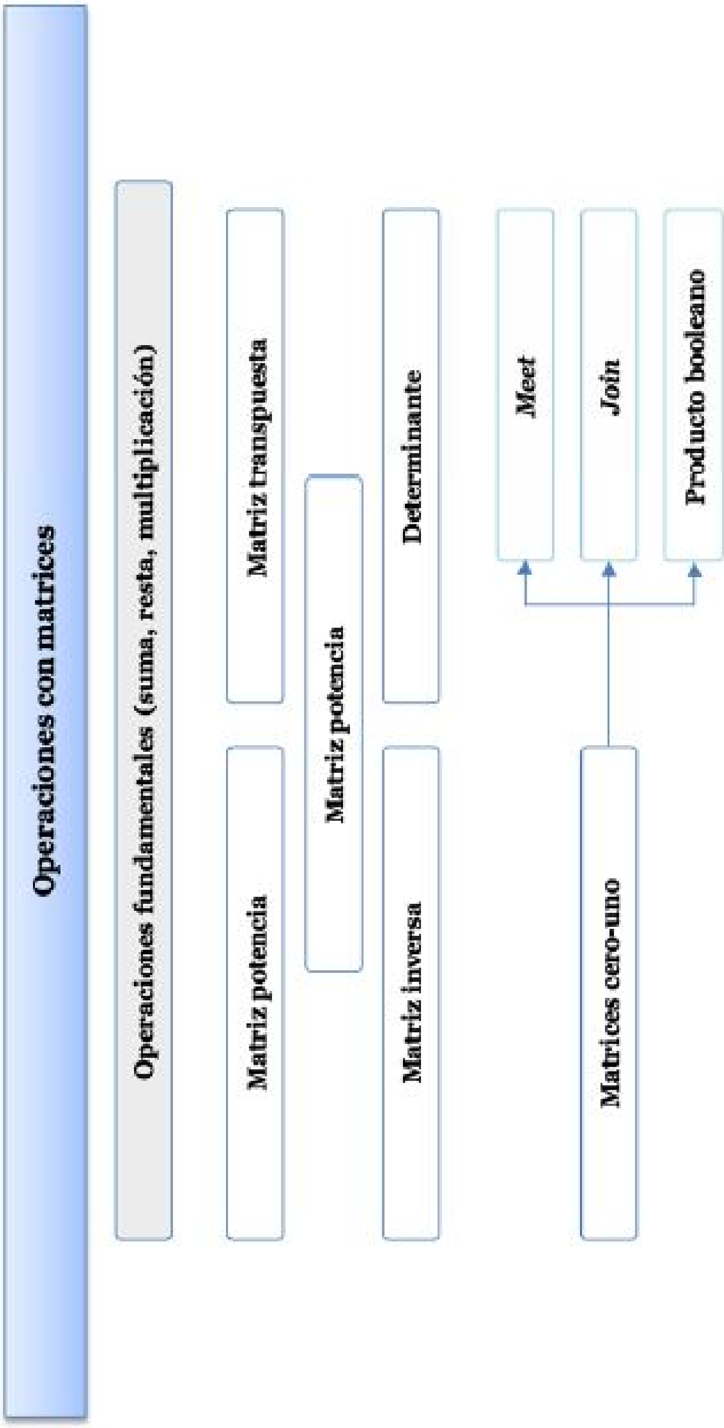
Álgebra y Matemática discreta

Operaciones con matrices

Índice

Esquema



Operaciones con matrices
Operaciones fundamentales (suma, resta, multiplicación)
Matriz potencia
Matriz transpuesta
Matriz potencia
Matriz inversa
Determinante
Matrices cero-uno
Meet
Join
Producto booleano

Ideas clave

3.1 Introducción y objetivos

El lenguaje matricial es fundamental en el estudio del Álgebra Lineal, donde las ideas principales se expresan por medio de operaciones entre matrices. En este tema se exponen los principales tipos de matrices, sus características y las operaciones y transformaciones que se pueden hacer sobre ellas. Veremos que las matrices se pueden sumar y multiplicar, y por tanto conforman un sistema algebraico de alguna forma análogo al conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, propiedad estudiada por primera vez de forma sistemática en 1858 a manos del matemático Arthur Cayley.

El manejo de matrices es una herramienta fundamental para resolver sistemas de ecuaciones lineales, tal y como veremos en la siguiente unidad. Además, destacamos otras aplicaciones como la caracterización de transformaciones geométricas o la fácil manipulación de información que proporcionan en el área de computación. Más concretamente, los objetivos que trataremos de alcanzar en este tema serán los siguientes:

- Conocer el concepto de vector, matriz y las operaciones sobre ellos de suma, producto y producto por un escalar.
- Realizar operaciones elementales sobre una matriz.
- Estudiar las relaciones Binarias.
- Calcular la matriz inversa de una matriz utilizando bien operaciones elementales o bien la fórmula que incluye la matriz adjunta.
- Conocer el concepto de matriz cero-uno.

- Calcular las matrices *Meet*, *Join* y *producto boleano*.

Para alcanzar estos objetivos, se propone la siguiente subdivisión del contenido de este tema:

- Operaciones fundamentales con matrices.
- Matriz potencia, transpuesta y matriz inversa.
- Determinante de una matriz.
- Matrices cero-uno.
- Cierre de una relación.

3.2 Operaciones fundamentales con matrices

Las operaciones con matrices son importantes porque permiten realizar cálculos matemáticos y resolver problemas que de otra manera serían difíciles o imposibles de abordar. Además, tienen aplicaciones prácticas en diversas áreas de la ciencia y la ingeniería. Las operaciones fundamentales con matrices son la suma, la resta y la multiplicación.

La suma y la resta de matrices se realizan sumando o restando los elementos correspondientes de las matrices y, para que estas operaciones estén definidas, es necesario que las matrices involucradas tengan las mismas dimensiones.

Por otro lado, la multiplicación de matrices es una operación más compleja que requiere el uso de reglas específicas. En general, para que la multiplicación de matrices esté definida, el número de columnas de la matriz izquierda debe ser igual al número de filas de la matriz derecha. La matriz resultante de la multiplicación tiene un número de filas igual al número de filas de la matriz izquierda y un número de columnas igual al número de columnas de la matriz derecha.

Definición 1

Llamaremos matriz de orden $m \times n$ a una tabla de m filas y n columnas expresada de la siguiente manera:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Las entradas o coeficientes de la matriz A se denotan por a_{ij}, indicando que son el elemento de la matriz A en la fila i y columna j. Generalmente los coeficientes a_{ij}

serán números, es decir, $a_{ij} \in \mathbb{K}$ donde $\mathbb{K}$ puede ser el conjunto de números reales $\mathbb{R}$ o imaginarios $\mathbb{C}$.

Como notación abreviada de matriz usaremos $A = (a_{ij})_{i=1,\cdots,m,j=1,\cdots,n}$ o simplemente $A = (a_{ij})$, y llamaremos $\mathcal{M}_{mxn}$ al conjunto de matrices mxn, o $\mathcal{M}_{mxn}(K)$ si queremos indicar el conjunto al que pertenecen los coeficientes de la matriz.

Diremos que dos matrices A y B son matrices iguales si tienen el mismo orden $a_{ij} = b_{ij}$ para todo i, j.

Definición 2

Dada una matriz A, una submatriz de A es una matriz obtenida a partir de A eliminando una o varias filas o columnas.

Ejemplo 1.

La matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

es de orden 2×3, en donde $a_{12} = 4$ y $a_{23} = -1$. Por tanto $A \in \mathcal{M}_{2\times3}(R)$.

Las matrices:

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \; y \; C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}$$

son submatrices de la matriz A.

A continuación se definen una serie de tipos de matrices que se utilizarán a lo largo del tema:

Definición 3

Una **matriz fila** es aquella que solo tiene una fila y una **matriz columna** es aquella que solamente tiene una columna. Son lo que usualmente se conoce como **vectores**.

Ejemplo 2.

La matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ es una matriz (o vector) fila, y $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ es una matriz (o vector) columna.

Definición 4

Una **matriz cuadrada** es aquella matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ que tiene el mismo número de filas que de columnas. Al conjunto de matrices cuadradas de orden $n \times n$ lo denotaremos por $\mathcal{M}_n$.

Ejemplo 3.

La matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 8 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ es una matriz cuadrada de orden 3.

Definición 5

Una **matriz diagonal** es una matriz cuadrada que únicamente tiene coeficientes no nulos en la diagonal, es decir, aquella matriz A tal que $a_{ij} = 0, \ \forall i \neq j$.

Decimos que una matriz A es**triangular superior** si todos los coeficientes que se encuentran por debajo de la diagonal son cero, es decir, si $a_{ij} = 0, \ \forall i > j$.

De la misma manera, decimos que una matriz A es **triangular inferior** si todos los coeficientes que se encuentran por encima de la diagonal son cero, es decir, si $a_{ij} = 0, \ \forall i < j$.

Ejemplo 4.

De las siguientes matrices A es diagonal, B es triangular superior y C triangular inferior.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Como caso particular de matriz diagonal está la matriz identidad I_n, la cual se caracteriza por tener todos los coeficientes de la diagonal a_{ij} igual a 1. Por ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es la matriz identidad de orden 3.

Definición 6

Una **matriz simétrica** es una matriz A tal que $a_{ij} = a_{ji}$ para todo i, j. Es decir, es una matriz en la que los coeficientes son simétricos con respecto a la diagonal principal.

Ejemplo 5.

La matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 4 & -3 & 6 \\ 0 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Es una matriz simétrica.

3.3 Operaciones con matrices

En esta sección vamos a describir las distintas operaciones aritméticas que podemos realizar con matrices.

Suma de matrices

Definición 7: Suma de matrices

Dadas dos matrices del mismo orden $A, B \in \mathbb{M}_{m\times n}$ la suma de A y B se define como la matriz obtenida al sumar los coeficientes correspondientes a la misma posición. Es decir:

$$A + B := (a_{ij} + b_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Se observa por tanto que para que la suma esté definida es necesario que las matrices tengan el mismo orden.

Ejemplo 6.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 4 & -3 & 6 \\ 0 & 6 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 5 & 0 & 7 \\ 1 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

La suma de matrices cumple las siguientes propiedades:

- **Asociativa**: $A + (B + C) = (A + B) + C$, para cualesquiera $A, B, C \in \mathcal{M}_{m\times n}$
- **Conmutativa**: $A + B = B + A$, para cualesquiera $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}$.
- **Elemento neutro**: Existe una matriz **0** $\in \mathcal{M}_{m\times n}$ tal que $A + 0 = A$ para cualquier $A \in \mathbb{M}_{m\times n}$.
- **Elemento opuesto**: Para toda $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ existe la matriz $-A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ tal que $A + (-A) = 0$.

Estas propiedades hacen que el conjunto de matrices junto con la operación suma, denotado por ($\mathcal{M}_{m\times n}, +$), forman un grupo Abeliano (ver Castellet y Llerena (1996) para más información sobre teoría de grupos).

Producto de un escalar por una matriz

Definición 8: Producto por escalar

Dada una matriz $A\ in \mathcal{M}_{m\times n}$ y un escalar $k \in K$, definimos la multiplicación de

k por A como la matriz:

$$kA := (ka_{ij}) = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{n1} & ka_{n2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

Al igual que A, la matriz kA es de orden $m \times n$.

Ejemplo 7.

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 8 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$, se tiene que $2A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 0 & 16 & 2 \\ 4 & -2 & 10 \end{pmatrix}$

Producto de dos matrices

El producto AB de dos matrices se define de manera algo más elaborada ya que para que la operación esté definida, se requiere que $A \in \mathcal{M}_{m\times p}$ y $B \in \mathcal{M}_{p\times n}$, es decir:

Número de columnas de A igual al número de filas de B

Existen diversas formas de realizar la multiplicación de matrices, como puede ser el producto de matrices usual, el producto por columnas (y por filas) y el producto por bloques, cada una de estas formas de multiplicación tiene sus aplicaciones y su importancia. En este capítulo, nos detendremos en el producto usual.

Definición 9: Producto de dos matrices

Dadas $A \in \mathcal{M}_{n\times p}$ y $B \in \mathcal{M}_{p\times m}$, definimos la matriz $AB = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}$ mediante la fórmula:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ...a_{ip}b_{pj}$$

Es decir, en la matriz producto AB la entrada en el lugar i, j se obtiene multiplicando los elementos de la fila i-ésima de A por los elementos de la columna j-ésima de B. A continuación, se puede ver con detalle las operaciones que se deben realizar:

Para $n = 3, m = 4, p = 2$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}_{n\times p} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \end{pmatrix}_{p\times m} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} & a_{11}b_{14} + a_{12}b_{24} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} & a_{21}b_{14} + a_{22}b_{24} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} & a_{31}b_{14} + a_{32}b_{24} \end{pmatrix}_{n\times m}$$

Como se puede ver, la matriz resultante AB tiene en número de filas de A y el número de columnas de B, es decir:

$$A_{m\times p} \cdot B_{p\times n} = AB_{m\times n}$$

Ejemplo 8.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 0 + 2\cdot 2 & 1\cdot 1 + 2\cdot 3 \\ 0\cdot 0 + 1\cdot 2 & 0\cdot 1 + 1\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

El producto de matrices cumple las siguientes propiedades:

- **Asociativa** $A(BC) = (AB)C$ siempre que los productos AB y BC estén definidos.
- **Elemento neutro** Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, se verifica que $I_m A = A$ y $AI_n = A$
- **Distributiva respecto a la suma** $(A + B)C = AC + BC$
- $k(AB) = (kA)B$

Es importante tener en cuenta que la multiplicación de matrices en general **no es conmutativa**. Por ejemplo, si tomamos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \;\; y \;\; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

tenemos que:

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Si consideramos las matrices cuadradas $\mathcal{M}_n$ entonces el producto de dos matrices cualesquiera vuelve a ser una matriz cuadrada de orden n.

Este hecho junto con las operaciones que de suma y producto que acabamos de ver, hacen que $(\mathcal{M}_n, +, \cdot)$ sea un anillo no conmutativo (Castellet y Llerena, 1996).

Producto de matrices por bloques

En muchas ocasiones, en las que las matrices que se desean multiplicar son grandes, resulta práctico realizar la multiplicación pro bloques: Sean $A \in \mathcal{M}_{n\times p}$ y $B \in \mathcal{M}_{p\times m}$

podemos realizar el producto de matrices por bloques siempre que sean posibles sus productos en cuanto a dimensiones.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} \end{pmatrix}_{5\times 4} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} \end{pmatrix}_{4\times 3} =$$

$$\left(\begin{array}{c|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} \end{array}\right)_{5\times 1|5\times 3} \cdot \left(\begin{array}{ccc} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ \hline b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} \end{array}\right)_{1\times 3|3\times 3} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{41} \\ a_{51} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ a_{52} & a_{53} & a_{54} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} \end{pmatrix}$$

Ejemplo 9.

Sean $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 5 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Realicemos el producto por bloques.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)_{3\times 2|3\times 2} \cdot \left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \hline 5 & 0 \\ 1 & 0 \end{array}\right)_{2\times 2|2\times 2} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Antes de terminar la sección de la multiplicación de matrices, cabe decir que el algoritmo para obtener la multiplicación de matrices puede ser escrito y ejecutado de forma sencilla, aunque no de forma única. A continuación se presenta el pseudocódigo del algoritmo basado en la definición del producto de dos matrices.

Algoritmo para la multiplicación de matrices

para $i := 1, 2, \ldots, n$
    para$j := 1, 2, \ldots, m$
    hacer
        $c_{ij} := 0$
        para $q := 1, 2, ..., k$
            $c_{ij} := c_{ij} + a_{iq} b_{qj}$
    fin
fin
$C = [c_{ij}]$ es el producto de A por B

Potencia de una matrices

Definición 10

Sea A una matriz cuadrada de orden n y sea k un número entero no negativo, podemos definir la **potencia** de A como $A^k = \underbrace{A \cdot \ldots \cdot A}_{\text{k veces}} \cdot I_n$

En la definición incluimos en caso $k = 0$ en donde $A^0 = I_n$.

Matrices inversa, traspuesta y determinante de una matriz

Existen muchas otras operaciones que se realizan con matrices, o trasformaciones de matrices con sus aplicaciones en distintos ámbitos. A continuación destacamos tres de las mas importantes, la trasposción de matrices, la inversa de una matriz y el determinante de una matriz cuadrada

Definición 11: Inversa de una matriz

Dadas dos matrices cuadradas A y B, $\in \mathcal{M}_n$, es decir, matrices cuadradas, decimos que B es la matriz inversa de A si se cumple:

$$AB = BA = I_n$$

En caso de existir esta pareja de matrices, decimos que A es una matriz invertible y escribimos $B = A^{-1}$.

Ejemplo 10.

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ es inversible y su matriz inversa es $A_{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Ya que se puede ver que se cumple que:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ y

$$A^{-1}A \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Veamos algunas propiedades de las matrices inversas:

Proposición 1

Sean $A, B \in \mathcal{M}_n$. Entonces,

- Si A es invertible, entonces A^{-1} es única.
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- Si A es invertible entonces su traspuesta (A^T) también lo es y se tiene que $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Demostración

1. Si existieran dos inversas B y C, tendríamos que $AB = BA = AC = CA = I_n$ y por tanto $B = BI_n = B(BA)C = I_n = C$, lo cual no es cierto. Por tanto la matriz inversa es única.
2. Comprobamos que ambas matrices cumplen la definición: $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$ y de la misma forma, $(B^{-1}A^{-1})(AB) = I_n$, cumpliéndose así los dos miembros de la igualdad.
3. AL igual que en la demostración (2), $A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I_n^T = I_n$ y por otra parte, $(A^{-1})^T A^T = I_n$.

$\square$

En el siguiente vídeo puedes ver un ejemplo del cálculo de la inversa de una matriz de tamaño 2×2.

Accede al vídeo: Calculo de matrices inversas en matrices de 2 x 2

Definición 12: Traspuesta de una matriz

Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times m}$, se define la matriz traspuesta de A como la matriz A^T obtenida escribiendo (por orden) las filas de A como columnas. Es decir:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \quad entonces \ \ A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Obsérvese que la matriz traspuesta es de orden $m \times n$, es decir $A^T \in \mathcal{M}_{m\times n}$.

Ejemplo 11.

La traspuesta de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\ es \ \ A^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

La traspuesta de una matriz (o vector) fila es una matriz (o vector) columna y viceversa. Por ejemplo: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \ \ y \ \ A = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \end{pmatrix}$

Las matrices traspuestas cumplen las siguientes propiedades:

- $(A+B)^T = A^T + B^T$
- $(A^T)^T = A$
- $(kA)^T = kA^T, \forall k \in \mathbb{K}$
- $(AB)^T = B^T A^T$

Determinante de una matriz

Vamos a definir el **determinante de una matriz** cuadrada $A \in \mathcal{M}_n$, que representaremos por $det(A)$ o $|A|$, de manera inductiva. Primero para el caso inicial $n = 1$, seguido de los casos más comunes $n = 2$ y $n = 3$, para terminar con la definición para una matriz general.

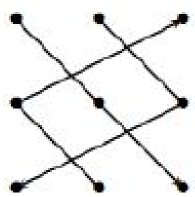
- Si A es de orden 1, es decir $A = (a)$, entonces $det(A) = a$.
- Si A es de orden 2, es decir $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, entonces:

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

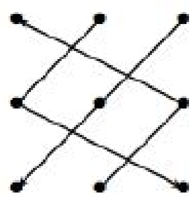
- Si A es de orden 3, es decir $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, entonces:

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31}$$
$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

El determinante de una matriz 3×3 se obtiene de manera gráfica mediante la conocida **Regla de Sarrus**, que indica los sumandos negativos y positivos:



(+)



(−)

Ejemplo 12.

Para las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ se tiene que:

- $det(A) = 3 - (-2) = 5$
- $det(B) = 2 + (-12) + 0$-0-0-(-3) = -7

Definición 13: Menor adjunto de una matriz

Dada una matriz cuadrada de orden n:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Llamamos A_{ij} a la matriz que se obtiene de A eliminando la fila i y la columna j. Definimos el ij-ésimo menor adjunto de una matriz A como:

$$\alpha_{ij} = (-a)^{i+j} det(A_{ij})$$

Y el determinante de A como:

$$det(A) = a_{11}\alpha_{11} + a_{21}\alpha_{21} + ... + a_{n1}\alpha_{n1}$$

Esta fórmula también es conocida como el *desarrollo de Laplace* del determinante de A por su primera columna.

El cálculo del determinante de una matriz de orden n se realiza a partir de los menores adjuntos de orden $n - 1$. La operación puede expresarse en términos de determinantes de orden 2 o 3, que pueden ser resueltos por la regla de Sarrus.

Ejemplo 13.

Vemos en este ejemplo cómo podemos calcular el determinante de una matriz de orden 4 a partir de sus menores de orden 3.

$$det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 - 1(-1) = 4$$

A continuación, se presentan las propiedades más importantes de los determinantes (Castellet y Llerena, 1996, 46-48):

- Si tres matrices cuadradas A, A'y A'' son idénticas salvo en que la i-ésima fila (o columna) de A es la suma de las filas (o columnas) correspondientes de A'y A'', entonces:

$$det(A) = det(A') + det(A'')$$

- Si una matriz A tiene dos filas o columnas iguales entonces $det(A) = 0$.
- Si se intercambian dos filas o columnas de la matriz A, entonces su determinante cambia de signo.
- Si se multiplican los elementos de una fila o columna de la matriz A por un escalar k, entonces el determinante queda multiplicado por k.
- Si a una fila o columna de una matriz cuadrada A se le suma otra multiplicada por un escalar k, entonces su determinante no varía.

- Una matriz cuadrada A es regular si y solamente si $det(A) \neq 0$.
- Producto: $det(AB) = det(A)det(B)$.
- Traspuesta: $det(A) = det(A^T)$.
- El determinante de una matriz puede obtenerse desarrollando cualquiera de sus filas o columnas:

$$det(A) = a_{i1} + ... + a_{in}\alpha_{in} = a_{1j}\alpha_{1j} + ... + a_{nj}\alpha_{nj}$$

EL calculo de los determinantes de una matriz, resulta de gran utilidad para obtener la inversa de esta. Para ello, en primer lugar definimos la matriz adjunta de una matriz cuadrada:

Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_n$, se define la matriz adjunta de A como:

$$A^* := (\alpha_{ij})$$

A^* es la matriz en la que cada posición de la matriz se encuentra el correspondiente menor adjunto de dicho elemento.

Se cumple que si A es una matriz regular (se puede obtener la matriz inversa de A), entonces;

$$A^{-1} = \frac{(A^+)^T}{det(A)}$$

En el siguiente vídeo puedes ver un ejemplo del cálculo de la inversa de una matriz utilizando el cálculo de los determinantes.

Accede al vídeo: Calculo de matrices inversas en matrices de 3 x 3

3.4 Matrices cero-uno

Para finalizar este tema, se profundiza en el estudio de las matrices cero-uno o matrices boleanas, introducido en el Tema 4 y que son de gran utilidad para la representación de estructuras discretas, tal como se verá en el tema 9, en el que se utilizan las matrices cero-uno para representar grados.

Definición 14: Matrices cero-uno

Se llama **matriz cero-uno** o **matriz boleana** a aquella matriz en la que todos los elementos que la forman son 0 ó 1 y los algoritmos que trabajan con ellas, están basados en la aritmética *boleana* sobre matrices de ceros y unos. Esta aritmética se construye con las operaciones boleanas $\vee, \wedge e =$ sobre pares de bits que se vieron en el Tema 1:

$$b_1 \wedge b_2 = \begin{cases} 1 & si\, b_1 = b_2 = 1 \\ 0 & otro\, caso \end{cases}$$

$$b_1 \vee b_2 = \begin{cases} 1 & si\, b_1 = 1\, ó\, b_2 = 1 \\ 0 & otro\, caso \end{cases}$$

Además, se pueden realizar las operaciones unión e intersección de matrices boleanas:

Definición 15: Unión e intersección

Sean $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ matrices boleanas $m \times n$.

Se define la **unión** de A y B y se denota por $A \vee B$ a la matriz boleana cuyo elemento (ij) es $a_{ij} \vee b_{ij}$.

Se llama matriz **intersección** de A y B y se denota $A \wedge B$ a la matriz boleana cuyo elemento (i, j) es $a_{ij} \wedge b_{ij}$

Es habitual encontrar las operaciones de unión e intersección bajo terminología inglesa como *meet* para denotar a la matriz unión de A y B y *join* para la matriz intersección de A con B.

Ejemplo 14.

Dadas las matrices A y B, calcular las matrices $A \vee B$ y $A \wedge B$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad y \;\; B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

solución:

$$A \vee B = \begin{pmatrix} 1 \vee 0 & 0 \vee 1 & 1 \vee 0 \\ 0 \vee 1 & 1 \vee 1 & 0 \vee 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A \wedge B = \begin{pmatrix} 1 \wedge 0 & 0 \wedge 1 & 1 \wedge 0 \\ 0 \wedge 1 & 1 \wedge 1 & 0 \wedge 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Definición 16: Producto boleano

Sean A y B dos marices boleanas de orden $m \times k$ y $k \times n$. El producto boleano, de A y B, que se denota por $A \odot B$, es la matriz $C_{m \times n}$ cuyo elemento (ij) se obtiene como:

$$c_{ij} = \bigvee_{k=1}^{n} a_{ik} \wedge b_{kj}$$

$$c_{ij} = (a_{i1} \wedge b_{i1}) \vee (a_{i2} \wedge b_{i2}) \vee ... \vee (a_{ik} \wedge b_{ik})$$

Es decir, el producto boleano de matrices se realiza de forma análoga al producto usual de matrices, cambiando las operaciones suma por unión $(+ \longrightarrow \vee)$ y producto por intersección $(\cdot \longrightarrow \wedge)$.

Ejemplo 15.

Calcular el producto boleano de las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \;\; y \;\; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$A \odot B = \begin{pmatrix} (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) & (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 1) & (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) \\ (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) & (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) & (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) \\ (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) & (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 1) & (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (1 \vee 0) & (1 \vee 0) & (0 \vee 0) \\ (0 \vee 0) & (0 \vee 1) & (0 \vee 1) \\ (1 \vee 0) & (1 \vee 0) & (0 \vee 0) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Al igual que en el caso del producto usual, se puede implementar el algoritmo para el producto boleano en base al siguiente pseudocódigo:

Algoritmo para el producto boleano de matrices

para $i := 1, 2, \ldots, n$
para$j := 1, 2, \ldots, m$
hacer
$c_{ij} := 0$
para $q := 1, 2, ..., k$
$c_{ij} := c_{ij} \vee (a_{iq} \wedge b_{qj})$
fin
fin
$C = [c_{ij}]$ es el producto boleano de A por B

Potencia de una boleana

Definición 17

Sea A una matriz cuadrada cero-uno de orden n y sea k un número entero positivo, podemos definir la **potencia boleana** de A como $A^k = \underbrace{A \odot \ldots \odot A}_{\text{k veces}} \cdot I_n$

Este producto está bien definido ya que el producto boleano es asociativo. Por definición $A0 = I_n$.

3.5 Referencias bibliográficas

Rosen, K. H., & Morales, J. M. P. (2004). Matemática discreta y sus aplicaciones.

Koshy, T. (2004). Discrete mathematics with applications. Elsevier.

Grimaldi, R. P. (2006). Discrete and Combinatorial Mathematics, 5/e. Pearson Education India.

Merino, L. M., & Santos Aláez, E. (2006). Álgebra lineal con métodos elementales. Madrid: Ed. Thomson.

Castellet, M., & Llerena, I. (1996). Álgebra Lineal y Geometría. Barcelona: Reverte.

3.6 Cuaderno de ejercicios

Ejercicio 1.

Hallar la matriz A resultante del producto:

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.

¿Para qué valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ la matriz no es invertible?.

Ejercicio 3.

Calcular AB si:

$$a)\ \ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \ \ y\ \ B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b)\ \ A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \ \ y\ \ B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4.

Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Obtener: $a)$ $A \vee B; b)$ $B \wedge A$ y $c) A \odot B$

Ejercicio 5.

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, calcular:$a)\ A^2B;\ \ b)\ A^3\ \ y\ \ c) A \vee A^2 \vee A^3$

Ejercicio 6.

Sean A y B matrices boleanas de orden $m \times n$. Demostrar que:

$$a)\ \ A \vee B = B \vee A; \quad b)\ \ A \wedge B = B \wedge A$$

3.7 Soluciones cuaderno de ejercicios

Solución 1.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -15 & -20 & 5 \\ 6 & 8 & -2 \end{pmatrix}$$

Solución 2.

Tuna matriz es no invertible si su determinante es igual a cero. Por tanto, como $|A| = 0$ para cualquier valor de $\alpha \in \mathbb{R}$, la matriz A no es invertible para todo valor de $\alpha \in \mathbb{R}$

Solución 3.

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 11 \\ 2 & 18 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 9 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

Solución 4.

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \ b) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \ c) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución 5.

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \ b) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \ c) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución 6.

$$a)\ A \vee B = (a_{ij} \vee b_{ij}) = (b_{ij} \vee a_{ij}) = B \vee A$$

$$b)\ A \wedge B = (a_{ij} \wedge b_{ij}) = (b_{ij} \wedge a_{ij}) = B \wedge A$$

3.8 A fondo

Vectores y matrices

En este curso de Ricardo Ruiz Rodríguez se explica cómo la herramienta Octave permite operar con matrices..

Accede al documento desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:

http://www.utm.mx/~rruiz/cursos/Octave/VyM.pdf¡

Curso Matlab: Introduccion

La alternativa comercial a Octave es MatLab. En este curso se describe la herramienta MatLab y su operativa mediante operaciones con matrices.

Accede al vídeo desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:

http://www.youtube.com/watch?v=w3M6Pu6tcic

Introduction to Matrix Analysis

Bellman, R. (1960). *Introduction to Matrix Analysis*. New York: McGraw Hill.

Considerado durante mucho tiempo como un clásico en su género, este fue el primer libro en inglés para incluir tres campos básicos del análisis de matrices, matrices simétricas y formas cuadráticas, matrices y ecuaciones diferenciales, y las matrices positivas y su uso en la teoría de probabilidades y matemáticas economía. Escrito en términos lúcidos y concisos, este volumen abarca todos los aspectos clave de la matriz de análisis y presenta una gran variedad de métodos fundamentales.

Publicado originalmente en 1960, este libro se sustituye la primera edición publicada previamente por SIAM en la serie Classics. Aquí encontrarás una guía básica para las operaciones con matrices y la teoría de matrices simétricas, además de la comprensión de las matrices cuadradas generales, orígenes de matrices de Markov y matrices no negativas, en general, la caracterización, la mínima-máxima de raíces características, productos de Kronecker, funciones de matrices, y mucho más. Estas ideas y métodos servirán como herramientas analíticas.

Accede al libro desde el aula virtual o a través de la biblioteca de la Universidad:

http://unir.summon.serialssolutions.com /

Recursos externos

MatLab

MatLab es una herramienta muy utilizada para el cálculo de operaciones con matrices. En esta herramienta las variables son matrices y el lenguaje proporciona ayuda para las operaciones básicas con matrices. Además proporciona multitud de funciones para operar con estas matrices. MatLab es de pago pero puedes utilizar la versión de prueba.

http://www.mathworks.es/programs/nrd/matlab-trial-request.html?region=es&s_eid=ppc_1817
Manual: http://www.mathworks.es/academia/student_center/tutorials/

Octave

Octave es la alternativa GNU a la herramienta comercial MatLab. Octave actualmente no implementa tantas librerías como MatLab, pero puede ser suficiente si no buscamos realizar operaciones complicadas.

http://www.gnu.org/software/octave/
Manual: http://en.wikibooks.org/wiki/Octave_Programming_Tutorial

3.9 Test

Test

1. Las matrices se suelen indexar:

A. Primero fila y luego columna.

B. Primero columna y luego fila.

C. No está definido.

D. En inglés al revés que en español.

2. Para que dos matrices se puedan sumar:

A. Deben tener el mismo tamaño.

B. El número de filas de la primera debe de ser igual al número de columnas de la segunda.

C. El número de columnas de la primera debe de ser igual al número de filas de la segunda.

D. El número de columnas de la primera debe de ser igual al número de columnas de la segunda.

3. Para que dos matrices se puedan multiplicar:

A. Deben tener el mismo tamaño.

B. El número de filas de la primera debe de ser igual al número de columnas de la segunda.

C. El número de columnas de la primera debe de ser igual al número de filas de la segunda.

D. El número de columnas de la primera debe de ser igual al número de columnas de la segunda.

4. La matriz transpuesta es:

A. Una matriz ***A*** donde $a_{ij}=a_{ji}$.

B. Una matriz ***A*** donde $a_{ij}=-a_{ji}$

C. Una matriz ***A*** donde $\boldsymbol{AA}^{-1}=\boldsymbol{I}$

D. Una matriz ***A*** donde $\boldsymbol{AI} =\boldsymbol{A}^{-1}$.

5. ¿ La matriz inversa representa:

A. Una matriz ***A*** donde $a_{ij}=a_{ji}$.

B. Una matriz ***A*** donde $a_{ij}=-a_{ji}$

C. Una matriz ***A*** donde $\boldsymbol{AA}^{-1}=\boldsymbol{I}$

D. Una matriz ***A*** donde $\boldsymbol{AI} =\boldsymbol{A}^{-1}$.

6. El determinante representa:

A. El valor más importante de la matriz.

B. El valor menos importante de la matriz.

C. Cuando es cero significa que la matriz es invertible.

D. Cuando es cero significa que la matriz no es invertible.

7. La operación *meet* se relaciona con:

A. La unión.

B. La intersección.

C. La resta.

D. El producto de matrices.

8. Una matriz simétrica:

A. Tiene todos sus elementos son 1.

B. Tiene todos los elementos de su diagonal principal son 1.

C. Es cuadrada.

D. Tiene inverso.

9. La matriz identidad es:

A. Una matriz con todos sus elementos iguales a 1.

B. Una matriz con los elementos de su diagonal principal iguales a 1. (

C. La transpuesta de la matriz.

D. La inversa de la matriz.

10. La operación *join* se relaciona con:

A. La unión.

B. La intersección.

C. La resta.

D. El producto de matrices.