Instituto Politecnico Nacional

Escuela Superior de Fisica y Matematicas

Métodos Númericos

Formulario

Autor:
Ana Fernanda Jimenez Henestroza

1 TEOREMAS Y DEFINICIONES

- **Definición:**
  Sea f una función definida en el conjunto X de números reakes. Entonces f tendra por limite L en x_0, $\lim_{x \to x_0}(f(x)) = L$, si dado cualquier $\epsilon > 0$ existe otro numero real $\delta > 0$ talque $|f(x) - L| < \epsilon$ que siempre que $x \in X$ y $0 < |x - x_0| < \delta$.

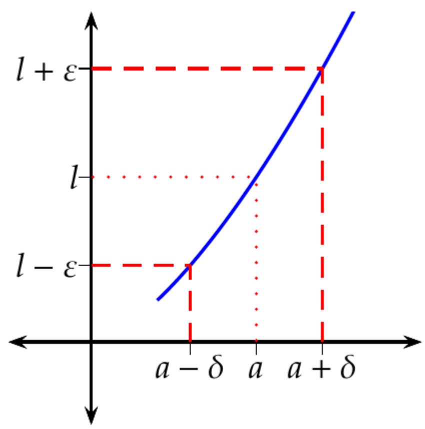

Figure 1: Grafica de definicion de limite

- **Definición:**
  Sea $f : x \to R$ es continua en x_0 si $\lim_{x \to 0}(f(x)) = f(x_o)$, f es continua en x si lo es en cada $x \in X$.

- **Definición:**
  Sea $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales.La sucesión converge a un número x (el limite) si $\forall \epsilon > 0$ existe $N(\epsilon)$ talque $n > N(\epsilon)$ implica $|X_n - X| < \epsilon$.

- **Teorema:**
  Sea $f : x \to R$ y $X_0 \in X$. Los siguientes enunciados son equivalentes:

  1. f es continua en x_o.
  2. Si $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en X y converge x_o entonces $\lim h \to \infty(f(x)) = f(x_0)$

- **Definición:**
Si f es una función definida en un intervalo abierto que contiene a X_0, entonces f sera diferenciable en x_0 si:
$$f'(x) = \lim_{x\to 0}(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}) \text{ existe.}$$

- **Teorema:**
Si f es diferenciable en x_0, entonces f es continua en x_0

- **Teorema de Rolle:**
Supongamos que $f \in C[a,b]$ (continuas en C) y que es diferenciable en (a,b).
Si $f(a) = f(b) = 0$ entonces existirá un número C en $[a,b]$ con $f'(c) = 0$ (asegura que hay un punto critico)

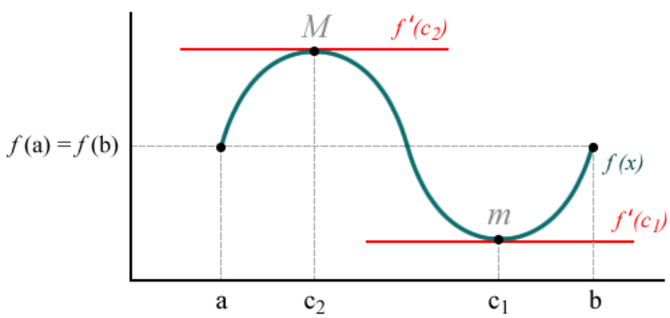

Figure 2: Grafica de definicion de Teorema de Rolle

- **Teorema del valor medio:**
Si $f \in C[a,b]$ y f es diferenciabñe en (a,b) entonces existira un número C en (a,b) talque $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

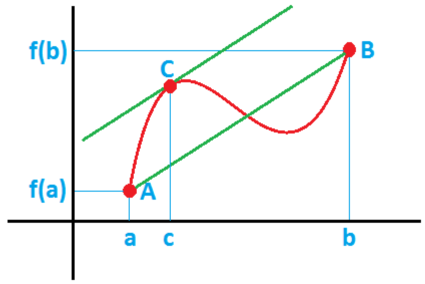

Figure 3: Grafica de definicion de Valor Medio

- **Teorema del valor extremo:**
  S i $f \in [a, b]$ entonces exitira $C_1, C_2 \in [a, b]$ con $f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2)$ para cada $x \in [a, b]$. Si además f es diferenciable en (a, b), los números c_1 y C_2 estarán ya sea en los extremos de $[a, b]$ o donde f' sea 0.

- **Teorema generalizado de Rolle:**
  Supongamos que $f \in C[a, b]$ es n-veces diferenciable en (a, b). Si $f(x)$ es cero en $n + 1$ puntos distintos $x_0, \ldots, x_n$ en $[a, b]$ entonces existirá un número C en (a, b) con $f^{(n)}(c) = 0$.

- **Teorema de valor intermedio:**
  Si $f \in C[a, b]$ y k es un valor (numero) cualquiera entre $f(a)$ y $f(b)$ existirá un número C en (a, b) para el cual $f(c) = k$.

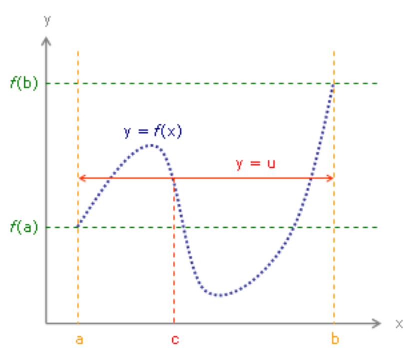

Figure 4: Grafica de definicion de Valor Intermedio

- **Teorema de Taylor:**
  Supongamos que $f \in C^n[a, b]$, que $f(n + 1)$ exite $[a, b]$ y que $x_0 \in [a, b]$,

$\forall x \in [a,b]$ habra un numero $\xi(x)$ entre x_0 y x talque:

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

donde

$P_n(X) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n =$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}}{k!}(x_0)(x - x_0)^k \text{ y } R_n = \frac{f^{(n+1)}}{(n+1)!}(\xi(x))(x - x_0)^{n+1}$$

- **Definición:**
  La integral de Rienmann de la función f en el intervalo $[a,b]$ es $\int_a^b f(x)\,dx =$
  $$\lim_{max \triangle x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(z_i) \triangle x_i$$
  donde $0 \leq x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n$
  $$\triangle x_i = x_i - x_{i-1} \text{ y } z_i \in [x_{i-1}, x_i], \text{ para } i = 1, 2, \ldots n$$
  Si los x_i están igualmente espaciados $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$

- **Teorema del valor medio ponderado para integrales:**
  Si $f \in C[a,b]$, la integral de g existe en $[a,b]$ y $g(x)$ no cambia de signo en $[a,b]$ entonces existira $c \in (a,b)$ con $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx$ si
  $$g(x) = 1 \rightarrow f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

2 TIPOS DE ERRORES

Sea X_a el valor aproximado de x_T, entonces se define:

1. **Error Absoluto:**
   $e_a = |x_T - x_a|$

2. **Error Relativo:**
   $e_r = |\frac{x_T - x_a}{x_T}|$

3. **Error Porcentual:**
   $e_r = |\frac{x_T - x_a}{x_T}| \cdot 100\%$

3 CLASIFICACIÓN DE LOS ERRORES

Los errores pueden clasificarse, de acuerdo a su origen, en los siguientes tipos:

1. **Errores inherentes:** propios de los datos, se producen al leer instrumentos, por imprecisión de instrumentos o errores humanos.

2. **Errores por truncamiento:** ocurren al aproximar funciones analiticas por medio de algunos terminos de una serie infinita.

3. **Errores por redondeo:** por redondear a determinado número de cifras

4 MÉTODO DE LA BISECCIÓN

- Suponga que f es una función continua definida dentro del intervalo $[a, b]$con $f(a)$ y $f(b)$ de signos opuestos. El teorema del valor intermedio implica que existe un número p en (a, b) con $f(p) = 0$. A pesar de que el procedimiento operará cuando haya más de una raíz en el intervalo (a, b), para simplicidad, nosotros asumimos que la raíz en en el intervalo es única.
  El método realiza repetidamente una reduccion a la mitad (o bisección) de los subintervalos de $[a, b]$ y, en cada paso, localizar la mitad que contiene p.

  Para comenzar , sea $a_1 = a$ y $b_1 = b$ y sea p_1 es el punto medio de $[a, b]$, es decir,

  $$p_1 = a_1 + \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{a_1 + b_1}{2}$$

  - Si $f(p_1) = 0$, entonces $p = p_1$ y terminamos.
  - Si $f(p_1) \neq 0$, entonces $f(p_1)$ tiene el mismo signo que ya sea $f(a_1) o f(b_1)$
    1. Si $f(p_1) y f(a_1)$ tienen el mismo signo, $p \in (p_1, b_1)$. Sea $a_2 = p_1 y b_2 = b_1$.
    2. Si $f(p_1) y f(a_1)$ tienen signos opuestos, $p \in (a_1, p_1)$. Sea $a_2 = a_1 y b_2 = p_1$.

  Entonces, volvemos a aplicar el proceso al intervalo $[a_2, b_2]$.

- **Teorema:**
  Suponga que $f \in C[a, b]$ y $f(a).f(b) < 0$. El método de bisección genera una secesión $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ que se aproxima de cero p con f con

  $$|p_n - p| \leq \frac{b-a}{2^n}, \text{ cuando } n \geq 1$$

5 ITERACIÓN DE PUNTO FIJO

Un punto fijo para una función es un número en el que el valor de la función no cambia cuando se aplica la función.

- **Definición:**
  El número p es un punto fijo para una función dada g si $g(p) = p$.

- **Teorema:**

  1. Si $g \in C[a, b]$ y $g(x) \in [a.b]$, entonces g tiene por lo menos un punto fijo en $[a, b]$

  2. Si, además, $g'(x)$ existe en (a, b) y hay una constante positiva $k < 1$ con
  $$|g'(x) \leq k| \text{ para todas las } x \in (a, b),$$
  entonces, existe exactamente un punto fijo en $[a, b]$

- **Punto fijo o Iteración funcional:**
  Para aproximar el punto fijo de una función g, eleginos una aproximación inicial p_0 y generamos la sucesión $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ al permitir $p_n = g(P_{n-1})$, para cada $n \geq 1$. Si la sucesión converge a p y g es continua entonces
  $$P = \lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty} g(P_{n-1}) = g(\lim_{n\to\infty} P_{n-1}) = g(p)$$

- **Teorema del punto fijo:**
  Sean $g \in C[a, b]$ tal que $g(x) \in [a, b]$ para todas las x en $[a, b]$. Suponga, además, que existe $g' \in (a, b)$ y que existe una constante $0 < k < 1$ con $|g'(x) \leq k|$ para todas las $x \in (a, b)$.
  Entonces, para cualquier número p_0 en $[a, b]$, la sucesión definida por
  $$P_n = g(P_{n-1}),\ n \geq 1$$
  converge al único punto fijo p en $[a, b]$.

- **Colorario:**
  Si g satisface las hipótesis del teorema anterios, entoncces las cotas del error relacionado con el uso de p_n, para aproximar p, están dadas por
  $$|p_n - p| \leq k^n \text{ máx } \{p_0 - a, b - p_0\}$$
  y
  $$|p_n - p| \leq \frac{k^n}{1-k}|p_1 - p_0|, \text{ para toda } n \geq 1$$