

<b>Εφαρμοσμένα Μαθηματικά (CS152), Εργασ. Άσκηση 2,</b>
Παράδοση αναφορών/απαντήσεων Παρασ. 22 Δεκεμβ 2023, Ώρα 13.00

Σημειώσεις,

- Θα υπάρξουν 2 ή 3 εργαστηριακές ασκήσεις. Κάθε εργαστηριακή άσκηση θα βαθμολογείται ξεχωριστά και το άθροισμα των βαθμολογιών των 2ή3 Εργ/ Ασκήσεων, δηλαδή Βαθμ3ΕργΑσκησεων, θα είναι 10.
- Οι αναφορές/απαντήσεις των Εργαστ. ασκήσεων θα είναι γραμμένες σε *Word* ή *Latex*<sup>1</sup>. Η εκτέλεση των υλοποιημένων προγραμμάτων θα εξεταστεί στο Εργασ 6, σε ημερομηνία που θα οριστεί αργότερα.
- Αν Βαθμ3ΕργΑσκησεων  $\geq 5$ , τότε στον βαθμό του γραπτού της εξέτασης Ιανουαρίου/Φεβρουαρίου θα προστεθεί το  $0.50 \cdot \text{Βαθμ3ΕργΑσκησεων}$ .
- Τα παραπάνω θα ισχύουν και για την εξέταση του Σεπτεμβρίου 2023.

## 1 ΠΡΟΒΛΗΜΑ

**ΠΡΟΒΛΗΜΑ** Εύρεση βέλτιστης προσέγγισης μιας συνάρτησης  $f \in C^0[a, b]$  σε δοσμένο χώρο πολυωνύμων  $V_N = \{p_0(x), p_1(x), p_2(x), \dots, p_N(x)\}$ , δες Πίνακα 1.

**Μαθησιακός-εκπαιδευτικός Στόχος,**

- Η υλοποίηση στον υπολογιστή σε γλώσσα *C*, *C++*, *JAVA*, ή *Python*, (*Oxi Matlab*), του αλγορίθμου της  $L^2$  προβολής με σκοπό την εύρεση βέλτιστης προσέγγισης  $\Pi_N f(x) \in V_N$  μιας συνάρτησης  $f \in C^0[a, b]$  στον χώρο πολυωνύμων  $V_N = \{p_0(x), p_1(x), p_2(x), \dots, p_N(x)\}$ .
- Η χρήση κανόνων αριθμητικής ολοκλήρωσης για την επίλυση προβλημάτων βελτιστοποίησης.
- Η χρήση και η κλίση αυτόνομου υποπρογράμματος (δοσμένου) για την επίλυση γραμμικού συστήματος  $AU = F$ .

**Στοιχεία και τρόπος υλοποίησης.** Υλοποιήστε τον αλγόριθμο έτσι ώστε τα δεδομένα,  $a$ ,  $b$ ,  $N$  να δίνονται/διαβάζονται από το πληκτρολόγιο κατά την εκτέλεση, και η συνάρτηση  $f(x)$  να δηλώνεται σαν *external*, δηλαδή να ορίζεται σε ξεχωριστό αρχείο. Για την επίλυση του τελικού συστήματος θα χρειαστεί η εφαρμογή μεθόδου επίλυσης γραμμικού συστήματος, δηλ, *LU* ή *Gauss*, ή άλλη μέθοδος. Ο κώδικας αυτής της μεθόδου θα πρέπει να βρίσκεται σε ξεχωριστό αρχείο, το οποίο θα καλείται κατά την εκτέλεση του κυρίου δικού σας προγράμματος. Αυτός ο κώδικας και το πως θα τον χρησιμοποιήσετε θα μελετηθεί και θα εξηγηθεί στην διάρκεια των εργαστηρ. Μαθημάτων.

**Υποδ.** Πρώτα γράψτε στο χαρτί σας την μορφή της βέλτιστης προσέγγισης  $\Pi_N f(x) \in V_N$ , έπειτα τους μαθηματικούς τύπους που περιγράφουν τα εσωτερικά γινόμενα και τις προβολές (δείτε αντίστοιχο Παράγραφο και Θεώρημα στις σημειώσεις), και τέλος το σύστημα που έχει σαν αγνώστους τους συντελεστές των  $\{p_0(x), p_1(x), p_2(x), \dots, p_N(x)\}$  που υπάρχουν στην μορφή της  $\Pi_N f(x)$ . Θα χρειαστεί να κάνετε χρήση κανόνων αριθμητικής ολοκλήρωσης.

**Εργαστηριακή βοήθεια.** Τις επόμενες Τετάρτες ώρα (ίσως τις συνηθισμένες ώρες) Θα υπάρξουν μια σειρά από εργαστηριακά φροντιστηριακά μαθήματα στο Εργσ 6, όπου θα σας δοθούν εξηγήσεις για την υλοποίηση του αλγορίθμου, την κατασκευή του κώδικα κτλπ. Θα υπάρξει σχετική ανακοίνωση.

<sup>1</sup><http://tug.ctan.org/info/intro-scientific/scidoc.pdf>

τα στοιχεία του $V_N(x)$ για $x \in [a, b] = [-1, 1]$	
N	Αναλυτική μορφή $p_j(x), j = 0, \dots, N = 4$
0	1
1	$x$
2	$\frac{1}{2}(3x^2 - 1)$
3	$\frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$
4	$\frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$

Ταβλε 1: Τα πολυώνυμα για τις διάφορες τιμές του  $N$ 

**ΤΙ ΘΑ ΠΕΡΙΓΡΕΧΕΙ Η ΑΝΑΦΟΡΑ ΣΑΣ.** Στην παραδοτέα αναφορά σας Θα γράψετε, (γραμμένη σε *Word* ή *Latex*<sup>2</sup>).

- 1. αναλυτικά το ανάπτυγμα της βέλτιστης προσέγγισης  $\Pi_N f(x) = \dots$ ,
- 2. τον χαρακτηρισμό της βέλτιστης προσέγγισης, δηλαδή οι μαθηματικές εξισώσεις -εσωτερικά γινόμενα- που ορίζουν την βέλτιστη προσέγγιση (δείτε αντίστοιχο Παράγραφο και Θεώρημα στις σημειώσεις).
- 3. Αναλυτικά την κατασκευή του συστήματος  $AC = F$ , όπου ο πίνακας  $A$  έχει ως στοιχεία τα ανάλογα εσωτερικά γινόμενα  $A_{i,j} = \left(p_j(x), p_i(x)\right) := \int_{-1}^1 p_j(x)p_i(x) dx$ ,  $i, j = 0, \dots, N$ , και  $C$  είναι το διάνυσμα με αγνώστους τους συντελεστές των  $\{p_0(x), p_1(x), p_2(x), \dots, p_N(x)\}$ , που υπάρχουν στο ανάπτυγμα της  $\Pi f(x)$ , και  $F$  τα ανάλογα εσωτερικά γινόμενα  $F_i = \left(f, p_i(x)\right) := \int_{-1}^1 f(x)p_i(x) dx$ .
- 4. Στην αναφορά σας, για κάθε μια από τις δοσμένες τιμές του πλήθους των πολυωνύμων  $N \geq 2$  που εμφανίζονται στον Πίνακα 1, θα γράψετε αναλυτικά τις τιμές των στοιχείων του πίνακα  $A$  και του διανύσματος  $F$ .
- 5. θα συμπληρώσετε τον παρακάτω Πίνακα 2, με τα αποτελέσματα που δίνει ο κώδικάς σας, όταν τον εφαρμόστε για να βρείτε την βέλτιστη προσέγγισης  $\Pi_N f(x) = \dots$  της  $f(x) = x \sin(4\pi x)$  για  $a = -1$ ,  $b = 1$ , και τις δοσμένες τιμές του  $N$ .

	οι τιμές του $C$ , δηλαδή οι τιμές των συντελεστών των $\{p_0(x), p_1(x), p_2(x), \dots, p_N(x)\}$ ,	σφάλμα $:= \left(\int_{-1}^1 (f(x) - \Pi_N f(x))^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$
N=		
2	$c_0 = ?, c_1 = \dots, c_2 = \dots$	...
...	..	...
4	....	...

Ταβλε 2: Οι συντελεστές του αναπτύγματος της  $\Pi_N f(x)$  και το αντίστοιχο σφάλμα.

- 6. Γράψτε κάποια σχόλια σχετικά με τα αποτελέσματα που θα συμπληρώσετε στον Πίνακα 2.

<sup>2</sup><http://tug.ctan.org/info/intro-scientific/scidoc.pdf>