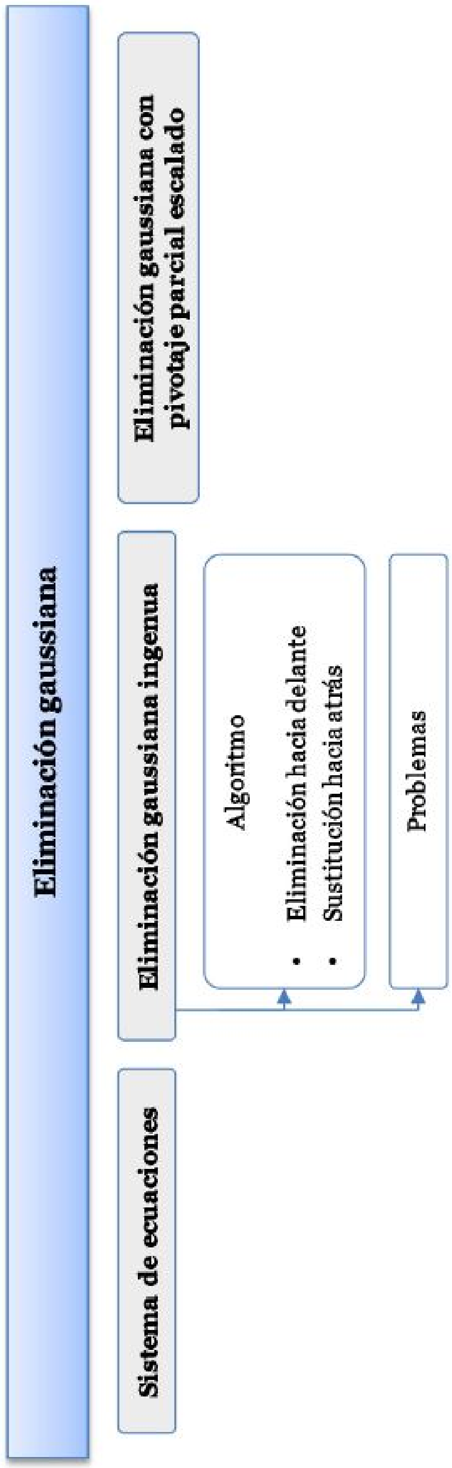
Álgebra y Matemática discreta

Eliminación Gaussiana

Índice

Esquema


Eliminación gaussiana
Sistema de ecuaciones
Eliminación gaussiana ingenua
Eliminación gaussiana con pivotaje parcial escalado
Algoritmo
Eliminación hacia delante
Sustitución hacia atrás
Problemas

Ideas clave

4.1 Introducción y objetivos

Los sistemas de ecuaciones lineales surgen en prácticamente cualquier aspecto de las matemáticas aplicadas, el cálculo científico y la ingeniería. En muchas ocasiones ocurren de manera natural, pero también pueden ser el resultado de aproximaciones de problemas más generales, como la aproximación de ecuaciones no lineales por ecuaciones lineales, la aproximación de ecuaciones diferenciales por ecuaciones algebraicas, entre otros. Así, una gran cantidad de problemas computacionales prácticos dependen de la resolución efectiva y eficiente de sistemas de ecuaciones lineales.

Existen diferentes formas de resolver los sistemas de ecuaciones lineales, que se dividen en métodos directos e iterativos. Los métodos directos intentan obtener una aproximación de la solución en una cantidad preestablecida de pasos, que está determinada por el orden de la matriz de coeficientes asociada al sistema. Los métodos iterativos generan una sucesión de vectores que se espera *converja*, en algún sentido, a la solución del sistema de ecuaciones lineales. En este tema, se estudiará el método de eliminación de Gauss para encontrar la solución a los sistemas de ecuaciones de forma directa.

Los objetivos que nos proponemos alcanzar en este tema son los siguientes:

- Escribir el sistema lineal en forma matricial $Ax = b$.
- Resolver sistemas lineales numéricamente utilizando el método de eliminación de Gauss con pivoteo parcial.
- Discutir las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales.

Para alcanzar estos objetivos, se propone la siguiente subdivisión del contenido de este tema:

- Nociones generales sobre los sistemas de ecuaciones lineales
- Métodos directos: eliminación de Gauss
  - Eliminación de Gauss ingenua
  - Eliminación de Gauss con pivoteo parcial escalado
  - Resolución de sistemas de ecuaciones
  - Discusión de sistemas de ecuaciones lineales

4.2 Nociones sobre los sistemas de ecuaciones lineales

Un sistema de m ecuaciones lineales en n incógnitas o variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, tiene la forma

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \quad &\ \ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

donde los coeficientes a_{ij} son números reales (aunque en algunas ocasiones podrían ser números complejos). Un conjunto de n valores, uno para cada variable x_i, es una solución de este sistema lineal, si todas las ecuaciones se cumplen simultáneamente para esos valores.

En términos prácticos, es mucho más conveniente manipular un sistema lineal usando la notación matricial y vectorial, de modo que el sistema lineal se escribiría de la siguiente manera

$$Ax = b$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad , \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ es la *matriz de coeficientes*, $b \in \mathbb{R}^m$ es el *vector de términos independientes* o *lado derecho* del sistema lineal. $x \in \mathbb{R}^n$ es el *vector de incógnitas*. Dada la matriz de coeficientes A y el lado derecho b, se quiere hallar x para el cual se cumple la igualdad

$Ax = b$. Esto equivale a hallar n números reales $x_1, x_2, \ldots, x_n$ que satisfagan las m ecuaciones lineales del sistema (todas a la vez).

En general, un sistema lineal puede o no tener solución, y cuando tiene solución, puede que la misma no sea única. En este tema, nos interesaremos únicamente en sistemas lineales *cuadrados*, es decir, para los cuales la cantidad de ecuaciones es igual a la cantidad de incógnitas, o $m = n$. En términos de la matriz de coeficientes, ésta tiene la misma cantidad de filas y columnas en un sistema lineal cuadrado. Son estos sistemas los que pueden tener solución única, pues los sistemas generales no cuadrados suelen ser sub o sobre determinados.

Cuando la matriz de coeficientes A de un sistema lineal cuadrado es invertible o regular (no singular), el sistema lineal $Ax = b$ tiene solución única, dada por $x = A^{-1}b$. Existe un teorema del álgebra lineal que nos proporciona diferentes propiedades de una matriz que son equivalentes a su invertibilidad. Lo enunciamos a continuación.

Teorema 1: Propiedades equivalentes a la existencia de inversa de una matriz

Dada una matriz $A \in \mathbb{R}_{n\times n}$, las siguientes propiedades son equivalentes:

(i) A es invertible (no es singular), es decir, A^{-1} existe.

(ii) det$(A) \neq 0$.

(iii) Las filas de A forman una base de $\mathbb{R}^n$.

(iv) Las columnas de A forman una base de $\mathbb{R}^n$.

(v) $Ax = 0 \Rightarrow x = 0$, es decir, la única solución del sistema lineal homogéneo es la trivial.

(vi) Para cada $b \in \mathbb{R}^n$, existe un único $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $Ax = b$.

(vii) A se puede escribir como el producto de matrices elementales.

(viii) A es de rango completo, es decir, el rango de A es n.

Tengase en cuenta que el *rango* de una matriz se define como el número máximo de filas linealmente independientes de la matriz, lo cual coincide con el número máximo de columnas linealmente independientes de la matriz. Es decir, el número de filas distintas de cero cuando la matriz está escrita en forma escalonada, tal como veremos mas adelante.

Si se definen el núcleo y el rango de A respectivamente, como

$$\mathcal{N}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\} \quad \text{y} \quad \mathcal{R}(A) = \{y \in \mathbb{R}^n : y = Ax \text{ para algún } x \in \mathbb{R}^n\},$$

el teorema 1 permite asegurar que el sistema lineal $Ax = b$ tiene solución única si y sólo si $b \in \mathcal{R}(A)$ y $\mathcal{N}(A) = \{0\}$, en cuyo caso la solución del sistema lineal es $x = A^{-1}b$.

Si la matriz de coeficientes es singular, entonces la *cantidad* de soluciones depende del vector de términos independientes b. Pudiera ser que el sistema no tenga solución. Sin embargo, cuando el sistema lineal tiene alguna solución, siendo la matriz de coeficientes singular, en realidad tendrá infinitas soluciones.

El caso de dos ecuaciones y dos incógnitas tiene una interpretación geométrica muy conocida. Un sistema lineal en dos dimensiones representa una línea recta en el plano. La solución del sistema lineal es el punto de intersección de las dos rectas. Si las rectas son paralelas, o bien no se intersectan en ningún punto (el sistema lineal no tiene solución), o bien las rectas son idénticas (cualquier punto de la recta es solución). Estas dos situaciones corresponden a una matriz de coeficientes singular. Cuando hay un solución única, que es el punto de intersección de las dos rectas, la matriz es invertible.

Ejemplo 1.

El sistema lineal 2×2

$$3x_1 + 2x_2 = b_1,$$
$$4x_1 + 5x_2 = b_2,$$

que en notación matricial es

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix},$$

siempre tiene solución, independientemente del vector b, porque la matriz de coeficientes es invertible (tiene determinante 7 que es distinto de cero). Por ejemplo, si $b = [8\ ,\ 13]^T$, entonces la única solución del sistema lineal es $x = [2\ ,\ 1]^T$.

Por otro lado, el sistema lineal 2×2

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

podría no tener solución o tener infinitas soluciones, ya que la matriz de coeficientes es singular. Por ejemplo, si $b = [4\ ,\ 7]^T$, entonces el sistema no tiene solución, mientras que para $b = [4\ ,\ 8]^T$, el vector

$$\begin{bmatrix} \gamma \\ (4 - 2\gamma)/3 \end{bmatrix}$$

es solución para cualquier número real γ.

Aunque teóricamente la solución de un sistema lineal viene expresada en términos de la inversa de la matriz de coeficientes, en la práctica no es conveniente calcular dicha inversa, pues, como se verá más adelante, ello involucra una gran cantidad de cálculos innecesarios. La escritura de la solución de un sistema lineal $Ax = b$ en la forma $x = A^{-1}b$ tiene utilidad más bien teórica.

Una mención aparte merece la propiedad (ii), $\det(A) \neq 0$, para determinar si A es invertible. Desde el punto de vista numérico, una matriz podría tener un determinante que se considere *nulo*, siendo la matriz perfectamente invertible. Por tanto, si se obtiene determinante numéricamente nulo, es necesario indagar un poco más sobre la veracidad de la singularidad de la matriz (por ejemplo, estimando su rango).

4.3 Eliminación de Gauss

La idea detrás del método de eliminación de Gauss para resolver un sistema lineal cuadrado, es transformarlo en otro sistema lineal equivalente, es decir, que tenga la misma solución del sistema original, pero que sea fácil de resolver. Después de los sistemas lineales diagonales, los más fáciles de resolver son los sistemas triangulares, esto es, aquellos en los que la matriz de coeficientes es triangular inferior o superior. Por lo tanto, *la idea fundamental de la resolución numérica de un sistema lineal cuadrado es la obtención de otro sistema lineal, equivalente al primero, cuya matriz de coeficientes sea triangular superior*. La elección de la forma triangular superior es un *estándar*, podría elegirse la otra forma.

Las transformaciones que preservan la solución de un sistema lineal, son precisamente las transformaciones lineales, esto es, combinaciones lineales de las ecuaciones del sistema. Más precisamente, nos referimos a las ***operaciones elementales***:

- Sustituir una ecuación cualquiera del sistema por otra que se obtiene al combinar linealmente la ecuación a ser sustituida y otra ecuación del sistema.
- Sustituir una ecuación cualquiera del sistema por otra que se obtiene al multiplicar la ecuación a ser sustituida por un escalar no nulo. Esta operación elemental podría considerarse como un caso particular del ítem anterior.
- Cambiar el orden de las ecuaciones del sistema.

En términos del sistema lineal escrito en forma matricial, $Ax = b$, se puede decir que la generación de sistemas lineales equivalentes, $\widetilde{A}x = \widetilde{b}$, se basa en aplicar ***operaciones elementales por filas***:

- Sustituir una fila cualquiera de la matriz A por la fila resultante de combinar linealmente la fila a ser sustituida y otra fila cualquiera de la matriz. Esta operación se debe acompañar con la modificación correspondiente del vector b.

- Sustituir una fila cualquiera de la matriz A por la fila resultante de multiplicar la fila a ser sustituida por un escalar no nulo. De nuevo, se debe acompañar esta operación con la modificación correspondiente del vector b.
- Intercambiar las filas de la matriz A, junto con el intercambio de las entradas correspondientes del vector b.

Por lo pronto, no se intercambiarán filas; mantendremos el orden originalmente dado de las ecuaciones del sistema. Así, las únicas operaciones elementales que llevaremos a cabo por los momentos son las combinaciones lineales de filas de la matriz y su correspondiente operación sobre el vector de términos independientes. Estas operaciones elementales por fila deben reducir progresivamente la matriz de coeficientes a la forma triangular superior.

Eliminación de Gauss sin pivoteo o ingenua.

La metodología que ejemplificaremos a continuación, y que generalizaremos luego, es conocida como ***eliminación de Gauss sin pivoteo o ingenua***, en la cual no se intercambian filas de la matriz de coeficientes.

Consideremos el sistema lineal siguiente:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 12 & -8 & 6 & 10 \\ 3 & -13 & 9 & 3 \\ -6 & 4 & 1 & -18 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 16 \\ 26 \\ -19 \\ -34 \end{bmatrix}}_{b} \tag{1}$$

Denotemos por F_i a la i-ésima fila de la matriz A, la cual supondremos incluye la componente b_i del vector b, a fin de aplicarle a dicho vector las mismas operaciones elementales que se le aplicarán a A. Además, definimos $A^{(1)} = A$ y $b^{(1)} = b$. Usaremos un superíndice entre paréntesis para referirnos a la etapa actual del método de eliminación de Gauss.

ETAPA 1: Anulación de los coeficientes de la primera columna de $A^{(1)}$, que están por debajo de $a_{11}^{(1)} \equiv a_{11}$.

La fila pivote es la fila 1 (F_1) y el coeficiente pivote es $a_{11}^{(1)}$, que en esta etapa se refiere a a_{11}. Esa fila, y en particular ese coeficiente, se usan para anular los coeficientes de la primera columna de $A^{(1)}$, que están por debajo de $a_{11}^{(1)}$. Las operaciones elementales a efectuar son las siguientes:

$$F_2 \longleftarrow F_2 - \left(a_{21}^{(1)}/a_{11}^{(1)}\right) F_1 \Longleftrightarrow F_2 \longleftarrow F_2 - (12/6)\, F_1 \Longleftrightarrow F_2 \longleftarrow F_2 - 2F_1$$
$$F_3 \longleftarrow F_3 - \left(a_{31}^{(1)}/a_{11}^{(1)}\right) F_1 \Longleftrightarrow F_3 \longleftarrow F_3 - (3/6)\, F_1 \Longleftrightarrow F_3 \longleftarrow F_3 - (1/2)\, F_1$$
$$F_4 \longleftarrow F_4 - \left(a_{41}^{(1)}/a_{11}^{(1)}\right) F_1 \Longleftrightarrow F_4 \longleftarrow F_4 - (-6/6)\, F_1 \Longleftrightarrow F_4 \longleftarrow F_4 + F_1$$

Después de efectuar estas operaciones elementales, se obtiene el siguiente sistema lineal equivalente:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & -12 & 8 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -14 \end{bmatrix}}_{A^{(2)}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 16 \\ -6 \\ -27 \\ -18 \end{bmatrix}}_{b^{(2)}}$$

ETAPA 2: Anulación de los coeficientes de la segunda columna de $A^{(2)}$, que están por debajo de $a_{22}^{(2)}$.

La segunda etapa comienza con la matriz de coeficientes $A^{(2)}$ y el vector de términos independientes $b^{(2)}$, resultantes de aplicar las operaciones elementales en la etapa 1. Las operaciones elementales de esta etapa son aplicadas sobre $A^{(2)}$ y $b^{(2)}$.

La fila pivote es la fila 2 (F_2) y el coeficiente pivote es $a_{22}^{(2)}$. Esa fila, y en particular ese coeficiente, se usan para anular los coeficientes de la segunda columna de $A^{(2)}$, que están por debajo de $a_{22}^{(2)}$. Las operaciones elementales a efectuar son las siguientes:

$$F_3 \longleftarrow F_3 - \left(a_{32}^{(2)}/a_{22}^{(2)}\right) F_2 \Longleftrightarrow F_3 \longleftarrow F_3 - (-12/(-4))\, F_2 \Longleftrightarrow F_3 \longleftarrow F_3 - 3F_2$$
$$F_4 \longleftarrow F_4 - \left(a_{42}^{(2)}/a_{22}^{(2)}\right) F_2 \Longleftrightarrow F_4 \longleftarrow F_4 - (2/(-4))\, F_2 \Longleftrightarrow F_4 \longleftarrow F_4 + \frac{1}{2}F_2$$

Después de efectuar estas operaciones elementales, se obtiene el siguiente sistema lineal equivalente:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 4 & -13 \end{bmatrix}}_{A^{(3)}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 16 \\ -6 \\ -9 \\ -21 \end{bmatrix}}_{b^{(3)}}$$

ETAPA 3: Anulación del coeficiente de la tercera columna de $A^{(3)}$, que está por debajo de $a_{33}^{(3)}$.

La tercera etapa comienza con la matriz de coeficientes $A^{(3)}$ y el vector de términos independientes $b^{(3)}$, resultantes de aplicar las operaciones elementales en la etapa 2. Las operaciones elementales de esta etapa son aplicadas sobre $A^{(3)}$ y $b^{(3)}$.

La fila pivote es la fila 3 (F_3) y el coeficiente pivote es $a_{33}^{(3)}$. Esa fila, y en particular ese coeficiente, se usan para anular el coeficiente de la tercera columna de $A^{(3)}$, que está por debajo de $a_{33}^{(3)}$. La única operación elemental a efectuar es la siguiente:

$$F_4 \longleftarrow F_4 - \left(a_{43}^{(3)}/a_{33}^{(3)}\right) F_3 \Longleftrightarrow F_4 \longleftarrow F_4 - (4/2)\, F_3 \Longleftrightarrow F_4 \longleftarrow F_4 - 2F_3$$

Después de efectuar estas operaciones elementales, se obtiene el siguiente sistema lineal equivalente:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}}_{A^{(4)}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 16 \\ -6 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}}_{b^{(4)}}$$

Al final de la tercera etapa, el sistema lineal equivalente es triangular superior, por lo cual el procedimiento de eliminación de Gauss se detiene. Queda resolver este sistema lineal triangular. Sin embargo, antes de hacerlo, veamos cómo se puede generalizar el procedimiento de eliminación de Gauss que se acaba de ejemplificar. Para ello, notemos lo siguiente:

- La manera en la que está planteada la eliminación de Gauss asegura que el trabajo de anulación logrado en etapas previas no se pierde.
- Dado que los multiplicadores que permiten lograr las anulaciones debajo de la diagonal, se obtienen por división entre el coeficiente pivote, éste no puede ser nulo. En ese caso, el proceso de eliminación de Gauss simplemente falla.
- En el proceso de eliminación de Gauss sin pivoteo, descrito en el ejemplo anterior, las filas pivote corresponden al orden creciente de las filas de la matriz: la primera fila pivote es la primera fila de la matriz (del sistema lineal original), la segunda fila pivote es la segunda fila de la matriz (del sistema lineal equivalente resultante al final de la etapa 1), la tercera fila pivote es la tercera fila de la matriz (del sistema lineal equivalente resultante al final de la etapa 2), y así sucesivamente.
- La cantidad de etapas del proceso de eliminación de Gauss es $n-1$, donde n es el orden de la matriz de coeficientes del sistema lineal cuadrado dado.
- La cantidad de operaciones elementales por fila disminuye en una unidad, de una etapa a otra, comenzando con n -1 operaciones elementales en la primera etapa y terminando con 1 operación elemental en la etapa $n-1$.
- Los factores o multiplicadores que permiten anular los coeficientes que están debajo de la diagonal principal de las matrices sucesivas, se obtienen sistemáticamente al dividir el coeficiente que se quiere anular entre el coeficiente pivote. Luego las operaciones elementales por fila tienen la misma forma.
- Se puede decir que el proceso de eliminación de Gauss es recursivo en el sentido de que siempre se efectúan las mismas operaciones, pero sobre matrices cuadradas cada vez más pequeñas. Por ejemplo, una vez que se han anulado todos los coeficientes por debajo de $a_{11}^{(1)}$, se toma la submatriz $A\,(2:n, 2:n)$ y se repite el mismo proceso sobre ésta.

Supongamos que la matriz de coeficientes al final de la etapa $k-1$, denotada $A^{(k)}$, tiene la siguiente estructura (sólo se escriben los coeficientes que pudieran ser no nulos):

$$A^{(k)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(k)} & \cdots & a_{1,k-1}^{(k)} & a_{1k}^{(k)} & \cdots & a_{1j}^{(k)} & \cdots & a_{1n}^{(k)} \\ & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & a_{k-1,k-1}^{(k)} & a_{k-1,k}^{(k)} & \cdots & a_{k-1,j}^{(k)} & \cdots & a_{k-1,n}^{(k)} \\ & & & a_{kk}^{(k)} & \cdots & a_{kj}^{(k)} & \cdots & a_{kn}^{(k)} \\ & & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & & a_{ik}^{(k)} & \cdots & a_{ij}^{(k)} & \cdots & a_{in}^{(k)} \\ & & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & & a_{nk}^{(k)} & \cdots & a_{nj}^{(k)} & \cdots & a_{nn}^{(k)} \end{bmatrix} \tag{2}$$

La matriz $A^{(k+1)}$ se genera a partir de $A^{(k)}$ de manera que los coeficientes que están por debajo de $a_{kk}^{(k)}$ se anulen. La operación elemental que logra esto es

$$F_i \longleftarrow F_i - \left(a_{ik}^{(k)}/a_{kk}^{(k)}\right) F_k$$

para todas las filas F_i con $i = k+1, k+2, \ldots, n$. En esta etapa $\boldsymbol{k}$ de la eliminación de Gauss, la **fila pivote** es la fila F_k. Entonces, los coeficientes de la matriz $A^{(k+1)}$, resultante de aplicar estas operaciones elementales a la matriz de la etapa anterior, $A^{(k)}$, son:

$$a_{ij}^{(k+1)} = \begin{cases} a_{ij}^{(k)} & \text{si} \quad i \leq k \\ a_{ij}^{(k)} - \left(a_{ik}^{(k)}/a_{kk}^{(k)}\right) a_{kj}^{(k)} & \text{si} \quad i \geq k+1 \quad \text{y} \quad j \geq k+1 \\ 0 & \text{si} \quad i \geq k+1 \quad \text{y} \quad j \leq k \end{cases}$$

Fíjese que se podría dar el caso de que el coeficiente pivote $a_{kk}^{(k)}$ sea numéricamente nulo. Cuando algún coeficiente pivote es nulo, el método falla.

Se puede plantear un algoritmo para el proceso de eliminación de Gauss sin pivoteo, que acabamos de describir:

Algoritmo eliminación de Gauss sin pivoteo

para $k = 1, 2, \ldots, n-1$ **hacer**
  si $|a_{kk}|$ es muy pequeño
    salir
  fin
  para $i = k+1, k+2, \ldots, n$ **hacer**
    mult $\leftarrow a_{ik}/a_{kk}$
    $a_{ik} \leftarrow$ mult
    $a_{i,k+1:n} \leftarrow a_{i,k+1:n} -$ mult $* a_{k,k+1:n}$
    $b_i \leftarrow b_i -$ mult $* b_k$
  fin
fin

Está claro que el proceso de eliminación de Gauss sin pivoteo puede fallar fácilmente al conseguir algún coeficiente nulo en la diagonal principal de alguna de las matrices parciales. De hecho, si el coeficiente a_{11} de la matriz original del sistema lineal es cero, este método fallará apenas comenzando su ejecución.

No solo eso, si no que el problema del redondeo podría generar que el método falle de la misma forma. Esta situación se produce cuando el elemento pivote $|a_{kk}|$ es pequeño con respecto a $|a_{ik}|$. En este caso se produce un error de redondeo en la operación $a_{ij} = a_{ij} - (a_{ik}/a_{kk})a_{kj}$.

Existen varias estrategias para implementar este procedimiento de *pivoteo* o intercambio de filas. Aquí mostraremos el que se conoce como ***eliminación de Gauss con pivoteo parcial escalado***.

Eliminación de Gauss con pivoteo parcial escalado

En lugar de considerar los coeficientes pivote en el *orden natural*, $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$, la idea es buscar el coeficiente de mayor magnitud en la columna correspondiente, siguiendo el orden natural de las columnas en cada etapa. Es decir, en la etapa 1, se busca el coeficiente de mayor magnitud en la columna 1, el cual será entonces considerado como el coeficiente pivote. Esto se logra intercambiando la fila 1 (que sería la fila pivote en la eliminación de Gauss sin pivoteo) y la fila donde se consiguió el coeficiente de mayor magnitud. Así, éste quedará ubicado en la posición $(1,1)$ y el proceso continúa como en el caso sin pivoteo. Luego, en la segunda etapa, se hace la búsqueda del coeficiente de mayor magnitud en la segunda columna, y se intercambia la segunda fila (que sería la fila pivote en la eliminación de Gauss sin pivoteo) y la fila donde se consiguió el coeficiente de mayor magnitud. Luego se procede como en el método sin pivoteo. Este esquema se repite hasta llegar a la columna $n-1$.

Aunque es posible usar un vector de índices para llevar el orden en el que se consideran las filas pivote, aquí simplificaremos la presentación efectuando los intercambios de filas. Queda claro que el uso de un vector de índices es una estrategia más ágil y efectiva, ya que, si bien el intercambio de filas no involucra operaciones aritméticas, sí consume tiempo de ejecución. Puede consultarse la bibliografía general propuesta para revisar la estrategia de índices, en particular el texto de Kincaid y Cheney.

En la estrategia que se acaba de describir, no hay ninguna mención al tamaño relativo de un eventual coeficiente pivote y los coeficientes de la fila donde el mismo está ubicado. Es aquí donde entra el escalado. La estrategia a seguir será calcular los coeficientes de mayor magnitud en cada fila de la matriz de coeficientes del sistema original, y usarlos como factores de escalamiento en todas las etapas del método. De nuevo, una estrategia de escalado en la cual se calculen estos máximos cada vez que se modifique la matriz de coeficientes, es decir, en cada etapa del método, podría ser útil en algunos casos. Sin embargo, la estrategia simplificada que mostraremos aquí es suficiente en la mayoría de las situaciones.

Al igual que para el caso de eliminación de Gauss sin pivote, se podría escribir el algoritmo de eliminación de Gauss con pivoteo parcial escalado, para el cual, la información de entrada es la matriz de coeficientes del sistema lineal a resolver, A, y el vector de términos independientes, b, los cuales se modifican durante la ejecución del método.

4.4 Resolución del sistema de ecuaciones. Sustitución hacia atrás.

Ahora vamos a plantear un algoritmo para resolver el sistema triangular superior obtenido al final de la eliminación de Gauss por cualquiera de los procedimeintos vistos (con pivoteo o sin pivoteo) (matriz $A^{(n)}$). Manteniendo la notación original de la matriz A y del vector b para simplificar (sin el superíndice (n)), el sistema equivalente obtenido en ambos casos y que se pretende resolver es de la forma siguiente

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ & & & & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix}$$

Los coeficientes no especificados son nulos, esto es, los que están debajo de la diagonal principal. La metodología de resolución de este tipo de sistemas lineales se conoce como ***sustitución hacia atrás***.

Se comienza por resolver la última ecuación del sistema, en la cual sólo hay una variable, obteniéndose

$$a_{nn}x_n = b_n \Longrightarrow x_n = b_n/a_{nn}$$

siempre que $a_{nn} \neq 0$.

Si se considera ahora la penúltima ecuación, se puede calcular x_{n-1} usando el valor previamente calculado de x_n, así

$$a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n = b_{n-1} \Longrightarrow x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1,n}x_n}{a_{n-1,n-1}}$$

suponiendo que $a_{n-1,n-1} \neq 0$.

Se continúa de esta manera hasta llegar a la primera ecuación, lo cual permite calcular los valores $x_{n-2}, x_{n-3}, \ldots, x_2, x_1$ en ese preciso orden. En general, la i-ésima ecuación es de la forma:

$$a_{ii}x_i + a_{i,i+1}x_{i+1} + \ldots + a_{i,n-1}x_{n-1} + a_{in}x_n = b_i$$

a partir de la cual se calcula x_i como

$$x_i = \frac{b_i - \sum\limits_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j}{a_{ii}}$$

siempre que $a_{ii} \neq 0$, para $i = n-1, n-2, \ldots, 2, 1$.

El algoritmo correspondiente a este procedimiento se muestra a continuación. Los datos de entrada son la matriz triangular superior A y el vector de términos independientes b.

Algoritmo sustitución hacia atrás

si algún coeficiente de la diagonal principal de A es nulo
    salir
fin
$x_n \leftarrow b_n/a_{nn}$
para $i = n-1, n-2, \ldots, 2, 1$ **hacer**
    $x_i \leftarrow \left(b_i - \sum\limits_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j\right)/a_{ii}$
fin

Finalmente, la resolución completa de un sistema lineal implica la ejecución de ambos algoritmos, primero el de eliminación de Gauss, con el cual se transforma el sistema lineal dado en otro equivalente triangular superior, y enseguida el algoritmo de sustitución hacia atrás, que usa este sistema triangular superior como entrada para obtener una solución aproximada del sistema lineal dado. Si alguno de estos procedimientos falla, básicamente porque se consiga algún coeficiente pivote nulo durante la eliminación de Gauss, o porque resulte algún coeficiente nulo en la diagonal principal del sistema triangular superior, entonces la resolución del sistema lineal dado no se podrá completar.

Aplicando estos algoritmos al sistema lineal (1), usado como ejemplo para explicar el procedimiento de eliminación de Gauss, se obtiene la solución esperada $x = [3, 1, -2, 1]^T$.

En en el siguiente vídeo puede verse la explicación y un ejemplo del método de pivotaje parcial escalado para resolver un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

Accede al vídeo: Eliminación gaussiana por el método del pivotaje parcial escalado

4.5 Discusión de sistemas de ecuaciones lineales.

Para finalizar el tema, presentamos una clasificación de los sistemas de ecuaciones en función del número de soluciones que tiene:

Teorema 2

Un sistema lineal $Ax = b$ es:

- **Compatible** (existe solución) sí y solamente si la columna de la derecha de la matriz aumentada $(A|b)$ no contiene un pivote, es decir, si $(A|b)$ no tiene una fila de la forma $(0, ..., 0, b)$ con $b \neq 0$. En dicho caso, se dice que el sistema es **incompatible**.
- **Compatible determinado** (solución única) si no existen variables libres.
- **Compatible indeterminado** (infinitas soluciones) si existe al menos una variable libre.

Una vez conocida la clasificación de los sistemas de ecuaciones, nos gustaría conocer de que tipo de sistema se trata, antes de realizar los cálculos que nos lleven a su solución. Para ello, debemos obtener el rango de la matriz del sistema y de la matriz aumentada y compararlos.

- Si el rango de la matriz del sistema (A) es igual al rango de la matriz aumentada $(A|b)$, el sistema es **compatible**.
  - Si el rango de la matriz del sistema es igual al número de incógnitas, el sistema es **compatible determinado**.
  - Si el rango de la matriz del sistema es menor que el número de incógnitas, el sistema es **compatible indeterminado**.
- Si el rango de la matriz aumentada $(A|b)$ es mayor que el rango de la matriz del sistema (A), entonces el sistema es **incompatible**.

4.6 Referencias bibliográficas

De la Fuente, J. L. (1997). Técnicas de cálculo para sistemas de ecuaciones, programación lineal y programación entera: códigos en FORTRAN y C con aplicaciones de sistemas de energía eléctrica. Reverté.

Castellet, M., & Llerena, I. (1996). Álgebra Lineal y Geometría. Barcelona: Reverte.

Koshy, T. (2004). Discrete mathematics with applications. Elsevier.

Grimaldi, R. P. (2006). Discrete and Combinatorial Mathematics, 5/e. Pearson Education India.

Merino, L. M., & Santos Aláez, E. (2006). Álgebra lineal con métodos elementales. Madrid: Ed. Thomson.

Castellet, M., & Llerena, I. (1996). Álgebra Lineal y Geometría. Barcelona: Reverte.

4.7 Cuaderno de ejercicios

Ejercicio 1.

Para las siguientes matrices, describe la operación elemental de filas que transforma la primera matriz en la segunda. Después continúa el cálculo hasta obtener la matriz triangular superior equivalente:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & -7 \\ 3 & -1 & 6 \end{pmatrix} \; ; \; \begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 0 & -2 & 5 \\ 3 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 8 \\ 4 & -3 & 3 & -6 \end{pmatrix} \; ; \; \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 8 \\ 0 & 5 & -1 & -6 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.

En las siguientes representaciones de matriz ampliada de un sistema de ecuaciones lineales, determina si el sistema es compatible. De ser así, determina si la solución es única o no. (un $*$ representa un número no nulo y un $\bullet$) representa un número que puede ser distinto de cero o no.

$$A = \begin{pmatrix} \bullet & * & * \\ 0 & \bullet & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; ; \; B = \begin{pmatrix} \bullet & * & * & * \\ 0 & \bullet & * & * \\ 0 & 0 & \bullet & 0 \end{pmatrix} \; ; \; C = \begin{pmatrix} \bullet & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \bullet & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \bullet & * \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3.

Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales,

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 5x_4 = -2 \\ 3x_1 - 6x_2 - 6x_3 + 8x_4 = 2 \end{cases}$$

- Escribe la matriz $(A|b)$ del sistema (matriz ampliada).
- Halla una matriz equivalente a A que esté en forma escalonada.
- A la vista de dicha forma escalonada discute las cuestiones de existencia y unicidad de soluciones del sistema de ecuaciones dado.

Ejercicio 4.

Determina qué tipo de solución tienen los siguientes sistemas en base a su rango.

$$a)\begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ x - 2y + 2z = -2 \\ -x + 2y - z = 0 \end{cases} \quad b)\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ -2x + 2y + 2z = 2 \\ x - 2y - z = -1 \end{cases} \quad c)\begin{cases} -y + z = 2 \\ 2x - y = -2 \\ 2x - z = -2 \end{cases}$$

Ejercicio 5. Discutir según los valores de α del siguiente sistema de ecuaciones en cada caso:

$$\begin{cases} \alpha x + y - 2z = 0 \\ -x - y + \alpha z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

Ejercicio 6. Discute, en función del parámetro α, la solución de este sistema.

$$\begin{cases} -x - y - \alpha z = -1 \\ \alpha x + y + z = 1 \\ 2x + 2\alpha y + 2z = 1 \end{cases}$$

Ejercicio 7.

Discute, en función del parámetro α, la solución de este sistema.

$$\begin{cases} x + 4y - 2z = 1 \\ \alpha x + y + z = 1 \\ 3y + \alpha z = 5 \end{cases}$$

Ejercicio 8.

Discute, en función del parámetro α y β, la solución de este sistema.

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y = 2 \\ \alpha x + \alpha y + 4z = 4 \\ \alpha y + 2z = \beta \end{cases}$$

4.8 Solución cuaderno de ejercicios

Solución 1.

(A): Intercambio de las filas 1 y 2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(B): Restar a la fila 3 la fila 1 multiplicada por 4.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & 12 \end{pmatrix}$$

Solución 2.

A=Sistema compatible determinado.

B=Sistema incompatible.

C=Sistema compatible indeterminado.

Solución 3.

a)

$$(A|b) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 & 0 \\ -2 & 4 & 5 & -5 & -2 \\ 3 & -6 & -6 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

b)

$$(A|b) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c) Se puede ver claramente que el rango de la matriz A, coincide con el rango de la matriz $A|b$, por lo que el sistema es compatible (tiene solución).

También se observa que el rango de la matriz del sistema es igual a 2 pero el número de incógnitas es 4, por lo que el sistema es indeterminado.

Solución 4.

- $a)$ es compatible determinado ya que $rang(A) = rang(A|b) = 3$.
- $b)$ es compatible indeterminado ya que $rang(A) = rang(A|b) = 2$.
- c) es incompatible ya que $rang(A) = 2 < 3 = rang(A|b)$.

Solución 5.

En primer lugar, estudiamos el rango de la matriz del sistema. Si el determinante de la matriz de coeficientes (A),es distinto de cero, su rango será máximo (3) y el sistema será compatible determinado.

$$det(A) = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & -2 \\ -1 & -1 & \alpha \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\alpha^2 + 1 \Longrightarrow -\alpha^2 + 1 = 0; \Longrightarrow \alpha = 1 \; \alpha = -1$$

Por tanto, si $\alpha \neq 1$ y $\alpha \neq -1$, el rango de la matriz A sera igual al de la matriz $A|b$ igual al número de incógnitas (3).

Analicemos que pasas si $\alpha = 1$:

$$(A|b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Y como el rango de $A \neq rango(A|b)$ El sistema es incompatible.

Analicemos que pasas si $\alpha = -1$:

$$(A|b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Y por tatno el rango de $A = rango(A|b)$ El sistema es compatible. Además, como $Rang(A) = 2 \neq num\ incgnitas$ el sistema es indeterminado.

Solución 6.

- Si $\alpha \neq 1$ y $\alpha \neq -2$ entonces Sistema compatible determinado y $x = \frac{1}{2+\alpha}$; $y = \frac{1}{2+\alpha}$ $z = \frac{1}{-2-\alpha}$
- Si $\alpha = 1$, entonces Sistema compatible indeterminado y $x = \lambda$, $y = \beta$ y $z = 1 - \lambda - \beta$.
- Si $\alpha = -2$ sistema incompatible.

Solución 7.

- Si $\alpha \neq -4$ entonces Sistema compatible determinado y $x = -\frac{17}{3}$; $y = \frac{5}{3}$ $z = 0$
- Si $\alpha = -4$, entonces Sistema compatible indeterminado y $x = \lambda$, $y = \frac{-3-2\lambda}{5}$ y $z = \frac{-17-3\lambda}{10}$.
- Si $\alpha = -2$ sistema incompatible.

Solución 8.

- Si $\alpha \neq 0$ y $\beta \neq 2$ entonces Sistema compatible determinado y $x = -\frac{-2+\beta}{\alpha}$; $y = \frac{-2+\beta}{\alpha}$ $z = 1$
- Si $\alpha \neq 0$ y $\beta = 2$, entonces Sistema compatible indeterminado y $x = \lambda$, $y = \lambda$ y $z = 1 - \frac{\alpha\lambda}{2}$.
- Si $\alpha = 0$ y $\beta = 2$ sistema compatible indeterminado. $x = \lambda$; $y = \beta$ y $z = 1$

4.9 A fondo

A fondo

No dejes de leer…

Factorización LU de matrices dispersas en multiprocesadores

Esta tesis de Rafael Asenjo Plaza aborda el problema de las técnicas para factorizar matrices dispersas en sistemas multiprocesador. Puedes leer la sección 1 donde se introducen las matrices dispersas, la forma en que se representan y los algoritmos estándar para su factorización.

Accede al documento desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:

http://riuma.uma.es/xmlui/handle/10630/2513

No dejes de ver…

Sistema de ecuaciones lineales en MATLAB

Este vídeo demuestra cómo podemos usar MatLab para resolver sistemas de ecuaciones.

Accede al vídeo desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:

https://www.youtube.com/watch?v=iiuUqZacAbA

La eliminación gaussiana

Este vídeo desarrolla un ejemplo de eliminación gaussiana.

Accede al vídeo desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:

http://www.youtube.com/watch?v=j4skKKJ_4bw

A fondo

Handbook of Discrete and Combinatorial Mathematics

Rosen, K. H. (1999). *Handbook of Discrete and Combinatorial Mathematics*. EEUU: CRC Press Inc.

La importancia de las matemáticas discretas se ha incrementado dramáticamente en los últimos años, pero hasta ahora, ha sido difícil —si no imposible— de encontrar un libro de referencia única que cubre eficazmente el tema. Para llenar ese vacío, este libro presenta una amplia colección de material de referencia preparado para todas las áreas importantes de la matemática discreta, incluyendo los esenciales para sus aplicaciones en procesamiento de matrices.

Accede a una parte del libro desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:

http://books.google.es/books?id=yJIMx9nXB6kC&printsec=frontcover&hl=es

4.10 Test

Test

1. De las siguientes frases señala cual es falsa:

   A. Dado el sistema Ax=b, el producto Ax es una combinación lineal de las filas de A.

   B. Dado el sistema Ax=b, el producto Ax es una combinación lineal de las columnas de A.

   C. Dado el sistema Ax=b, puede existir uno o varios vectores x que verifiquen el sistema.

   D. Dado el sistema Ax=b, Si tomamos A^'=cA y b^'=cb con c un escalar distinto de cero. Entonces la solución al sistema A^' x=b' es la misma que la del sistema inicial.

2. Dado el sistema:

   $x + y + z = -3$

   $2x - 3y + z = 0$

   $-3x + z = 2$

   A. La solución es x=1, y=1, z=1.

   B. La solución es x=−1, y=1, z=1.

   C. La solución es x=−1, y=−1, z =1.

   D. La solución x=−1, y=−1,z =−1.

3. Los tres planos $\boldsymbol{x+2y+3z=4}$, $\boldsymbol{2x+4y+6z=12}$, $\boldsymbol{-x-2y-3z=4}$ en el espacio tridimensional:

   A. Tienen un punto de intersección común.

   B. No tienen ningún punto de intersección común.

   C. Intersecan en una recta.

   D. Representan de hecho el mismo plano en el espacio.

4. Al aplicar operaciones elementales, la matriz ampliada de un sistema lineal tiene la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

A. La solución del sistema es (17, 2,0).

B. La solución del sistema es (1,2,0).

C. La solución del sistema es (19,2,-1).

D. El sistema no tiene solución.

5. Al aplicar operaciones elementales, la matriz ampliada de un sistema lineal tiene la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

A. La solución del sistema es (17,2,0).

B. La solución del sistema es (17−2z,2,z) para cualquier $z \in \mathbb{R}$.

C. La solución del sistema es (z,2,z) para cualquier $z \in \mathbb{R}$.

D. El sistema no tiene solución.

6. La matriz aumentada de un sistema lineal ha sido transformada mediante operaciones elementales en la siguiente matriz. ¿Qué tipo de sistema es?

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

A. Sistema compatible indeterminado.

B. Sistema compatible determinado.

C. Sistema incompatible.

D. Sistema incompatible determinado.

7. La matriz aumentada de un sistema lineal ha sido transformada mediante operaciones elementales en la siguiente matriz. ¿Qué tipo de sistema es?

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 11 \\ 0 & -1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A. Sistema compatible indeterminado. (La última fila nos indica que z es una variable libre.

B. Sistema compatible determinado.

C. Sistema incompatible.

D. Sistema incompatible determinado.

8. ¿Para qué valores de a y b el siguiente sistema es compatible?

$$\begin{array}{ccc} x & -2y & = a \\ -4x & +8y & = b \end{array}$$

A. El sistema es compatible si $\mathbf{4a-b=0}$.

B. El sistema es compatible si $\mathbf{4a+b=0}$.

C. El sistema es compatible si $\mathbf{4a-b=4}$.

D. El sistema es siempre compatible.

9. La ecuación en $\boldsymbol{a,b,c}$ que permite que el sistema lineal que corresponde a la matriz aumentada:

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 7 & a \\ 0 & 3 & -5 & b \\ -2 & 5 & -9 & c \end{pmatrix}$$

A. El sistema es compatible si a+b+c=0.

B. El sistema es compatible si 2a+b+c=0.

C. No existe tal ecuación en a,b,c ya que el sistema siempre es compatible.

D. No existe tal ecuación en a,b,c ya que el sistema siempre es incompatible.

10. La ecuación pivote es:

A. La ecuación que se modifica.

B. La ecuación que se deja constante.

C. La ecuación con coeficientes más pequeños.

D. La ecuación con coeficientes más grandes.