmo símplex.

En esta clase auxiliar, Marcel Goic repasa el algoritmo símplex con varios ejemplos e iterando paso a paso.

Goic, M. (2007). Repaso del algoritmo Símplex. Departamento de Ingeniería Industrial, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile. https://www.u-cursos.cl/ingenieria/2007/1/IN77O/1/material_docente/bajar?id_material=132079

Introducción a la programación lineal

Este vídeo describe los elementos básicos de la programación lineal y aporta ejemplos reales y sencillos de aplicación:

IESCampus. (24 de enero de 2013). Introducción a la programación lineal [vídeo]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=wsywXvBMjso

Algoritmo símplex con tablas

Este vídeo describe el algoritmo símplex de forma visual y usando tablas para facilitar su comprensión.

Hermogenes84. (17 de diciembre de 2008). Algoritmo Símplex [vídeo]. YouTube. http://www.youtube.com/watch?v=51sH577r4lA

Introduction to Algorithms

VV. AA. (2009). *Introduction to Algorithms* (3a ed.). The MIT Press.

Algunos libros sobre algoritmos son rigurosos, pero incompletos, mientras que otros cubren mucho material, pero falta rigor. Introduction to Algorithms combina de forma única el rigor y exhaustividad. El libro cubre una amplia gama de algoritmos en profundidad. Sin embargo, hace que su diseño y análisis accesible a todos los niveles de los lectores. En nuestro caso, nos interesa especialmente el capítulo 29, donde se trata exhaustivamente el problema de la programación lineal.

5.10 Test

Test

1. Los problemas de programación lineal no permiten resolver:

A. Relaciones matemáticas con restricciones de igualdad **ax = b**

B. Relaciones matemáticas con restricciones de igualdad o desigualdad **ax = b, ax > b**

C. Sistemas donde una de la variable xi evoluciona cuadráticamente.

D. Sistemas donde una variable **xi** puede ser negativa.

2. El conjunto factible corresponde a:

A. La intersección de las desigualdades.

B. La unión de las desigualdades.

C. La intersección de las desigualdades con la línea de la función objetivo.

D. La unión de las desigualdades con la línea de la función objetivo.

3. Un problema de programación lineal en forma estándar tiene:

A. Tantas restricciones como variables.

B. Más variables que restricciones.

C. Tantas variables básicas como restricciones.

D. Tantas variables como restricciones.

4. Las variables de holgura representan:

A. Lo que nos queda para alcanzar la solución.

B. La diferencia entre el término de la derecha y de la izquierda de una restricción por desigualdad.

C. La diferencia entre la función objetivo y la restricción por desigualdad.

D. La similitud entre la función objetivo y la restricción por desigualdad.

5. Las variables básicas representan (antes de ejecutar el algoritmo símplex):

A. Las variables de holgura.

B. Los términos de la función objetivo.

C. Los términos de las restricciones.

D. Los términos independientes de las restricciones.

6. ¿Cual de estas afirmaciones no es cierta respecto a la dualidad en programación lineal?

A. El problema dual minimiza una función objetivo.

B. El problema dual no existe siempre.

C. El problema dual tiene tantas restricciones como variables tiene el problema original.

D. El problema dual tiene tantas variables como restricciones tiene el problema original.

7. El algoritmo símplex recibe:

A. Restricciones de desigualdad.

B. Restricciones de igualdad.

C. Restricciones e igualdad y desigualdad.

D. No recibe restricciones.

8. Cuando la variable holgura de una restricción en forma estándar se vuelve cero significa que:

A. No significa nada especial.

B. La solución está ajustada respecto a esa restricción.

C. El problema de programación lineal es factible.

D. El problema de programación lineal no es factible.

9. El algoritmo símplex termina cuando:

A. No existen índices $j \in B$ que tengan cj>0.

B. No existen índices $j \in B$ que tengan bj>0.

C. No existen índices $j \in N$ que tengan cj>0.

D. No existen índices $j \in N$ que tengan bj>0.

10. El algoritmo de simplex:

A. Resuelve un problema matemático de forma sencilla.
B. Ser aplicado en forma de tabla y forma gráfica.
C. No es posible implementarlo en ordenador debido a su dificultad
D. Ser aplicado en forma de tabal y en forma matricial.